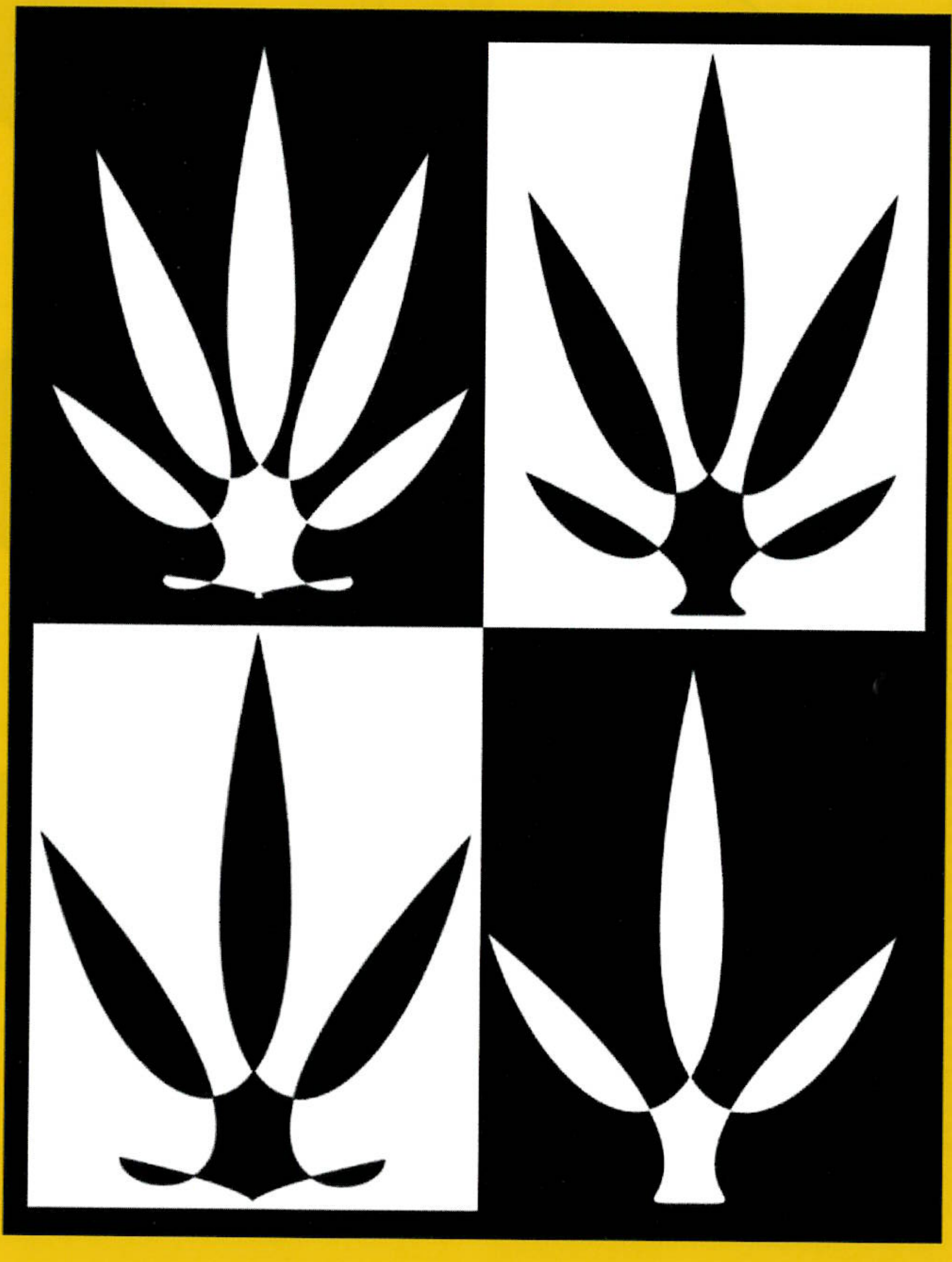
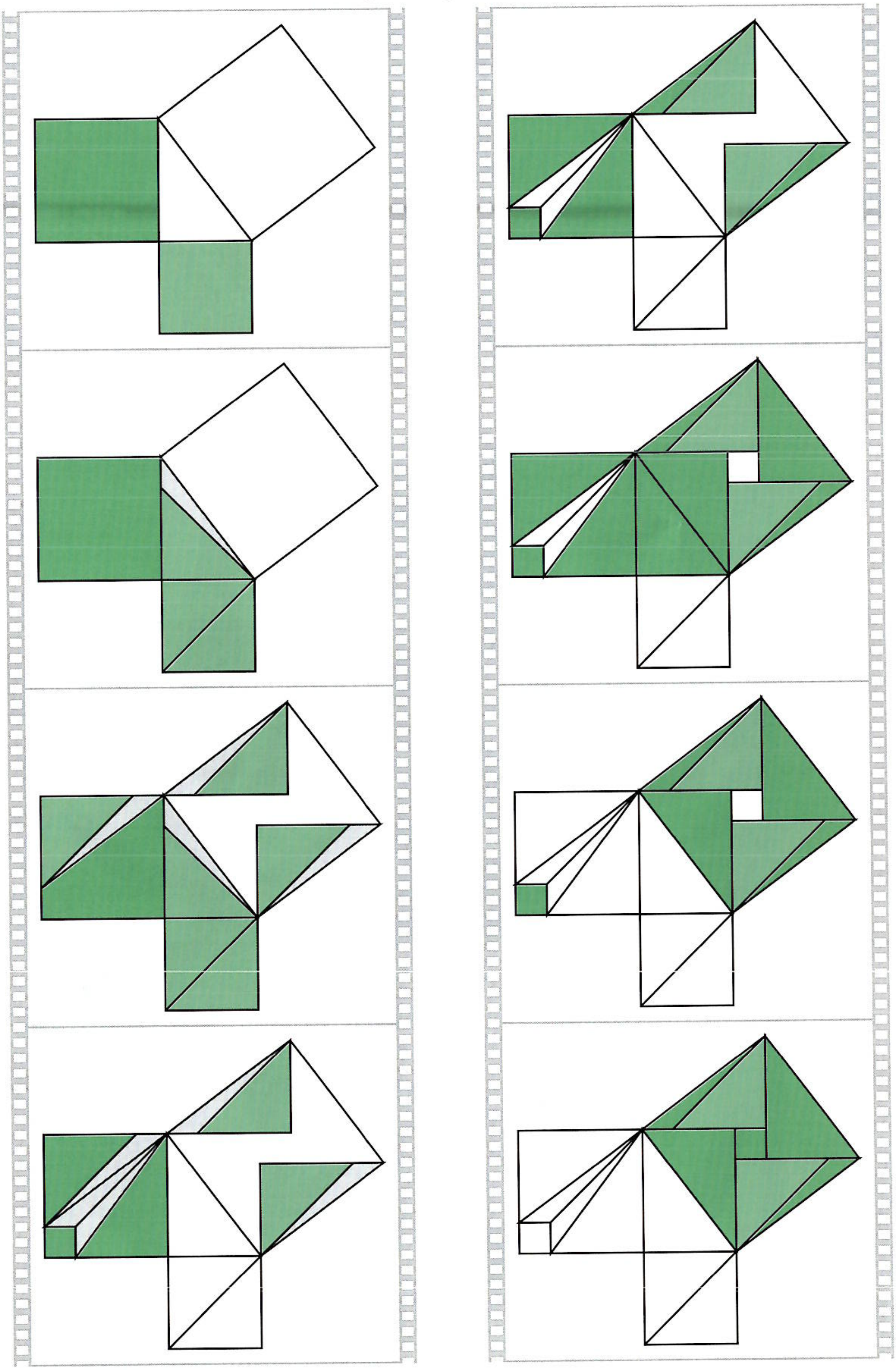
MJ junior!



24^{e}année
Janvier 2003 – n°104 J
Bureau de dépôt : Mons I

Pythagore 1



Explique !

N°104 J — Vingt-quatrième année — 2003

MATH-JEUNES JUNIOR

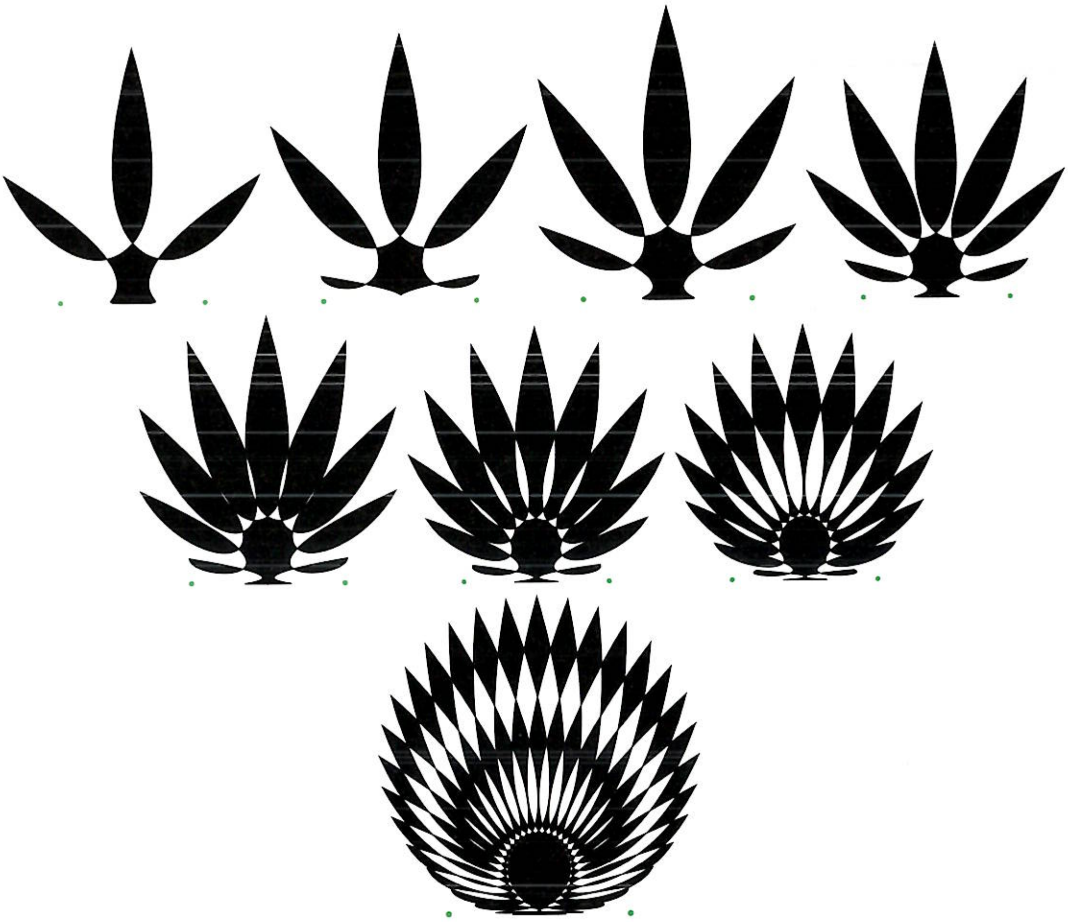
Sommaire

À tous et à toutes, la rédaction et le personnel de *Math-Jeunes Junior* souhaitent une excellente année 2003.

Des fleurs, encore des fleurs !

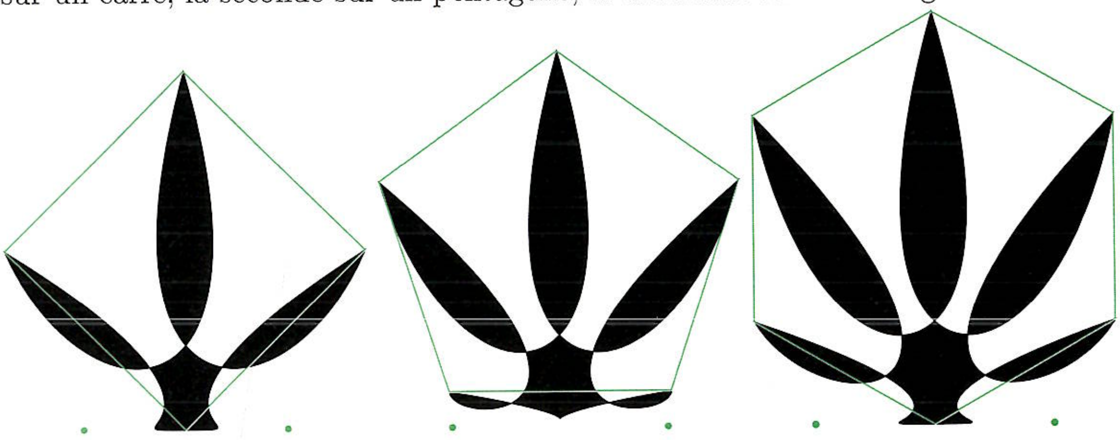
G. Noël

As-tu remarqué la fleur qui figure sur la couverture de ton *Math-Jeunes Junior* ? En voici tout un bouquet !



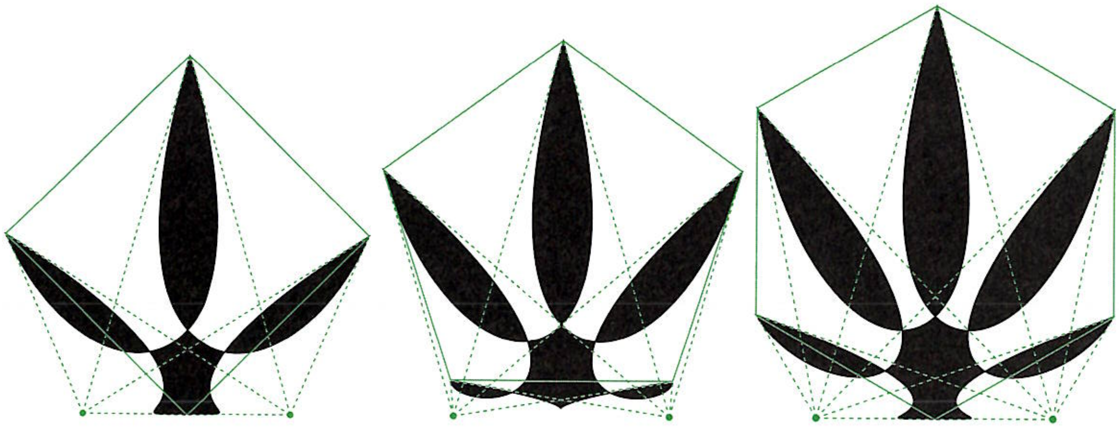
Comment dessiner ces fleurs ? Voici quelques principes à respecter. Ton dessin ne sera pas aussi précis que le nôtre, mais il sera certainement plus original.

1. La figure de base est un polygone régulier. Par exemple la première fleur est construite sur un carré, la seconde sur un pentagone, la troisième sur un hexagone ...

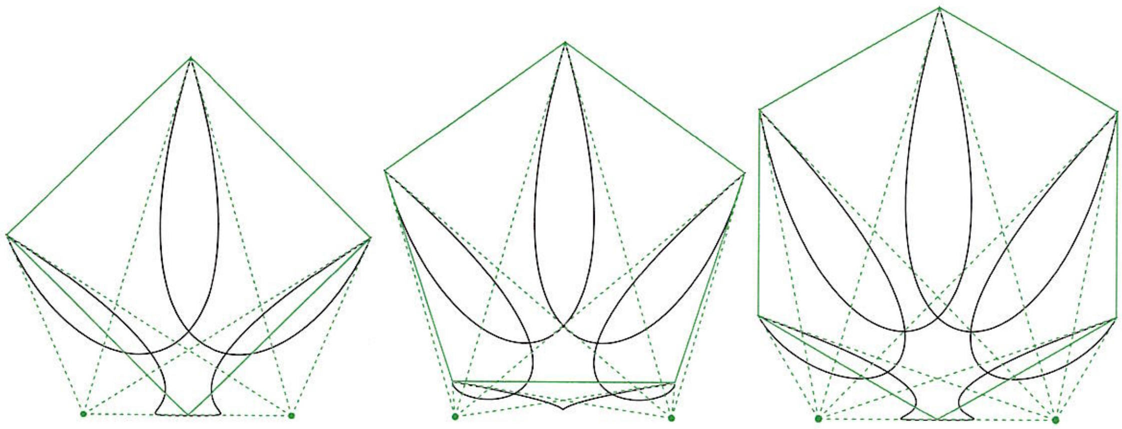


Détermine les polygones réguliers à utiliser pour les autres fleurs !

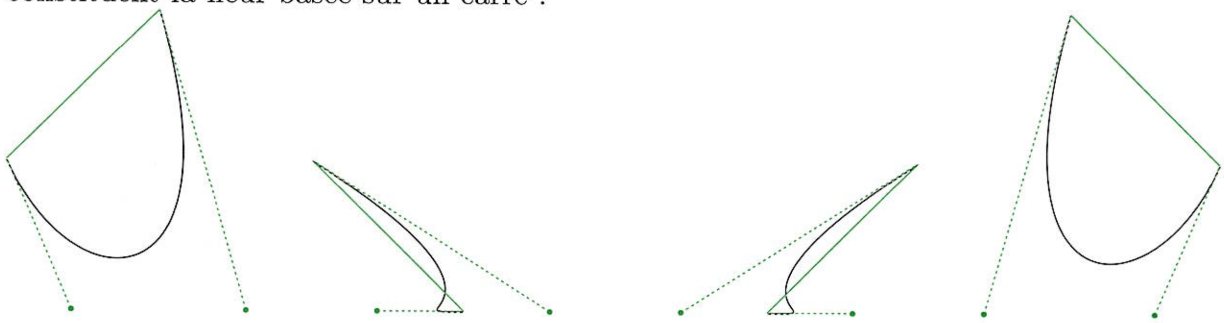
2. As-tu remarqué les deux points verts situés en-dessous de chaque fleur ? Joignons-les aux sommets des polygones réguliers :



3. Concentre ton attention sur les courbes qui limitent les fleurs :



4. Détaillons le tracé d'une fleur, par exemple traçons séparément les quatre courbes qui constituent la fleur basée sur un carré :



Vois comme chaque courbe est tangente à deux des traits pointillés. Procède de cette manière, dessine les courbes à main levée, puis colorie le dessin à ta guise. (Si tu ne sais pas dessiner un pentagone régulier, demande à ton professeur de t'aider !)

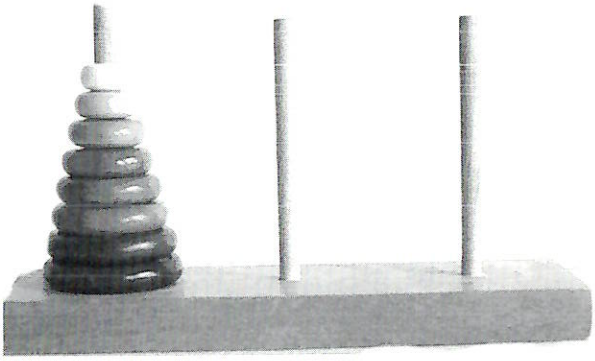
Ensuite, tu peux renouveler tes dessins en modifiant la position des points d'où partent les traits pointillés tangents aux pétales. Vois ce qui change quand on les rapproche l'un de l'autre, ou quand on les écarte. Tu peux aussi les déplacer en hauteur.
Enfin, envoie-nous tes plus beaux dessins. *Happy drawing !*

Les tours de Hanoi

C. Villers

Voici quelques pièces de monnaie actuellement en cours. Un réflexe assez courant consiste à les empiler. Généralement cela se réalise en les plaçant par ordre de taille.

Il existe un jeu fort ancien qui procède de la même idée : celle de réaliser des empilements (on dira des « tours ») dont les éléments (on dira des « étages ») sont superposés selon l'ordre décroissant (de bas en haut) des tailles.



Voici un exemple d'une telle tour. Comme vous pouvez le constater, elle comporte 8 étages.

Vous avez immédiatement compris qu'il est possible de créer des tours ayant un nombre quelconque d'étages de 1 à n (nombre naturel).

Si le jeu en question ne consistait qu'à réaliser un empilement hiérarchisé des étages, cela ne serait pas très intéressant. Vous en conviendrez !

Aussi, ce jeu vous propose un défi un peu plus « consistant » et qui, mine de rien, vous oblige à faire preuve d'attention et d'organisation.

Ce jeu est universellement connu sous le nom de « Tours de Hanoï ». Il se joue seul à l'aide par exemple, comme signalé plus avant, de pièces de monnaies de formats différents.

En quoi consiste-t-il ?
Une tour, composée d'un certain nombre d'étages dont les tailles sont décroissantes, doit être déplacée d'un endroit de départ vers un endroit d'arrivée via un endroit intermédiaire si besoin est.

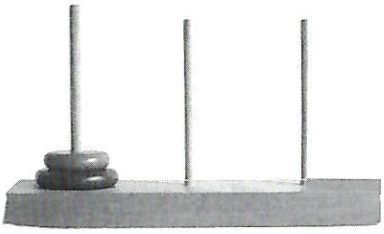
Pour cela, et très logiquement, il n'est permis que de déplacer un étage à la fois et il est interdit de déposer un étage sur un étage qui lui est plus petit.

Quel est le défi ? Réaliser le transfert de la tour en un minimum de mouvements d'étages !

Il est assez évident que si la tour ne comporte qu'un seul élément alors un seul mouvement suffit pour déplacer cet élément du départ à l'arrivée. L'endroit intermédiaire n'est pas utilisé.

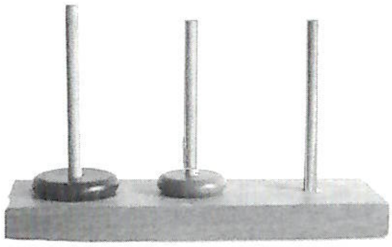
Voici maintenant une suite de mouvements permettant de déplacer une tour de 2 étages.

Math-Jeunes Junior n°104 J, 4–8, 2003



Départ Intermédiaire Arrivée

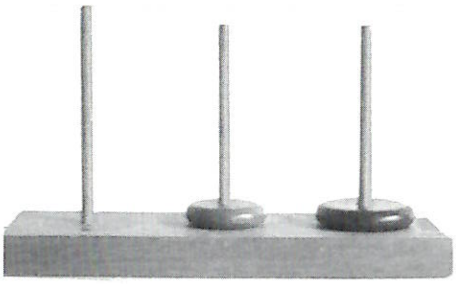
$\longrightarrow$



Départ Intermédiaire Arrivée

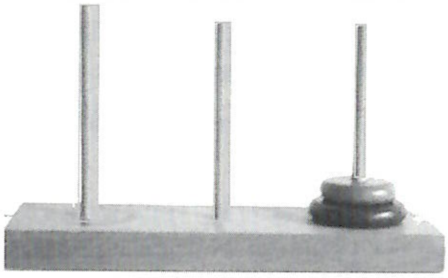
$\longrightarrow$

$\longrightarrow$



Départ Intermédiaire Arrivée

$\longrightarrow$



Départ Intermédiaire Arrivée

Dans le cas illustré ci-avant, il faut effectuer un minimum de trois mouvements. Mais il est aussi évident que l'objectif pouvait être atteint en plus de 3 mouvements. Pour décrire ces mouvements, nous avons utilisé des figures. C'est long et fastidieux alors que la pratique réelle du jeu ne l'est pas. Une autre manière de « raconter » la suite des mouvements consiste en leur codage...

Ainsi, par exemple, on peut traduire la situation de départ pour la tour de deux étages de la façon suivante : (21,0,0) traduit la première illustration. Cela signifie que l'endroit de départ comporte la pièce de largeur 2 surmontée de la pièce de largeur 1 et que les endroits intermédiaire et d'arrivée ne comportent aucune pièce.

Toute l'histoire du déplacement de la tour de deux étages est alors décrite par

$(21,0,0) \rightarrow (2,1,0) \rightarrow (0,1,2) \rightarrow (0,0,21)$

Il était encore plus simple d'écrire $(2,0,0) \rightarrow (1,1,0) \rightarrow (0,1,1) \rightarrow (0,0,2)$ où le déplacement d'un étage est traduit par le « déplacement » d'une unité dans les nombres utilisés.

C'est cette dernière façon d'écrire le déroulement du transfert d'une tour qui sera utilisée dans la suite. Elle est plus facile que l'emploi de dessins mais est certainement moins explicite sur le plan visuel. Je vous signale que si vous avez l'occasion de surfer sur internet, vous trouverez des animations de ce jeu en utilisant un moteur de recherche à qui vous demandez de trouver « tours de Hanoï ».

Je vous invite maintenant à essayer de transférer une tour de 3 étages.

Vous avez réussi ? Voici une solution sous la forme codée. A vous de l'interpréter.

$(3,0,0) \rightarrow (2,0,1) \rightarrow (1,1,1) \rightarrow (1,2,0) \rightarrow (0,2,1) \rightarrow (1,1,1) \rightarrow (1,0,2) \rightarrow (0,0,3)$

Vous constatez que cette fois, il a fallu effectuer 7 déplacements d'étages. Observez également où le plus petit étage est envoyé lors du premier mouvement.

Réalisez le transfert d'une tour de 4 étages en le moins de mouvements possible. Combien de mouvements sont-ils nécessaires ? Où à été placé le plus petit étage lors du premier mouvement ?

Est-il possible de déterminer à l'avance ce nombre minimum de mouvements d'étages qu'il faut effectuer pour réussir ce transfert et de savoir où placer le plus petit étage lors du premier mouvement ? Nous entrons dans un domaine plus mathématique.

Voici donc quelques idées à ce sujet.

Voyons ce qu'il en est sur les premiers exemples traités et essayons d'établir quelques conjectures.

Pour une tour de 1 étage ... il faut, au minimum, 1 mouvement et le plus petit étage est placé à l'arrivée.

Pour une tour de 2 étages ... il faut, au minimum, 3 mouvements et le plus petit étage est placé au lieu intermédiaire.

Pour une tour de 3 étages ... il faut, au minimum, 7 mouvements et le plus petit étage est placé à l'arrivée.

Pour une tour de 4 étages, vous avez trouvé qu'il faut, au minimum 15 mouvements et le plus petit étage est placé au lieu intermédiaire.

Pour une tour de 5 étages,...

En résumé :

Nombre d'étages	Nombre minimum de mouvements	Plus petit étage posé d'abord en
1	1	arrivée
2	3	intermédiaire
3	7	arrivée
4	15	intermédiaire
5	31	arrivée
...	...	

Pensez-vous avoir trouvé des lois ?

La plus simple à proposer concerne clairement l'endroit où déposer le plus petit étage au début du jeu. Il semble que

- Si le nombre d'étages est impair alors on commence par placer le plus petit étage au lieu d'arrivée.
- Si le nombre d'étages est pair alors on commence par placer le plus petit étage au lieu intermédiaire.

Cette particularité de la stratégie est simple à justifier.

En effet, on a intérêt à ce que l'étage de base soit mis à l'arrivée dès que possible.
- Si la tour ne compte qu'un étage, celui-ci va directement à l'arrivée.
- Si la tour compte 2 étages, le plus petit étage va au point intermédiaire pour laisser l'arrivée libre pour l'étage de base.
- Pour déplacer une tour de 3 étages, il suffit de déplacer la tour constituée par les 2 étages supérieurs du départ au point intermédiaire avant de placer l'étage de base à l'arrivée. Pour cette tour provisoire de 2 étages, c'est donc le point d'arrivée qui joue le rôle de point intermédiaire. C'est donc là que doit être placé le plus petit étage.

Et voilà l'idée importante qui vient au jour !

Pour transférer une tour de 4 étages de D(épart) en A(rrivée) on va commencer par transférer la tour des 3 étages supérieurs de D vers I(ntermédiaire) pour pouvoir placer l'étage de base en A.

Mais pour transférer la tour de 3 étages de D vers I, il faut d'abord transférer la tour formée par les 2 étages supérieurs de D vers A pour pouvoir placer le deuxième étage en I.

Mais pour transférer la tour formée des deux étages supérieurs de D vers A, il faut placer le plus petit étage en I. (Ouf ! ! !)

De même pour faire passer 5 étages de D vers A on fait passer 4 étages de D vers I donc on fait passer 3 étages de D vers A donc on fait passer 2 étages de D vers I donc on fait passer le plus petit étage de D vers A. (re-ouf ! !)

Avez-vous trouvé une loi qui permet de connaître le nombre minimum de mouvements d'étages ?
Si non, observez bien la suite des nombres du tableau : 1,3,7,15,31, ...
Il semble que chacun vaut le double du précédent, augmenté d'une unité.
en effet : $3 = 1 \times 2 + 1$,$7 = 3 \times 2 + 1$, $15 = 7 \times 2 + 1$, $31 = 15 \times 2 + 1$,...

Est-ce valable pour la suite du nombre d'étages ? Il faut le justifier.

Voici une démonstration.
Supposons que le nombre minimum de mouvements nécessaires au déplacement d'une tour de n étages soit k. Regardons de plus près comment nous pouvons alors déplacer une tour de $n+1$ étages.

On déplace d'abord les n étages supérieurs, de D en I, donc en k mouvements comme supposé ci-avant.

On déplace alors l'étage de base, de D en A, en 1 mouvement.

Il reste à déplacer les n étages supérieurs, de I en A, donc en k mouvements comme dit plus haut.

Au total, on aura donc effectué $k + 1 + k$ mouvements soit effectivement $2k + 1$ mouvements.

$2k + 1$ s'obtient bien en doublant k puis en ajoutant 1 au produit.

Cette formule a un inconvénient majeur. Elle ne donne pas directement le nombre k minimum de mouvements à effectuer pour déplacer une tour de n étages.

Elle nécessite la connaissance du nombre de mouvements relatifs à la tour précédente de $n - 1$ étages. C'est ce qu'on appelle une formule récurrente.

Il existe une formule donnant directement le nombre de mouvements en fonction du nombre d'étages. Peut-être l'avez-vous « devinée » à l'examen du tableau.

Il apparaît que :

$$\begin{aligned} n = 1 &\rightarrow k = 1 = 2^1 - 1 \\ n = 2 &\rightarrow k = 3 = 2^2 - 1 \\ n = 3 &\rightarrow k = 7 = 2^3 - 1 \\ n = 4 &\rightarrow k = 15 = 2^4 - 1 \end{aligned}$$

et pour une tour de n étages, il faut un minimum de $2^n - 1$ mouvements d'étages.

Sachez que cette « formule » est correcte.

NB : si k est le nombre minimum de mouvements d'étages pour une tour de n étages alors $k = 2^n - 1$. Le nombre minimum de mouvements d'étages pour une tour de $n+1$ étages est alors :

$$2^{n+1} - 1 = 2 \times 2^n - 1 = 2 \times 2^n - 2 + 1 = 2 \times (2^n - 1) + 1 = 2k + 1$$

On retrouve la formule rencontrée précédemment.

. . . .

Solutions des Jeux 6 et 7

6. Produit de premiers.

$d = 19$, $e = 2$, $h = 31$, $i = 11$, ($a = 7$ et $b = 13$) OU ($a = 13$ et $b = 7$),
($c = 5$ et $g = 23$) OU ($c = 23$ et $g = 5$),
($f = 17$ et $j = 37$) OU ($f = 37$ et $j = 17$),
($k = 3$ et $l = 29$) OU ($k = 29$ et $l = 3$).

7. Bonhomme-opérateurs.

Le nombre 200 n'a aucune importance.

Désignons par N l'opérateur noir et par V l'opérateur vert

1. Dans le cas des opérateurs additifs, appliquer neuf fois N et huit fois V doit avoir comme résultat d'ajouter 0. Nous pouvons choisir par exemple

- pour N : ajouter 8 et pour V : soustraire 9 (ajouter -9).
- pour N : ajouter 16 et pour V : soustraire 18.
- plus généralement, pour N : ajouter $8 \times k$ et pour V : ajouter $9 \times (-k)$ en prenant n'importe quelle valeur pour k.

Avec un abus de notation, nous prenons n'importe quelle solution de l'équation à deux inconnues $9N + 8V = 0$.

2. Dans le cas des opérateurs multiplicatifs, appliquer neuf fois N et huit fois V doit avor comme résultat de multiplier par 1. Avec un abus de notation analogue au précédent, nous devons résoudre

$$N^9 \times V^8 = 1$$

Une solution consiste à prendre $(\times 2^8)$ pour l'opérateur N et $(\times 2^{-9})$ pour V. D'une manière plus générale,

$(\times k^8)$ pour N et $(\times k^{-9})$ pour V

OU

$(\times k^{-8})$ pour N et $(\times k^9)$ pour V.

Jeux

Y. Noël-Roch

1. Vrai – faux ?

Voici dix propositions. Chacune est soit vraie, soit fausse.

Indique à quelle famille appartient chaque proposition et justifie ton classement.

1. Le produit de deux nombres naturels consécutifs est toujours pair.
2. Le produit de trois nombres naturels consécutifs est toujours impair.
3. La somme de deux nombres entiers consécutifs est toujours paire.
4. Il existe un entier naturel n tel que $n \times (n+1)$ est pair.
5. Il existe un entier n tel que $n \times (n+1)$ est impair.
6. Si $a = n + k$, $b = n + 2k$ et $c = n + 3k$,
   alors quels que soient les nombres entiers n et k, $b = \frac{a+c}{2}$ et $a < b < c$.
7. La somme de deux entiers pairs est nécessairement paire.
8. Pour qu'une somme soit impaire, il faut que tous les termes de cette somme soient impairs.
9. De deux nombres a et b, on sait que $a < b$. On peut en déduire que $a^2 < b^2$.
10. Quel que soit le naturel n, les nombres $n - 1$ et $n + 1$ ont la même parité.

2. Des multiplications qui bégaient

Dans les égalités données ci-dessous, chaque lettre cache un chiffre.

UN × BAB=UNUN

DEU × BAAB=DEUDEU

TROI × BAAAB=TROITROI

QUATR × BAAAAB = QUATRQUATR

Ces égalités permettent de trouver le chiffre caché par certaines lettres. Lesquelles ?

Peut-on en déduire que BA × BAB = BABA, BABA × BAAAB = BABABABA ?

Par quoi faut-il multiplier BLA pour obtenir

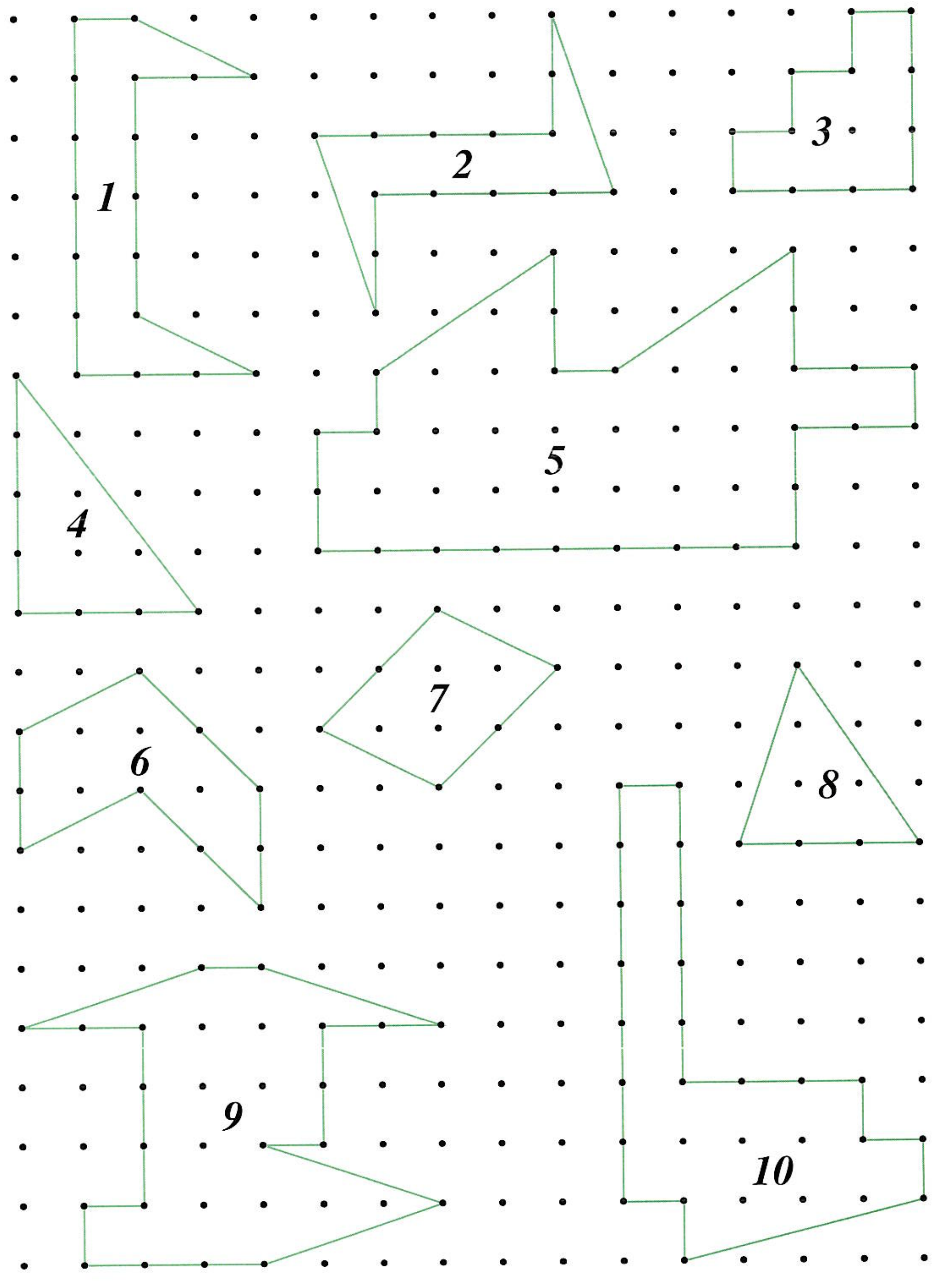
BLABLA ?

Et par quoi multiplier BARATIN pour obtenir

BARATINBARATIN ?

Comment formuler le phénomène rencontré ?

3. Coupons en deux



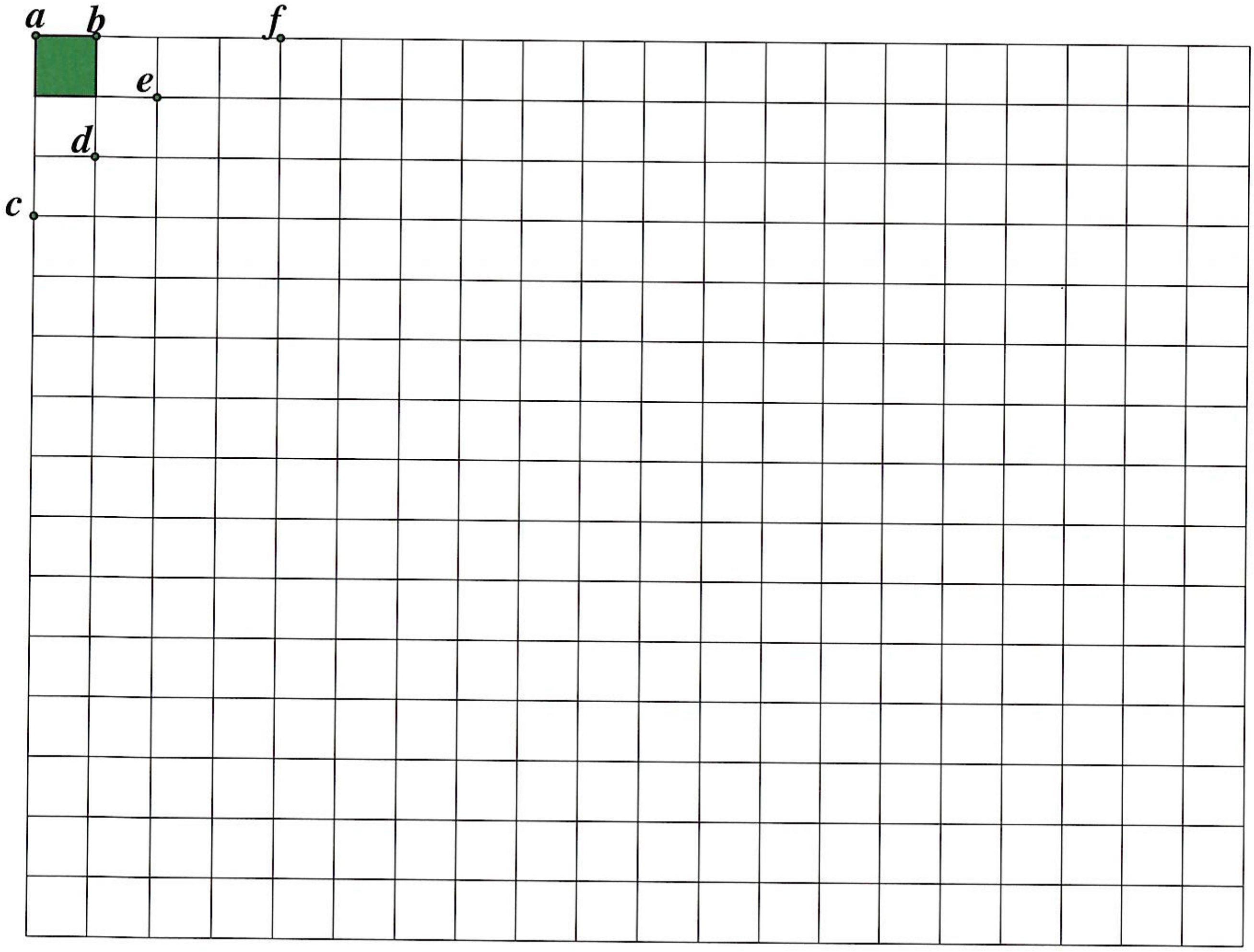
Pour chacune des dix figures, trace un segment qui la coupe en deux parties de même aire.

Dans chacun des cas, les deux morceaux obtenus sont-ils superposables (directement ou après avoir retourné un des morceaux) ?

Si ce n'est pas le cas, peux-tu trouver un autre découpage pour obtenir deux morceaux superposables ?

4. Des carrés dans un quadrillage.

Sur le côté $[ab]$, nous avons construit un carré d'aire 1.



Construis, sur $[cd]$ un carré d'aire 2.

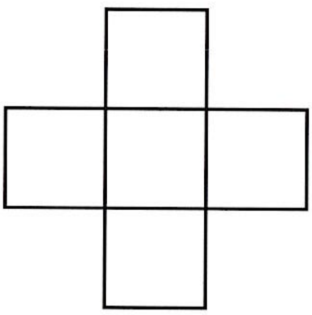
Tu constates que les deux carrés dessinés ont leurs quatre sommets en des points du quadrillage.

En utilisant les sommets e et f, dessine un carré. Quelle est son aire ?

En joignant uniquement des points du quadrillage, peux-tu construire des carrés ayant comme aires tous les nombres de 1 à 20 (1) ?

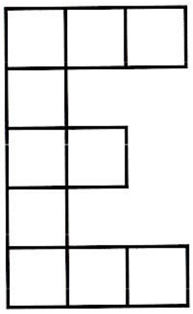
5. Coupons et collons

5.1. Découpe cette croix de quelques coups de ciseaux rectilignes de manière à obtenir des pièces que tu peux assembler en un carré.

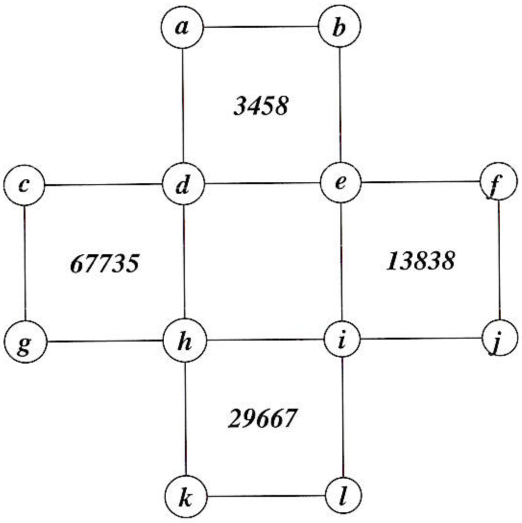


(1) Tu peux télécharger des feuilles de papier quadrillé à l'adresse `www.sbpm.be/mp/mp139.htm`

5.2. Quelques coups de ciseaux permettent d'obtenir un carré à partir de la lettre E.

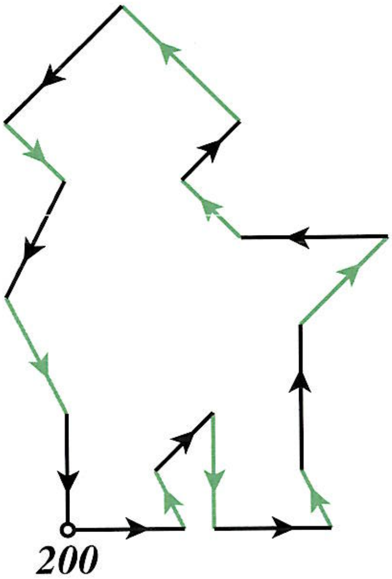


6. Produit de premiers.



Les douze premiers nombres premiers ont été placés en a, b, ... k, l. Dans chaque carré extérieur est donné le produit des quatre sommets. Retrouver la valeur de chaque lettre et la valeur du carré central.

7. Bonhomme-opérateurs.



Le bonhomme doit être parcouru dans le sens des flèches. Toutes les flèches noires désignent le même opérateur additif, toutes les flèches vertes désignent un second opérateur additif. Que peuvent être ces opérateurs ? Recherche trois solutions (il en existe une infinité).
Reprends le même problème avec deux opérateurs multiplicatifs.

Solutions des jeux 1 à 5 : pages 30 à 32, et des jeux 6 et 7 : page 8

Jolies égalités

A. Paternottre

$$\boxed{\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\cdots}}}} = 1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cdots}}} = \Phi \text{ (nombre d'or)}}$$

Observe d'abord chacune des deux expressions encadrées ci-dessus. L'une et l'autre représentent un nombre strictement positif. En es-tu persuadé ? Si oui, utilise ta calculette ou ton PC pour découvrir une valeur approchée de chacune d'elles. Après un certain nombre d'opérations identiques (on dit aussi « itérations »), tu remarqueras que chaque expression s'approche très fort de la valeur 1,62. C'est une première et assez bonne approximation du « *nombre d'or* ». Tentons à présent d'obtenir sa valeur exacte.

Posons :

$$x = \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\cdots}}}$$

$$\Downarrow$$

$$x = \sqrt{1+x}$$

$$\Downarrow$$

$$x^2 = 1+x$$

$$\Downarrow$$

$$x^2 - x - 1 = 0 \qquad (1)$$

Posons :

$$y = 1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cdots}}$$

$$\Downarrow$$

$$y = 1+\frac{1}{y}$$

$$\Downarrow$$

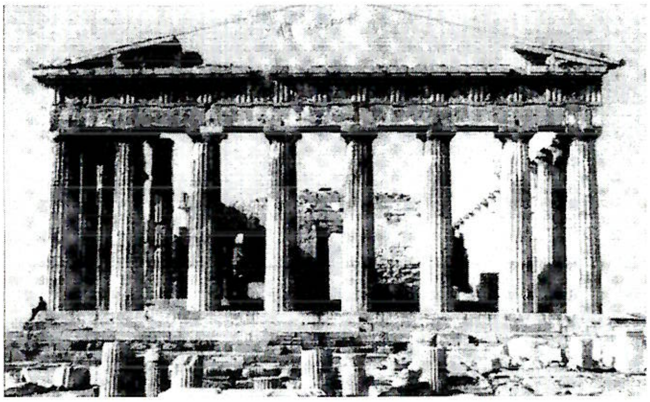
$$y = \frac{y+1}{y}$$

$$\Downarrow$$

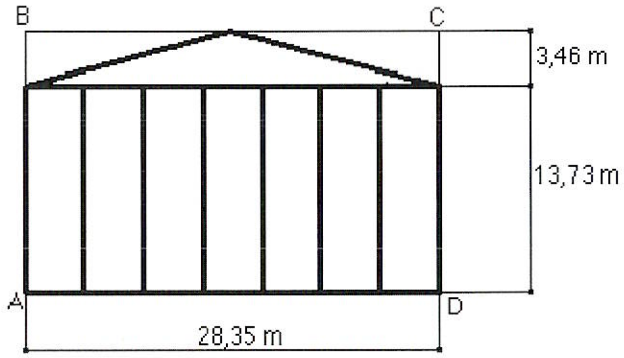
$$y^2 - y - 1 = 0 \qquad (2)$$

Aux notations (x et y) près, les équations (1) et (2) sont exactement les mêmes. Elles ont donc les mêmes solutions. En quatrième année, tu apprendras à résoudre une équation du second degré. Il te sera alors possible d'affirmer que l'équation (1) ou (2) possède deux solutions de signes contraires. Puisque x et y doivent être positifs, c'est donc la solution positive qui nous intéresse dans le cas présent. Celle-ci s'écrit : $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Ce nombre dont une valeur approchée par défaut est 1,618, est célèbre depuis l'Antiquité. On l'a appelé : « **nombre d'or** » et noté Φ (phi) en l'honneur de **Phidias**, (5^e siècle avant J-C). Phidias était un sculpteur grec renommé. Il fut chargé par Périclès de diriger la construction du célèbre Parthénon sur l'Acropole d'Athènes. Il y réalisa la décoration sculptée dont la célèbre frise extérieure toujours visible aujourd'hui ainsi que la frise de la Cella (ou Naos), partie intérieure du temple aujourd'hui disparue. C'est là que s'érigeait la statue en or et ivoire, haute de 12m, dédiée à la déesse Athena Parthenos. Chef-d'oeuvre d'architecture de l'ordre dorique, le Parthénon confine à la perfection. Sa construction date des années 447 à 438 avant J-C. C'était alors « l'Age d'Or » de l'Antiquité grecque. Phidias et ses collaborateurs, les architectes Ictinos et Callicrates ainsi que le philosophe Anaxagore y ont réalisé le souhait du grand Péricles, à savoir « la beauté dans la simplicité ».



Mais quel est le rapport entre le Parthénon et le nombre d'or ? La réponse est simple : sa Façade Est que tu peux voir sur la photo ci-avant s'inscrit grosso modo dans un « rectangle d'or » c'est-à-dire dans un rectangle dont le rapport longueur/hauteur (appelé « divine proportion ») vaut le nombre d'or Φ. Ce rectangle était considéré par les Anciens comme particulièrement esthétique et harmonieux. Leurs successeurs, jusqu'à ce jour, ne les ont d'ailleurs jamais démentis. La figure suivante est une reproduction très schématique de la Façade Est. Dans la réalité, les colonnes sont hautes de 10,43 m. Elles sont surmontées d'un entablement (architrave + frise + corniche) dont la hauteur totale est de 3,3 m. D'où la cote de 13,73 m que tu lis sur le schéma ci-dessous.



On a : $AD/AB = 28,35/(13,73 + 3,46) \cong 1,649 \cong \Phi$. Le rectangle $ABCD$ est donc proche d'un rectangle d'or. C'est une des caractéristiques géométriques remarquables du Parthénon. Il y en a d'autres peut-être plus remarquables encore. Ainsi les droites horizontales sont imperceptiblement incurvées et sont en réalité des arcs de paraboles. D'autre part les 46 colonnes ne seraient pas parfaitement parallèles mais concourantes en un point situé à 1500 mètres au dessus du monument ! A vérifier, car d'aucuns contestent ces affirmations.

Enfin si α désigne la mesure en degrés de l'angle aigu du fronton triangulaire isocèle, alors on a : $\operatorname{tg}\alpha = 3{,}46/(28{,}35/2) \cong 0,244 \rightarrow \alpha \cong 13^\circ,72$ ce qu'on peut mesurer approximativement avec un rapporteur sur la photo du Parthénon.

Sources : « L' Art et la Civilisation de la Grèce Ancienne » par K. Papaioannu (Ed Mazzerod)
« L' univers des formes » par A. Parrot (Ed Gallimard 1969)
« Grèce » par K. Gouvoussis
« Grèce - Guide Poche-Voyage » (Ed Marcus 1977) et divers sites internet.

Rallye problèmes

C. Festraets

Les élèves suivants ont donné de bonnes réponses aux problèmes de la première étape de ce rallye :

Julien BAUDUIN, 2e année, AR de Thuin,
Numa COUNIOT, 3e année, CES St Joseph,
Adrien DEPRESSEUX, 2e année, AR Thil Lorrain à Verviers,
Thomas RADELET, 3e année, AR Vauban à Charleroi,
Tamara STRYCZEK, 2e année, AR de Thuin.

Voici les problèmes 4, 5 et 6 de la deuxième étape ainsi que les solutions des problèmes 1 à 3. Il n'est pas obligatoire d'avoir participé à la première étape du rallye pour participer aux suivantes.

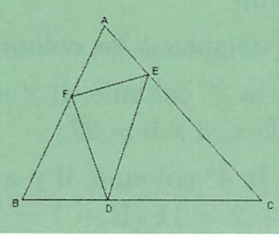
Présentez soigneusement vos solutions en respectant les instructions données dans le numéro précédent de Math-Jeunes-Junior, n'oubliez pas d'affranchir suffisamment vos lettres et envoyez-les à C. Festraets, 36, rue J.B. Vandercammen, 1160 Bruxelles, au plus tard pour le 14 février 2003.

4. Prix du GSM

Le 1er janvier, le prix de mon GSM augmentait de 10%. Aujourd'hui, son dernier prix baisse de 5%. Calcule le pourcentage d'augmentation du prix actuel par rapport à celui d'avant le 1er janvier.

5. Calcul d'angles

Dans le triangle ABC, les points D, E et F sont sur les côtés BC, CA et AB respectivement et tels que $\widehat{AFE} = \widehat{BFD}$, $\widehat{BDF} = \widehat{CDE}$ et $\widehat{CED} = \widehat{AEF}$. Prouver que $\widehat{BDF} = \widehat{BAC}$.

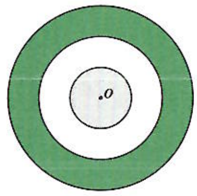


6. Que de chiffres !

On peut écrire la fraction $\frac{1}{70}$ au moyen d'un nombre infini de chiffres décimaux : $\frac{1}{70} = 0,0a_1a_2a_3\ldots$. Que vaut le chiffre a_{2003} ?

Solutions des jeux parus dans *Math-Jeunes Junior* n°103

1. Cercles concentriques

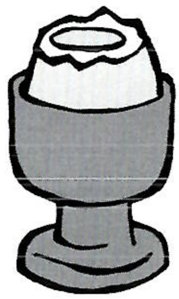


Rappel de l'énoncé : Observe la figure suivante. Tu y vois trois cercles ayant le point O comme centre commun et dont les rayons mesurent respectivement 1cm, 2cm, 3cm. Calcule le rapport de l'aire coloriée en vert à celle coloriée en gris.

Solution

$$\frac{S}{S} = \frac{\pi \times 3^2 - \pi \times 2^2}{\pi \times 1^2} = 5$$

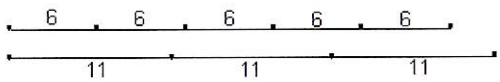
2. Un oeuf à la coque



Rappel de l'énoncé : Pour cuire un œuf à la coque, il faut le plonger dans l'eau bouillante pendant trois minutes exactement. Je n'ai pas de montre, mais je dispose de deux sabliers. L'un s'écoule en 6 minutes et l'autre en 11 minutes. Mon eau bout, comment est-il possible d'utiliser mes deux sabliers pour mesurer exactement trois minutes ?

Solution

Je retourne mes deux sabliers en même temps, puis je les retourne successivement autant de fois que l'indique le schéma suivant :



En tout je retourne 5 fois le sablier qui s'écoule en 6 minutes et trois fois le sablier qui s'écoule en 11 minutes. Le second sablier finit de s'écouler 3 minutes après le premier. Donc, 30 minutes après avoir retourné la première fois mes deux sabliers, je plonge mon œuf dans l'eau bouillante et je le retire dès que le second sablier a fini de s'écouler

3. Addition sympa

Rappel de l'énoncé : L'addition ci-contre est correcte, mais chaque lettre représente un chiffre et deux lettres différentes représentent deux chiffres différents. Pouvez-vous retrouver les nombres qui sont additionnés et leur somme ?

$$\begin{array}{rcccc} & \text{N} & \text{E} & \text{U} & \text{F} \\ & & & \text{U} & \text{N} \\ + & & & \text{U} & \text{N} \\ \hline & \text{O} & \text{N} & \text{Z} & \text{E} \end{array}$$

Solution

Nous comptons les colonnes de la droite vers la gauche.

Dans la 3e colonne, il y a un report provenant de la 2e colonne, ce report est au maximum 2 car $3\text{U} \leqslant 3 \times 9 = 27$.

Dans la 4e colonne, il y a aussi un report et il ne peut être que de 1. Cela nous conduit à E = 9, E + 2 = 11 (E + 1 = 10, mais 0 ne convient pas pour N), N = 1 et O = 2.

Dans la 1re colonne, F + 1 + 1 = 9, donc F = 7.
Reste à déterminer U : 3U est compris entre 21 et 27 (puisque le report de la 2e colonne sur la 3e est 2) et comme U ne peut valoir ni 7, ni 9, on a U = 8.
On trouve alors Z = 4.

$$\begin{array}{rcccc} & 1 & 9 & 8 & 7 \\ & & & 8 & 1 \\ + & & & 8 & 1 \\ \hline & 2 & 1 & 4 & 9 \end{array}$$

Enquête

En vue d'améliorer la qualité de cette revue, l'équipe rédactionnelle souhaite connaître votre opinion sur le contenu actuel. Elle vous invite donc à consacrer quelques minutes à remplir ce questionnaire et à le renvoyer par courrier (postal ou électronique) à notre secrétariat, dont l'adresse figure en troisième page de couverture.

- Je suis ☐ élève dans l'enseignement secondaire,
  ☐ étudiant dans l'enseignement supérieur,
  ☐ professeur.
- Je suis abonné à la revue ☐ en tant que membre de la SBPMef,
  ☐ de mon propre chef,
  ☐ par l'intermédiaire d'un professeur.
- Indiquez les articles (ou rubriques) que vous avez lus en cochant les cases du tableau ci-dessous. Tenez compte du codage proposé : S pour « Seul », P pour « avec l'aide du Professeur », C pour « lors d'un travail en Classe ». Donnez aussi votre appréciation sur les articles lus en cochant TB pour « Très Bon », B pour « Bon », M pour « Mauvais » et TM pour « Très Mauvais ».

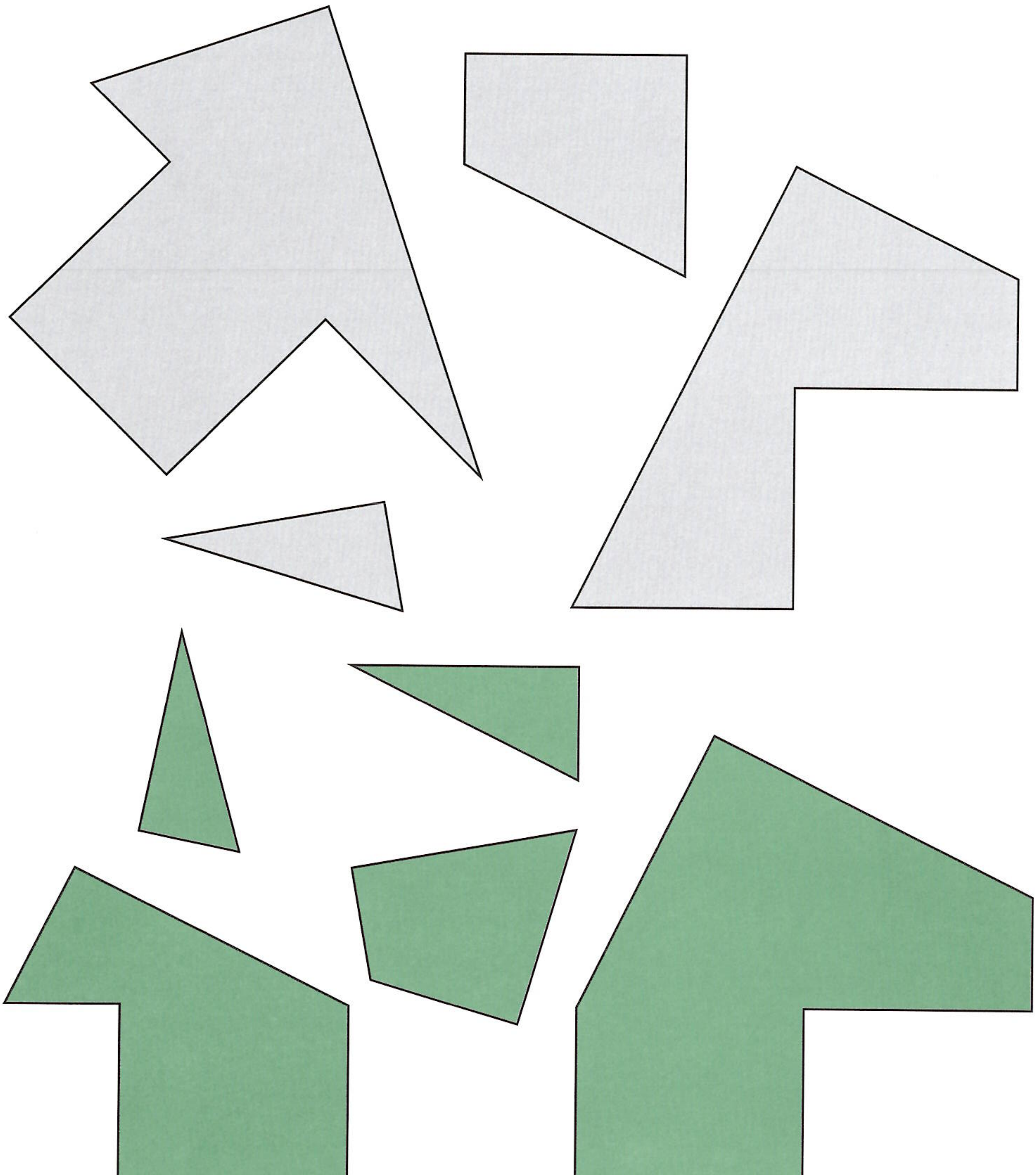
J'ai lu l'article	S	P	C	TB	B	M	TM
Le ruban de Möbius (103)	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐
Gourmandises...(103)	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐
Les frères Hick (103-104)	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐
Levez le pied (103)	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐
Sommes triangulaires (103)	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐
Olympiades (103-104)	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐
Des fleurs, encore des fleurs (104)	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐
Les tours de Hanoï (104)	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐
Jolies égalités (104)	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐
Chute libre...(104)	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐
... petits poids...(104)	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

- Je participe au rallye-problèmes : oui ☐ non ☐
- Je trouve les jeux intéressants : oui ☐ non ☐
- **Suggestions**
  - Dans ma revue, j'aimerais trouver des articles sur

    ....

    ....
  - J'aimerais aussi qu'un numéro de la revue soit entièrement consacré à un thème. Par exemple,

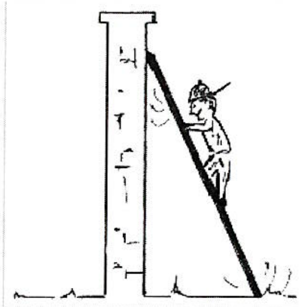
    ....
  - Je désirerais savoir ce qui a déjà été publié dans *Math-Jeunes* et dans *Math-Jeunes-Junior* : oui ☐ non ☐
    et comment acquérir d'anciens numéros : oui ☐ non ☐.



Chute libre... pas forcément en ligne droite !

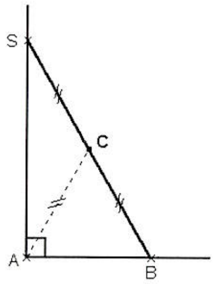
G. Laloux

Si je lâche un caillou d'une certaine hauteur, il tombe en ligne droite vers le sol, bien sûr ! Si je grimpe sur une échelle appuyée contre un mur et que celle-ci se met à glisser, je suis bon également pour un « billet de parterre ». Mais tomberais-je en ligne droite ou tout au moins suivant une trajectoire rectiligne ?



Voici en guise d'exemple, l'aventure qui est arrivée à Charles Estonne, un paparazzi toujours à la recherche du cliché qui fera sa fortune.
Le voici grimpant sur son inséparable échelle. Mais voilà qu'arrivé exactement au milieu de celle-ci, elle se met à glisser irrémédiablement. Quel parcours Charles Estonne va-t-il décrire pour atteindre le sol ?

Pour étudier cette situation, nous devons créer un modèle mathématique ou autrement dit, traduire le dessin ci-dessus par la construction géométrique ci-dessous :



Le segment $[SB]$ représente l'échelle ; sa longueur est donc constante. C représente la position de Charles au moment où l'échelle commence à glisser, c'est-à-dire que $C =$ milieu de $[SB]$. Pendant toute la durée de la chute, SAB forme donc un triangle rectangle en A dans lequel les côtés de l'angle droit changent de longueurs ($|AS|$ diminue pendant que $|AB|$ augmente) et l'hypoténuse reste de longueur fixe.

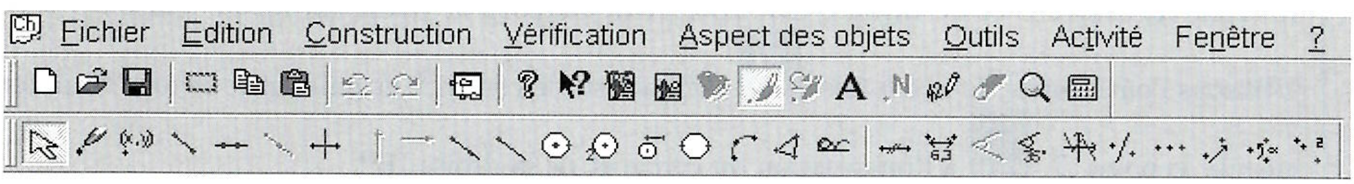
Faisons appel à une des propriétés du triangle rectangle (démontrée en 3e).

> ***Dans un triangle rectangle, la longueur de la médiane relative à l'hypoténuse vaut la moitié de la longueur de celle-ci.***

Par conséquent, on a $|AC| = \frac{|BS|}{2}$. **Comme $|BS|$ est constante, $|AC|$ l'est donc aussi.** Cela signifie donc que durant toute la chute, le point C reste à la même distance de A et décrit donc un **arc de cercle** (de centre A et de rayon $|AC|$.

On peut facilement construire le trajet de la chute de Charles Estonne (le lieu de points) à l'aide d'un logiciel de construction géométrique. Dans le cas présent, le travail a été réalisé à l'aide du logiciel « Chamois » `http://www.membres.lycos/bourit`.

Voici comment se présente ce logiciel :



Les barres d'outils sont personnalisables, comme dans n'importe quelle application Windows.

Construction du lieu décrit par Charles lors de sa chute :

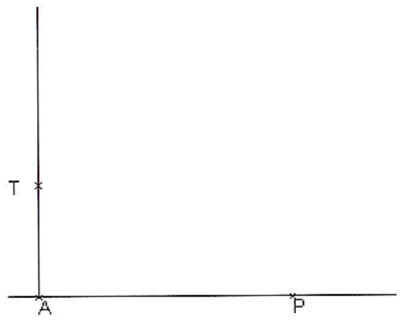
Les contraintes de construction

• Le point S (sommet de l'échelle) doit pouvoir glisser le long du mur et doit rester sur le mur.
• Le déplacement du point S doit entraîner le déplacement simultané du point B (bas de l'échelle) en maintenant la longueur $|SB|$ fixe.
• Le point S ne peut pas glisser au-delà du point A !

La construction

• Tracé du sol et du mur

Tracer une droite AP avec l'outil droite . Avec l'outil déplacement d'objet , on peut régler l'horizontalité de la droite AP. Par A, tracer la perpendiculaire à la droite AP (Les instructions apparaissent dans le bas de l'écran). Sur cette perpendiculaire, placer un point quelconque T ; ensuite, tracer la demi-droite d'origine A et passant par ce point T

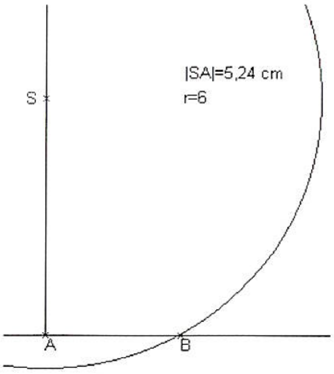


Masquer la perpendiculaire, le point T et le point P .

Construction de l'échelle

Sur le mur,(la demi-droite d'origine A perpendiculaire à AP), placer le point S qui sera le sommet de l'échelle. Comme il sera fixé sur la demi-droite, il ne pourra se déplacer que sur celle-ci et ne pourra donc descendre au-delà du point A.

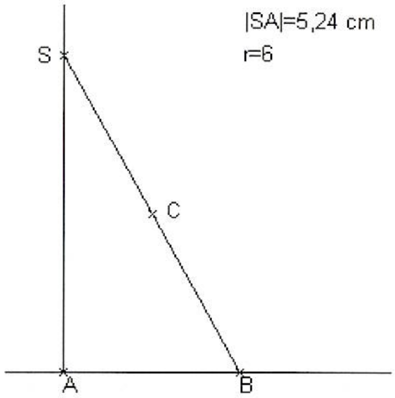
Il s'agit maintenant de construire le point B représentant le bas de l'échelle. Il doit vérifier deux contraintes : **être sur la demi-droite** AP **et être à une distance fixe de** S. Pour positionner l'échelle contre le mur, la mesure $|SB|$ doit être supérieure à $|SA|$. On mesure donc la distance de S à A . : $|SA| = 5.24$ cm Décidons de prendre $|SB| = 6$ cm. Construisons le cercle de centre S et de rayon 6 cm. Pour cela, donnons la valeur du rayon : $r = 6$. Utilisons l'outil cercle de rayon fixe : cliquer sur le centre S et puis sur le rayon. Marquer ensuite le point B à l'intersection du cercle et de la droite AP.



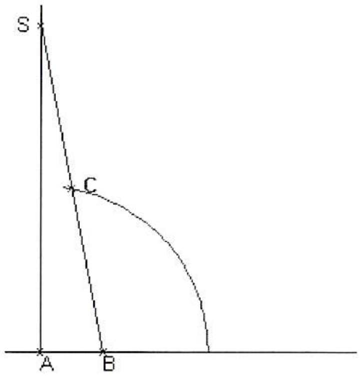
Tracer le segment $[SB]$  ;

marquer le milieu C  ;

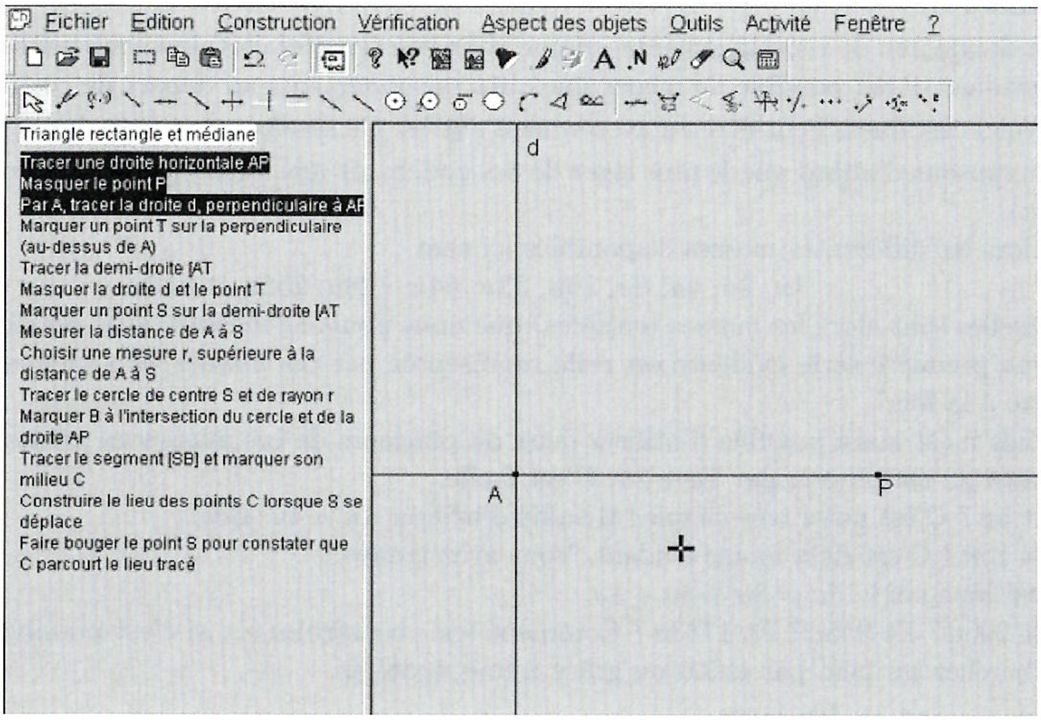
masquer le cercle .
Avec l'outil déplacement, faire bouger le point S.



Construction du lieu de C



Sélectionner l'outil lieu . Cliquer sur le point C (celui dont on cherche le lieu) et puis sur le point S (celui qui se déplace). Le lieu est tracé. On peut modifier l'aspect des objets avec l'outil .



Chamois permet aussi la création d'activités (constructions pas à pas) avec vérification des étapes réalisées par l'utilisateur (les étapes accomplies sont en surbrillance). En outre, il peut enregistrer les figures dans son propre format, mais aussi en bmp et en jpeg. Chamois accepte l'importation de figures réalisées avec Cabri.

La mathématique au quotidien . . .

C. Villers

On a toujours besoin de petits poids chez soi !

1. **Curieuses réflexions !**

   La visite commentée du musée de la vie locale se terminait. C'est alors que d'un ton où perçait une pointe de fierté, notre guide nous annonça « Et voici maintenant une série de 10 petits godets s'emboîtant les uns dans les autres. Ils datent de la fin du 19^esiècle. Malgré ce que peut laisser croire leur forme, ils ne servaient pas pour boire mais bien de mesures étalons pour les masses ».

   Et en plus ajouta-t-il, ***chacun d'eux pèse le double de celui qui le précède.***

2. **Et alors ?**

   Cela donne peu de renseignements comme vous vous en êtes certainement rendus compte. Cependant, il est possible de mener quelques raisonnements au départ de ces réflexions.

   En voici certaines. Peut-être en avez-vous d'autres. Ce serait intéressant de les connaître.

   – Supposons d'abord que le plus léger de ces godets ait une masse unitaire (nous écrirons $1u$).
     Alors les différentes masses disponibles ici sont :
     $$1u,\ 2u,\ 4u,\ 8u,\ 16u,\ 32u,\ 64u,\ 128u,\ 256u \text{ et } 512u.$$
   – Quelles sont alors les masses (entières) que nous pouvons mesurer avec ces dix godets ? Une première série évidente est celle représentée par ces masses elles-mêmes, utilisées une à la fois !
     Mais il est aussi possible d'utiliser deux ou plusieurs de ces masses en même temps.
     Ainsi $3u$ est obtenu par $1u + 2u$. C'est facile.
     Et $5u$? C'est aussi très simple ! Il suffit d'utiliser $1u + 4u$. Bof ! !
     Et $13u$? C'est déjà moins évident. Vous avez trouvé ?
     Oui bien sûr ! $13u = 8u + 4u + 1u$.
     Et $200u$? Et $955u$? Et $1783u$? Comment les « construire »... si c'est possible ?
     Cherchez un peu, par essais ou grâce à une stratégie.

3. **Pour ne pas se fatiguer**

   Si vous avez joué le jeu de la recherche proposée ci-avant, vous avez certainement trouvé un « truc » pour réaliser les décompositions demandées.

   D'abord, nous avons intérêt à faire diminuer le nombre traité, le plus vite possible. Nous nous servirons donc du plus grand godet possible mais qui soit contenu dans ce nombre. Ainsi pour arriver à $200u$, utilisons $128u$.

Math-Jeunes Junior n° 104 J, 20–23, 2003

Il reste donc à former $200u - 128u$ soit $72u$.

Pour $72u$, nous utilisons cette fois $64u$.

Il reste à traiter $72u - 64u$ soit $8u$ et cela c'est immédiat avec le godet $8u$.

Nous avons donc $200u = 128u + 64u + 8u$. Nous utilisons 3 des godets !

Je vous laisse le soin de traiter les deux autres masses proposées ou d'autres que vous choisirez.

C'est fait !

Vous avez obtenu : $955u = 512u + 256u + 128u + 32u + 16u + 8u + 2u + 1u$ (8 godets utilisés).

Et pour $1783u$ vous avez $1783u = 1024u + 759u$ qui pose un problème car la plus grande masse qui reste disponible n'est que $512u$.

$1783u$ n'est pas décomposable avec ces masses étalons sauf si nous en disposons en plusieurs exemplaires mais cela c'est une autre histoire, ou si un onzième godet de $1024u$ est disponible.

D'autre part, il est évident qu'une calculette tout à fait élémentaire peut vous aider dans ces transformations puisqu'il n'est besoin que de savoir soustraire.

4. **Questions en suspens**

Et voici donc des questions qui surgissent. Jusqu'à quelle mesure (entière) pouvons-nous aller avec ces dix godets ? Et de la plus petite (qui est $0u$ si nous n'utilisons aucun godet) à la plus grande, est-il possible de les obtenir toutes ? ? ?

Continuez à activer vos méninges avant de lire la suite.

5. **Mathématisons**

Vous avez certainement remarqué que les nombres d'unités de masse représentés par les godets sont des puissances successives de 2 (puisqu'on passe de l'une à la suivante par une multiplication par 2).

1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256 et 512 s'écrivent 2^0, 2^1, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5, 2^6, 2^7, 2^8, et 2^9.

Remarquez bien que l'exposant du dixième nombre est 9 car les exposants utilisés commencent à 0. Pour décomposer une mesure de masse nous pouvons utiliser un tableau qui présente les valeurs des « godets » en ordre décroissant puisque nous essayons d'utiliser les plus grandes valeurs possibles pour commencer. Il suffit ensuite d'indiquer 1 sous les valeurs utilisées et 0 pour celles qui ne le sont pas.

Ainsi, nous aurons :

2^9 512	2^8 256	2^7 128	2^6 64	2^5 32	2^4 16	2^3 8	2^2 4	2^1 2	2^0 1	
							1	0	1	$\rightarrow 4+1=5$
						1	1	0	1	$\rightarrow 8+4+1=13$
		1	1	0	0	1	0	0	0	$\rightarrow 128+64+8=200$
1	1	1	0	1	1	1	0	1	1	$\rightarrow 955$

Les nombres 5, 13, 200, 955 écrits en numération décimale (base 10) ont en fait été écrits respectivement 101, 1101, 11001000 et 1110111011 dans une numération de base 2 appelée numération binaire.

Rappelons que les ordres successifs de la numération décimale des entiers sont : 1, 10, 100, 1 000, 10 000, 100 000, etc. . .ou encore 10^0, 10^1, 10^2, 10^3, 10^4,. . . soit les puissances successives de 10.

Alors qu'en numération décimale (base 10), on dénombre des unités, des dizaines, des centaines, des milles, ..., en numération binaire, on dénombre des unités, des deuxaines, des quatraines, des huitaines,....

6. **Et les réponses à nos questions ?**

   * Le plus petit nombre naturel pouvant être écrit avec les dix ordres binaires étudiés est obtenu en écrivant 0 dans chaque case.

2^9 512	2^8 256	2^7 128	2^6 64	2^5 32	2^4 16	2^3 8	2^2 4	2^1 2	2^0 1	
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$\rightarrow$?

   C'est 0.

   * Le plus grand nombre naturel est obtenu en écrivant 1 dans chaque case.

2^9 512	2^8 256	2^7 128	2^6 64	2^5 32	2^4 16	2^3 8	2^2 4	2^1 2	2^0 1	
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	$\rightarrow$?

   Sans effectuer de calcul, nous pouvons affirmer que c'est un nombre impair. Pourquoi ? ?

   Le calcul donne bien $512 + 256 + 128 + 64 + 32 + 16 + 8 + 4 + 2 + 1 = 1023$

7. **Un dernier effort !**

   Le plus grand chiffre de la numération décimale est 9. Ajouter 1 à 9 fait passer l'écriture à deux chiffres et fait apparaître 0 à la place de 9 et 1 s'ajoute au chiffre situé immédiatement à sa gauche.

   Exemples : $9 + 1 = 10$, $59 + 1 = 60$, $399 + 1 = 400$ et $99999 + 1 = 100000$

   De même, le plus grand chiffre de la numération binaire est 1. Ajouter 1 à 1 fait passer l'écriture à deux chiffres et fait apparaître 0 à la place de 1 et 1 immédiatement à sa gauche.

   Exemples :$1 + 1 = 10$, $101 + 1 = 110$, $110001 + 1 = 110010$, $1000011 + 1 = 1000100$ et $11111 + 1 = 100000$

   Cette propriété peut être utilisée pour connaître ce que vaut, en numération décimale, le nombre $n = 1111111111$ (dix chiffres 1) de la numération binaire.

   On a $n + 1 = 10000000000$ (11 chiffres)

   Le 1 doit venir dans la 11^{e}case du tableau qui est l'ordre des 2^{10}.

   En numération décimale on a donc : $n + 1 = 1024$ et $n = 1023$ comme nous l'avons trouvé tout à l'heure.

8. **A quoi ça peut servir ?**

   Vous savez certainement qu'en informatique, tout se fait sur base de la numération binaire.

   Le codage se réalise à l'aide d'octets ou bytes.

   Un byte est un nombre binaire de huit chiffres.

2^7 128	2^6 64	2^5 32	2^4 16	2^3 8	2^2 4	2^1 2	2^0 1

   Le plus petit est donc 00000000 qui code le décimal 0.

2^7	2^6	2^5	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0
128	64	32	16	8	4	2	1
0	0	0	0	0	0	0	0

Le plus grand est 11111111 qui code le décimal $2^8 - 1$ soit 255.

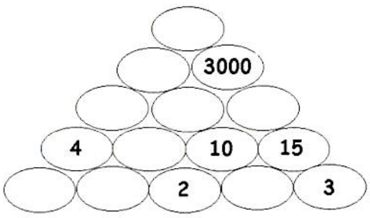
2^7	2^6	2^5	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0
128	64	32	16	8	4	2	1
1	1	1	1	1	1	1	1

Un byte permet donc de coder 256 nombres naturels de la numération décimale (de 0 à 255).
En informatique, les tailles des fichiers sont assez impressionnantes surtout lorsqu'il faut mémoriser de nombreuses données, des dessins, des couleurs, ...
Ces tailles sont alors exprimées en kilobytes qui valent 1024 bytes (et non 1000 bytes), ou en mégabytes qui valent 1024 kilobytes soit donc 1024×1024 bytes ou 1048576 bytes (et non 1 000 000 bytes), ou en gigabytes qui valent 1024 mégabytes ou $1024 \times 1024 \times 1024$ bytes soit 1 073 741 824 bytes (et non 1 000 000 000 bytes).

Les jeux de Tonton C.

1. Mathieu a une curieuse façon de retenir les numéros de téléphone de ses copines et copains. Il mémorise certaines de leur caractéristique. Ainsi, pour le numéro de Béatrice, il se souvient que c'est un numéro de six chiffres. Le dernier chiffre est un 7. Le quatrième chiffre a une valeur double de celle du deuxième et une valeur moitié de celle du premier qui, lui-même vaut une unité de plus que le sixième. Quant aux troisième et cinquième chiffres, ils valent une unité de plus que le deuxième.
   Quel est le numéro de téléphone de Béatrice ?

2. Quel est le nombre qui doit apparaître au sommet de cet empilement si chaque ellipse contient le produit des nombres inscrits dans les deux ellipses qui la supportent ?



Solutions : page 26

Olympiades

C.Festraets

Lorsque tu recevras ce numéro de *Math-Jeunes Junior*, tu auras certainement participé à l'éliminatoire de l'Olympiade Mathématique Belge. Peut-être seras-tu admis en demi-finale, et dans ce cas, je te félicite. Peut-être ne seras-tu pas aussi chanceux, mais ne t'en fais pas, prends courage et réinscris-toi l'année prochaine. Dans tous les cas, voici quelques énoncés qui te permettront de t'exercer ; ces énoncés sont puisés dans le tome 3 de la brochure « Olympiades ». Ce tome est épuisé mais si tu es intéressé, tu peux te procurer les tomes 4 et 5. Voici tous les renseignements nécessaires pour cela :

Olympiades Mathématiques Belges

Tome 4 (1994-1998) : prix 5,50 euros (ajouter 1.50 euros de frais de port).

Tome 5 (1999-2002) : prix 6 euros (ajouter 1.50 euros de frais de port).

Les deux tomes ensemble : 10 euros (ajouter 2.70 euros de frais de port).

Les commandes sont à adresser à

SBPMef, rue de la Halle, 15, 7000 Mons

Compte : 000-0728014-29

Fax et téléphone : 065 37 37 29.

1. **Demi- finale 91**

Si $S_{1990} = 1-2+3-4+5-\ldots-1990$ et $S_{1991} = 1-2+3-4+5-\ldots+1991$, alors $S_{1990}+S_{1991}$

(A) est négatif **(B)** est nul **(C)** vaut 1 **(D)** vaut 2 **(E)** vaut 1991

2. Eliminatoire 88 *(Sans réponse préformulée)*

Trois kilogrammes plus une demi-brique ont la même masse qu'une brique plus un kilogramme. Quelle est (en kg) la masse d'une brique ?

3. Eliminatoire 90

Un magasin diminue ses prix de 20 % et, le lendemain, accorde une remise de 10 % sur les nouveaux prix. La baisse totale des prix initiaux est alors de :

(A) 24 % **(B)** 25 % **(C)** 28 % **(D)** 30 % **(E)** 70 %

4. Eliminatoire 91

Des autobus comportent 57 places pour voyageurs. Combien de ces autobus faut-il, au minimum, pour transporter en une fois un groupe de 242 personnes ?

(A) 3 **(B)** 4 **(C)** 5 **(D)** 6 **(E)** 7

5. Demi-finale 91

Si a et b sont deux nombres réels positifs, l'égalité $\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$

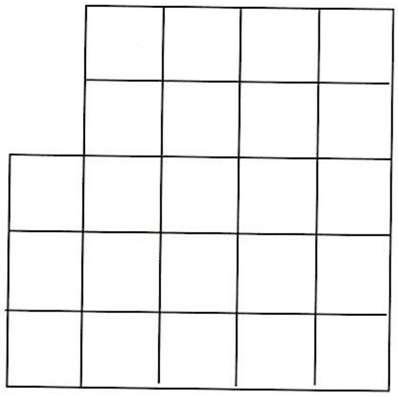
(A) est toujours vraie **(B)** est vraie si et seulement si $a + b = 0$

(C) est vraie si et seulement si $a.b = 0$ **(D)** est vraie si et seulement si $a = b$

(E) n'est jamais vraie

6. Eliminatoire 89

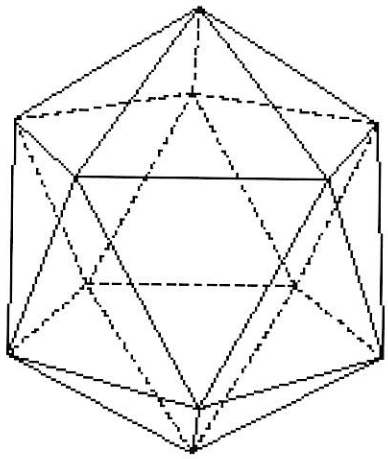
Quel est le nombre total de carrés (de taille quelconque) dont chaque côté est situé sur un segment de droite tracé dans le quadrillage ci-contre ?



(A) 31 **(B)** 38 **(C)** 39 **(D)** 40 **(E)** 46

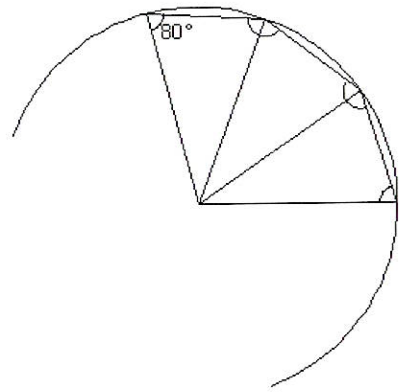
7. Eliminatoire 92 *(Sans réponse préformulée)*

Les faces du solide représenté en perspective avec vus et cachés sont toutes triangulaires. Quel est le nombre de ces faces ?



8. Demi-finale 89

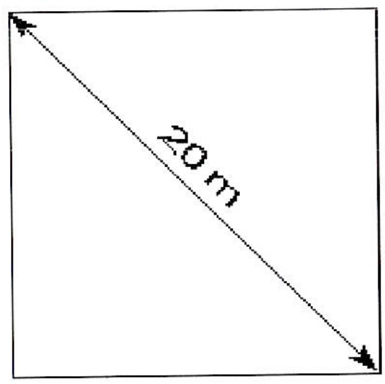
On assemble des triangles isocèles en plaçant les sommets de leurs bases sur un cercle et leurs troisièmes sommets au centre du cercle. Les angles à la base de chacun de ces triangles isocèles valent chacun 80°. Combien de triangles faut-il placer en tout pour que leurs bases forment un polygone convexe régulier ?



(A) 12 **(B)** 14 **(C)** 16 **(D)** 18 **(E)** 20

9. Eliminatoire 88 (*Sans réponse préformulée*)

Sachant qu'il faut un sac de petits pois pour ensemencer 20 m^2, combien de sacs de petits pois faut-il pour ensemencer le terrain carré ci-contre ?



10. Eliminatoire 90

Une montre ayant un cycle de 12 heures, avance de 5 minutes par jour et n'est jamais remise à l'heure. Si le 1er novembre, à midi, elle indique l'heure exacte, combien de jours après indiquera-t-elle à nouveau pour la première fois l'heure exacte ?

(A) 12 **(B)** 72 **(C)** 144 **(D)** 288 **(E)** aucune de ces réponses

. . . .

Solutions

1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
C	4	C	C	C	E	20	D	10	C

. . . .

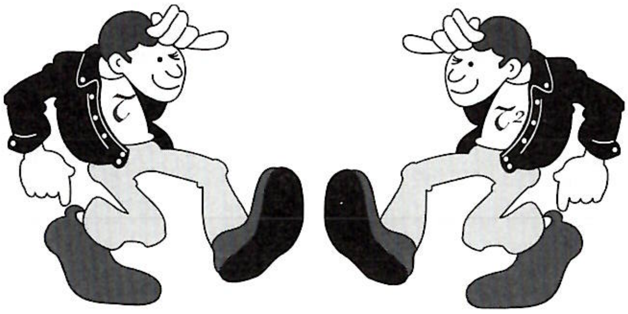
Solution des jeux de Tonton C

1. Vous n'avez certainement pas eu grand peine à découvrir le numéro codé par le texte. C'est 823437.
2. En calculant de proche en proche les nombres qui manquent, vous avez dû obtenir le nombre du sommet c'est à dire 480 000.

Les frères Hick 7

B. Honclaire

Agence de détectives privés Les frères Hick Recherches en tous genres



Ami lecteur,

$\mathcal{T}$ et $\mathcal{T}^2$ te donnent la suite de leurs réflexions sur les grilles magiques et ensuite ils te livreront une nouvelle énigme. Bon courage et bon amusement.

Bernard Honclaire

$\mathcal{T}^2$ (un peu honteux ?) – « *Ecoute, j'ai encore trouvé pas mal de choses sur tes grilles, mais quant à en fabriquer de nouvelles ...!* »

$\mathcal{T}$ (très intéressé) – « *Je t'écoute.* »

$\mathcal{T}^2$– « *C'est sur ta grille facile que j'ai remarqué des relations !*

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

Pour passer d'une colonne à la suivante, il faut toujours ajouter 1 et pour les lignes c'est 4 !

Pour une grille plus compliquée, c'est quand même un peu pareil !

46	26	42	30
23	3	19	7
37	17	33	21
34	14	30	18

Pour passer de la première colonne à la deuxième, il faut retirer 20, de la deuxième à la troisième, il faut ajouter 16 et ainsi de suite...

Idem pour les lignes... »

		-20 →	$+16$ →	-12 →
	46	26	42	30
-23 ↓	23	3	19	7
$+14$ ↓	37	17	33	21
-3 ↓	34	14	30	18

$\mathcal{T}$ (impatient) – « *Tu vois, c'est finalement très simple.*

Et maintenant, accroche-toi bien ! Au lieu de 46 dans la première case, tu peux mettre n'importe quel nombre et de plus tu peux aussi modifier les relations ... ! Mais tu vois, moi j'étais parti sur une autre idée, en fait en y réfléchissant, pas très éloignée de la tienne ! Cela m'a fait penser aux tables d'additions ... ! Tu sais, on disposait des nombres horizontalement et verticalement. Il fallait compléter les cases et ici j'ai pensé que c'était le contraire... ! On nous a donné les 16 réponses et j'ai essayé de mettre les huit nombres ... ! »

$\mathcal{T}^2$ (replongé dans sa plus tendre enfance) – « *Eh oui ... !* »

$\mathcal{T}$ (impatient) – « *Regarde ... !* »

+	22	2	18	6
24				
1				
15				
12				

$\mathcal{T}^2$ (le visage illuminé) – « *Eh oui, on retrouve ta grille... Mais, là aussi, on pourrait mettre d'autres nombres ...* $24 + 22$ *n'est pas la seule façon de faire 46, j'aurais pu mettre 40 et 6 ou encore 20 et 26 ou...* »

$\mathcal{T}$ (partant d'un gros éclat de rire) – « *Oui, c'est cela, essaye ! Et cette fois je ne pourrai même pas te reprocher d'être négatif !* »

$\mathcal{T}^2$ (ne comprenant pas le rire de son frère) – « *Et tu es sûr que cela va toujours fonctionner... ?*

(triomphant, il ajoute) *Mais si je remplace les chiffres par des lettres, comme tu fais d'habitude, cela me permettra peut-être de comprendre ... !*

$+$	e	f	g	h
a	$a+e$	$a+f$	$a+g$	$a+h$
b	$b+e$	$b+f$	$b+g$	$b+h$
c	$c+e$	$c+f$	$c+g$	$c+h$
d	$d+e$	$d+f$	$d+g$	$d+h$

Je choisis un premier nombre $b+f$, je supprime la ligne b et la colonne f.
Je choisis un deuxième nombre $a+h$ et ...
Je choisis un troisième nombre $c+g$ et ...
Il me reste le nombre $d+e$.
La somme de mes quatre nombres est donc :

$$(b+f)+(a+h)+(c+g)+(d+e)$$

Eh oui ! C'est normal ! C'est la somme des huit nombres de départ »

T – « *Génial ! Tu aurais, bien sûr, obtenu la même somme en effectuant d'autres choix. On a l'habitude d'écrire cette somme $a+b+c+d+e+f+g+h$.*

Ton prof de maths t'a sûrement parlé des propriétés de l'addition, la commutativité et l'associativité ... ! Eh bien ce sont elles qui justifient ce phénomène ! »

T^2 (le regard lointain) – « *C'est très loin ... ! Dis, ton truc, il a perdu un peu de sa magie !* »

T – « *Il est temps de fournir l'énigme suivante !* »

Où il est question d'équilibre !

Liste A
15
25
12
21

Les nombres des deux listes tu observeras
Un dans chaque liste tu choisiras
Ceux-ci tu permuteras
Les nombres de chaque liste tu multiplieras
Le même produit tu obtiendras

Liste B
8
9
63
30

T^2 – « *On peut faire des essais, il n'y en a pas tellement à essayer ... !* »

T – « *Oui, en t'organisant bien et avec une bonne calculatrice ... ! Mais on te demande d'observer avant de calculer ... ! J'ai l'impression qu'il faut qu'on pense aux facteurs ... !* »

T^2 (très inquiet et en lui-même) – « *Facteurs, facteurs ... !? Que viennent-ils faire dans cette galère ?* »

Ami lecteur, peux-tu aider T et T^2 à résoudre ce problème ?

À suivre...

Solutions des jeux 1 à 5

1. Vrai – faux ?

1. Vrai. Si deux nombres naturels sont consécutifs, soit le premier est pair et le suivant impair, soit le premier est impair et le suivant est pair. Le produit est donc soit $(2n) \times (2n+1)$ soit $(2n+1) \times (2n+2)$. Dans les deux cas, un facteur 2 peut être mis en évidence.
2. Faux. $3 \times 4 \times 5$ est pair.
3. Faux. $3 + 4$ est impair.
4. Vrai. Par exemple si $n = 10$.
5. Faux. La démonstration est donnée dans la proposition 1.
6. Faux. Si $k < 0$, alors $a > b$.
7. Vrai. $2n + 2m = 2 \times (m + n)$.
8. Faux. $3 + 4 + 5 + 17$ est impair alors que 4 ne l'est pas.
9. Faux. $-10 < 6$ et $100 > 36$.
10. Vrai. Si n est pair, son prédécesseur et son successeur sont tous les deux impairs. Si au contraire n est impair, ses deux voisins sont pairs.

2. Des multiplications qui bégaient

Les premières égalités données dans « Des multiplications qui bégaient »

$$\text{UN} \times \text{BAB}=\text{UNUN}$$

$$\text{DEU} \times \text{BAAB}=\text{DEUDEU}$$

$$\text{TROI} \times \text{BAAAB}=\text{TROITROI}$$

$$\text{QUATR} \times \text{BAAAAB} = \text{QUATRQUATR}$$

relèvent toutes du même phénomène : $B = 1$ et $A = 0$. Les autres lettres sont quelconques.

$$\begin{aligned}
\text{UNUN} &= (\text{UN} \times 100) + \text{UN}\\
\text{DEUDEU} &= (\text{DEU} \times 1000) + \text{DEU}\\
\text{TROITROI} &= (\text{TROI} \times 10000) + \text{TROI}\\
&\dots
\end{aligned}$$

D'une manière plus générale

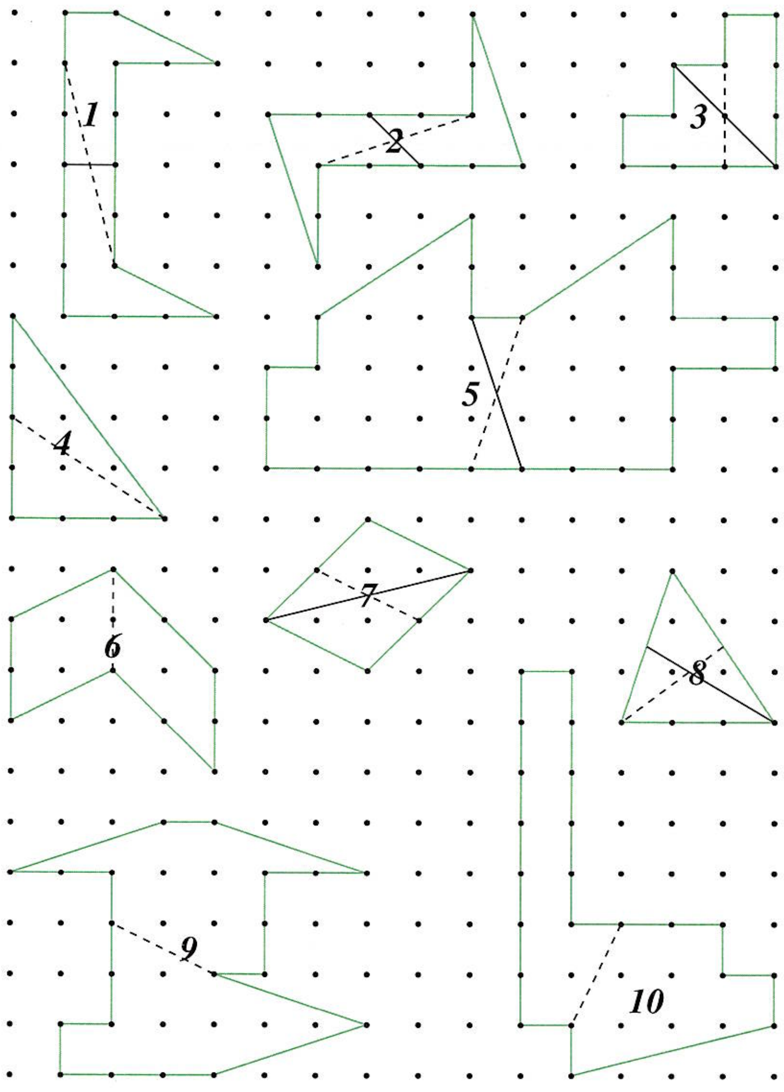
- le produit d'un nombre par 100000 s'écrit à l'aide de ce nombre « suivi de cinq zéros ». Ainsi, si ce nombre a cinq chiffres et qu'on l'ajoute au produit obtenu, la « deuxième écriture du nombre » vient se placer exactement sur les zéros du produit.
- le produit d'un nombre de cinq chiffres par 100001 est le nombre obtenu en écrivant le nombre suivi de lui-même.

Le produit d'un nombre de n chiffres par $10^n + 1$ s'obtient en écrivant le nombre donné deux fois, à la queue leu leu.

3. Coupons en deux

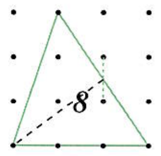
Sauf pour la figure 8, chaque figure peut être découpée en deux zones de même aire en traçant un segment joignant deux points du réseau situés sur le bord.

Pour certaines figures, plusieurs solutions sont possibles. Alors nous en indiquons deux, une en pointillés, l'autre en trait plein.

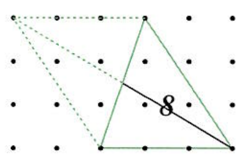


- Pour les figures 1, 2, 3 et 7, cherche une solution différente de celles qui sont données.
- Le trait plein découpe les figures 2, 3 et 7 en deux parties superposables. Contrôle-le !
- Le problème plus difficile de la figure 8 peut être résolu

soit en le rapprochant de la figure 4,



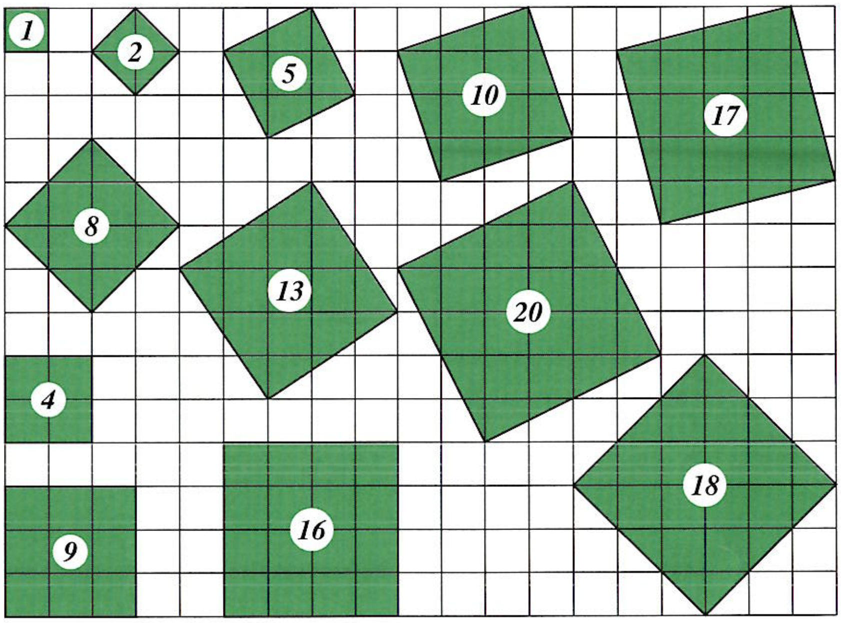
soit en le rapprochant de la figure 7.



Justifie ces constructions !

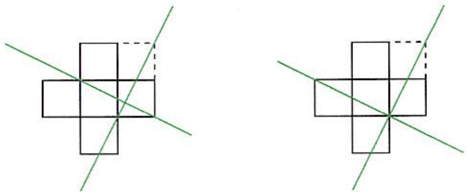
4. Des carrés dans un quadrillage.

Voici des carrés d'aires 1, 2, 4, 5, 8, 9, 10, 13, 16, 17, 18 et 20 dont les sommets sont tous des points du quadrillage.

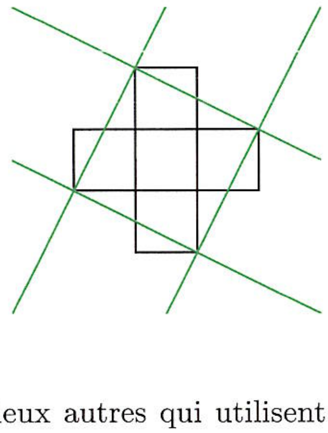


5.Coupons et collons.

5.1. La croix



Voici une première solution en quatre coups de ciseaux inspirés par les rotations qui conservent aussi bien la croix donnée que le carré cherché. Tous les coups de ciseaux passent par deux sommets de la croix.



En voici deux autres qui utilisent plus largement des sommets du quadrillage dans lequel la croix peut être imaginée.

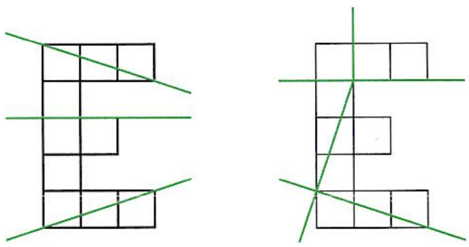
Dans chaque cas, le côté du carré obtenu est celui du carré d'aire 5 qui a été dessiné dans le quadrillage.

5.2. La lettre E.

L'aire du carré valant 10, tu pouvais t'aider du carré de même aire trouvé dans le quadrillage.

Les côtés doivent se placer ainsi : 

Voici deux découpages possibles, respectivement en trois et en quatre coups de ciseaux :



En cadeau, *Math-Jeunes Junior* t'offre deux puzzles. Chacun te permet de reconstituer un carré et une croix.

Math-Jeunes et Math-Jeunes Junior

Revues trimestrielles publiées par la Société Belge des Professeurs de Mathématique d'expression française

Le courrier et les projets d'articles doivent être envoyés aux rédactions respectives.

Abonnements : les prix sont indiqués en EUROS

	Belgique	Union Européenne	Europe hors Union	Hors Europe prioritaire	Hors Europe non priorit.
Abonnement isolé	(*) 3 numéros (**) 6 numéros				
Math-Jeunes Junior ou *Math-Jeunes* (*)	4.96	9.2	10.2	20.4	11.4
Les deux revues (**)	9.92	18.4	20.4	40.8	22.8
Abonnements groupés (au moins 5)	(*) 3 numéros (**) 6 numéros				
Math-Jeunes Junior ou *Math-Jeunes* (*)	3.72	6	7.6	15.2	8.6
Les deux revues (**)	7.44	12	15.2	30.4	17.2

Pour connaître la liste des anciens numéros encore disponibles et le prix de ceux-ci selon votre région, adressez-vous au secrétariat : Carruana M.-C., S.B.P.M.e.f., rue de la Halle 15, 7000 Mons, Tél. 32-(0)65-373729, e-mail : sbpm@sbpm.be, Web : http://www.sbpm.be

Les abonnements destinés aux élèves de l'enseignement secondaire sont de préférence pris par l'intermédiaire d'un professeur. Effectuez vos paiements :

- pour la Belgique : par virement au Compte n°000-0728014-29 de *S.B.P.M.e.f.*, rue de la Halle 15, 7000 Mons
- pour la France : par virement au Compte CCP Lille 10 036 48 S
- pour l'étranger (sauf la France) : par virement international au Compte n°000-0728014-29 de la *S.B.P.M.e.f.*, rue de la Halle 15, B 7000 Mons, Belgique. Il est vivement conseillé aux étrangers qui ne peuvent faire un virement de C.C.P. à C.C.P. de nous envoyer un mandat postal international. En principe, seuls les chèques encaissables dans une banque belge sont acceptés (tout chèque bancaire non encaissable en Belgique devra être majoré de 12.50 euros pour frais d'encaissement.)

Éditeurs responsables et rédacteurs en chef :

- pour *Math-Jeunes* : C. VAN HOOSTE, Chemin de Marbisœul, 25 6120 Marbaix la Tour
- pour *Math-Jeunes Junior* : A. PATERNOTTRE, Rue du Moulin 78, 7300 Boussu

Math-Jeunes Junior
Périodique trimestriel
15, rue de la Halle – 7000 Mons
Bureau de dépôt 7000 Mons 1

Responsable de l'édition: A. PATERNOTTRE
Rue du Moulin 78 – 7300 Boussu

Autorisation de fermeture
Sluitings toelating

7000 Mons 1
5/156

Belgique - België
P.P.
7000 Mons 1
5/124

Périodique - Peut être ouvert pour contrôle postal

Réservé à la poste

Inconnu
Refusé
Décédé
Adresse insuffisante
N'habite plus à l'adresse
indiquée