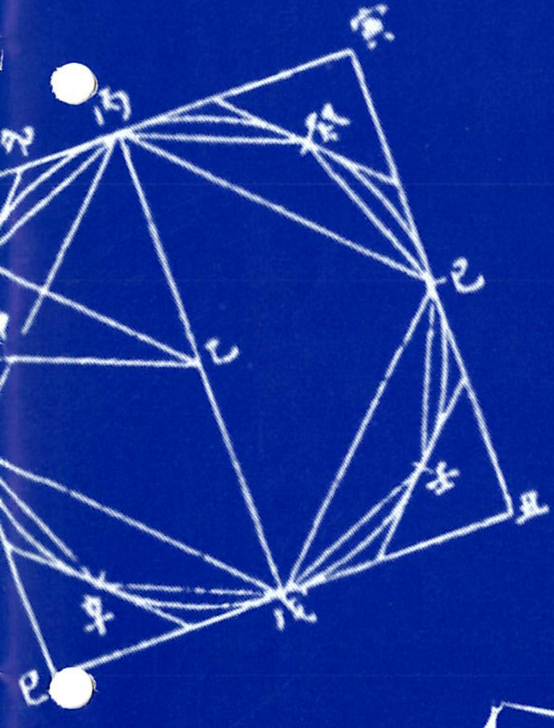
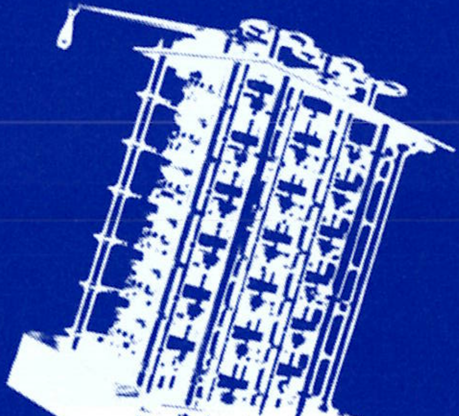
25ème année
Novembre 2003 - n°106 J

MJ junior!



π



b^2-4ac

Math-Jeunes et Math-Jeunes Junior

Revues trimestrielles publiées par la Société Belge des Professeurs de Mathématique d'expression française

Secrétariat : M.-C. Carruana, S.B.P.M.e.f., rue de la Halle 15, 7000 Mons, ☎-FAX 32-(0)65-373729, e-mail : sbpm@sbpm.be, URL : http://www.sbpm.be.

Tarifs

Abonnements groupés (au moins 5)				
	Une des deux revues		Les **deux** revues	
Belgique	3,80 €		6,60 €	
	✉	✉̸	✉	✉̸
Europe	6 €	7,80 €	11 €	14 €
Autres pays	6,60 €	10 €	12 €	18 €

Abonnements individuels				
	Une des deux revues		Les **deux** revues	
Belgique	5 €		10 €	
	✉	✉̸	✉	✉̸
Europe	11,50 €	15,80 €	16,50 €	20,50 €
Autres pays	12,75 €	20,40 €	20 €	25 €

Légende : « prior »=✉̸, « non prior »=✉.

Trois numéros de chaque revue sont publiés annuellement. Pour connaître la liste des anciens numéros encore disponibles et leur prix selon votre localisation, adressez-vous au secrétariat.

Les abonnements destinés aux élèves de l'enseignement secondaire sont de préférence pris par l'intermédiaire d'un professeur. Effectuez vos paiements :

- ☞ pour la Belgique : par virement au Compte n°000-0728014-29 de *S.B.P.M.e.f.*, rue de la Halle 15, 7000 Mons
- ☞ pour la France : par virement au Compte CCP Lille 10 036 48 S
- ☞ pour l'étranger (sauf la France) : par virement international au Compte n°IBAN: BE 26 0000 7280 1429 BIC: BPOTBEB1 au nom de la *S.B.P.M.e.f.*, rue de la Halle 15, B 7000 Mons, Belgique. Les personnes résidant à l'étranger qui ne peuvent faire un virement à ce compte sont invitées à envoyer un mandat postal international. Tout chèque bancaire non encaissable en Belgique devra être majoré de 12,50 € pour frais d'encaissement.

Éditeurs responsables et rédacteurs en chef :

– pour *Math-Jeunes* : G. NOËL, Rue de la Culée 86, 6927 Resteigne

– pour *Math-Jeunes Junior* : A. PATERNOTTRE, Rue du Moulin 78, 7300 Boussu

N°106 J Vingt-cinquième année 2004

MATH-JEUNES JUNIOR

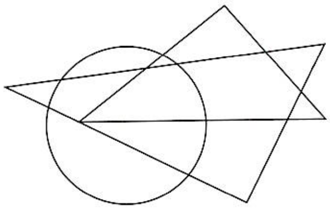
Sommaire

Couper–Toucher (1)

Y. Noël-Roch

Question de vocabulaire

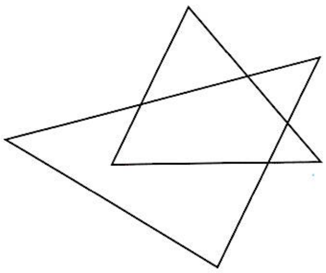
Voici deux triangles T_1 et T_2 et un cercle C.



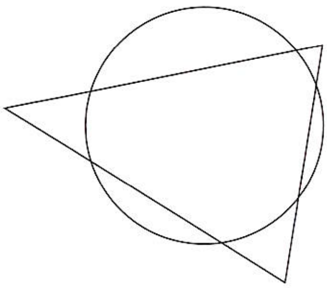
Si tu comptes les points communs à au moins deux des trois éléments T_1, T_2, C, la figure en présente onze.

Dans la suite, nous utiliserons l'expression « points d'intersection », avec la signification suivante : **points communs à au moins deux des trois éléments T_1, T_2, C**. De plus, « onze points d'intersection » signifiera « **exactement onze** points d'intersection »... Plus généralement le nombre n demandé signifiera partout « exactement n ».

Recherche



1. Voici deux triangles T_1 et T_2. Dessine un cercle C de manière à obtenir **huit** points d'intersection.



2. Voici un triangle T_1 et un cercle C. Dessine un triangle T_2 de manière à obtenir **treize** points d'intersection.

3. En choisissant toi-même deux triangles T_1, T_2 et un cercle C, recherche le plus grand nombre de points d'intersection qu'il est possible d'obtenir ?

4. Pose-toi la même question en utilisant deux cercles et un triangle.

5. Sur une feuille de format A4,

– dessine un cercle dont le centre est au centre de la feuille et dont le rayon mesure 3 cm,
– marque un point a sur le cercle,
– dessine la droite D tangente au cercle en a,

– sur D, de part et d'autre de a, marque le point p à $4,5$ cm de a et r à 7 cm de a.

Imagine le sommet s du triangle prs qui « se promène » sur la feuille, n'importe où sauf sur la droite D. Selon les positions de s, le triangle prs et le cercle ont 1, 2, 3, 4 ou 5 points communs. En utilisant cinq couleurs différentes, fais apparaître les zones correspondantes sur ta feuille.

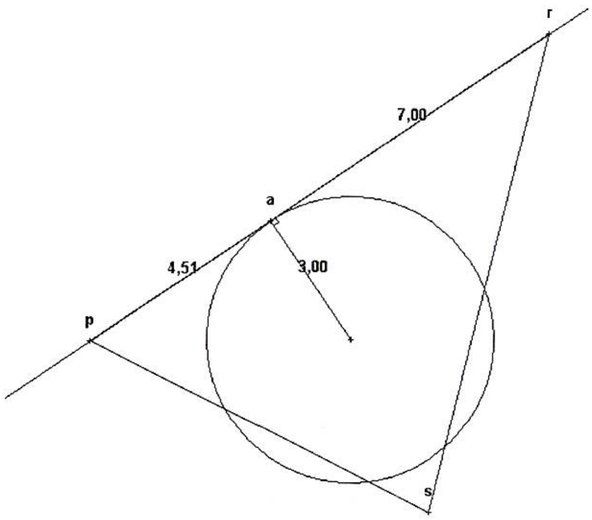
Une aide informatique possible

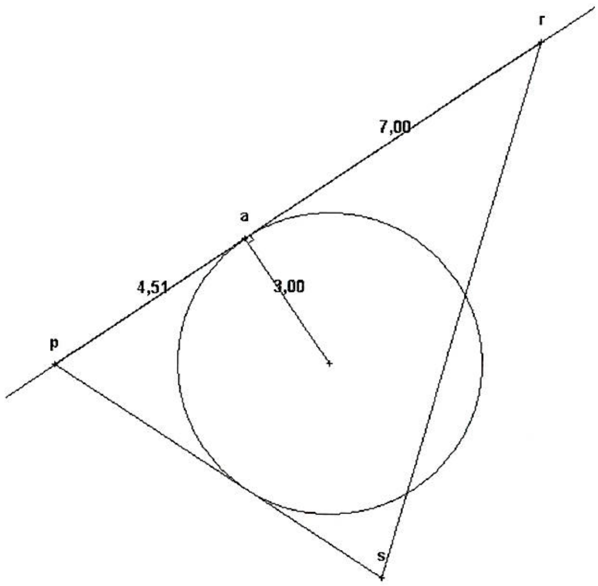
Cette dernière recherche peut se faire en n'utilisant rien d'autre que du papier, un compas, un crayon et une latte. Tu peux aussi visualiser la situation sur ordinateur, en utilisant soit `Cabri-géomètre`, soit le logiciel `Déclic` que tu peux télécharger gratuitement à l'adresse

`http://home.nordnet.fr/~eostenne/declic.htm`

et qui de plus se trouve sur le cd-rom annexé à ce numéro de *Math-Jeunes Junior*.

Tu peux alors représenter les éléments de départ de la figure, puis déplacer à l'aide de la souris le dernier point s. Tu matérialises ainsi le « triangle variable prs » et tu peux visualiser les passages d'une zone à une autre. À titre d'illustration, voici deux copies d'écran obtenues avec `Déclic` :





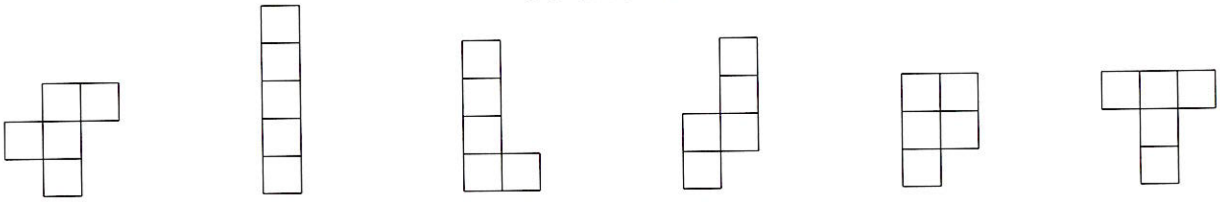
Examine des circonstances particulières :
– le point s traverse le cercle,
– il traverse la droite pr,
– ...

Résume tes constatations en faisant apparaître les lignes dont la traversée modifie le nombre de points d'intersection.

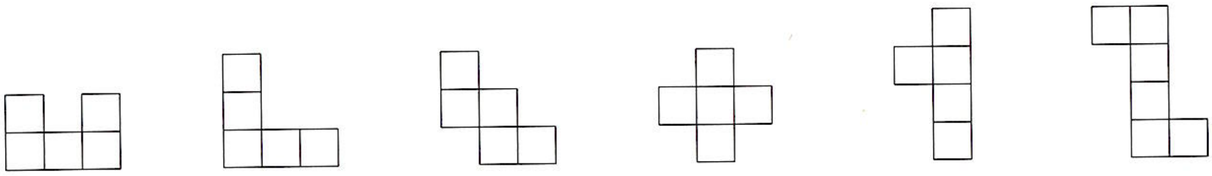
À suivre

Des animaux et des 12 pentaminos

F. Drouin



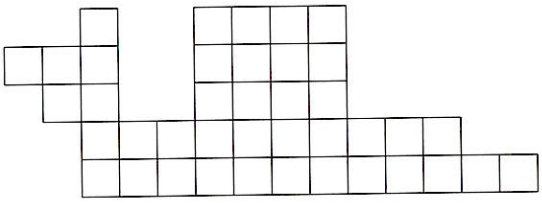
1 2 3 4 5 6



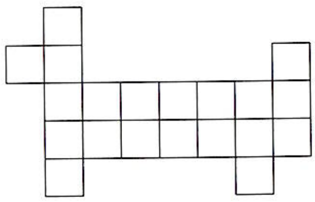
7 8 9 10 11 12

Ces 12 pièces ont été présentées par Claude Villers dans de récents numéros de « *Math-Jeunes Junior* ». Tu as construit des rectangles en utilisant certaines de ces pièces. Tu as sans doute remarqué que l'utilisation de toutes ces 12 pièces n'était pas immédiate.

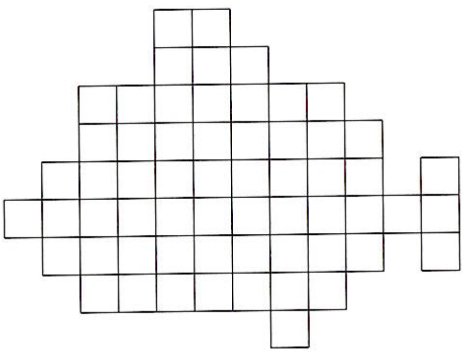
En utilisant certaines pièces, avec un peu d'imagination et de fantaisie, d'autres silhouettes apparaissent.



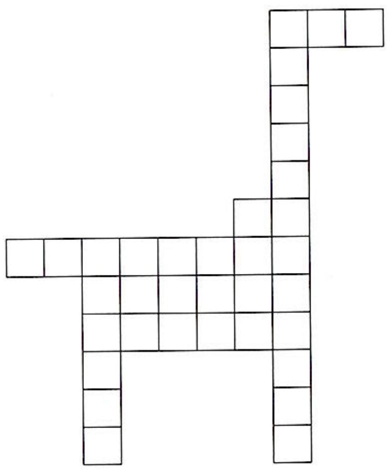
L'escargot



Le basset

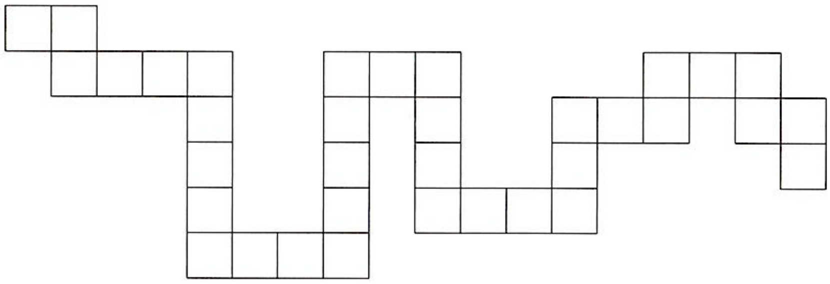


La limande



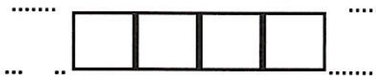
La girafe

Un boa nous a fait nous poser de nombreuses questions.



7 pièces du jeu sont utilisées. En modifiant leur placement ou leur position, d'autres dessins du boa sont possibles. Peut-il se refermer sur lui même de telle sorte que sa tête rejoigne sa queue et forme une « ligne »fermée ?

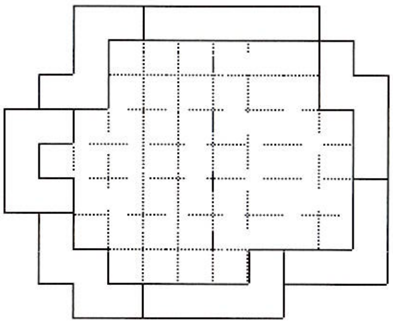
Après de nombreux essais, il semble impossible que le boa se referme ainsi :



Seules apparaissent des jonctions par un sommet ou par recouvrement d'un carreau :

Dans le cas où la jonction ne se fait que par un sommet, nous avons désiré trouver la plus grande surface entourée par le boa.

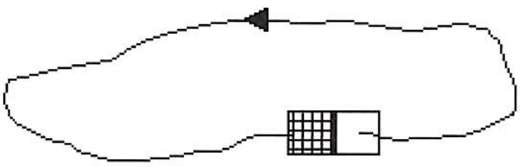
Aucun de nous n'a trouvé d'aire supérieure à 49 carreaux (un exemple est donné ci-dessous).

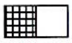
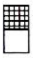
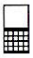
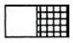


Seras- tu plus performant ? Et quelle aire minimum trouveras-tu ?

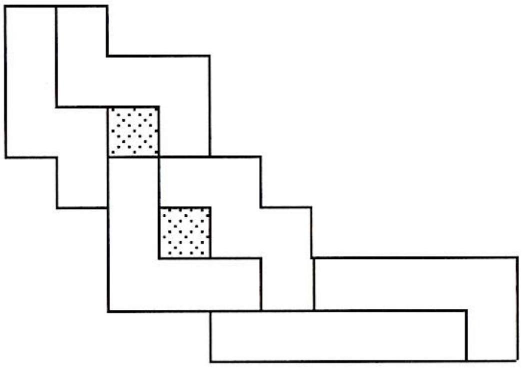
Le fait de ne pouvoir faire la jonction par un côté de carreau nous a fait chercher la raison de cette impossibilité. Voici une démonstration qui, nous l'espérons, te convaincra :

Posé sur un damier (cases alternativement noires et blanches), imaginons un boa refermé par un côté de carreau .



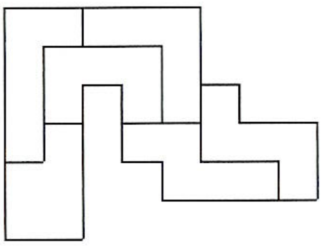
A la suite des deux carrés dessinés ci-dessus, il y aura un certain nombre d'ensembles de deux carrés  ou  ou  ou  Il faut donc un nombre pair de carrés pour revenir au départ. Avec 35 carrés (7 pentaminos), la boucle ne peut donc se refermer.

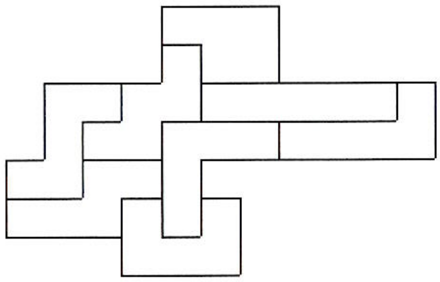
Cependant, avec 6 pièces choisies parmi les 7, le boa peut donc se refermer. L'aire maximale et l'aire minimale entourées nous ont intéressés.



Voici ci-dessus une aire minimale de deux carreaux. Feras-tu mieux ?

Un élève a découvert que la pièce 5 pouvait être utilisée dans la réalisation d'un boa... Les recherches sont alors relancées !

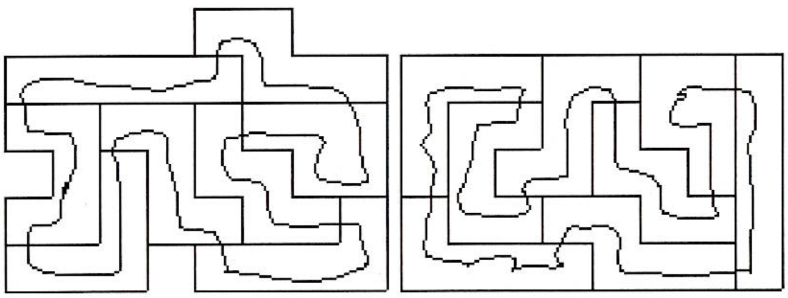




Avec six pièces choisies parmi les huit ou avec les huit pièces, le boa a réussi à se refermer sur lui-même, ne laissant aucun carreau à l'intérieur. Tu as donc ici des exemples d'aires minimales, nous te laissons explorer les aires maximales entourées.

En utilisant les huit pièces, une autre question a surgi. Les huit pentaminos forment un ensemble de quarante carreaux. Et si le boa pouvait se replier à l'intérieur d'un rectangle 5×8 ?

Ce type de rangement nous a paru bien difficile, mais Claude Pagano, un collègue retraité est venu à notre aide. Après avoir presque réussi, il nous a fait un second envoi avec un rangement possible.



A toi maintenant de chercher le rangement du boa formé de six pièces choisies parmi les huit dans un rectangle 6×5...

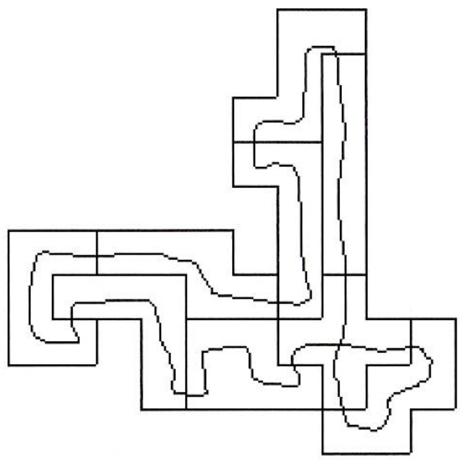
Les élèves sont vraiments étonnants. Grâce à leur envie de tester des pistes nouvelles, le problème a trouvé de nouveaux prolongements.

La pièce 10 s'est révélée utilisable pour faire un boa. Son corps se trouve faire un « 8 »,

mais le serpent ne devrait pas souffrir de cette position. Surprise ! Avec ces neuf pièces, il est possible de réaliser un boa se refermant par un côté de carreau.

L'utilisation de ces neuf pièces représentant un ensemble de quarante-cinq carreaux semble contredire la preuve utilisant le boa posé sur un damier. Il n'en est rien. Le carreau central de la pièce est utilisé 2 fois, l'ensemble des neuf pièces peut donc être considéré comme un trajet utilisant quarante- six carreaux (nombre pair ...).

Les problèmes cités précédemment restent d'actualité : aires minimale et maximale entourées, rangement dans un rectangle 9×5. Un exemple de boa utilisant les 9 pièces et complètement replié sur lui même vous est donné ci-dessous.



Nous pensons t' avoir donné envie de continuer nos recherches à propos de cette rencontre entre les pentaminos et le monde animal. Nous sommes évidemment preneurs de tes remarques et nouvelles découvertes éventuelles .

François DROUIN et les élèves du « Club Mathématiques »

Collège Les Avrils

F-55300 SAINT MIHIEL (FRANCE)

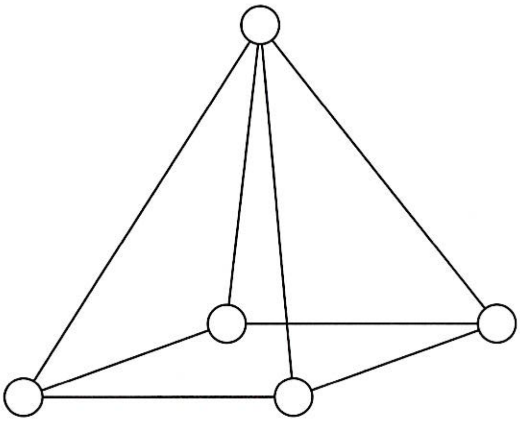
Jeux

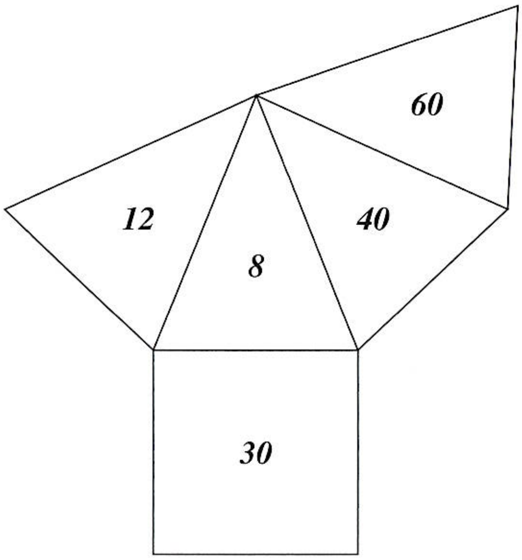
Y. Noël-Roch

---

1. Pyramide numérisée.

Aux sommets d'une pyramide à base carrée, nous avons placé les nombres de 1 à 5. Retrouve la position des cinq nombres sur la pyramide à partir des informations données sur un développement de celle-ci : les nombres notés dans chaque face sont les produits des nombres situés aux sommets appartenant à cette face.





2. Où est le produit ?

Le produit de 8 765 432 par 9 876 est un des cinq nombres suivants. Sans avoir recours à une calculatrice ni calculer le produit, reconnais ce produit.

96 028 429 372
107 648 315 932
9 431 695 202
86 567 406 432
80 420 471 671

3. Magie et calculatrice.

Un magicien (M) annonce à un spectateur (S) qu'il va entrer en communication avec la calculatrice de ce spectateur.

Voici leur dialogue :

M : Entre un nombre de deux chiffres dans ta calculatrice.

S : C'est fait !

M : Multiplie-le par 3.

S : C'est fait !

M : Multiplie ton résultat par 7.

S : C'est fait !

M : Multiplie ton résultat par 13.

S : D'accord !

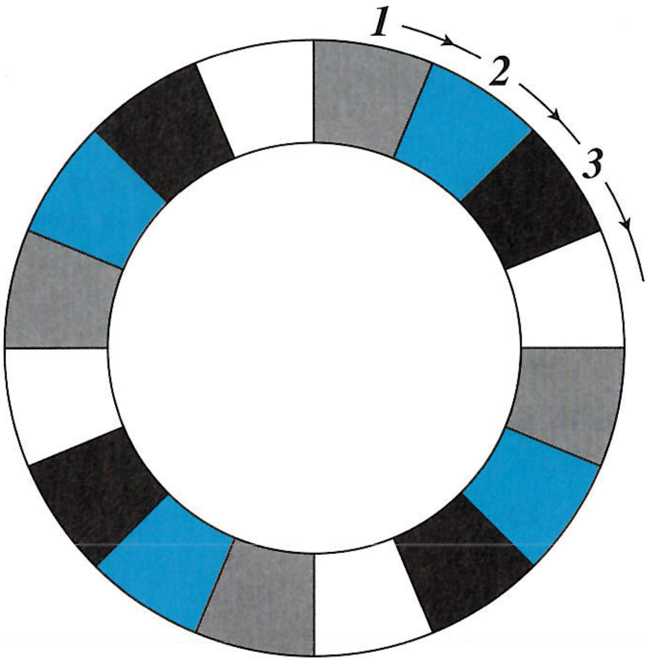
M : Multiplie enfin ton résultat par 37.

S : C'est fait... heureusement que je peux disposer d'une calculatrice !

M s'est arrangé pour avoir l'air distrait à l'un ou l'autre moment et déclare : « *j'ai été distrait à un mauvais moment et je ne peux pas te dire exactement le nombre écrit sur l'écran mais je vois qu'il est formé du nombre que tu as choisi au départ écrit trois fois de suite* ».

Comment le magicien sait-il cela ... et pourquoi ne peut-il pas recommencer son tour ?

4. Drôle d'horloge !



On tourne dans le sens des aiguilles d'une montre à partir de 1, 2, 3, ... comme indiqué sur le dessin et sans s'arrêter après un tour, deux tours...

4.1. Quelle est la couleur de la case quand on arrive en 2003 ?

4.2. Comment décrire tous les nombres des cases grises ?

4.3. Que peut-on dire du produit de deux cases voisines, sans connaître ces cases ?

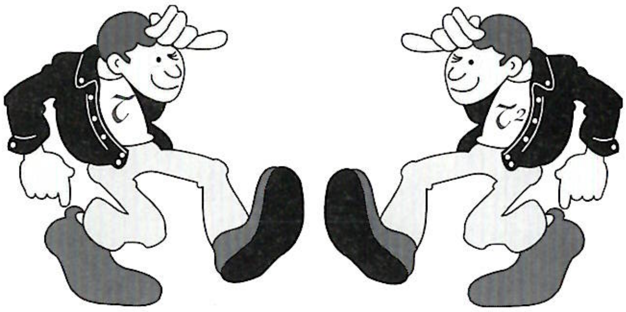
4.4. Que peut-on dire du produit de deux cases séparées par une case ?

Solutions des jeux : pages 24

Les frères Hick 9

B. Honclaire

Agence de détectives privés
Les frères Hick
Recherches en tous genres



Ami lecteur,

$\mathcal{T}$ et $\mathcal{T}^2$ te dévoilent leurs agencements de diviseurs d'un nombre et ensuite $\mathcal{T}$ posera quelques défis à $\mathcal{T}^2$. A toi de l'aider ! Bon courage et bon amusement.

Bernard Honclaire

Où il est question de régularité !
Les diviseurs d'un nombre tu organiseras
Logique et méthodique tu seras
Un schéma géométrique tu obtiendras
Un sentiment d'harmonie et de beauté t'envahira

$\mathcal{T}^2$ (sur un ton interrogateur)– « ***J'ai cherché les diviseurs des nombres que tu proposais (pour rappel : 10, 20, 36, 64, 30...) et j'ai trouvé que le nombre 64 était plus facile ! J'ai pensé qu'il suffisait de les mettre à la queue leu leu...!? Regarde !***

$$1 \qquad 2 \qquad 4 \qquad 8 \qquad 16 \qquad 32 \qquad 64$$

Et j'ai fait comme à l'école primaire, je les ai reliés par des flèches $\times 2$! »

$$1 \longrightarrow 2 \longrightarrow 4 \longrightarrow 8 \longrightarrow 16 \longrightarrow 32 \longrightarrow 64$$

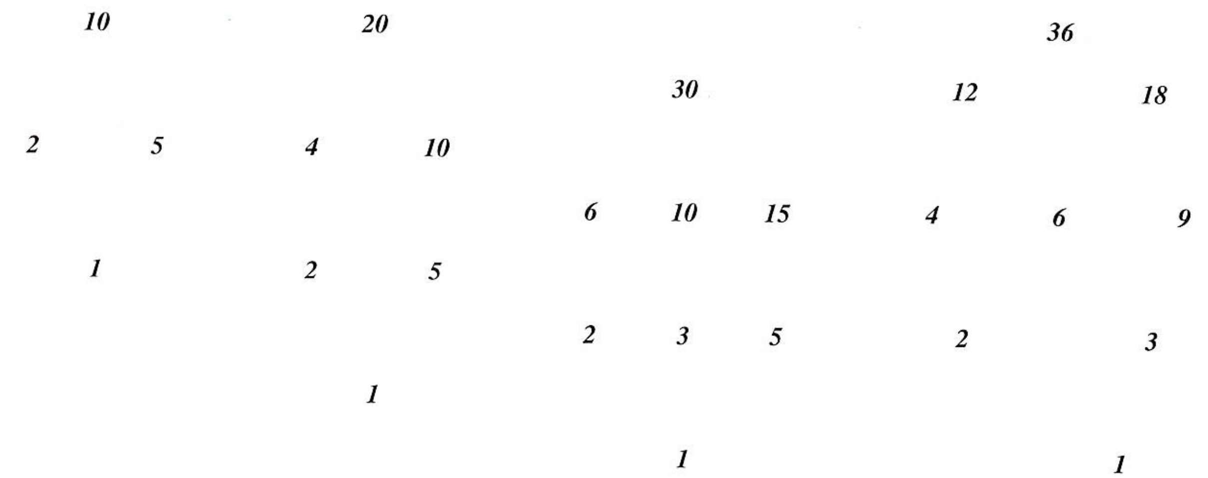
$\mathcal{T}^2$ (continue en observant les réactions de son frère) – « ***J'ai appelé ce nombre, nombre ligne !*** »

$\mathcal{T}$ (partant d'un gros éclat de rire) – « ***p étant un nombre premier, nous appellerons donc nombre ligne, tout nombre de la forme p^n !*** »

$\mathcal{T}^2$ – « ***Stop ! Tu ressembles de plus en plus à mon ancien prof. de maths !*** »

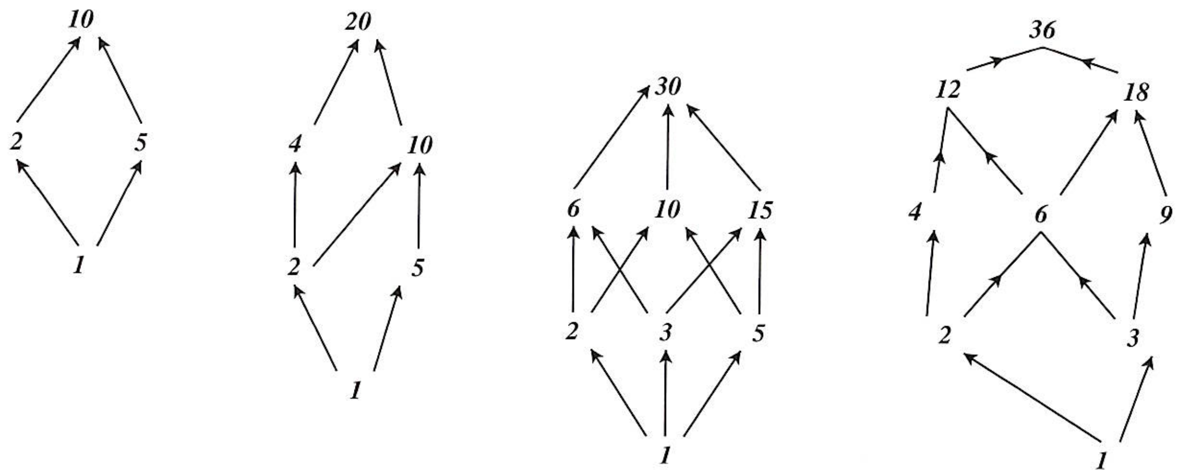
$\mathcal{T}$ (continuant de plus belle, sur un ton magistral) – « ***Combien y-a-t-il de nombres lignes strictement inférieurs à 50 ? Vous répondrez à cette question pour la prochaine leçon !*** »

$\mathcal{T}^2$ (esquissant un léger sourire) – « ***Pour les autres nombres que tu me conseillais, je n'ai pas pu utiliser la même organisation ! Regarde, j'ai fait des étages, comme dans un immeuble !***



Le nombre 1 *est toujours au rez-de-chaussée et le nombre donné au dernier étage, tout en haut; au premier étage, j'ai placé les nombres premiers...!!! (Il y en a qui portent bien leur nom!)*

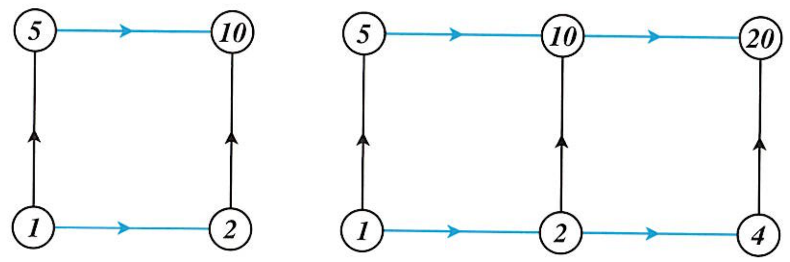
Puis j'ai disposé les autres pour pouvoir les joindre par des flèches $\times 2$, $\times 3$, *ou* $\times 5$...; *je n'ai mis que des flèches partant de nombres premiers, car sinon il y en aurait eu beaucoup trop, et malgré cela, je trouve que c'est moins joli...!* »

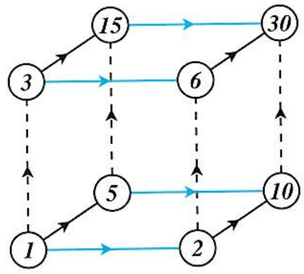


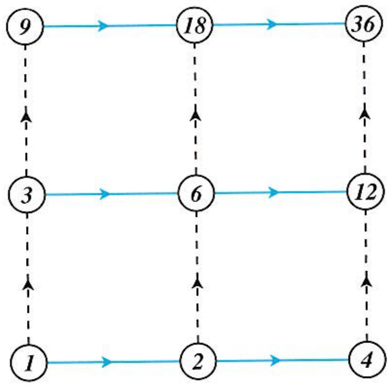
$\mathcal{T}$ (redevenu très sérieux et cachant mal son admiration) – « *Pas mal! Nous allons arranger cela par un peu de régularité! Toutes les flèches* $\times 2$ *, nous allons les dessiner de la même façon! Idem pour les autres!* »

$\mathcal{T}^2$ (incrédule) – « *Oui! Un petit coup de baguette magique et hop!!!* »

$\mathcal{T}$ – « *Regarde! Tu vas comprendre pourquoi on parlait d'harmonie et de beauté dans l'énigme ...!* »







$\mathcal{T}^2$ (admiratif) – « *J'en vois un en 3D...! C'est possible...?... 30... c'est comme quand on dessine une boîte!* »

$\mathcal{T}$ (continuant superbement) - « *Eh oui! Il se décompose en 3 facteurs premiers!* »

$\mathcal{T}^2$ (imitant son frère) – « *Alors, nous appellerons 3D, les nombres formés de 3 facteurs premiers... et... 2D, ceux formés de 2 facteurs premiers!* »

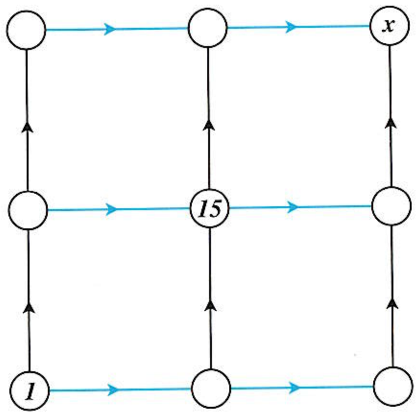
$\mathcal{T}$ (amusé, il enchaîne) – « *Combien y-a-t-il de nombres 2D strictement inférieurs à 50 et de nombres 3D strictement inférieurs à 100? Vous répondrez également à cette question pour la prochaine leçon!* »

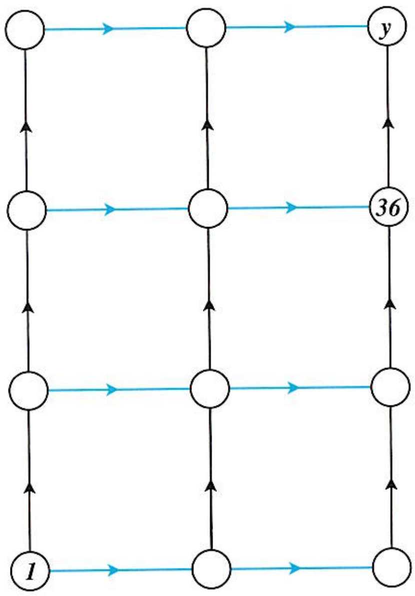
$\mathcal{T}^2$ (un peu inquiet) – « *Ici, nous entrons dans la science fiction!* »

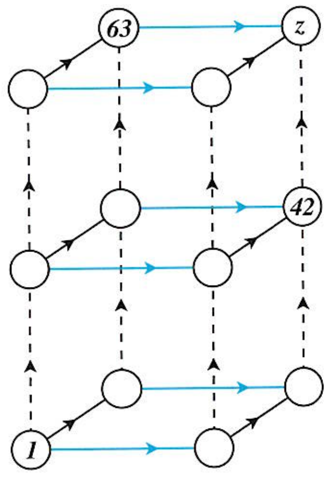
$\mathcal{T}$ - « *Merci, tu me donnes une idée!* (triomphant, il ajoute) *Et comme question subsidiaire : quels sont les plus petits 4D et 5D?* »

$\mathcal{T}^2$ – « *Eh oui! Je l'avais prédit! Nous voilà dans le tourbillon des dimensions!* »

$\mathcal{T}$ (mystérieux)– « *Dans chacun de ces treillis incomplets, es-tu capable de retrouver le nombre mystérieux?* »







Ami lecteur, peux-tu aider $\mathcal{T}^2$ à répondre à toutes ces questions? Si tu es intéressé par ces problèmes de diviseurs et de treillis, tu trouveras sur le CD inséré dans ce numéro une série de jeux édités par le Centre de Didactique des Sciences *de l'Université de Mons, et notamment « Le nombre interdit » qui utilise le même support.*

À suivre

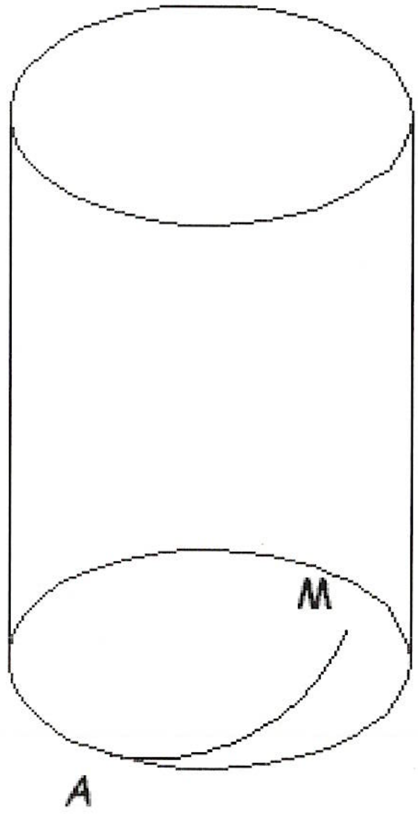
Miam, Miam

Cl. Villers

Voici certainement de quoi vous délecter dans le domaine de la « gastronomie ». Bien préparées, avec tout ce qu'il faut dans la sauce, vous obtenez un plat particulièrement succulent.

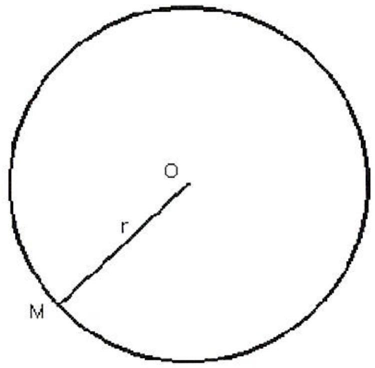
Mais ici ces pâtes vont aussi nous donner l'occasion de voyager dans le domaine mathématique.

Si vous portez un peu d'attention à ces pâtes, vous constaterez, sans peine qu'elles ont toutes une forme hélicoïdale. Cela signifie simplement que si un point M est mobile sur le bord de cette forme alors ce point M décrit une ligne courbe dans l'espace. Cette courbe est appelée « hélice circulaire ». Intéressons-nous à une partie élémentaire d'une telle hélice. Vous admettrez sans peine qu'elle est inscrite sur la face latérale d'un cylindre.
Après avoir décrit un « tour » complet le point mobile M a « monté »(ou « descendu », selon le sens du mouvement)d'une certaine hauteur qui s'appelle : le pas (désigné dès lors par la lettre p). Vous avez très certainement déjà dû entendre parler, par ailleurs du « pas de vis ».



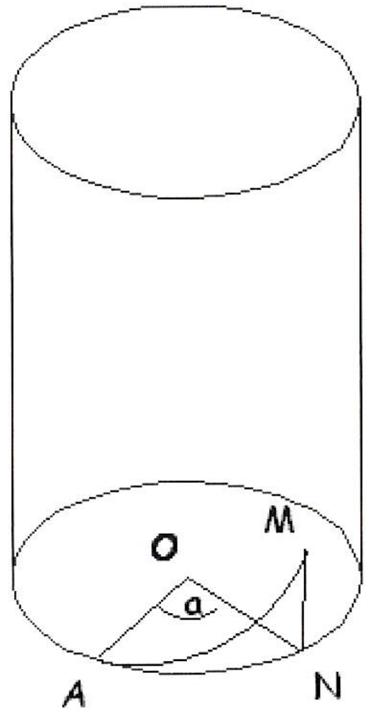
Comme le mouvement est régulier, nous en concluons
– qu'après un quart de tour, M a monté de $\frac{p}{4}$
– qu'après un demi tour, M a monté de $\frac{p}{2}$
– qu'après trois-quarts de tour, M a monté de $\frac{3p}{4}$.
Et puis cela recommence !

Vu de dessus le déplacement élémentaire d'un tour de M a la forme d'un cercle ayant un certain rayon r.
La longueur du cercle est $2\pi r$.



Mais attention!!! Le point mobile ne parcourt pas ce cercle.

Voici maintenant un croquis d'une telle situation après un déplacement au départ de A.
M a alors atteint la hauteur $h = |MN|$ qui est proportionnelle à la longueur de l'arc (AN). Donc $h = k \times |(AN)|$
k est un coefficient de proportionnalité.
Nous allons essayer de le calculer.
Mais cette longueur de l'arc (AN) est elle-même proportionnelle à la mesure a de l'angle balayé par $[OA]$ pour arriver en $[ON]$.
De plus, l'unité d'angle utilisée est le radian (2π radians correspondant à 360 degrés).
On a donc : $\dfrac{|(AN)|}{2\pi r} = \dfrac{a}{2\pi}$ ou $|(AN)| = ar$



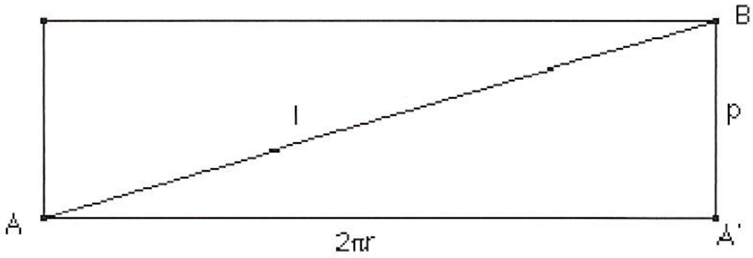
Or, après un tour complet, $h = p$ (rappelez-vous, p est le pas) et $|(AN)| = 2\pi r$

Dans ce cas la relation $h = k|AN|$ devient $p = k \times 2\pi r$ ce qui fournit $k = \dfrac{p}{2\pi r}$

Le coefficient k est donc un nombre qui dépend du rayon de l'hélice circulaire et de son pas p.

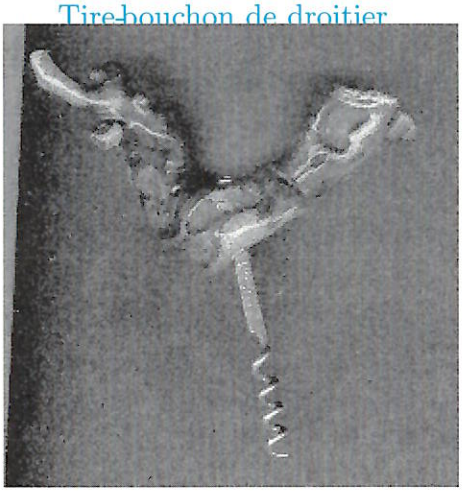
h dépend de la valeur de a et est donnée par une fonction (de a) qui est du premier degré en a (comme pour $y = kx$ que vous avez peut-être plus l'habitude de manipuler). Son graphe cartésien tracé dans le plan est donc rectiligne.
Si on développe le cylindre supportant une spire de l'hélice, on obtient la figure ci-après qui nous permet, grâce au théorème de Pythagore, d'obtenir une formule nous donnant la longueur d'une spire de l'hélice circulaire.

C'est : $1 = \sqrt{4\pi^2 r^2 + p^2}$
Si l'hélice comporte n spires alors sa longueur est nl

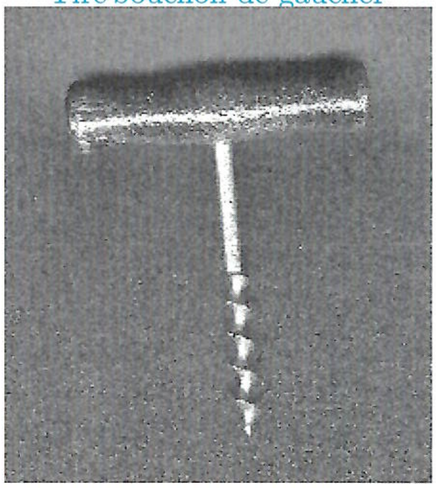


Cette forme hélicoïdale se rencontre souvent dans la nature ou dans des objets divers. Le tire-bouchon en est un exemple bien connu. Mais savez-vous qu'il existe des tire-bouchons pour droitiers dans lesquels l'hélice « tourne » vers la droite et des tire-bouchons de gauchers dans lesquels l'hélice « tourne » vers la gauche. En voici des illustrations.

Tire-bouchon de droitier



Tire-bouchon de gaucher



La structure de l'ADN est aussi un exemple de structure hélicoïdale. Deux hélices y sont imbriquées comme le montre la figure suivante (tirée du livre (Conjugatet Oligomers, Polymers, and Dendrimers : From Polyacétylene to DNA par Jean-Luc Brédas chez De Boek).

Un autre exemple est la structure du téflon, ce produit qui « n'attache pas ». En voici une illustration (tirée de « The Physics of Polymers » de Gert Strobl chez Springer.

J'espère que vous avez bien digéré cette ... mathématique, initialement alimentaire. En tous les cas, ce qui précède doit vous convaincre que ce qui peut paraître très banal est cependant susceptible de recevoir une exploitation intéressante.

Bon appétit et à votre santé !

Olympiades

C. Festraets

Participons à l'Olympiade

Durant cette année scolaire, aura lieu la vingt-neuvième édition de l'Olympiade Mathématique Belge (OMB).

Comme *presque* tout le monde le sait, l'OMB est une épreuve mathématique ouverte à tous les élèves de l'enseignement secondaire, de la première à la sixième. Depuis cinq ans déjà, cette épreuve est divisée en trois concours. Ceux-ci se déroulent en parallèle. La « Mini-Olympiade » accueille les élèves de première et de deuxième années ; la « Midi-Olympiade » est réservée aux élèves de troisième et de quatrième années ; enfin, la « Maxi-Olympiade » est destinée aux élèves de cinquième et de sixième années.

Voici en quelques mots le principe commun à tous ces concours. Pour chacun d'entre eux, il y a trois étapes : une éliminatoire qui a lieu dans les locaux mêmes de ton école, une demi-finale organisée dans des centres régionaux et une finale qui se tient à Namur. Le calendrier de la vingt-neuvième Olympiade Mathématique Belge est le suivant :

éliminatoire : le 14 janvier 2004
demi-finale : le 3 mars 2004
finale : le 21 avril 2004
proclamation : le 8 mai 2004

Evidemment, ton professeur reçoit toutes les informations utiles sur cette Olympiade. Alors si tu désires en savoir plus, il te suffira de lui poser les questions auxquelles cet article n'apporte pas de réponse. Il se fera certainement un plaisir de mieux t'informer.

Se préparer

Si tu souhaites te préparer à cette épreuve, tu trouveras plus loin quelques problèmes posés dans le passé. Ils vont non seulement éveiller ta curiosité mais encore te permettre de te familiariser avec la forme du questionnaire.

Comme tu vas bientôt le constater, il y a, pour toutes les questions, cinq réponses proposées. Une seule d'entre elles est correcte. Par contre, certaines questions n'ont pas reçu de réponse « pré formulée ». Dans ce cas, ce que tu dois trouver est un nombre entier appartenant à l'intervalle [0, 999], autrement dit un nombre entier positif, éventuellement nul, strictement inférieur à 1000. Ne réponds que si tu es sûr de ta réponse. En effet, la manière de calculer ton score lors du concours est la suivante : 5 points pour une bonne réponse, 0 pour une mauvaise réponse. Tout à fait normal, diras-tu ! Mais, si tu t'abstiens de répondre à une question, tu reçois 2 points. Là tu te demandes peut-être quel est le but de ce procédé ? Mais précisément de te faire prendre conscience qu'il vaut mieux ne rien répondre plutôt que de répondre n'importe quoi. Enfin tu dois savoir qu'il est nécessaire de répondre à un minimum de 5 questions pour être classé. Les problèmes que tu vas résoudre ci-dessous ont été choisis dans le tome 3 des OMB reprenant toutes les questions posées de 1988 à 1993. Malheureusement, ce tome n'est plus en vente, il est épuisé. Par contre, si tu désires peaufiner ta préparation et évaluer ton potentiel olympique, tu peux acquérir les tomes 4 et 5 des OMB. Voici tous les renseignements nécessaires pour cela :

Olympiades Mathématiques Belges
Tome 4 (1994-1998) : 5 euros
Tome 5 (1999-2002) : 6 euros
Tome 4 + tome 5 : 10 euros
Ajouter 1,60 euros de port pour un tome et 2,30 euros de port pour deux tomes.
Les commandes sont à adresser à la

SBPMef, rue de la Halle, 15, 7000 Mons

Compte : 000-0728014-29

Fax et téléphone : 065 37 37 29.

Exerçons-nous !

1. Calcul de fractions(demi-finale - 1990)
Laquelle de ces valeurs est entière ?
Ⓐ $\dfrac{\frac{\frac{1}{2}}{3}}{4}$ Ⓑ $\dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{4}}$ Ⓒ $\dfrac{\frac{1}{\frac{2}{3}}}{4}$ Ⓓ $\dfrac{1}{\frac{\frac{2}{3}}{4}}$ Ⓔ $\dfrac{1}{\frac{2}{\frac{3}{4}}}$

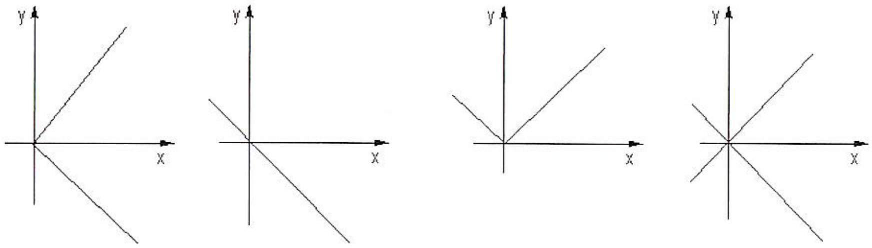
2. Somme(éliminatoire - 1991)
La somme de trois nombres impairs consécutifs est 27. Le plus grand de ces nombres est forcément
Ⓐ 9 Ⓑ 11 Ⓒ 13 Ⓓ 15 Ⓔ 23

3. Nombre de diviseurs(demi-finale - 1991)
Sans réponse préformulée - En comptant 1, combien de diviseurs naturels possède le nombre

$$2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11 \times 13 \times 17 = 510\,510 \text{ ?}$$

4. Inégalités(éliminatoire - 1991)
Les nombres x, $9x$ et 9 sont les mesures respectives des côtés d'un triangle. Quelle inégalité parmi les suivantes est toujours correcte ?
Ⓐ $x < \frac{10}{9}$ Ⓑ $8x > 9$ Ⓒ $9x > x + 9$
Ⓓ $x > 9(x - 1)$ Ⓔ $x > 9(x + 1)$

5. Graphiques(demi-finale - 1989)
Les graphiques devraient représenter l'ensemble des points dont les coordonnées vérifient l'égalité écrite en légende :



(1) $x = |y|$ (2) $x = -y$ (3) $|x| = |y|$ (4) $|x| = y$

Mais deux légendes ont été interverties. Lesquelles ?

A (3) et (4) B (1) et (2) C (1) et (3)

D (2) et (4) E (1) et (4)

6. Quadrilatères inscriptibles(demi-finale - 1990)

Lequel des quadrilatères suivants n'est pas nécessairement inscriptible dans un cercle ?

A un carré B un rectangle C un trapèze isocèle

D un quadrilatère ayant deux angles opposés de 90°

E un quadrilatère dont trois angles mesurent respectivement 40°, 120° et 90°.

7. Frères et soeurs(demi-finale - 1990)

Dans une classe de 28 élèves, 15 ont un frère, 14 ont une soeur et 9 sont enfants uniques. Combien d'élèves ont un frère et une soeur ?

A 1 B 7 C 10 D 29 E un autre nombre

8. Moyenne(demi-finale - 1993)

Sans réponse préformulée - La moyenne arithmétique de 5 nombres vaut 5 400. Si chaque nombre augmente de 100, de combien augmente leur moyenne arithmétique ?

9. L'escargot(éliminatoire - 1990)

Un escargot avance de 10 cm, tourne à droite de 60°, avance de 20 cm, tourne à droite de 120°. Il répète immédiatement ces quatre opérations dans le même ordre. La trace qu'il laisse sur le sol sera

A un carré B un rectangle

C un parallélogramme D un losange

E aucune de ces quatre figures

10. Temps de correction(éliminatoire - 1989)

Un correcteur des Olympiades corrige en moyenne deux questionnaires par minute. A onze heures du matin, il a corrigé la moitié des questionnaires et, à midi, il a corrigé les deux tiers. S'il ne s'arrête pas, combien de questionnaires lui restera-t-il à corriger à une heure de l'après-midi ?

A 24 B 120 C 240 D 360 E 720

11. Cyclisme(demi-finale - 1988)

Sans réponse préformulée - Un cycliste part d'une gare à midi et emprunte, à une vitesse de 20 km/h, la piste cyclable qui longe la voie ferrée. En cours de route, il fait une pause de $\frac{3}{4}$ d'heure. Arrivé à destination, il décide de rentrer en train mais doit attendre son train durant

45 minutes. Celui-ci roule en moyenne à 80 km/h. Notre cycliste arrive à sa gare de départ à 19h30. Quelle distance, en km, a-t-il parcourue à vélo ?

12. Goutte à goutte(demi-finale - 1992)
Un verre conique se trouve sous un robinet dont l'eau tombe goutte à goutte de manière constante. Après une minute, le verre est rempli au quart de sa hauteur. Pour remplir entièrement le verre, il faudra
Ⓐ moins de 5 minutes
Ⓑ presque 10 minutes
Ⓒ un peu plus d'un quart d'heure
Ⓓ une bonne demi-heure
Ⓔ plus d'une heure

Solutions

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
D	B	128	D	A	E	C	100	C	B	16	E

Les lauréats du rallye-problèmes 2002-2003 sont

Pour *Math-Jeunes Junior* :
Numa Couniot, du CES Saint-Joseph à Chimay,
Adrien Depresseux, de l'A.R. Til Lorrain à Verviers
Thomas Radelet, de l'A.R. Vauban à Charleroi

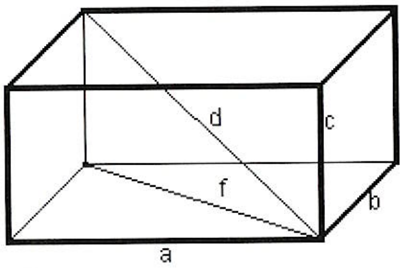
Pour *Math-Jeunes* :
Thierry Caebergs, de l'A.R. de Thuin
Mathilde Radelet, de l'A.R. Vauban à Charleroi
Olivier Van Hamme, de l'Institut Saint-Louis à Namur

Nos félicitations à ces lauréats qui recevront chacun le prix offert par la SBPMef.

Parallélépipèdes rectangles singuliers

A. Paternotte

Voici un parallélépipède rectangle, une figure de l'espace qui nous est très familière. Nous le notons PR ci-après. Rappelons seulement que ses six faces sont des rectangles, et que ses quatre diagonales ont même longueur.



Nous désignons par :

a,b,c la longueur des trois arêtes issues d'un même sommet

d la mesure de la diagonale du PR

f la mesure de la diagonale d'une face (celle de dimensions a et b sur le dessin.)

Il est clair que a,b,c,d,f sont des nombres strictement positifs.

Quelle relation lie le nombre d aux trois nombres a, b, c ?

Le théorème de Pythagore fournit successivement les égalités :

$d^2 = f^2 + c^2$ et $f^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow \boldsymbol{d^2 = a^2 + b^2 + c^2}$ (1)

Comment choisir les 4 nombres $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{d}$ pour qu'ils soient tous les quatre naturels ?

Prouvons que quels que soient les nombres $\boldsymbol{x}$,$\boldsymbol{y}$,$\boldsymbol{z}$, (et en particulier si $\boldsymbol{x}$,$\boldsymbol{y}$,$\boldsymbol{z}$ sont des naturels) on a :

$$(\boldsymbol{x^2 + xy + y^2})^2 = [\boldsymbol{x}(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y})]^2 + [\boldsymbol{y}(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y})]^2 + [\boldsymbol{xy}]^2 \quad (2)$$

En effet :

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{x^2 + xy + y^2})^2 &= \boldsymbol{x^4 + x^2y^2 + y^4 + 2x^3y + 2x^2y^2 + 2xy^3} \\ &= (\boldsymbol{x^4 + 2x^3y + x^2y^2}) + (\boldsymbol{y^4 + 2xy^3 + x^2y^2}) + \boldsymbol{x^2y^2} \\ &= \boldsymbol{x^2}(\boldsymbol{x^2 + 2xy + y^2}) + \boldsymbol{y^2}(\boldsymbol{y^2 + 2xy + x^2}) + \boldsymbol{x^2y^2} \\ &= [\boldsymbol{x}(\boldsymbol{x + y})]^2 + [\boldsymbol{y}(\boldsymbol{y + x})]^2 + [\boldsymbol{xy}]^2\end{aligned}$$

Si donc on choisit deux nombres naturels $\boldsymbol{x}$ et $\boldsymbol{y}$ quelconques et non nuls et qu'on pose :

$$\boldsymbol{d = x^2 + xy + y^2} \,;\, \boldsymbol{a = x(x + y)} \,;\, \boldsymbol{b = y(x + y)} \,;\, \boldsymbol{c = xy}$$

alors on aura : $\boldsymbol{d^2 = a^2 + b^2 + c^2}$ avec $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$,$\boldsymbol{c}$,$\boldsymbol{d}$ tous naturels et non nuls.

Ainsi si on choisit $\boldsymbol{x = 7}$ et $\boldsymbol{y = 4}$, alors : $\boldsymbol{d = 93}$, $\boldsymbol{a = 77}$, $\boldsymbol{b = 44}$ et $\boldsymbol{c = 28}$.

Vérifie avec la calculette que $\boldsymbol{93^2 = 77^2 + 44^2 + 28^2}$.

Vérifie aussi que, quels que soient les naturels $\boldsymbol{x}$ et $\boldsymbol{y}$, on a toujours $\boldsymbol{a + b = c + d = (x + y)^2}$

Math-Jeunes Junior n° 106 J, 20–22, 2004

Le choix de x et de y se fait au hasard dans l'ensemble des nombres naturels non nuls (N_0.)

x peut donc être pair (p) ou impair (i) de même que y. Le tableau suivant donne, dans tous les cas possibles, la parité de a, b, c, d :

x	y	x^2	y^2	$x+y$	xy	a	b	c	d
p	p	p	p	p	p	p	p	p	p
p	i	p	i	i	p	p	i	p	i
i	p	i	p	i	p	i	p	p	i
i	i	i	i	p	i	p	p	i	i

L'observation de ce tableau montre que :

- Si x et y sont pairs alors a,b,c,d sont tous pairs.
- Si un au moins des nombres x , y est impair alors d est toujours impair ainsi qu'un seul des trois nombres a, b, c.

Et si le PR a deux faces opposées carrées ? ($a = b$ par exemple)

L'égalité (1) s'écrit alors $d^2 = 2a^2 + c^2$.

D'autre part si $a = b$ on a aussi $x = y$ et l'égalité (2) s'écrit : $[3x^2]^2 = 2[2x^2]^2 + [x^2]^2$

Si donc on choisit x quelconque dans N_0 et qu'on pose : $d = 3x^2$, $a = b = 2x^2$, $c = x^2$,

on aura bien $d^2 = 2a^2 + c^2$ avec a, c, d tous naturels.

Remarquons qu'on a aussi : $a = b = 2c$ (a est donc pair) et $d = a + c = 3\frac{a}{2}$

Ainsi si on choisit $x = 1$ alors $a = b = 2$, $c = 1$, $d = 3$ et on a bien $3^2 = 2^2 + 2^2 + 1^2$

Et si le PR est un cube ($a = b = c$) ?

L'égalité (1) s'écrit $d^2 = 3a^2$ ou, puisque a et d sont positifs,$d = a\sqrt{3}$. Examinons les deux facteurs de ce produit : $\sqrt{3}$ est un nombre irrationnel (décimal illimité et non périodique) et a est un nombre naturel non nul. Leur produit sera donc un nombre irrationnel. Dès lors, lorsque le PR est un cube dont l'arête est mesurée par un nombre naturel non nul, sa diagonale ne peut en aucun cas être aussi mesurée par un nombre naturel.

Comment enfin choisir les 5 nombres a, b, c, d,f pour qu'ils soient tous naturels ?

Les nombres a, b, c, d que nous recherchons doivent être tels que :

$$a^3 + b^2 + c^2 = d^2 \text{ (3) et } a^2 + b^2 = f^2 \text{ (4)}$$

Pour satisfaire à (3), nous avons vu plus haut qu'il suffit de choisir deux naturels non nuls x et y et de poser ensuite :

$$a = x(x+y)\,;\, b = y(x+y)\,;c = xy\,;d = x^2 + xy + y^2$$

Pour satisfaire à (4), on doit avoir :

$$\begin{aligned} f^2 = a^2 + b^2 &= x^2(x+y)^2 + y^2(x+y)^2 \\ &= (x+y)^2(x^2+y^2) \\ \text{et dès lors : } f &= (x+y)\sqrt{x^2+y^2} \end{aligned}$$

Mais f doit être un nombre naturel. Pour cela, il faut que $x^2 + y^2$ soit carré parfait. Il en sera ainsi si on choisit deux naturels non nuls u et v tels que $u > v$ et qu'on pose :

$$x = u^2 - v^2 \text{ et } y = 2uv$$

$$\begin{aligned}
\text{On a alors : } x^2 + y^2 &= (u^2 - v^2)^2 + (2uv)^2 \\
&= u^4 - 2u^2v^2 + v^4 + 4u^2v^2 \\
&= u^4 + 2u^2v^2 + v^4 \\
&= (u^2 + v^2)^2 \rightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = u^2 + v^2
\end{aligned}$$

Finalement pour que a, b, c, d, f soient tous des nombres naturels, on procédera dans l'ordre suivant

1) Choisir deux nombres naturels u et v tels que $u > v$

2) Calculer $x = u^2 - v^2$ et $y = 2uv$

3) Calculer $a = x(x + y)$; $b = y(x + y)$;$c = xy$; $d = x^2 + xy + y^2$

4) Calculer $f = (x + y)\sqrt{x^2 + y^2}$

Ainsi si on choisit $u = 4$ et $v = 1$, on obtient $x = 15$; $y = 8$

et il vient ensuite : $a = 345$; $b = 184$; $c = 120$; $d = 409$; $f = 391$

Vérifiez avec la calculette que $345^2 + 184^2 + 120^2 = 409^2$ et que $345^2 + 184^2 = 391^2$.

Vérifiez qu'on a encore $a + b = c + d = (x + y)^2$.

****

Et la suite ?

Détrompe-toi ! Ce qui suit n'est nullement la suite de ce qui précède.(Waouh... !) Cela n'a même rien à voir.

Si je te propose la suite des nombres naturels suivants : 7, 22, 11, 34, 17, 52, 26, ...

peux-tu la prolonger le plus loin possible ? Tu stoppes si tu arrives à 1.

Fais de même avec la suite suivante : 12, 6, 3, 10, 5, ...

Evidemment la difficulté est de trouver la « clef » qui permet de passer d'un terme de la suite au suivant.

Tente de la découvrir et construis toi-même des suites de nombres naturels qui respectent le même topo que les deux suites élaborées ci-dessus. Tu choisis le nombre de départ comme tu veux...pas trop grand quand même.

Après quelques essais, une conclusion s'imposera à toi naturellement. Laquelle ?

Je serais heureux que tu m'envoies tes suites ainsi que ta conclusion. Elles serviront de point de départ à un article qui paraîtra dans le prochain numéro de *Math-Jeunes Junior* .

N'oublie pas d'inscrire ton nom et celui de ton école.

Mon adresse : A. Paternottre, rue du Moulin 78, 7300 Boussu.

François Viète

S. Trompler

François Viète (1560 – 1603)

Il y a 400 ans mourait le mathématicien François Viète, considéré souvent comme l'inventeur de l'algèbre moderne. En réalité, ce n'était pas un « vrai » mathématicien. Pendant toute sa vie, il a partagé son activité entre la politique et la recherche des problèmes mathématiques les plus importants posés au seizième siècle.
A son époque, en effet, les jeunes gens brillants de bonne famille étaient le plus souvent aiguillés par leur père vers une carrière militaire ou une carrière juridique et politique. Il en fut ainsi pour François Viète, qui fit ses études de Droit à l'Université de Poitiers où il fut diplômé en 1560. Mais dès 1564 il abandonna la profession de juriste et devint le précepteur de la fille d'Antoinette d'Aubeterre. Prenant sa tâche très au sérieux, il préparait des leçons pour son élève dans de nombreux domaines, dont les sciences, et en particulier l'astronomie et la cosmologie. Ces sujets le passionnaient ainsi que les mathématiques qui s'y rapportaient et il continua de s'y intéresser jusqu'à la fin de sa vie. Ses premiers travaux scientifiques datent de cette période.

En 1573, il fut nommé conseiller au Parlement de Bretagne par le Roi Charles IX et y resta jusqu'en 1580.

Il devint conseiller royal privé. Mais des ennemis politiques et religieux l'obligèrent à s'éloigner de 1584 à 1589. Cette période , loin de la politique, fut la plus féconde de sa vie. Mais il fut rappelé par le roi Henri III , comme conseiller au Parlement à Tours , puis il servit Henri IV, notamment en décryptant des messages codés pendant la guerre d'Espagne.

Le roi d'Espagne Philippe II, persuadé que ses messages cryptés étaient indéchiffrables se plaignit au Pape, accusant le Français d'avoir usé de sorcellerie contre lui !

En 1593, le mathématicien néerlandais Adriaan Roomen proposa un problème « à tous les mathématiciens du Globe » (comme cela se faisait souvent à cette époque) et l'ambassadeur des Pays-Bas prétendit au Roi qu'aucun mathématicien français n'était assez fort pour relever le défi.

Le problème était la recherche de la solution d'un polynôme du 45ième degré. Viète en donna une solution le jour même et, mieux, il en trouva 22 autres le lendemain. Il avait reconnu, camouflée dans l'énoncé, que la solution était satisfaite par la corde d'un cercle de rayon un, qui intercepte un angle de 360°/45 et put ainsi remplacer le polynôme par une expression trigonométrique, sans difficulté pour lui.

Roomen fut émerveillé et une amitié se noua entre les deux mathématiciens, qui continuèrent à se proposer mutuellement des problèmes jusqu'à la fin de leur vie. Viète resta encore au service de Henri IV par intermittences jusqu'en 1602. Il mourut en 1603.

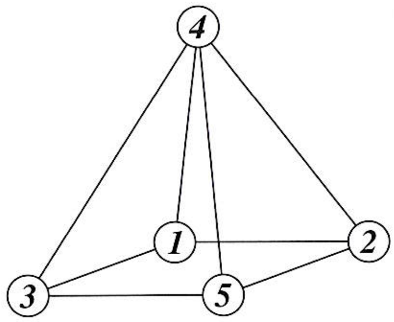
Que peut-on dire de son oeuvre ?

Voici quelques exemples de ce que les mathématiques lui doivent, mais il y en a d'autres :

- Il a introduit le premier système de notation algébrique en utilisant des lettres, aussi bien pour les quantités connues que pour les inconnues, utilisant des voyelles pour les inconnues et des consonnes pour les données. Comme, pour lui, une inconnue au premier degré représente une ligne, au deuxième degré une aire, au troisième degré un volume,et au quatrième degré un « survolume » il ne conçoit pas qu'on additionne des quantités à des degrés différents. Il rend donc ses équations homogènes, c'est à dire que tous les termes ont le même degré.
- C'est lui qui a introduit le terme « coefficient. »
- Il a donné des méthodes pour résoudre des équations du deuxième, troisième et quatrième degré (mais ne donnait que les racines positives. Les nombres négatifs n'étaient pas acceptés à son époque.)
- Il construisit la tangente en n'importe quel point d'une spirale d'Archimède.

Solutions des jeux des pages 8 et 9

1. Pyramide numérisée.



2. Où est le produit ?

Nous multiplions 8.765.432 par un peu moins de 10000, nous cherchons donc un produit de 11 chiffres et nous savons que le chiffre des unités est 2. Il faut donc choisir entre 96.028.429.372 et 86.567.406.432. Comme le résultat est inférieur à 87.654.320.000, nous choisissons 86.567.406.432.

3. Magie et calculatrice.

$3 \times 7 \times 13 \times 37 = 10101$ et tout nombre « ab » de deux chiffres multiplié par 10101 donne « $ababab$ » comme résultat puisque $10101 = 10000 + 100 + 1$.

4. Drôle d'horloge !

4.1 Noir.

4.2 Tous peuvent s'écrire sous la forme $1 + 4k$ où k est un naturel.

4.3 Tous ces produits sont pairs puisque un des deux facteurs l'est.

4.4 Ces produits sont soit pairs (parce que produits de deux nombres pairs) soit impairs (parce que produits de deux nombres impairs) !

Puissance et économie (1)

Y. Noël-Roch

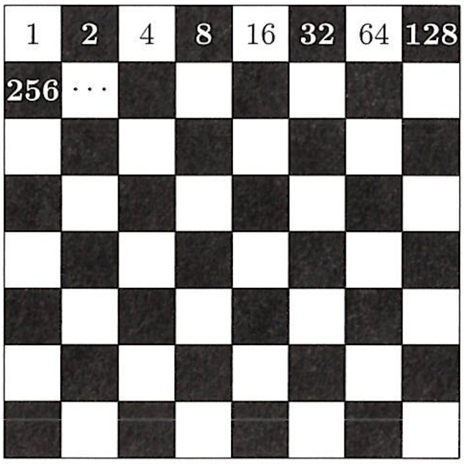
Il était une fois

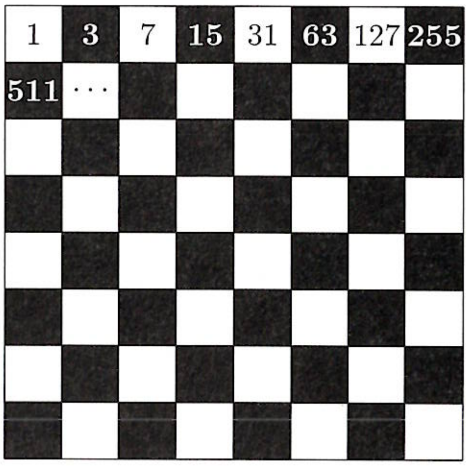
On raconte qu'un roi de Perse fut séduit par un nouveau jeu que lui présentait son inventeur : le jeu d'échecs. Soucieux de récompenser son serviteur, le roi lui promit de réaliser le voeu qu'il formulerait. Le génial inventeur dit alors : « je souhaite recevoir 1 grain de riz sur la première case de l'échiquier, 2 sur la deuxième, 4 sur la troisième, 8 sur la quatrième... et ainsi de suite en multipliant chaque fois le nombre par 2 jusqu'à la dernière case. »

Le roi, tout content, envoya un porteur chercher un sac de riz et lui ordonna de réaliser le souhait émis. Satisfait, le roi s'en alla vaquer à d'autres occupations. Quant au malheureux porteur, il mourut à la tâche. Sais-tu pourquoi ?

Les puissances de 2

Calculons les nombres de grains de riz à placer sur les premières cases et les totaux successifs sur l'échiquier.





Prolonge les données numériques sur les échiquiers mais ne te crois pas obligé d'aller jusqu'au bout : tu manqueras rapidement de place et tu n'es pas le pauvre porteur du roi de Perse ! Contrairement à son roi, l'inventeur était très fort en calcul, il savait que le nombre de grains à placer sur la dernière case (la 64^{e}) est supérieur à 9.000.000.000.000.000.000 et que la quantité de riz qu'il demandait permettait de recouvrir toute la Perse d'une couche d'environ $7,5$ cm d'épaisseur...

Calcul économique des totaux

Supposons que nous ayons à calculer

$$2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \cdots + 2^{15}$$

c'est-à-dire

$$1 + 2 + 4 + 8 + \cdots + ?$$

Nous pouvons
- soit
  - calculer les puissances de 2 jusqu'à 2^{15}
  - additionner tous ces nombres
- soit observer l'évolution des totaux sur le deuxième échiquier pour rechercher une méthode plus économique.

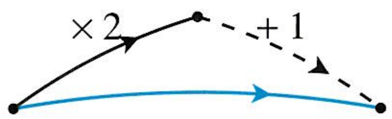
Les mathématiciens essaient toujours de calculer le moins possible, c'est donc le processus économique qui nous intéresse. Pour le découvrir, observons les nombres sur les deux échiquiers.

Sur le premier, tu sais déjà que passer d'une case à la suivante fait intervenir l'opérateur $\times 2$.

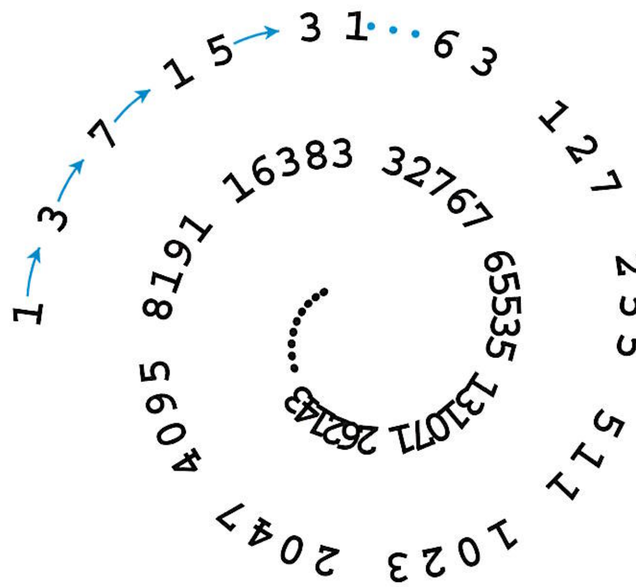
Sur le second, existe-t-il un processus simple pour passer d'une case à la suivante ?

- $3 = 1 \times 2 + 1$
- $7 = 3 \times 2 + 1$
- $15 = 7 \times 2 + 1$

Ainsi, les totaux du deuxième échiquier semblent construits avec le composé de deux opérateurs : chaque total s'obtient à partir du précédent en lui appliquant successivement deux opérateurs :



Voici donc les seuls calculs nécessaires pour obtenir les totaux successifs :



Sur cette spirale, nous lisons

$$2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^{15} = 65535$$

Les puissances de 3

À présent, calculons $3^0 + 3^1 + 3^2 + 3^3 + \cdots + 3^{15}$

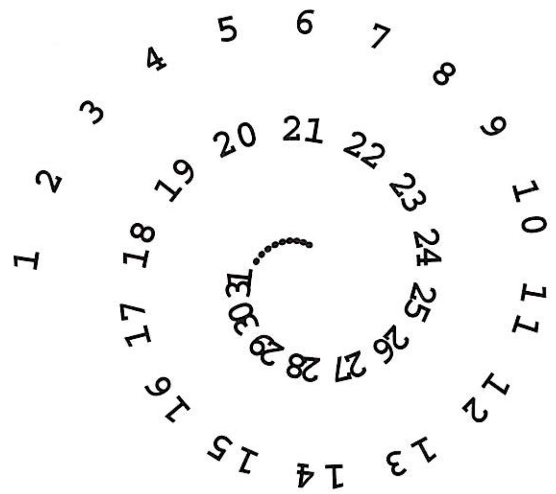
Voici l'ébauche d'un tableau qui peut t'aider :

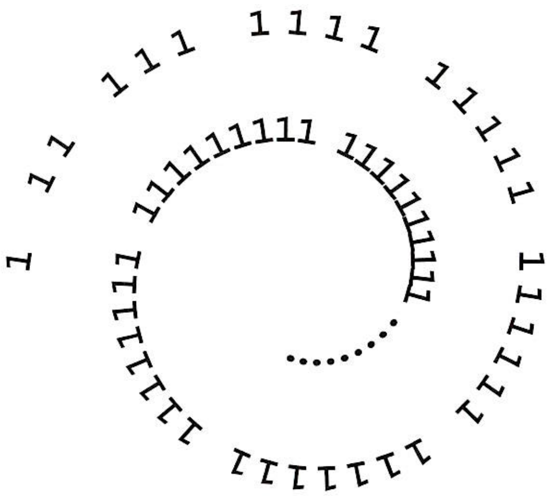
Exposants	0	1	2	3	4	5	6	....	64
Puissances	1	3	9	27	81			....	x
Totaux	1	4	13	40				....	y

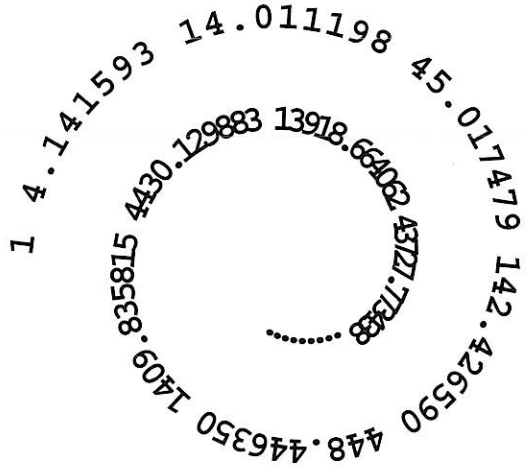
Comment vas-tu procéder ? Les premières sommes, 1, 4, 13, montrent bien que l'opérateur composé trouvé plus haut ne convient pas. Nous te laissons le plaisir de trouver une solution. Peut-être de généraliser à des puissances autres que celles de 2 ou 3. Nous te signalons que quel que soit le nombre a, on a $a^0 = 1$.

Des spirales à identifier

Trouve les nombres utilisés pour obtenir les spirales suivantes







Une sπrale !

À suivre

Complément : le symbole de sommation

Dès l'école primaire, tu as vu que des sommes pénibles à écrire peuvent être transformées. Ainsi,

$$3+3+3+3+3+3+3+3+3+3+3+3+3+3+3+3+3+3+3+3+3+3+3+3+3$$

est beaucoup moins lisible que

$$3 \times 25$$

Ainsi, un produit remplace **une somme dont tous les termes sont égaux.**

Il s'agit là de deux écritures du même nombre 75.

Le symbole $\sum$ va nous permettre d'écrire très économiquement des sommes de beaucoup de termes tous différents.

Commençons par un exemple :

$$\sum_{a=1}^{20} a$$

se lit « *somme des nombres (entiers) de 1 à 20* ».

La lettre utilisée, ici a, prend les valeurs entières successives en commençant par la valeur donnée sous le symbole, ici 1, et en terminant par la valeur donnée au-dessus du symbole, ici 20 :

$$\sum_{a=1}^{20} a = 1+2+3+4+5+6+7+8+9+10+11+12+13+14+15+16+17+18+19+20$$

Donc

$$\sum_{a=1}^{20} a = 210$$

Autre exemple :

$$\sum_{k=4}^{11} 2^k$$

Cette fois, nous additionnons des puissances de 2 puisque la lettre k est en exposant : plus exactement les puissances de 2 depuis la quatrième (4 est écrit sous le symbole) jusqu'à la onzième (11 étant écrit au-dessus du symbole).

Ainsi, $\displaystyle\sum_{k=4}^{11} 2^k = 2^4 + 2^5 + 2^6 + 2^7 + 2^8 + 2^9 + 2^{10} + 2^{11} = 4080$

Pour t'exercer :

1. Voici cinq nombres, écrits en utilisant le symbole $\sum_{\cdots}^{\cdots} \cdots$. Peux-tu « deviner » lequel est le plus petit, lequel est le plus grand ? Développe l'écriture des sommes, calcule-les. Classe-les dans l'ordre croissant.

$$\sum_{z=1}^{6} \frac{1}{z} \qquad \sum_{a=1}^{1000} (-1)^a \qquad \sum_{b=1}^{20} b^2 \qquad \sum_{u=1}^{20} 2^u \qquad \sum_{a=-10}^{100} a$$

2. Peux-tu sans calculer, dire quel est le plus petit des deux nombres $\sum_{a=-25}^{300} a$ et $\sum_{a=-5}^{300} a$ et, toujours sans calculer, écrire leur différence.

3. Calcule $\sum_{k=4}^{11} (3 + 2^k)$

Réponse 1 :

$$\sum_{z=1}^{6} \frac{1}{z} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{6} = 2,45$$

$$\sum_{a=1}^{1000} (-1)^a = (-1)^1 + (-1)^2 + \cdots + (-1)^{999} + (-1)^{1000} = -1 + 1 - 1 + 1 - \cdots - 1 + 1 = 0$$

Après calcul des cinq sommes, voici le classement : $0 < 2,45 < 2870 < 4995 < 2097150$.

Réponse 2 :

$$\begin{aligned} & (-25) + (-24) + (-23) + \cdots + 298 + 299 + 300 \\ = & \boxed{(-25) + (-24) + \cdots + (-1) + 0 + 1 + 2 + \cdots + 24 + 25} + 26 + \cdots + 299 + 300 \\ = & 26 + 27 + \cdots + 298 + 299 + 300 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & (-5) + (-4) + (-3) + \cdots + 298 + 299 + 300 \\ = & \boxed{(-5) + (-4) + (-3) + (-2) + (-1) + 0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5} + 6 + \cdots + 299 + 300 \\ = & 6 + 7 + 8 + \cdots + 25 + 26 + 27 + \cdots + 299 + 300 \end{aligned}$$

Le premier nombre est donc le plus petit et la différence entre les deux vaut

$$6 + 7 + 8 + \cdots + 24 + 25, \text{ soit } \sum_{a=6}^{25} a.$$

Réponse 3 :

Il s'agit cette fois d'une somme de termes dont chacun est la somme du nombre 3 et d'une puissance de 2, l'exposant prenant les valeurs (entières) de 4 à 11.

$$\begin{aligned} \sum_{k=4}^{11} (3 + 2^k) &= (3 + 2^4) + (3 + 2^5) + (3 + 2^6) + \cdots + (3 + 2^{10}) + (3 + 2^{11}) \\ &= (3 + 16) + (3 + 32) + \cdots + (3 + 1024) + (3 + 2048) \\ &= 19 + 35 + 67 + 131 + 259 + 515 + 1027 + 2051 \\ &= 4104 \end{aligned}$$

Math-Quiz

Claude Villers

L'annonce :

A l'occasion de cette 25^e année de parution de la revue *Math-Jeunes Junior*, nous vous proposons de relever un challenge tout en prouvant votre sagacité.

Il s'agit tout simplement de fournir le maximum de réponses correctes aux questions qui vous sont proposées dans cette rubrique.

Cette « épreuve » se déroulera en **deux étapes.** Celles-ci feront l'objet de classements séparés. Il vous est donc loisible de ne participer seulement qu'à l'une ou l'autre de ces étapes. Néanmoins, un classement général sera établi à l'issue de la deuxième étape. Chaque étape ainsi que le classement général nous permettront de vous placer au tableau d'honneur et **d'attribuer des récompenses aux meilleurs envois.**

Participez à ce jeu-concours, individuellement ou en groupe, et invitez vos condisciples à y prendre part.

Le principe :

A chaque étape, 10 questions vous sont soumises. Chacune d'elles possède un coefficient de difficulté indiqué sous la forme d'étoiles. Chaque étoile d'une question dont la réponse est correcte vous fait gagner 5 points. Vous répondez à autant de questions que vous le souhaitez. 110 points sont mis en jeu lors de la première étape et 140 points le seront lors de la deuxième (de quoi rattraper un faiblesse éventuelle).

Comment répondre ?

Vous nous envoyez vos réponses sur carte postale simple ou illustrée (voir ci-après le concours annexe) à l'adresse :

SBPMef - Math-Quiz Rue de la Halle 15 B-7000 Mons.

Indiquez bien vos nom et prénom, votre adresse complète, le nom exact et la localisation de votre école ainsi que le niveau de votre classe en 2003–2004.

Vos réponses **(sous la forme de nombres)** à cette première étape doivent nous être parvenues dès que possible et avant le vendredi 5 décembre 2003.

Exemple de tableau-réponse

Question n^o	Ma réponse	Question n^o	Ma réponse
1		6	
2		7	
3		8	
4		9	
5		10	

Concours annexe (facultatif) :

Nous vous invitons en outre à être imaginatif et/ou créatif pour le choix du sujet figurant éventuellement au recto de la carte. Vous pouvez librement en compléter ou en détourner l'illustration par ajout de dessins ou de textes. Cela doit vous permettre de la transformer en sujet touchant aux mathématiques.

A vous de faire preuve d'originalité. Les meilleures propositions seront également primées.

Questions de la première étape

1. **L'exécution ! (*)**

   En formation complète de 80 musiciens, l'orchestre a interprété l'oeuvre en 28 minutes. Dans les mêmes conditions, combien de minutes aurait-il fallu à la formation réduite de moitié pour interpréter la même oeuvre ?

2. **Vive la rentrée ! ! ! (*)**

   Le 1erseptembre 2003 était un lundi. Lors de quelle toute prochaine année cela se reproduira-t-il ?

3. **En guise d'ouverture ! (**)**

   Dans cette école, tous les locaux possèdent deux fenêtres et une porte donnant sur la cour et trois portes intérieures. Il y a en tout 36 de ces ouvertures. Combien de locaux comporte cette école ?

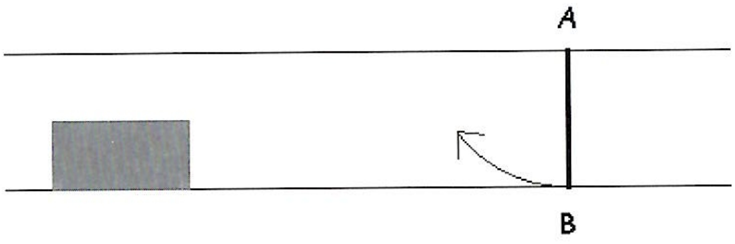
4. **Travail à la chaîne ! (**)**

   Dans le grenier, Mathieu a trouvé cinq bouts de chaîne comportant quatre anneaux chacun. Il veut faire fabriquer un collier de vingt anneaux. Le ferronnier l'informe que pour ouvrir puis ressouder un anneau cela lui coûtera 3 euros. Combien le travail doit-il normalement coûter à Mathieu ?

5. **Cartable pas light ! (**)**

   Le sac de Mathieu rempli de son matériel scolaire pèse 10 kg. Mathieu le vide et le pèse. Il trouve alors que ce sac vide pèse 8 kg de moins que son contenu. Combien de kg pèse le sac vide ?

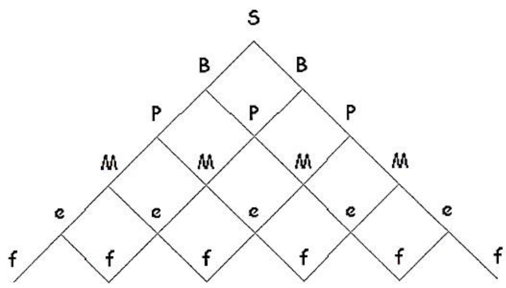
6. **De la place, SVP ! (***)**
Vous glissez la table de $1m$ de largeur le long de la paroi droite du couloir de $2m$ de largeur. Jusqu'à quelle distance de B, au mm près, pouvez-vous aller pour pouvoir encore ouvrir totalement la porte $[AB]$?



7. **Des sous, on veut des sous. (***)**
Mathieu adore poser des devinettes mathématiques à ses copines et copains. L'un d'eux lui demande un jour : Combien d'euros as-tu avec toi ? Et bien répond Mathieu, j'ai moins de 100 euros. Avec 1 euro de plus, mon avoir serait un nombre pair. Avec 2 euros de plus, il serait multiple de 3. Avec 3 euros de plus, il serait multiple de 4. Avec 4 euros de plus, il serait multiple de 5 et avec 5 euros de plus, il serait multiple de 6. Combien d'euros Mathieu a-t-il avec lui ?

8. **Cheminons ! (***)**

De combien de manières pouvez-vous épeler le mot SBPMef en suivant les segments du haut vers le bas ?



9. **De quoi écrire ! (***)**
Cette école compte 462 élèves. Curieusement, tous possèdent un ou trois ou cinq stylos. Il y a autant d'élèves qui disposent d'un seul stylo que d'élèves qui en disposent de cinq. Le nombre d'élèves qui disposent de 3 stylos est le quintuple du nombre d'élèves qui en possèdent un. Quel est le nombre total de stylos dont disposent les élèves dans ces conditions ?

10. **Il a belle aire ! (**)**
Ce champ à la particularité de posséder 8 côtés dont les longueurs sont, dans l'ordre, 20m, 40m, 60m, 80m, 100m, 120m, 140m et 160m. De plus deux côtés consécutifs sont toujours perpendiculaires. Quelle est, en m^2, l'aire de ce champ ?

Math-Jeunes Junior
Périodique trimestriel
15, rue de la Halle – 7000 Mons
Bureau de dépôt 7000 Mons 1

Responsable de l'édition: A. PATERNOTTRE
Rue du Moulin 78 – 7300 Boussu
Bureau de dépôt : Mons 1

Autorisation de fermeture
Sluitings toelating

7000 Mons 1
5/156

Belgique - België
P.P.
7000 Mons 1
5/124

Périodique - Peut être ouvert pour contrôle postal

Réservé à la poste

Inconnu
Refusé
Décédé
Adresse insuffisante
N'habite plus à l'adresse
indiquée