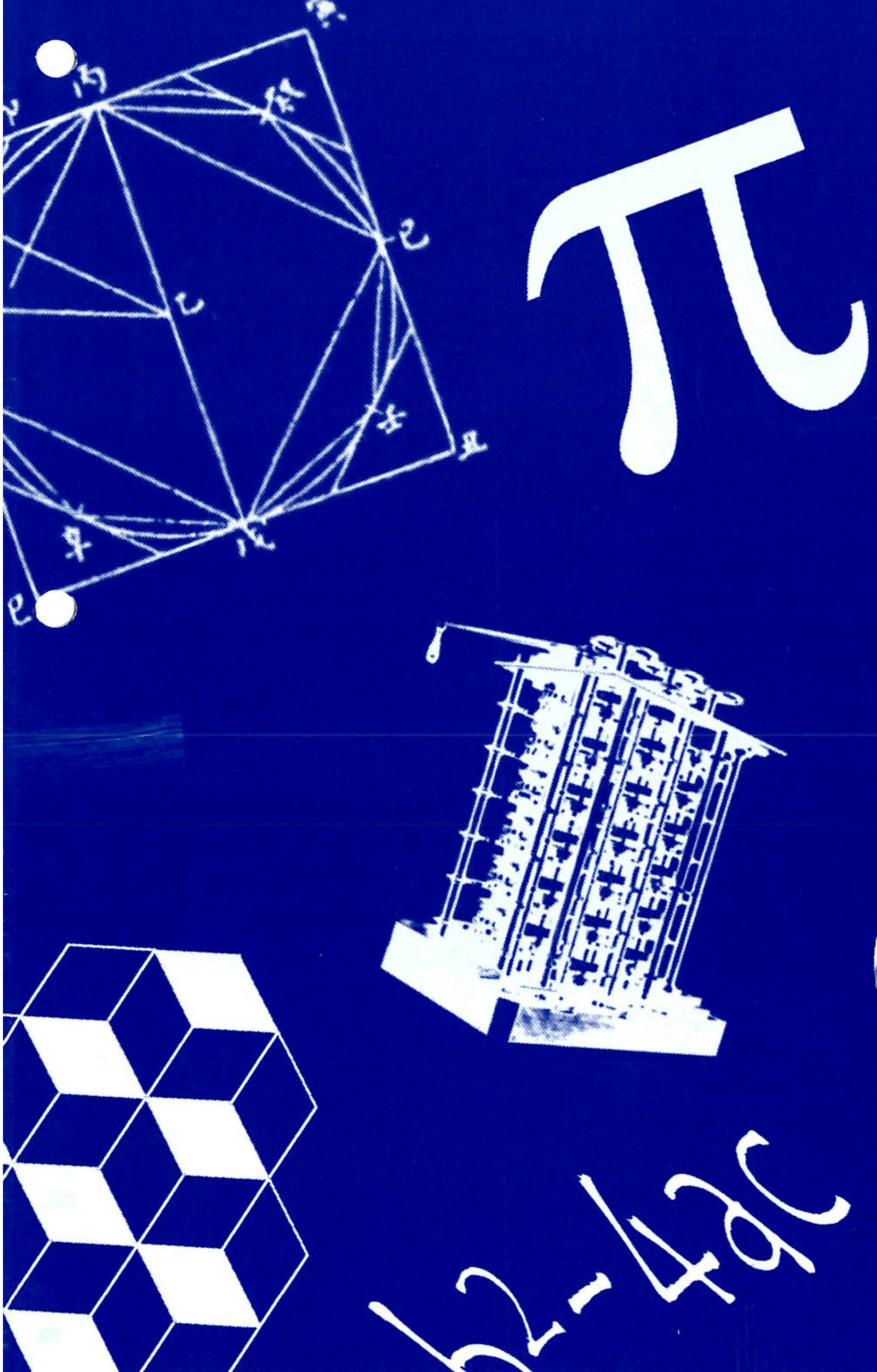
25ème année
Janvier 2004 - n°107 J

MJ junior!



Math-Jeunes et Math-Jeunes Junior

Revues trimestrielles publiées par la Société Belge des Professeurs de Mathématique d'expression française

Secrétariat : M.-C. Carruana, S.B.P.M.e.f., rue de la Halle 15, 7000 Mons, ☎-FAX 32-(0)65-373729, e-mail : sbpm@sbpm.be, URL : http://www.sbpm.be.

Tarifs

Abonnements groupés (au moins 5)				
	Une des deux revues		Les **deux** revues	
Belgique	3,80 €		6,60 €	
	$\boxtimes$	$\not\boxtimes$	$\boxtimes$	$\not\boxtimes$
Europe	6 €	7,80 €	11 €	14 €
Autres pays	6,60 €	10 €	12 €	18 €

Abonnements individuels				
	Une des deux revues		Les **deux** revues	
Belgique	5 €		10 €	
	$\boxtimes$	$\not\boxtimes$	$\boxtimes$	$\not\boxtimes$
Europe	11,50 €	15,80 €	16,50 €	20,50 €
Autres pays	12,75 €	20,40 €	20 €	25 €

Légende : « prior »=$\not\boxtimes$, « non prior »=$\boxtimes$.

Trois numéros de chaque revue sont publiés annuellement. Pour connaître la liste des anciens numéros encore disponibles et leur prix selon votre localisation, adressez-vous au secrétariat.
Les abonnements destinés aux élèves de l'enseignement secondaire sont de préférence pris par l'intermédiaire d'un professeur. Effectuez vos paiements :

- ☞ pour la Belgique : par virement au Compte n°000-0728014-29 de *S.B.P.M.e.f.*, rue de la Halle 15, 7000 Mons
- ☞ pour la France : par virement au Compte CCP Lille 10 036 48 S
- ☞ pour l'étranger (sauf la France) : par virement international au Compte n°IBAN: BE 26 0000 7280 1429 BIC: BPOTBEB1 au nom de la *S.B.P.M.e.f.*, rue de la Halle 15, B 7000 Mons, Belgique. Les personnes résidant à l'étranger qui ne peuvent faire un virement à ce compte sont invitées à envoyer un mandat postal international. Tout chèque bancaire non encaissable en Belgique devra être majoré de 12,50 € pour frais d'encaissement.

Éditeurs responsables et rédacteurs en chef :

– pour *Math-Jeunes* : G. NOËL, Rue de la Culée 86, 6927 Resteigne

– pour *Math-Jeunes Junior* : A. PATERNOTTRE, Rue du Moulin 78, 7300 Boussu

N°107 J Vingt-cinquième année 2004

MATH-JEUNES JUNIOR

Sommaire

Couper–Toucher (2)

Y. Noël-Roch

Recherche (suite)

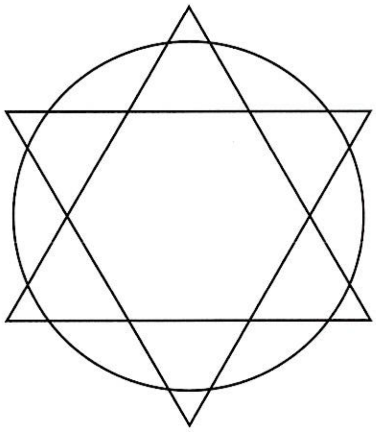
1. Dans le numéro précédent, nous posions le problème du nombre maximum de « points d'intersection » dans
– une figure formée de deux triangles et un cercle
– une figure formée d'un triangle et deux cercles.

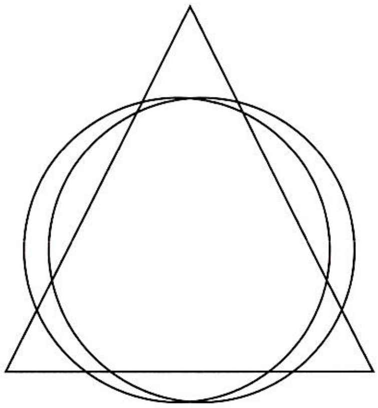
Sans doute as-tu pris concience, grâce à quelques tâtonnements, du fait que

– un cercle et un triangle ont au maximun 6 points communs,
– deux triangles ont au maximum 6 points communs,
– deux cercles ont au maximum 2 points communs.

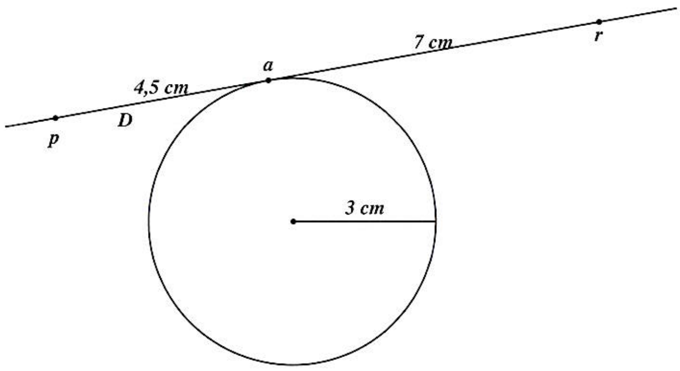
De sorte que
– un cercle et deux triangles présentent au maximum 18 « points d'intersection ([1]) »,
– deux cercles et un triangle présentent au maximum 14 « points d'intersection ».

Voici, dans chacun des deux cas, une façon d'atteindre ces maxima :





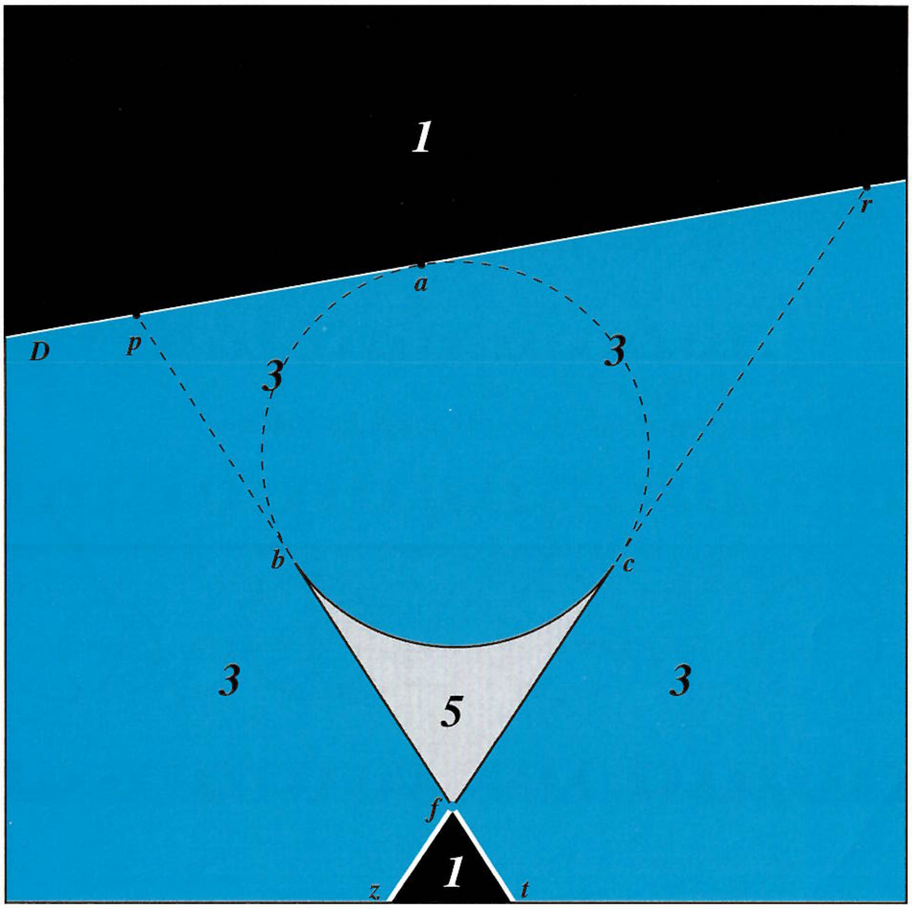
2. La dernière recherche consistait à respecter les consignes de dessin pour obtenir la configuration suivante



([1]) Points communs à au moins deux éléments de la figure.

Il fallait ensuite « balader » le point s dans le plan (sauf sur la droite D) en comptant le nombre de points communs au cercle fixe et au triangle prs variable, de colorier les zones du plan ainsi obtenues, éventuellement de s'aider du support informatique.

Voici le résultat obtenu :



Sur cette figure, le nombre écrit en grand dans une zone coloriée indique le nombre de points communs au cercle et au triangle prs lorsque le point s appartient à cette zone. Les traits en pointillés ne délimitent pas de zones coloriées. Les points b, c et f appartiennent à la zone bleue (trois points communs). Deux indications sont absentes :

1. lorsque le point s appartient aux demi-droites, dessinées en blanc, $]fz$ et $]ft$ (point f exclu), le nombre de points communs est 2 ;
2. lorsque s appartient aux segments $]bf[$ et $]fc[$, ou à l'arc (bc) en trait plein (points b, c et f exclus), le nombre de points communs est 4.

Des variantes

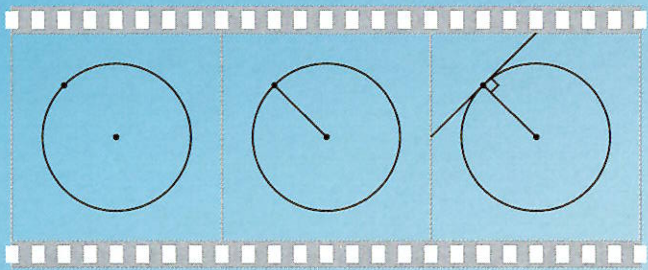
Partant toujours du même cercle de rayon 3 cm, du même point a et de la même tangente D, nous te proposons de varier la position des points p et r. Ils sont toujours situés de part et d'autre de a, mais 1$^{\text{er}}$ cas : p se trouve à $1,5$ cm de a et r à 2 cm ; 2$^{\text{e}}$ cas : p et r se trouvent à 3 cm de a.

À suivre

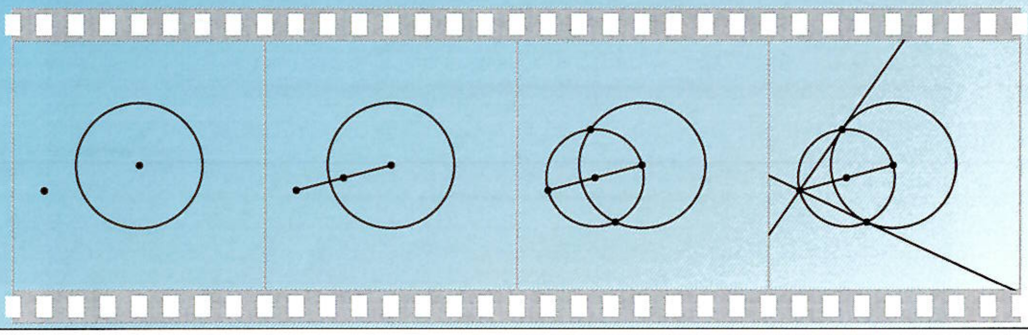
Des problèmes de dessin ?

Sais-tu comment obtenir « une belle tangente » à un cercle ... à partir d'un point **du** cercle ? Ou à partir d'un point **extérieur** au cercle ? Nous te donnons ci-dessous deux petits films qui illustrent ces constructions. Si tu as du mal de les interpréter, demande l'aide de ton professeur.

1. Construction de la tangente en un point d'un cercle.



2. Construction des tangentes à un cercle par un point extérieur.



Nous remercions Monsieur Eric Gélard pour le courrier qu'il nous a envoyé après la parution du premier article « Puissance et économie ». Voici une précision et une image forte extraites de ce courrier :

$$2^{64} - 1 = 18.446.744.073.709.551.615$$

Un grenier de 60 m sur 60 m au sol devrait, pour contenir cette quantité de blé, avoir une hauteur à peu près égale à la distance de la terre à la lune et, pour arriver à cette quantité, il faudrait ensemencer 75 fois tous les continents de la planète.

Informatique ou Infor-Math-Ique ?

N. Vandenabeele

Géo aime les mathématiques et adore être devant l'écran de son ordinateur. Mais ses parents ont l'impression que l'informatique n'utilise guère de mathématique. Ce week-end, il fête son anniversaire et invite Algo un ami étudiant en informatique.

Maman : Bonjour Algo ! Que fais-tu maintenant ?

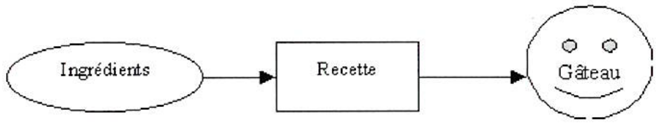
Algo : Et bien je réalise mon rêve, j'étudie l'informatique...

Maman : Ah bon ! et tu passes tes journées devant l'ordinateur ! ?

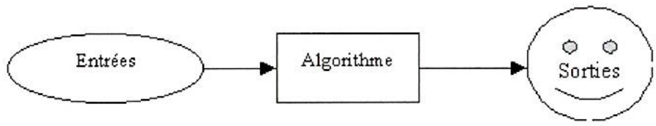
Algo : Non, pas toujours... l'ordinateur est un outil performant indispensable pour résoudre des problèmes relativement conséquents. Mais ce n'est qu'une machine qui exécute des ordres donnés par un informaticien. C'est lui qui analyse le problème et décrit la méthode de résolution ... comme on pourrait dire que le gâteau ne serait pas sur la table sans la bonne cuisinière que vous êtes. Tiens, quelles sont les différentes étapes pour préparer ce dessert ?

Maman : Une fois les ingrédients prêts, on les mélange dans un certain ordre et puis on fait cuire au four pendant quelques minutes.

Algo : Parfait... vous venez d'analyser le problème qui consiste à préparer ce très bon gâteau. Reprenons ce que vous venez de me dire.



En informatique, on utilise les mots « entrées », « algorithme » et « sorties » à la place de « ingrédients », « recette » et « gâteau ». Ainsi, le schéma de résolution d'un problème en informatique est :



Les ingrédients varient d'une recette à l'autre et pour que la résolution du problème soit la plus générale possible, on demande dès le départ les différents ingrédients... ou entrées. Ce sont des **variables**.

C'est magique !

Prenons un exemple dans un tout autre domaine. Voyez un magicien qui dans un chapeau noir a trois lapins et dans un chapeau blanc deux colombes. Après le tour de magie, les trois lapins doivent être dans le chapeau blanc et les deux colombes dans le chapeau noir. Comment pourrait-on aider notre magicien « manchot » ?
Comment peut-il s'y prendre sachant que les chapeaux ne peuvent contenir qu'une seule espèce d'animaux à la fois ?

Géo : A sa place, je prendrais les deux colombes et je les « cacherais » dans un troisième chapeau ; puis je changerais les lapins de chapeau pour finalement placer les colombes dans le chapeau noir.

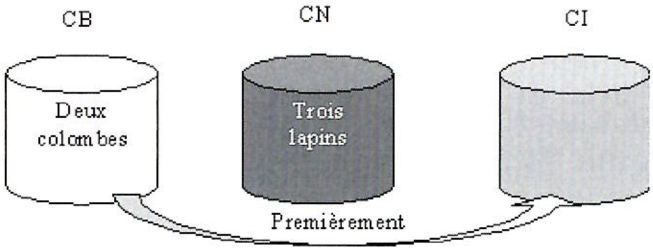
Algo : Très bien ! Notons ton raisonnement...

Désignons par CB : le chapeau blanc, CN : le chapeau noir, CI : le chapeau intermédiaire. Ce sont les trois objets pouvant contenir quelque chose. Ces trois objets « conteneurs » sont nos variables.

En effet, leur contenu peut varier pendant le tour de magie et aussi être différent d'un tour de magie à l'autre...

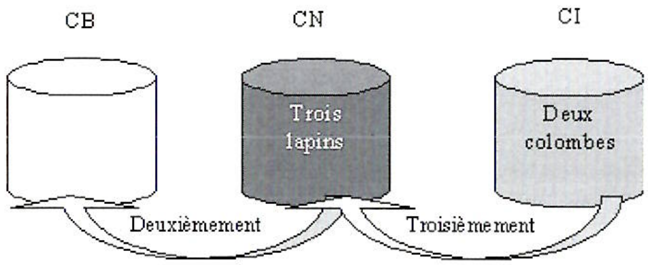
Et justement, pour nous, quel est le contenu de chacun des chapeaux ? Le chapeau blanc contient les deux colombes et le chapeau noir contient les trois lapins ; quant au troisième chapeau, il est vide pour le moment. On a ainsi défini le contenu des chapeaux avant que le tour de magie commence... c'est la situation initiale. On parle **d'initialisation** des variables.

C'est ce que nous noterons : < mettre les deux colombes dans le CB > et < mettre les trois lapins dans le CN >



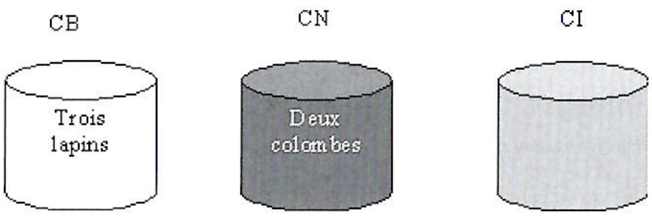
Et à partir de maintenant, le magicien va modifier le contenu des chapeaux ! En effet, Géo nous a dit que les deux colombes devaient être mises dans le troisième chapeau. Mais ces colombes sont pour le moment dans le chapeau blanc. Donc, c'est le contenu du chapeau blanc qui doit être placé dans le chapeau vide.

C'est ce que l'on notera par $CI \leftarrow CB$.



Et puis, ce sont les lapins du chapeau noir qui sont placés dans le chapeau blanc et enfin les colombes sont « transférées » du chapeau intermédiaire dans le chapeau noir.

Ces deux dernières opérations sont notées en informatique par $CB \leftarrow CN$;$CN \leftarrow CI$;



Résumons :

< mettre les deux colombes dans le CB >
< mettre les trois lapins dans le CN > } initialisation des variables

$CI \leftarrow CB$
$CB \leftarrow CN$
$CN \leftarrow CI$ } opérations sur le contenu des chapeaux ce sont les **instructions**

C'est mathématique !

Si on mathématise le problème, on pourrait demander de permuter le contenu de deux variables numériques A et B. Tout d'abord, nous devons initialiser les variables. Par exemple : $<$ mettre le nombre 2 dans la variable A $>$ et $<$ mettre le nombre 3 dans la variable B $>$.

De même que notre magicien a eu besoin d'un troisième chapeau, nous aussi nous aurons besoin d'une variable intermédiaire. Notons cette variable C.

Notre algorithme devient donc :

$C \leftarrow A$ (1) le contenu de la variable A est placé dans la variable C
$A \leftarrow B$ (2) le contenu de la variable B est placé dans la variable A
$B \leftarrow C$ (3) le contenu de la variable C est placé dans la variable B

Voici comment évolue le contenu de chaque variable :

	A	B	C
Début	2	3	?
Après (1)	2	3	2
Après (2)	3	3	2
Après (3)	3	2	2

Analysons ensemble ce tableau.

La première ligne (début) est l'initialisation des variables. La deuxième ligne montre que l'on a bien copié le contenu de la variable A dans la variable C. Cependant, la variable A garde sa valeur puisque son contenu n'a pas encore été modifié. Ce n'était pas le cas lors du tour de magie : à chaque manipulation, un chapeau se vide. C'est là une différence sensible entre la processus informatique et le processus utilisé pour le tour de magie ! A la troisième ligne, on modifie le contenu de A en copiant celui de B.

De même, le contenu de B reste inchangé.

Enfin, la dernière ligne montre que les variables A et B ont bien échangé leur contenu. C contient toujours le nombre 2 puisque le contenu de C n'a plus été modifié.

Remarquons que la variable temporaire est indispensable. En effet, si nous avions écrit l'algorithme suivant, que vaudraient les variables ?

$A \leftarrow B$ (1)
$B \leftarrow A$ (2)

L'évolution de variables aurait été

	A	B
Début	2	3
Après (1)	3	3
Après (2)	3	3

et le nombre 2 a disparu !

Maman : Et donc, être informaticien c'est résoudre des problèmes

Algo : Et résoudre un problème, c'est d'abord savoir de quelles données on dispose (entrées). Ensuite, il faut aussi déterminer ce que l'on demande (sorties). Enfin, on élabore une séquence d'opérations(instructions) qui, à partir des entrées, fournit les sorties. Cette première phase est importante : c'est **l'analyse du problème**

Papa : S'il y a une première phase, je suppose qu'il y en a une deuxième.

Algo : Ensuite, il faut traduire les instructions en un langage compréhensible par l'ordinateur. C'est la phase dite de **programmation**

Papa : C'est un peu comme apprendre une nouvelle langue sauf qu'ici notre interlocuteur est l'ordinateur...

Algo : Exactement, mais je ne vais pas entrer trop dans les détails : il existe de nombreux langages. Pour moi, c'est la phase d'analyse qui prime ! Je voudrais vous montrer que nous côtoyons l'informatique quotidiennement !

Papa : Ah bon ! ?

Algo : Quand vous allez chercher de l'argent au distributeur automatique, vous devez introduire votre carte et votre code secret et puis, vous patientez quelques secondes. Pourquoi ? Et bien l'automate vérifie si le code est correct... et pour cela que fait-il ?

1. Lire le numéro de la carte
2. Lire le code
3. Vérifier si le code est correct c'est-à-dire

> Si (< le code est correct>) alors < proposer les différentes opérations >
> sinon < afficher un message>

De même, avant d'exécuter l'ordre de retrait, il faut vérifier que le solde du compte est supérieur au montant à retirer :

> si (solde > retrait) alors < donner l'argent >
> sinon < afficher un message>

Maman : Et j'imagine qu'il y a ainsi beaucoup d'exemples qui montrent que l'informatique n'est jamais très loin de nous !

Algo : Bien évidemment ! Oh, il est déjà si tard ! Il va falloir que j'y aille.

Géo... j'ai un problème pour toi !

Je te propose d'écrire l'algorithme qui résout une équation du premier degré du type $ax + b = 0$ où a et b sont des nombres réels.

A toi de réfléchir !

Papa : Eh bien, content d'avoir fait votre connaissance et à bientôt j'espère.

Algo : Oui, bien sûr ! Rendez-vous dans le prochain Math-Jeunes !

Maman : Merci beaucoup pour la petite leçon d'informatique...

Géo : Merci Algo d'être venu...

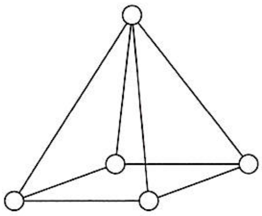
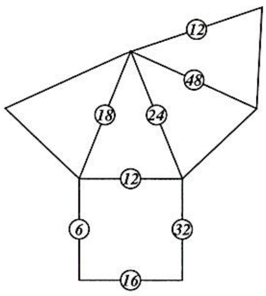
La porte se referme et Géo se retourne vers ses parents : « Ah vous voyez maintenant ce qu'est vraiment l'informatique »

Jeux

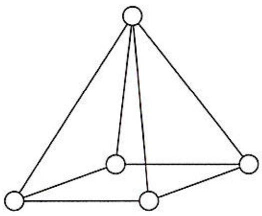
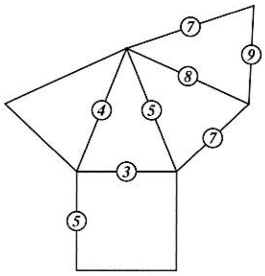
Y. Noël-Roch

1. Pyramide numérisée.

Aux sommets d'une pyramide à base carrée, nous avons placé les nombres de 2, 3, 4, 6 et 8. Retrouve la position des cinq nombres sur la pyramide à partir des informations données sur un développement de celle-ci : les nombres notés sur les arêtes sont les produits des nombres situés aux extrémités de celles-ci.

Aux sommets d'une pyramide à base carrée, nous avons placé les nombres de 1 à 5. Retrouve la position des cinq nombres sur la pyramide à partir des informations données sur un développement de celle-ci : les nombres notés sur les arêtes sont les sommes des nombres situés aux extrémités de celles-ci.

2. Carrés de huit nombres.

1	2	3
4	5	6
7	8	9

Dans ce carré 3 × 3, nous lisons **huit** nombres différents :
- trois horizontalement : 123, 456 et 789,
- trois verticalement : 147, 258 et 369,
- deux en diagonale : 159 et 753.

0 étant placé dans la case centrale et en disposant des chiffres de 1 à 9, aucun ne pouvant être utilisé deux fois, peux-tu compléter le carré de manière à y lire

huit nombres impairs ? huit nombres pairs ? huit multiples de 9 ? huit nombres premiers ?

	0	

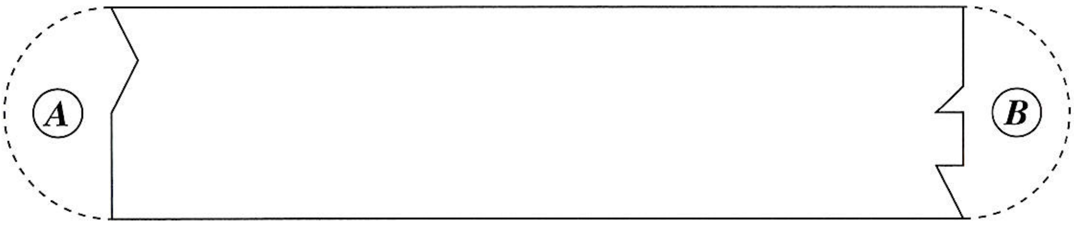
	0	

	0	

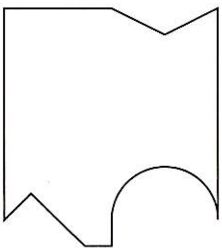
	0	

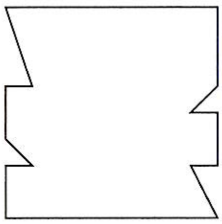
3. Une bandelette en quatre pièces.

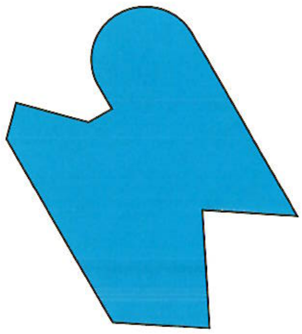
Une bandelette, punaisée en Ⓐ et en Ⓑ présente une face blanche et une face colorée. La « partie centrale » a été découpée en quatre pièces.

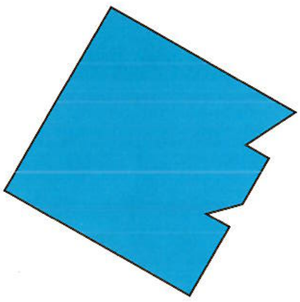


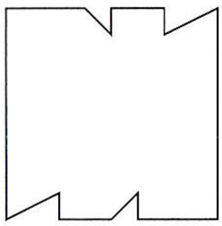
Retrouve les quatre pièces parmi celles qui sont dessinées ci-dessous.

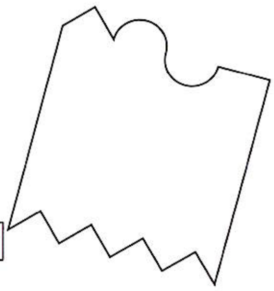
1


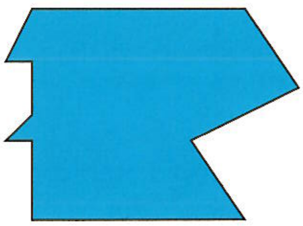
2


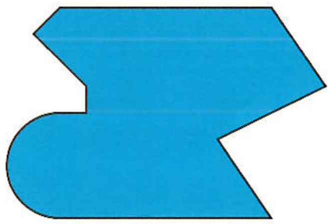
3


4


5


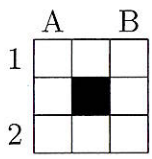
6


7


8


4. Nombres croisés.

Recherche les deux nombres R et S.



Horizontalement.

1. R^2 le plus grand possible.
2. Nombre premier le plus petit possible.

Verticalement.

A. $S^3 - (R - S)^2$

B. S^2

Solutions des jeux : page ??

Et la suite ?

A. Paternottre

Dans le précédent numéro de MJJ (n°106), je te suggérais de prolonger une suite de nombres naturels telle que : 7, 22, 11, 34, 17, 52, ... et d'arrêter dès que tu tombes sur 1.

Je n'ai pas eu le plaisir d'avoir une réponse à ma sollicitation. Je suppose qu'on m'a oublié ! J'ai cependant quelque peine à croire qu'aucun d'entre vous n'ait pu découvrir le processus (on dit plutôt « l'algorithme ») qui permet de passer d'un terme de la suite au suivant et surtout n'ait constaté que, quel que soit le nombre naturel non nul choisi au départ, cet algorithme conduit toujours à 1.

C'est ce qu'on appelle « la conjecture de Collatz [1] ou conjecture de Syracuse ». Conjecture et non théorème car, à ma connaissance, personne n'a pu la démontrer jusqu'à ce jour.

Eh oui, cher lecteur, il existe en mathématique des « conjectures ».

Des chercheurs tentent bien de les démontrer mais elles leur résistent parfois très longtemps. Il en est ainsi de la célèbre conjecture de Fermat, improprement appelée « grand théorème de Fermat ». Pierre de Fermat (1601–1665) avait affirmé que l'équation $x^n + y^n = z^n (n \in \mathbb{N}_0)$ n'avait aucune solution entière (non triviale) si $n > 2$. Ce grand mathématicien prétendait avoir démontré son « théorème ». Hélas on ne retrouva jamais sa démonstration. Près de 3,5 siècles se sont écoulés avant qu'il n'ait définitivement raison. Ce n'est en effet qu'en 1994 que l'anglais Andrew Wiles, grâce aux immenses progrès des connaissances mathématiques, parvint enfin à démontrer cette célèbre proposition.

Mais revenons aux suites de Collatz dont les termes successifs s'écrivent en respectant l'algorithme suivant

- Choisir un nombre naturel non nul n qui constitue le premier terme de la suite.
- Si n est pair alors le terme suivant est sa moitié c'est-à-dire $n/2$.
- Si n est impair alors le terme suivant est son triple augmenté de 1, c'est-à-dire $3n + 1$.
- Continuer avec le nombre obtenu et arrêter dès qu'on obtient 1.

Ainsi, si 7 est le premier terme, il en découle la suite de Collatz suivante :

$$7 , 22 , 11 , 34 , 17 , 52 , 26 , 13 , 40 , 20 , 10 , 5 , 16 , 8 , 4 , 2 , 1$$

Cette suite(trajectoire) comporte 17 termes. Le premier terme de la suite qui est inférieur à 7 est 5 (pivot) qui occupe le 12^e rang. Le plus grand terme de la suite est 52 (sommet) qui occupe le 6^e rang. La trajectoire de 41 comporte 110 termes, son pivot = 31 au rang 4 et son sommet = 9232 au rang 76.

Recommence encore avec un autre premier terme. Tu aboutis toujours à 1... jusqu'à preuve du contraire !

---

[1] Lothar Collatz (1910 - 1990), allemand, professeur de mathématique à l'université de Hambourg. Son algorithme date des années 30.

Alors, on coupe !

Cl. Villers

Je vous propose deux manipulations d'une banale feuille de papier de format rectangulaire (A4 par exemple). Elles vous permettront de remporter au moins un succès de curiosité.

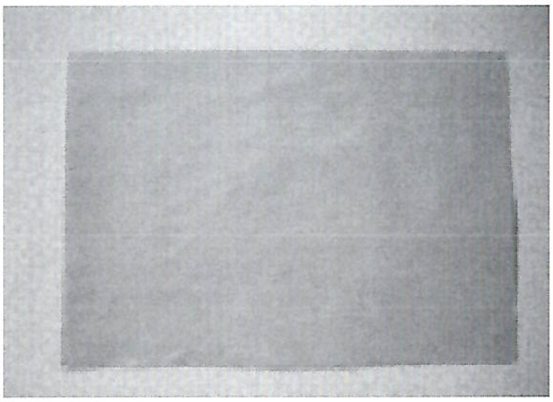
La première manipulation va vous donner un moyen simple de fabriquer facilement et à bon compte une guirlande décorative. Cela peut toujours être utile, en particulier à l'occasion d'une fête.

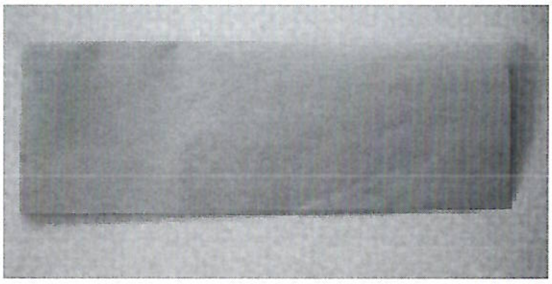
A cet effet nous allons transformer, par exemple une feuille de format A4 c'est à dire une feuille d'environ 29,7 cm de longueur sur 21 cm de largeur, en une guirlande qui peut atteindre plusieurs mètres de longueur.

Suivez attentivement le mode d'emploi qui suit et vous constaterez le résultat spectaculaire.

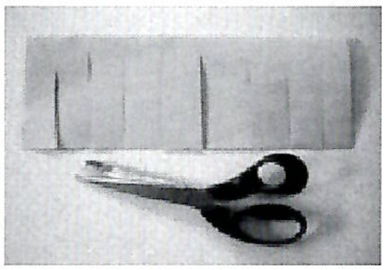
De plus, en observant de près le déploiement de la guirlande, vous comprendrez pourquoi elle peut devenir très longue.

1. Munissez-vous donc d'une feuille de papier d'un format rectangulaire et pliez-la en deux selon sa plus longue médiane.

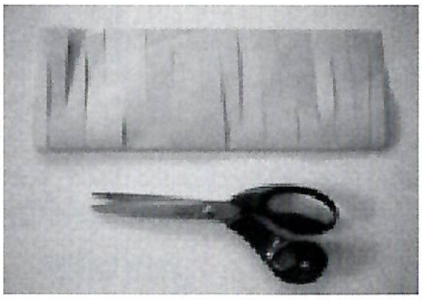




2. Découpez, du côté du pli et en taillant dans les deux épaisseurs en même temps, une série de languettes comme si vous vouliez former les dents d'un peigne. Vous devez donc vous arrêter à environ 1 cm du bord opposé. Les traits de ciseaux ne doivent pas être trop rapprochés les uns des autres. Vous réalisez cela comme l'indique la figure.

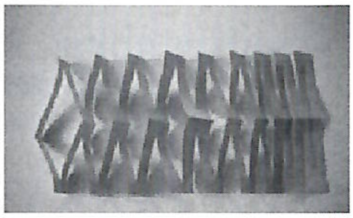


Math-Jeunes Junior n° 107 J, 12–??, 2004



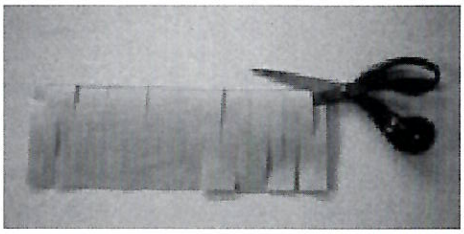
3. Vous recommencez de semblables découpes, du côté opposé au cette fois et toujours en taillant dans les deux épaisseurs en même temps. Vous veillez bien à situer ces découpes entre celles réalisées précédemment.

4. Vous dépliez ensuite la feuille de manière à lui redonner son format primitif.

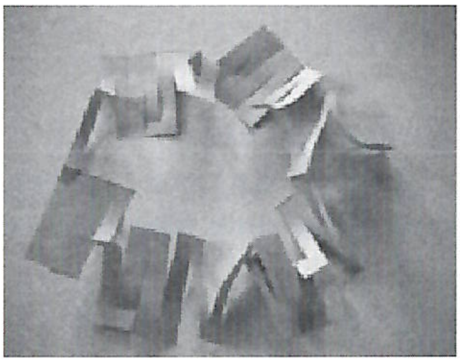


5. Enfin, en écartant les deux petits bords de la feuille l'un de l'autre, vous obtenez une guirlande d'autant plus longue que vous avez réalisé de nombreuses languettes nécessairement plus fines et/ou que vous avez utilisé un rectangle de plus grandes dimensions.

Maintenant, observez bien la guirlande que vous avez construite. Elle est formée de sortes d'anneaux (pas très circulaires d'ailleurs) fermés notamment par le pli que vous avez réalisé au début de la construction. Ceci nous amène à traiter de la deuxième manipulation.
Vous effectuez les mêmes manipulations et découpes qu'en 1), 2) et 3) ci avant.



4 bis) Vous découpez le pli de tous les anneaux, à l'exception du premier et du dernier.



5 bis) Vous obtenez ainsi, au départ d'une feuille relativement petite, un très grand anneau de papier dans lequel vous pouvez faire passer de grands objets et même des personnes.
Voyez sur le croquis ci-dessous, où il faut découper pour obtenir l'effet désiré.

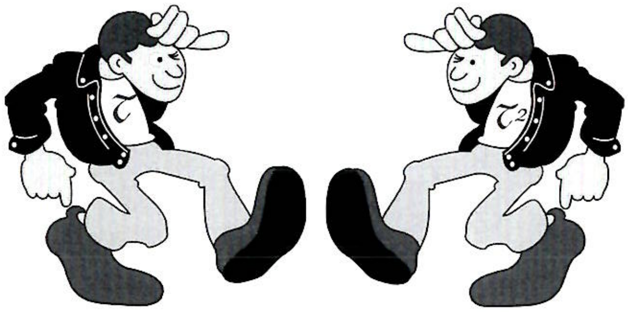
Je suis maintenant certain que vous ne résisterez pas, en classe, au plaisir de parier que vous êtes capable de faire passer votre professeur de mathématique dans un trou réalisé dans une feuille de format A4 ! Et pourtant !

Bon succès.

Les frères Hick 10

B. Honclaire

> **Agence de détectives privés**
> **Les frères Hick**
>
> **Recherches en tous genres**



Ami lecteur,

$\mathcal{T}^2$ t'expliquera comment il a relevé les défis de son frère. Ensuite, $\mathcal{T}$ posera une nouvelle énigme.

Bon courage et bon amusement.

Bernard Honclaire

$\mathcal{T}^2$ (d'un air assuré) –« **Pour répondre à ton premier défi (Combien y-a-t-il de nombres lignes strictement inférieurs à 50 ?), j'ai repris l'exemple de 64**

$$\mathbf{1 \longrightarrow 2 \longrightarrow 4 \longrightarrow 8 \longrightarrow 16 \longrightarrow 32 \longrightarrow 64}$$

J'ai ainsi trouvé 5 nombres lignes inférieurs à 50 : 2, 4, 8, 16 et 32

J'ai fait le même travail pour les autres nombres premiers avant 50 bien sûr! (il ajoute triomphant) **Et je suis certain de ne pas en avoir oublié car j'ai vérifié sur le CD! Tu sais bien, le CD de la SBPM que tu m'as passé pour les jeux! Et voilà le résultat :**

3 9 27
5 25
7 49
11 13 17 19 23 29 31 37 41 43 47

Il y en a donc 23 !»

$\mathcal{T}$ (admiratif) –« **Pas mal! Et j 'apprécie surtout ton exploration du CD!**»

$\mathcal{T}^2$–« **Ton second défi était plus compliqué! Mais je ne suis pas mécontent de mes résultats! J'ai pris exemple sur tes modèles géométriques et j'ai cherché avec d'autres nombres!**

$$\begin{tikzcd} 2 \arrow[r] & 10 \\ 1 \arrow[u] \arrow[r] & 5 \arrow[u] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} 5 \arrow[r] & 10 \arrow[r] & 20 \\ 1 \arrow[u] \arrow[r] & 2 \arrow[u] \arrow[r] & 4 \arrow[u] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} 9 \arrow[r] & 18 \arrow[r] & 36 \\ 3 \arrow[u] \arrow[r] & 6 \arrow[u] \arrow[r] & 12 \arrow[u] \\ 1 \arrow[u] \arrow[r] & 2 \arrow[u] \arrow[r] & 4 \arrow[u] \end{tikzcd}$$

On avait donc déjà 10, 20 et 36. Sur le modèle de 10, il y a aussi 6, 15, 21, 35, 26 . . . »

$\mathcal{T}$(le coupant, comme souvent, en prenant un ton magistral) –« ***Je vais traduire pour les gens mathématisés ! Tu as donc recherché les nombres*** ab, a^2b ***et*** a^2b^2, a ***et*** b ***étant des nombres premiers (différents, bien sûr) !*** »

$\mathcal{T}^2$ (très agacé d'avoir été interrompu) –« ***Moi, je connaissais les gens civilisés !*** »

$\mathcal{T}$(semblant ignorer sa remarque) –« ***Et regarde comment organiser tes recherches :***

↗	2	3	5	7	11	13	17	19	23	29
2	x	6	10	14	22	26	34	38	46	58
3	6	x	15	21	33	39	51			
5	10	15	x	35	55					
7	14	21	35	x	77					

Ce qui fait 13 nombres de la forme ab ***!*** »

$\mathcal{T}^2$ (grommelant) – « ***C'est mieux organisé . . . oui, bon . . . mais, je les avais tous, moi aussi !*** »(impératif) –« ***C'est bon ! Je peux très bien jouer au prof de maths. . . si je veux !*** (et prenant, lui aussi, un ton magistral) – « ***Voici donc le tableau des nombres de la forme*** a^2b ***:***

↗	2	3	5	7	11	13
2	x	12	20	28	44	52
3	18	x	45	63		
5	50		x			

Ce qui fait 6 nombres de la forme a^2b ***!*** »(sur un ton plus hésitant, il continue) –« ***Pour les nombres de la forme*** a^2b^2***, inférieurs à 50 pas besoin de tableau, il n'y en a qu'un : 36 ; le suivant est 100 !*** »(il conclut, après un furtif regard vers son frère)

–« ***Ce qui nous donne 13 plus 6 plus 1 soit 20 nombres*** $2D$ ***inférieurs à . . .*** »

$\mathcal{T}$ (jubilant) –« ***Minute, papillon ! Que penses-tu de . . . 24 . . . par exemple !*** »

$\mathcal{T}^2$ (de plus en plus à l'aise avec ces facteurs premiers et le visage illuminé par un flash) – « ***Suis-je bête ! C'est élémentaire, mon cher Mat ! Laisse-moi continuer . . . Voici le tableau des nombres de la forme*** a^3b ***:***

↗	2	3	5	7
2	x	24	40	56
3	54	x		

(et soudainement frappé d'un autre flash) –« ***Euh . . . et je continue par le tableau des nombres de la forme*** a^4b ***:***

↗	2	3	5
2	x	48	80
3	162	x	

Et là, c'est terminé ... mais, encore heureux que tu limites la recherche à 50 ... nous obtenons donc 23 nombres solutions.

Pour ton défi suivant (Combien y-a-t-il de nombres $3D$ strictement inférieurs à 100), j'ai trouvé des nombres : 30 (évidemment !),*42, 66, et d'autres ...* (reflash) (plus bas)*...j'en avais oublié ...* (il repart) *60, 90 et ... mais au fait, c'est maintenant qu'un de tes tableaux pourrait m'aider... moi, je ne vois pas comment le faire !* »

$\mathcal{T}$ (un peu pris au dépourvu)- « *... Euh ... voilà, peut-être, une façon de faire : voici un tableau pour les nombres abc :*

↗	2	3	5	7	11	13	17
2;3	x	x	30	42	66	78	102
2;5	x	30	x	70	110		
2;7	x	42	70	x	154		
3;5	30	x	x	105			

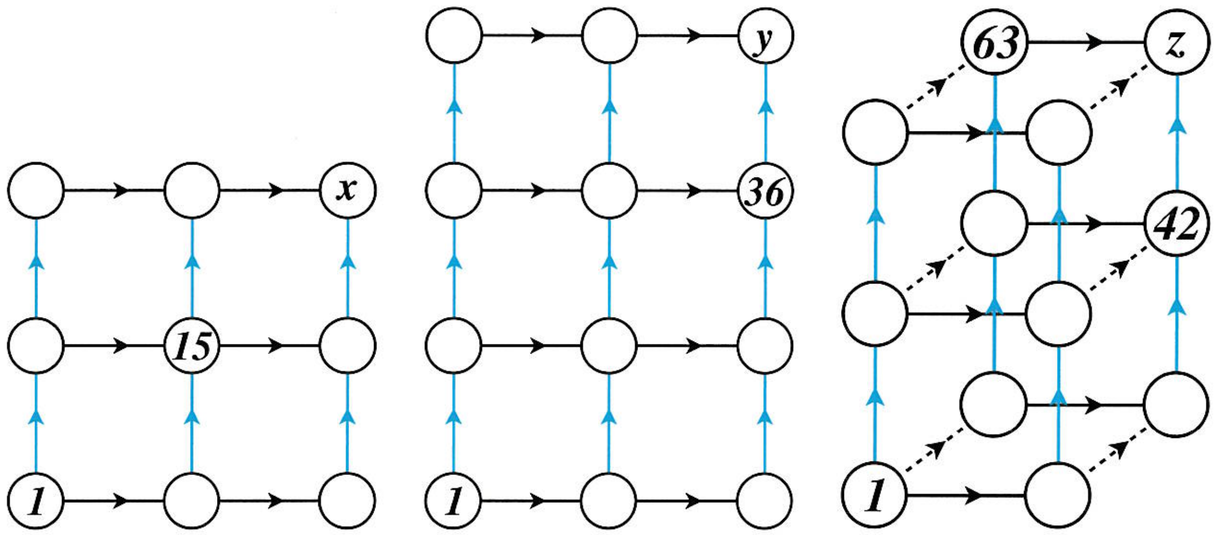
On peut bien sûr utiliser un facteur 2 ou 3 supplémentaire et obtenir les derniers nombres de la forme a^2bc : 60, 90 et 84. Cela en fait 8.

Tous les autres $3D$ sont supérieurs à 100 ! »

$\mathcal{T}^2$ – « *Je les avais tous !* »(plus bas) « *Mais je n'étais pas sûr de ne pas en avoir oublié ! Ton dernier défi (Quels sont les plus petits $4D$ et $5D$?) était très facile : il suffisait de prendre les quatre ou cinq plus petits nombres premiers. Cela donne $2 \times 3 \times 5 \times 7$ soit 210 et $2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11$ soit 2310.*

Tu vois, j'ai franchi l'obstacle de la quatrième dimension ... (hilare)... *et même la cinquième ...! Il ne reste plus que ta dernière question !*

(Dans chacun de ces treillis incomplets, es-tu capable de retrouver le nombre mystérieux ?)



Pour trouver le nombre x c'était facile c'est 225, mais je ne sais pas si je dois mettre le facteur 3 horizontalement ou verticalement ... »

$\mathcal{T}$ (sur un ton rassurant) –« *Et oui ! Cela n'a pas d'importance : je ne te demandais que le nombre x !* »

$\mathcal{T}^2$ (fronçant les sourcils) –« *Pour y, ce n'est pas la joie : 36 est formé des facteurs 2 et 3.*

Mais selon que je les place horizontalement ou verticalement, mon y vaut 72 ou 108.

Tu vois, c'est pas possible ! »

$\mathcal{T}$ (étonné) –« *J'allais te féliciter . . . !*

Pourquoi crois-tu que ce problème ne peut pas avoir deux solutions ? »

$\mathcal{T}^2$ (haussant les épaules) – « *Et tant que tu y es, pourquoi pas des problèmes sans solution !*

Le nombre z ! . . . Voilà un beau problème ! . . . Rien à redire ! . . . Le facteur 3 doit être vertical, pour faire 63, et donc z vaut 42×3, c'est-à-dire 126 ! . . .

Et je suppose que tu vas me dire que tu ne demandais pas les autres détails ! »

$\mathcal{T}$ (esquissant un sourire)– « *Tout à fait, Matt ! Mais il est temps de prendre connaissance de la nouvelle énigme !* »

Où il est question d'atteindre les sommets !

Les naturels de 1 à 8, aux sommets d'un cube tu attribueras.

Pour former trois faces (64, 84 et 144) tu le feras.

Un sentiment de satisfaction t'envahira

$\mathcal{T}^2$ –« *Des nombres sur un cube ? . . . Comme un dé à jouer peut-être ?* »

$\mathcal{T}$ (en pleine réflexion)– « *. . . On imagine que les sommets d'un cube ont une valeur de 1 à 8 . . . et . . . on doit sans doute prendre les valeurs des quatre sommets d'une face pour obtenir les nombres demandés . . . !* »

$\mathcal{T}^2$ – « *. . . Faudrait un grand cube pour écrire dessus . . . et les trois autres faces . . . on ne dit rien ? . . .* »

$\mathcal{T}$ (l'air absent) –« *. . . Ce n'est pas un problème ! On les trouve facilement !* »

$\mathcal{T}^2$ - « *? ?. . . ? ?* »

Ami lecteur, je pense que $\mathcal{T}^2$ a vraiment besoin d'aide !

à suivre. . .

Ératosthène

S. Trompler

Ératosthène est né, en -276, à Cyrène, actuellement en Libye, et est mort, en -194, à Alexandrie, en Egypte.
Il est contemporain d'Archimède, qu'il a connu.
Ses études ont commencé à Cyrène et se sont poursuivies à Athènes durant quelques années. Il part vivre ensuite à Alexandrie où il devient tuteur du fils du roi Ptolémée III, puis bibliothécaire de la célèbre bibliothèque.

Cette bibliothèque était destinée à contenir « tous les savoirs du Monde ». Ptolémée demandait aux autres souverains de lui envoyer les ouvrages dignes d'intérêt et il les empruntait le temps de les faire recopier. Quand un bateau arrivait au port, les livres (rouleaux de papyrus) étaient confisqués et leur copie rendue au bateau. La bibliothèque a contenu jusqu'à 500 000 livres. Elle accueillait aussi les savants de toute origine et les nourrissait gratuitement.
Le roi espérait ainsi attirer les hommes de valeur à Alexandrie et supplanter Athènes comme capitale de la culture. Ératosthène gère cette bibliothèque, invente des catalogues, écrit l'histoire grecque de la guerre de Troie jusqu'à l'époque d'Alexandre Le Grand.

Il semble qu'Ératosthène soit devenu aveugle dans sa vieillesse et on raconte qu'il s'est suicidé en se laissant mourir de faim.

Mais pourquoi parler d'Ératosthène ? Quel rapport avec vos cours et en particulier avec celui de mathématiques ?

Tout simplement parce que Ératosthène est notamment célèbre pour son « crible »et pour sa mesure de la circonférence de la Terre.

Le crible d'Ératosthène.

Le terme « crible » vous est certainement connu. Un crible est, en quelque sorte un tamis. Et c'est bien de cela qu'il va s'agir, à savoir : « tamiser » les nombres naturels pour en garder certains et donc en rejeter d'autres.

En effet, le crible d'Ératosthène sert à déterminer si un nombre est premier, à l'aide d'un minimum d'opérations.

Math-Jeunes Junior n°107 J, 18–??, 2004

Rappel (ou définition) : un nombre naturel est **premier** s'il admet exactement **deux** diviseurs naturels. 1 n'est donc pas premier et 2 l'est.

Il est assez logique, dans un premier temps, de penser que pour déterminer, donc dénombrer, les diviseurs d'un nombre, il suffit... d'essayer de diviser ce nombre par tous les nombres (autres que 1) qui le précèdent.

À titre d'exemple, cherchons tous les diviseurs de 100 en essayant 1, 2, 3, 4,...On obtient $100 = 1 \times 100 = 2 \times 50 = 4 \times 25 = 5 \times 20 = 10 \times 10$.

Cet exemple simple nous montre surtout qu'en trouvant comme diviseurs 1, 2, 4, 5 et 10, nous avons en même temps obtenu leurs « associés » 100, 50, 25 et 20.

Tous nos essais de divisions peuvent ici se limiter à 10 qui est « la racine carrée de 100 ». C'est un gain de temps appréciable.

Pour trouver les diviseurs d'un nombre naturel quelconque, on peut limiter les essais de divisions à la racine carrée de ce nombre.

En effet, si un nombre plus grand que cette racine carrée divise exactement le nombre donné, le quotient est plus petit que la racine et il aura donc déjà été repéré.

Mais il y a mieux : 100 n'est pas divisible par 3. Il ne l'est donc pas non plus par 6, 9, 12, 15,... qui sont les multiples successifs de 3.

Si un nombre n'est pas divisible par un nombre premier, il ne l'est pas non plus par ses multiples.

Retenons donc que pour pouvoir affirmer si le nombre est premier ou pas, il suffit d'essayer de le diviser par les nombres premiers qui précèdent sa racine carrée.

Le crible d'Ératosthène permet cette recherche très facilement, par la construction d'un tableau dans lequel on barre progressivement les nombres non premiers.

On commence par barrer les multiples de 2, puis ceux de 3 qui restent, puis ceux de 5 pas encore barrés, de 7 et ainsi de suite pour les multiples des nombres premiers qui précèdent la racine carrée du nombre auquel on s'intéresse : les nombres non barrés sont tous premiers.

Exemple : 379 est-il premier ?

Construisons un tableau (19 lignes de 20 colonnes, p.ex.) contenant les nombres naturels de 1 à 380. Enlevons les multiples de 2 dans un premier temps, puis progressivement ceux de 3, de 5...c'est à dire des nombres premiers qui précèdent 19 (plus grand nombre premier inférieur à $\sqrt{379}$ puisque $19 \times 19 = 361 < 379$ mais $20 \times 20 = 400 > 379$).

Voici la première étape où nous avons enlevé 1 d'office, gardé 2 mais retiré ses multiples.

1	**2**	**3**	4	**5**	6	**7**	8	**9**	10	**11**	12	**13**	14	**15**	16	**17**	18	**19**	20
21	22	**23**	24	**25**	26	**27**	28	**29**	30	**31**	32	**33**	34	**35**	36	**37**	38	**39**	40
41	42	**43**	44	**45**	46	**47**	48	**49**	50	**51**	52	**53**	54	**55**	56	**57**	58	**59**	60
61	62	**63**	64	**65**	66	**67**	68	**69**	70	**71**	72	**73**	74	**75**	76	**77**	78	**79**	80
81	82	**83**	84	**85**	86	**87**	88	**89**	90	**91**	92	**93**	94	**95**	96	**97**	98	**99**	100
101	102	**103**	104	**105**	106	**107**	108	**109**	110	**111**	112	**113**	114	**115**	116	**117**	118	**119**	120
121	122	**123**	124	**125**	126	**127**	128	**129**	130	**131**	132	**133**	134	**135**	136	**137**	138	**139**	140
141	142	**143**	144	**145**	146	**147**	148	**149**	150	**151**	152	**153**	154	**155**	156	**157**	158	**159**	160
161	162	**163**	164	**165**	166	**167**	168	**169**	170	**171**	172	**173**	174	**175**	176	**177**	178	**179**	180
181	182	**183**	184	**185**	186	**187**	188	**189**	190	**191**	192	**193**	194	**195**	196	**197**	198	**199**	200
201	202	**203**	204	**205**	206	**207**	208	**209**	210	**211**	212	**213**	214	**215**	216	**217**	218	**219**	220
221	222	**223**	224	**225**	226	**227**	228	**229**	230	**231**	232	**233**	234	**235**	236	**237**	238	**239**	240
241	242	**243**	244	**245**	246	**247**	248	**249**	250	**251**	252	**253**	254	**255**	256	**257**	258	**259**	260
261	262	**263**	264	**265**	266	**267**	268	**269**	270	**271**	272	**273**	274	**275**	276	**277**	278	**279**	280
281	282	**283**	284	**285**	286	**287**	288	**289**	290	**291**	292	**293**	294	**295**	296	**297**	298	**299**	300
301	302	**303**	304	**305**	306	**307**	308	**309**	310	**311**	312	**313**	314	**315**	316	**317**	318	**319**	320
321	322	**323**	324	**325**	326	**327**	328	**329**	330	**331**	332	**333**	334	**335**	336	**337**	338	**339**	340
341	342	**343**	344	**345**	346	**347**	348	**349**	350	**351**	352	**353**	354	**355**	356	**357**	358	**359**	360
361	362	**363**	364	**365**	366	**367**	368	**369**	370	**371**	372	**373**	374	**375**	376	**377**	378	**379**	

Voici le tableau précédent où nous avons gardé 3 mais retiré tous ses multiples.

1	**2**	**3**	4	**5**	6	**7**	8	9	10	**11**	12	**13**	14	15	16	**17**	18	**19**	20
21	22	**23**	24	**25**	26	27	28	**29**	30	**31**	32	33	34	**35**	36	**37**	38	39	40
41	42	**43**	44	45	46	**47**	48	**49**	50	51	52	**53**	54	**55**	56	57	58	**59**	60
61	62	63	64	**65**	66	**67**	68	69	70	**71**	72	**73**	74	75	76	**77**	78	**79**	80
81	82	**83**	84	**85**	86	87	88	**89**	90	**91**	92	93	94	**95**	96	**97**	98	99	100
101	102	**103**	104	105	106	**107**	108	**109**	110	111	112	**113**	114	**115**	116	117	118	**119**	120
121	122	123	124	**125**	126	**127**	128	129	130	**131**	132	**133**	134	135	136	**137**	138	**139**	140
141	142	**143**	144	**145**	146	147	148	**149**	150	**151**	152	153	154	**155**	156	**157**	158	159	160
161	162	**163**	164	165	166	**167**	168	**169**	170	171	172	**173**	174	**175**	176	177	178	**179**	180
181	182	183	184	**185**	186	**187**	188	189	190	**191**	192	**193**	194	195	196	**197**	198	**199**	200
201	202	**203**	204	**205**	206	207	208	**209**	210	**211**	212	213	214	**215**	216	**217**	218	219	220
221	222	**223**	224	225	226	**227**	228	**229**	230	231	232	**233**	234	**235**	236	237	238	**239**	240
241	242	243	244	**245**	246	**247**	248	249	250	**251**	252	**253**	254	255	256	**257**	258	**259**	260
261	262	**263**	264	**265**	266	267	268	**269**	270	**271**	272	273	274	**275**	276	**277**	278	279	280
281	282	**283**	284	285	286	**287**	288	**289**	290	291	292	**293**	294	**295**	296	297	298	**299**	300
301	302	303	304	**305**	306	**307**	308	309	310	**311**	312	**313**	314	315	316	**317**	318	**319**	320
321	322	**323**	324	**325**	326	327	328	**329**	330	**331**	332	333	334	**335**	336	**337**	338	339	340
341	342	**343**	344	345	346	**347**	348	**349**	350	351	352	**353**	354	**355**	356	357	358	**359**	360
361	362	363	364	**365**	366	**367**	368	369	370	**371**	372	**373**	374	375	376	**377**	378	**379**	380

Voici le tableau précédent où nous avons gardé 5 cette fois mais retiré tous ses multiples.

1	**2**	**3**	4	**5**	6	**7**	8	9	10	**11**	12	**13**	14	15	16	**17**	18	**19**	20
21	22	**23**	24	25	26	27	28	**29**	30	**31**	32	33	34	35	36	**37**	38	39	40
41	42	**43**	44	45	46	**47**	48	**49**	50	51	52	**53**	54	55	56	57	58	**59**	60
61	62	63	64	65	66	**67**	68	69	70	**71**	72	**73**	74	75	76	**77**	78	**79**	80
81	82	**83**	84	85	86	87	88	**89**	90	**91**	92	93	94	95	96	**97**	98	99	100
101	102	**103**	104	105	106	**107**	108	**109**	110	111	112	**113**	114	115	116	117	118	**119**	120
121	122	123	124	125	126	**127**	128	129	130	**131**	132	**133**	134	135	136	**137**	138	**139**	140
141	142	**143**	144	145	146	147	148	**149**	150	**151**	152	153	154	115	156	**157**	158	159	160
161	162	**163**	164	165	166	**167**	168	**169**	170	171	172	**173**	174	175	176	177	178	**179**	180
181	182	183	184	185	186	**187**	188	189	190	**191**	192	**193**	194	195	196	**197**	198	**199**	200
201	202	**203**	204	205	206	207	208	**209**	210	**211**	212	213	214	215	216	**217**	218	219	220
221	222	**223**	224	225	226	**227**	228	**229**	230	231	232	**233**	234	235	236	237	238	**239**	240
241	242	243	244	245	246	**247**	248	249	250	**251**	252	**253**	254	255	256	**257**	258	**259**	260
261	262	**263**	264	265	266	267	268	**269**	270	**271**	272	273	274	275	276	**277**	278	**279**	280
281	282	**283**	284	285	286	**287**	288	**289**	290	291	292	**293**	294	295	296	297	298	**299**	300
301	302	303	304	305	306	**307**	308	309	310	**311**	312	**313**	314	315	316	**317**	318	**319**	320
321	322	**323**	324	325	326	327	328	**329**	330	**331**	332	333	334	335	336	**337**	338	339	340
341	342	**343**	344	345	346	**347**	348	**349**	350	351	352	**353**	354	355	356	357	358	**359**	360
361	362	363	364	365	366	**367**	368	369	370	**371**	372	**373**	374	375	376	**377**	378	**379**	

Et ainsi de suite jusqu'aux multiples de 19.

1	**2**	**3**	4	**5**	6	**7**	8	9	10	**11**	12	**13**	14	15	16	**17**	18	**19**	20
21	22	**23**	24	25	26	27	28	**29**	30	**31**	32	33	34	35	36	**37**	38	39	40
41	42	**43**	44	45	46	**47**	48	49	50	51	52	**53**	54	55	56	57	58	**59**	60
61	62	63	64	65	66	**67**	68	69	70	**71**	72	**73**	74	75	76	77	78	**79**	80
81	82	**83**	84	85	86	87	88	**89**	90	91	92	93	94	95	96	**97**	98	99	100
101	102	**103**	104	105	106	**107**	108	**109**	110	111	112	**113**	114	115	116	117	118	119	120
121	122	123	124	125	126	**127**	128	129	130	**131**	132	133	134	135	136	**137**	138	**139**	140
141	142	143	144	145	146	147	148	**149**	150	**151**	152	153	154	115	156	**157**	158	159	160
161	162	**163**	164	165	166	**167**	168	169	170	171	172	**173**	174	175	176	177	178	**179**	180
181	182	183	184	185	186	187	188	189	190	**191**	192	**193**	194	195	196	**197**	198	**199**	200
201	202	203	204	205	206	207	208	209	210	**211**	212	213	214	215	216	217	218	219	220
221	222	**223**	224	225	226	**227**	228	**229**	230	231	232	**233**	234	235	236	237	238	**239**	240
241	242	243	244	245	246	247	248	249	250	**251**	252	253	254	255	256	**257**	258	259	260
261	262	**263**	264	265	266	267	268	**269**	270	**271**	272	273	274	275	276	**277**	278	279	280
281	282	**283**	284	285	286	287	288	289	290	291	292	**293**	294	295	296	297	298	299	300
301	302	303	304	305	306	**307**	308	309	310	**311**	312	**313**	314	315	316	**317**	318	319	320
321	322	323	324	325	326	327	328	329	330	**331**	332	333	334	335	336	**337**	338	339	340
341	342	343	344	345	346	**347**	348	**349**	350	351	352	**353**	354	355	356	357	358	**359**	360
361	362	363	364	365	366	**367**	368	369	370	371	372	**373**	374	375	376	377	378	**379**	

Nous avons ainsi obtenu tous les nombres premiers jusque 379, qui est aussi premier.En tout il y en a 75. A vous maintenant d'essayer avec un autre nombre que 379. Evidemment, vous serez d'accord pour dire que quand on manipule de très grands nombres, il est préférable d'utiliser l'ordinateur mais . . .avec un bon programme !

Les nombres premiers servent dans de nombreux domaines de la vie. Ils sont présents, en particulier, dans les techniques de cryptographie (codage). C'est ainsi que 97 (le plus grand nombre premier inférieur à 100) est employé pour détecter les erreurs dans des numéros de compte (12 chiffres en trois blocs).

Le reste de la division par 97 du nombre formé par les deux premiers blocs doit correspondre au nombre représenté par le dernier bloc.

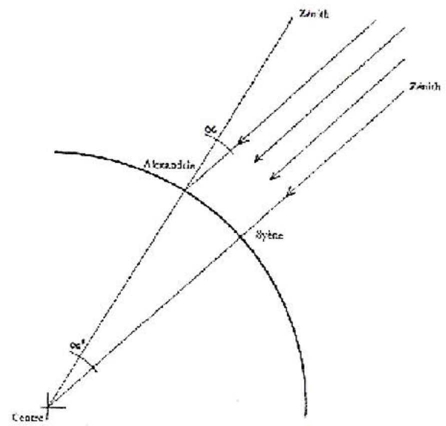
Exemple : Un numéro de compte de la SBPMef est 000-0728014-29. Si on divise 0000728014 par 97 on obtient le quotient entier 7505.

Le reste est donc $728014 - 97 \times 7505$ soit $728014 - 727985$ ou 29 qui est bien le nombre donné par le dernier bloc. 29 est un code de contrôle. A vous de traiter vos numéros personnels!!!

Et maintenant, la mesure de la circonférence de la terre.

Syène et Alexandrie sont à peu près sur le même méridien. Connaissant la distance entre ces deux villes et leur différence de latitude, on peut en déduire la longueur du méridien. C'est ce que Ératosthène a fait.

Syène est sur le tropique du Cancer, ce qui veut dire que le jour du solstice d'été, à midi, le soleil y est vertical, les objets n'ont plus d'ombre . Il y avait un puits à Syène dont le fond était donc éclairé à cet instant. Au même moment,à Alexandrie, Ératosthène a pu mesurer l'angle que faisait le soleil avec la verticale. Il a trouvé $7^0 12'$ d'après les uns, 7^0 d'après d'autres (le traité d'Ératosthène est hélas perdu).



Ayant évalué la distance Alexandrie–Syène à 5 000 stades, cela donne pour le méridien :

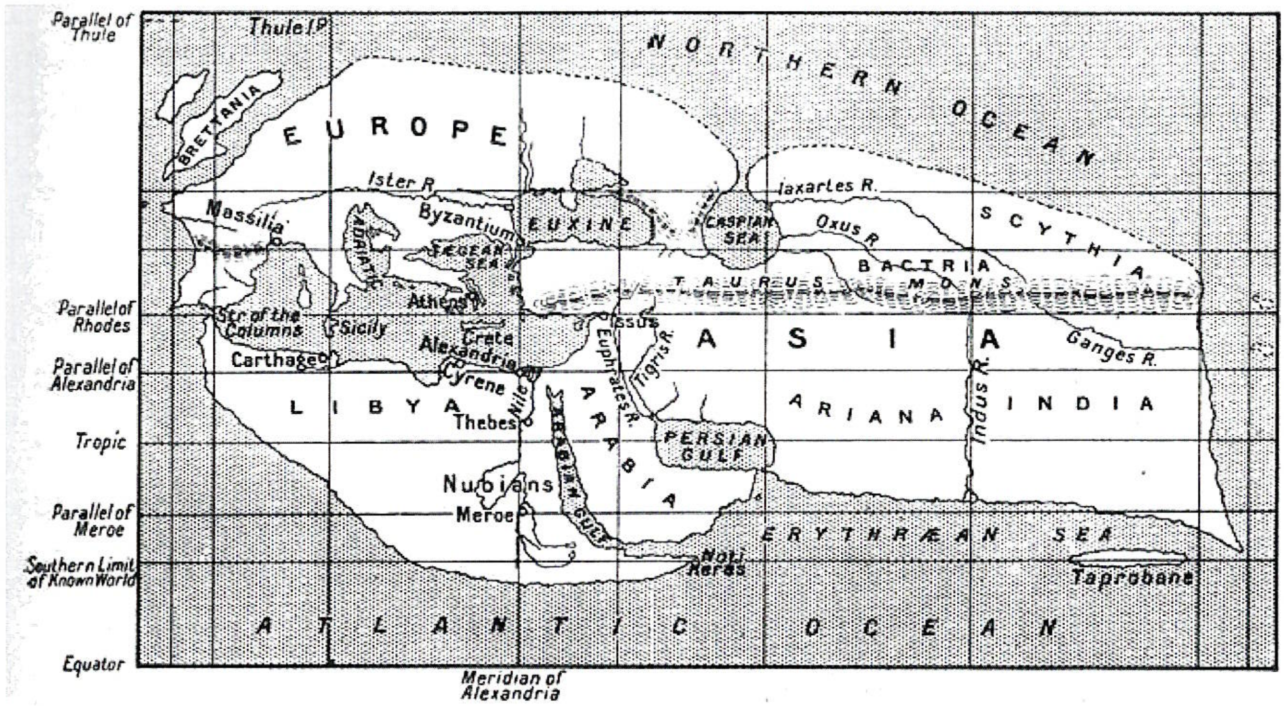
$$5000 \times \frac{360}{7,2} = 257000 \text{ stades.}$$

Des historiens donnent pour le stade 157 mètres, ce qui fait pour le méridien 40 349 km.

Si on compare ce résultat à la mesure acceptée actuellement (environ 40074 km), ce résultat apparaît donc très bon.

Ératosthène a également participé à l'avancement de la cartographie en enfermant une partie du monde connu entre des parallèles et des méridiens.

Voici un extrait d'une telle carte.



Puissance et économie (2)

Y. Noël-Roch

1. Rappel

Ayant laissé un échiquier enfoui sous des grains de riz dans le numéro précédent de la revue, nous étions à la recherche d'une méthode **économique** pour calculer $3^0 + 3^1 + 3^2 + \cdots + 3^{15}$

ou encore, si tu aimes le symbole de sommation

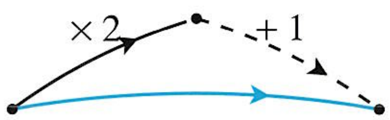
$$\sum_{n=0}^{15} 3^n$$

c'est-à-dire la somme des puissances de 3 lorsque l'exposant prend les valeurs entières de O à 15.

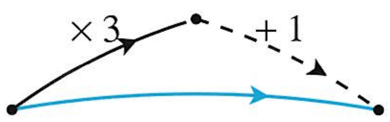
Reprenons le tableau déjà ébauché :

Exposants	0	1	2	3	4	5	6	....	64
Puissances	1	3	9	27	81			....	x
Totaux	1	4	13	40				....	y

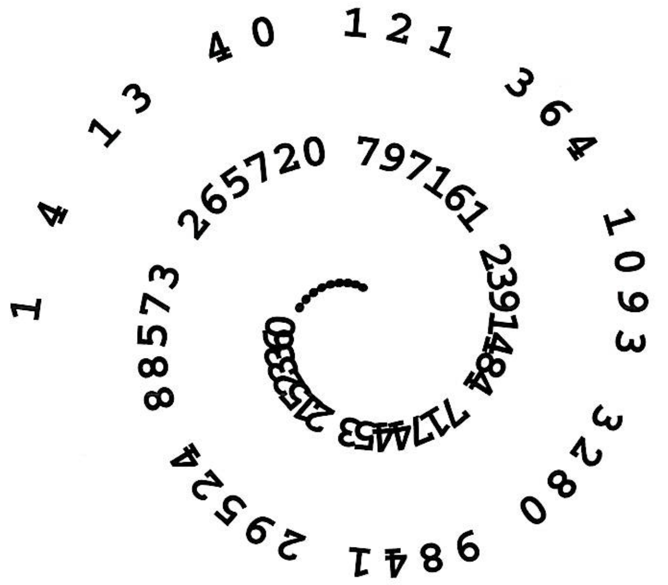
Manifestement, l'opérateur composé



utilisé pour les grains de riz ne nous donne pas, au départ de $3^0 = 1$, les nombres de la troisième ligne du tableau. Sans doute as-tu trouvé l'opérateur adéquat en pensant que le nombre 3 joue ici le rôle du nombre 2 dans le problème précédent. Ainsi, l'opérateur composé



semble bien nous donner les totaux successifs des puissances de 3 :



2. Justification

Nous allons montrer qu'il en est bien ainsi **n'importe où** dans le tableau comme dans la spirale.

Comme dans le numéro 106, nous introduisons une nouveauté : l'utilisation d'**indices**. Les indices se placent sous la ligne d'écriture, de manière à ne pas les confondre avec des exposants.

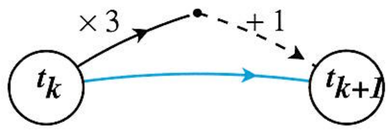
Exemples : t_3, x_k se lisent « t indice 3 » et « x indice k ».

Revenons à notre spirale !

Indiçons les totaux successifs : $t_0 = 3^0$, $\quad t_1 = 3^0 + 3^1$, $\quad t_2 = 3^0 + 3^1 + 3^2$,

$$t_k = 3^0 + 3^1 + 3^2 + 3^3 + \cdots + 3^{k-1} + 3^k$$

Justifier que l'opérateur composé ($\times 3$ suivi de $+1$) prévu permet de calculer n'importe quel total à partir du précédent



revient à justifier que

$$(t_k \times 3) + 1 = t_{k+1}$$

Allons-y cette fois pour la justification !

$$\begin{aligned}
(t_k \times 3) + 1 &= ((3^0 + 3^1 + 3^2 + 3^3 + \cdots + 3^{k-1} + 3^k) \times 3) + 1 \\
&= 3^1 + 3^2 + 3^3 + 3^4 + \cdots + 3^k + 3^{k+1} + 1 \\
&= 3^1 + 3^2 + 3^3 + 3^4 + \cdots + 3^k + 3^{k+1} + 3^0 \\
&= 3^0 + 3^1 + 3^2 + 3^3 + 3^4 + \cdots + 3^k + 3^{k+1} \\
&= t_{k+1}
\end{aligned}$$

3. Généralisation

Est-il tout aussi simple de calculer les totaux des puissances d'un positif a quelconque ? Réexploitons le tableau devenu familier en y introduisant des lettres en exposants et en indices :

Exposants	0	1	2	3	....	24	25	....	k	$k+1$
Puissances	1	a	a^2	a^3	....	a^{24}	a^{25}	....	a^k	a^{k+1}
Totaux	1	$1+a$	$1+a+a^2$	$1+a+a^2+a^3$	....	t_{25}	t_{26}	....	t_k	t_{k+1}

La troisième ligne fait apparaître l'opérateur composé adapté à la situation :

Permet-il de passer d'un total au suivant **n'importe où dans la ligne** ? Ou encore, l'égalité suivante est-elle vraie quel que soit k ?

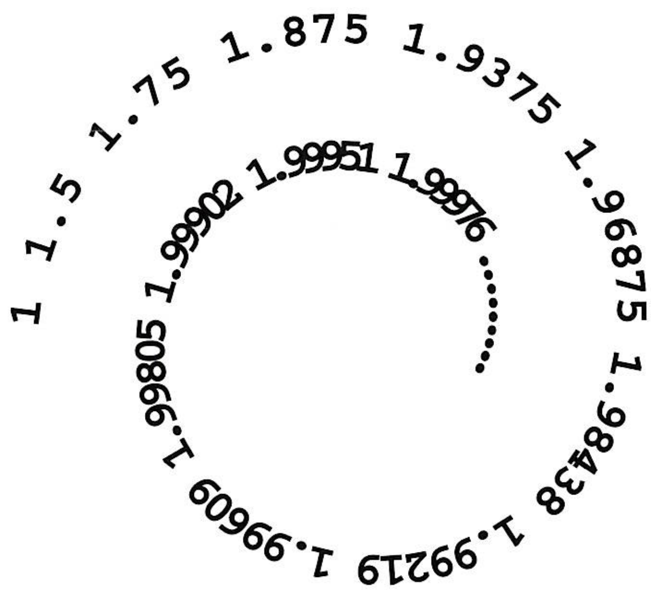
$$(t_k \times a) + 1 = t_{k+1}$$

Voici un petit calcul qui prouve qu'il en est bien ainsi :

$$\begin{aligned}
(t_k \times a) + 1 &= ((a^0 + a^1 + a^2 + a^3 + \cdots + a^{k-1} + a^k) \times a) + 1 \\
&= a^1 + a^2 + a^3 + a^4 + \cdots + a^k + a^{k+1} + 1 \\
&= a^1 + a^2 + a^3 + a^4 + \cdots + a^k + a^{k+1} + a^0 \\
&= t_{k+1}
\end{aligned}$$

puisque $1 = a^0$.

Que se passe-t-il si a vaut -1 ? Si a vaut $\frac{1}{2}$?



À suivre

Olympiades

C. Festraets

Lorsque tu recevras ce numéro de Math-Jeunes, tu auras certainement participé à l'éliminatoire de l'Olympiade Mathématique Belge. Peut-être seras-tu admis en demi-finale, et dans ce cas, je te félicite. Peut-être ne seras-tu pas aussi chanceux, mais ne t'en fais pas, prends courage et réinscris-toi l'année prochaine.

Dans tous les cas, voici quelques énoncés qui devraient t'intéresser ; ces énoncés sont choisis parmi ceux des épreuves mini et midi de cette dernière éliminatoire, essaye d'abord de les résoudre sans regarder la solution.

Si tu désires t'exercer davantage, tu peux te procurer les tomes 4 et 5 des brochures « Olympiades ». Voici tous les renseignements nécessaires pour les commander.

Olympiades Mathématiques Belge

Tome 4 (1994-1998) : 5 euros Tome 5 (1999-2002) : 6 euros Tome 4 + tome 5 : 10 euros

Ajouter 1,60 euros de port pour un tome et 2,30 euros de port pour deux tomes. Les commandes sont à adresser à :

SBPMef, rue de la Halle, 15, 7000 Mons

Compte : 000-0728014-29

Fax et téléphone : 065 37 37 29.

Mini 6

Cette année-là, il y avait 5 lundis, 5 mardis et 5 mercredis en janvier. Sur quel jour de la semaine tombait le 1er février ?

(A) lundi (B) mardi (C) mercredi
(D) jeudi (E) dimanche

Solution

Le mois de janvier comporte 31 jours, soit 4 semaines et 3 jours. Une semaine comprenant 7 jours, 4 d'entre eux apparaissent quatre fois sur le mois et 3 d'entre eux apparaissent cinq fois. Pour ceux-ci, l'énoncé nous dit qu'il s'agit de lundi, mardi et mercredi. On a obligatoirement lundi 1er, mardi 2 et mercredi 3 janvier, et donc lundi 29, mardi 30 et mercredi 31 janvier. De sorte que le 1erfévrier tombe un jeudi.

Mini 9

64 joueurs de tennis de table débutent un tournoi de simples (par élimination directe). Une nouvelle balle est utilisée pour chaque partie. Combien de balles auront été utilisées à la fin du tournoi ?

(A) 56 (B) 63 (C) 32 (D) 64 (E) 128

Solution

Au premier tour, il y a 32 rencontres, 32 balles sont utilisées et 32 joueurs sont éliminés. Au deuxième tour, il y a 16 rencontres, 16 balles sont utilisées et 16 joueurs sont éliminés. Et ainsi de suite jusqu'au dernier tour où il n'y a qu'un seul match et où on utilise une seule nouvelle balle. Le nombre total de balles utilisées est donc $32 + 16 + 8 + 4 + 2 + 1 = 63$.

Mini 17

Si on augmente le dividende d'une division de 65 et si on augmente le diviseur de 5, on s'aperçoit que le quotient et le reste ne changent pas. Que vaut le quotient ?

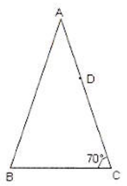
(A) 7 (B) 9 (C) 11 (D) 13 (E) 15

Solution

Désignons par D le dividende, par d le diviseur et par q le quotient de la division initiale. Le reste de cette division vaut $D - dq$. Après augmentation, le nouveau dividende est $D+65$, le nouveau diviseur est $d+5$, le quotient reste q et le reste qui vaut $D + 65 - (d + 5)q$ est le même que dans l'égalité initiale. D'où $D - dq = D + 65 - (d + 5)q$. Simplifions les termes communs aux deux membres, il vient $0 = 65 - 5q$ et on obtient $q = 13$.

Mini 19

Dans la figure ci-contre, $|AB| = |AC|$, $|BC| = |CD|$ et l'amplitude de l'angle C est 70°. L'amplitude de l'angle $\widehat{ABD}$ est



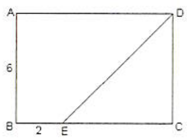
Ⓐ 10° Ⓑ 15° Ⓒ 20° Ⓓ 25° Ⓔ 30°

Solution

Le triangle BCD est isocèle car $|BC| = |CD|$, donc $\widehat{CBD} = \widehat{CDB}$; La somme des angles du triangle BCD est 180°, d'où $\widehat{CBD} = \frac{1}{2}(180° - 70°) = 55°$. Le triangle BAC est aussi isocèle car $|AB| = |AC|$, donc $\widehat{ABC} = 70°$ et on a $\widehat{ABD} = 70° - 55° = 15°$.

Mini 25

Dans le rectangle $ABCD$, le segment $[DE]$ est la bissectrice de l'angle D. Si $|AB| = 6$ et $|BE| = 2$, alors l'aire de $ABCD$ vaut



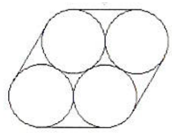
Ⓐ 12 Ⓑ 24 Ⓒ 36 Ⓓ 48 Ⓔ 60

Solution

L'angle $\widehat{ADC}$ vaut 90° ; $[DE]$ étant la bissectrice de cet angle, l'angle $\widehat{EDC}$ vaut 45°. Le triangle CDE est donc rectangle et isocèle, ce qui nous donne $|CE| = |CD| = 6$, d'où $|BC| = 8$ et l'aire du rectangle $ABCD$ vaut $8 \times 6 = 48$.

Mini 30 et Midi 20

Des tuyaux cylindriques de diamètre extérieur égal à 20 cm sont ficelés au plus serré comme indiqué sur la figure. Quelle est, en cm, la longueur de la ficelle (hors noeuds) ?



Ⓐ 100 Ⓑ $100 + 10\pi$ Ⓒ $40 + 20\pi$
Ⓓ $80 + 20\pi$ Ⓔ $80 + 40\pi$

Solution

La ficelle présente 4 segments rectilignes et 4 arcs de cercle. Chaque segment rectiligne est tangent à deux cercles de même rayon, la longueur d'un segment vaut deux fois le rayon d'un cercle soit 20 cm et au total les 4 segments rectilignes mesurent 80 cm. La ficelle fait un tour complet, donc la somme des 4 arcs de cercle vaut $2\pi r$ où r est le rayon d'un cercle, soit 10 cm. La longueur totale de la ficelle est $80 + 20\pi$.

Midi 10

J'ai deux montres. L'une retarde de deux minutes par heure L'autre avance d'une minute par heure. La première fois que je les ai regardées, elles indiquaient toutes les deux la même heure, mais la seconde fois, le même jour, celle qui avance indiquait une heure de plus que l'autre. Entre mes deux observations, combien de temps s'est-il écoulé ?

Ⓐ 5 h Ⓑ 10 h Ⓒ 15 h
Ⓓ 20 h Ⓔ 30 h

Solution

En une heure, la différence des temps indiqués par les deux montres est de 3 minutes. La seconde fois que je regarde ces montres, l'une indique une heure (c'est-à-dire 60 minutes) de plus que l'autre, il s'est donc écoulé 60 : 3 = 20 heures entre mes deux observations.

Midi 15

Si la longueur x d'un trajet est diminuée de 15% et si le temps y mis pour effectuer ce trajet est augmenté de 25%, alors la vitesse $\frac{x}{y}$

(A) diminue de 32 %
(B) augmente de 32 %
(C) diminue de 10 %
(D) augmente de 10 %
(E) diminue de 40 %

Solution

Calculons la nouvelle vitesse

$$\frac{x+\frac{15x}{100}}{y-\frac{25y}{100}} = \frac{\frac{85x}{100}}{\frac{75y}{100}} = \frac{85x}{75y} = \frac{17x}{25y} = \frac{68x}{100y}$$

Elle a donc diminué de 32 %.

Mini 18 et Midi 18

Sans réponse préformulée - Combien existe-t-il de rectangles d'aire 2 004 cm^2 dont les dimensions sont des nombres entiers de cm ?

Solution

Décomposons 2 004 en facteurs premiers : $2\,004 = 2^2 \cdot 3 \cdot 167$. L'aire d'un rectangle étant égale au produit de sa largeur par sa longueur, il suffit de calculer tous les produits de deux facteurs entiers qui valent 2 004 :

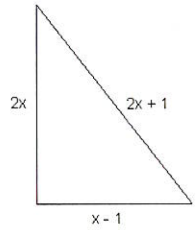
$2\,004 = 1 \times 2\,004 = 2 \times 1\,002 = 3 \times 668 = 4 \times 501 =$

$6 \times 334 = 12 \times 167$

Il y a donc 6 rectangles d'aire 2 004 cm^2.

Midi 23

Que vaut l'aire du triangle rectangle représenté ci-dessous où x est un nombre réel strictement positif ?



(A) 6 (B) 12 (C) 24
(D) 30 (E) 60

Solution

Appliquons le théorème de Pythagore à ce triangle :

$$\begin{aligned}(2x+1)^2 &= (x-1)^2 + (2x)^2\\ 4x^2+4x+1 &= x^2-2x+1+4x^2\\ x^2-6x &= 0\\ x &= 6\end{aligned}$$

Les côtés de l'angle droit du triangle ont alors pour longueurs $x-1=5$ et $2x=12$ et l'aire du triangle vaut $\frac{1}{2}(5\times 12)=30$.

Midi 30

Les seuls réels ne satisfaisant pas l'inégalité $\frac{1}{x-1} < \frac{1}{x-2}$ sont

(A) les réels x tels que $1 \leqslant x \leqslant 2$
(B) 1 et 2
(C) tous les réels strictement supérieurs à 1
(D) tous les réels inférieurs à 2
(E) les réels supérieurs à 1 ou inférieurs à 2

Solution

Il faut certainement que $x \neq 1$ et $x \neq 2$ pour que l'inégalité soit satisfaite. On a alors trois possibilités : $x<1$, $1<x<2$ ou $x>2$. Dans le premier cas, les deux dénominateurs sont négatifs. Dans le deuxième cas, $x-1$ est positif et $x-2$ est négatif. Dans le troisième cas, les deux dénominateurs sont positifs. En multipliant les deux membres par $x-1$ et par $x-2$, on obtient $x-2<x-1$ dans les premier et troisième cas, ce qui est vrai, tandis que dans le second cas, on obtient $x-2>x-1$, ce qui est faux.

L'inégalité n'est donc pas satisfaite pour les réels x tels que $1 \leqslant x \leqslant 2$.

Math-Quiz

Claude Villers

Nous remercions vivement tous ceux qui ont répondu, en tout ou en partie, aux questions de la première étape de notre Math-Quiz. Le tableau « d'honneur » de cette première étape s'établit comme suit (ordre alphabétique) :

Nom	Commune	Classe
Bianchi Fabio	Colfontaine	1^{re}
Classe de Jahn Kreutz	Waimes	2^{e}
Dauphin Guillaume	Bruxelles	1^{re}
Demire Deniz	Fleurus	3^{e}
Depresseux Adrien	Heusy	3^{e}
Ivanoiu Toma	Namur	2^{e}
Jemine Marie	Mery	?
Rousseau Vincent	Chimay	?
Thonet Adrien	Bourlers	1^{re}
Villers Vincent	Sirault	3^{e}

Tous ces élèves « gagnent » une BD qui leur a déjà été envoyée.

Voici maintenant les réponses aux questions de la première étape.

Question n°	Réponse	Question n°	Réponse
1	28	6	1732
2	2008	7	61 (ou 1)
3	8	8	32
4	12	9	1386
5	1	10	20800

Un doute, un désaccord, une interrogation au sujet d'une réponse ? ? Voilà une belle occasion d'en parler en classe ou avec vos condisciples et/ou votre professeur !

Nous invitons maintenant tous les lecteurs à participer à la deuxième étape de notre challenge dont nous rappelons la teneur : fournir le maximum de réponses correctes aux questions qui sont proposées dans cette rubrique.

Cette deuxième étape ainsi que le classement général nous permettront de vous placer au tableau d'honneur et d'attribuer des récompenses aux meilleurs envois.

Comme lors de la première étape, 10 questions vous sont soumises. Chacune d'elles possède un coefficient de difficulté indiqué sous la forme d'étoiles. Chaque étoile d'une question dont la réponse est correcte vous fait gagner 5 points. Vous répondez à autant de questions que vous le souhaitez.

110 points ont été mis en jeu lors de la première étape et 140 points le sont maintenant.

Comment répondre ?

Vous nous envoyez vos réponses sur carte postale simple ou illustrée (voir ci-après le concours annexe) à l'adresse :

SBPMef - Math-Quiz Rue de la Halle 15 B-7000 Mons.

en indiquant bien vos nom et prénom, votre adresse complète, le nom exact et la localisation de votre école ainsi que le niveau de votre classe en 2003-2004.

Vos réponses à cette deuxième étape doivent nous être parvenues dès que possible et avant le vendredi 20 février 2004.

Exemple de tableau-réponse

Question n°	Ma réponse	Question n°	Ma réponse
11		16	
12		17	
13		18	
14		19	
15		20	

Le concours annexe (facultatif) se poursuit aussi : Nous vous invitons en outre à être imaginatif et/ou créatif pour le choix du sujet figurant éventuellement au recto de la carte. Vous pouvez librement en compléter ou en détourner l'illustration par ajout de dessins ou de textes.
Cela doit vous permettre de la transformer en un sujet touchant aux mathématiques. A vous de faire preuve d'originalité. Les meilleures propositions seront également primées.

Questions de la deuxième étape

11. **Une histoire de chaussettes ! (*)**

    Vous vous trouvez dans une pièce totalement plongée dans l'obscurité.

    Vous savez que devant vous est ouvert un tiroir comprenant 10 chaussettes noires, 8 chaussettes blanches, 6 chaussettes rouges, 6 chaussettes vertes et 12 chaussettes bleues, toutes bien mélangées.

    Combien de chaussettes devez-vous prélever pour être certain d'avoir au moins une paire de la même couleur ?

12. **Palindromes (*)**

    Carol Lorac est née à Eze le 10/11/01.

    Nom et prénom, lieu et date sont ici des palindromes ce qui signifie qu'il est possible de les lire de gauche à droite et aussi de droite à gauche. Combien d'autres dates palindromes y aura-t-il ou y a-t-il eu de la naissance au dixième anniversaire de Carol Lorac ?

13. **Dur de la feuille ! (**)**

    Une feuille rectangulaire de format $A0$ est une feuille de $1m^2$ de superficie. Si on la coupe en deux selon sa plus petite médiane, on obtient deux feuilles de format $A1$. (Chacune d'elles est en plus semblable (au sens mathématique du terme) à la feuille d'origine $A0$). On procède de même pour obtenir des feuilles de formats $A2$, $A3$, $A4$, $A5$,...Quelle est la superficie du papier nécessaire à l'impression du texte d'un livre de format $A5$, comportant 192 pages recto/verso ? (On ne tient pas compte de la couverture).

14. **Que d'eau, que d'eau ! (**)**

Mathieu a abandonné deux récipients ouverts dans le jardin. Le premier est un parallélépipède rectangle dont les dimensions de la base sont $30cm$ et $40cm$et de hauteur $15cm$. Le second est un cube dont les arêtes mesurent $20cm$.

Il pleut la nuit. Au matin Mathieu mesure la hauteur d'eau dans le cube et trouve $2,5cm$. Quelle est alors la hauteur d'eau dans le second récipient ?

15. **Question de minutes ! (***)**

A 3 heure pile les deux aiguilles de l'horloge sont perpendiculaires.

Dans combien de minutes seront-elles dans le prolongement l'une de l'autre ?

16. **Curieux paveur ! (***)**

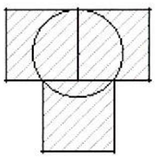
Mathieu est occupé à paver son bureau. Il dispose de pavements ayant la forme d'hexagone réguliers et d'octogones réguliers dont la longueur des côtés est la même.

Mathieu juxtapose par un même coté un de ces hexagones et un de ces octogones.

Quelle est, en degrés, minutes et secondes, la valeur la plus approchée par défaut de l'angle des deux côtés adjacents aux côtés commun ?

17. **Restez couverts ! (***)**

Trois plaques carrées de $2m$ de côté recouvrent une ouverture circulaire comme le montre le croquis.



Quelle est, en cm, la valeur maximale du rayon de l'ouverture ?

18. **Tel est pris...(****)**

Quatre individus, dont l'un a commis un vol, sont auditionnés par la police et font les déclarations suivantes :

Arthur : « Bernard est coupable »
Bernard : « Didier est coupable »
Christian : « Je ne suis pas coupable »
Didier : « Bernard ment lorsqu'il dit que je suis coupable.

On sait qu'une seule de ces déclarations est vraie. Qui est le coupable ?

19. **Fractions Egyptiennes (****)**

Les Egyptiens n'utilisaient que des fractions dont les numérateurs étaient 1 et dont les dénominateurs étaient des nombres naturels.

Une fraction de numérateur différent de 1 était écrite sous la forme d'une somme de fractions de numérateurs 1 dont les dénominateurs étaient des nombres naturels tous différents.

Ainsi $2/3$ ne s'écrivait pas $1/3+1/3$ mais bien $1/3 + 1/4 + 1/12$.

Ecrivez $2/5$ comme somme de fractions Egyptiennes.

20. **A moi la bonne coupe ! (*****)**

Les trois équipes de mini-foot ont terminé ex-aequo la phase finale du tournoi.

Conformément au règlement, l'attribution de la coupe est alors déterminée par le sort.

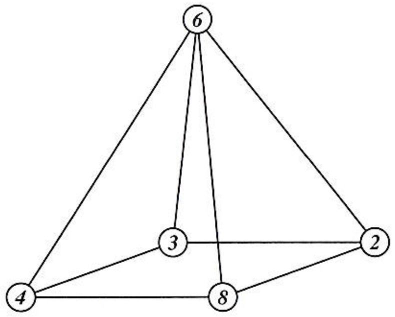
A cet effet, la coupe est entièrement dissimulée sous l'un des trois seaux disposés sur une table.

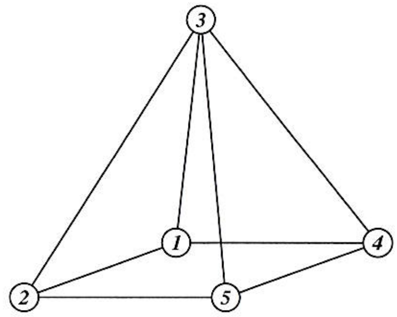
Un premier capitaine d'équipe désigne un seau. S'il couvre la coupe alors son équipe remporte le tournoi sinon c'est fini pour elle et le seau est enlevé. La procédure est alors éventuellement répétée ainsi pour un deuxième capitaine puis, si besoin est, pour le troisième capitaine.

Cette façon de procéder est-elle équitable ? (oui ou non ?)

Solutions de jeux de la page 9.

1. Pyramide numérisée.





2. Carré de huit nombres.

Nombres impairs :

2	4	1
6	0	3
9	7	5

Une solution parmi d'autres.

Nombres pairs :
Il est impossible de compléter les cinq cases marquées d'une étoile avec les seuls chiffres 2, 4, 6 et 8.

		*
	0	*
*	*	*

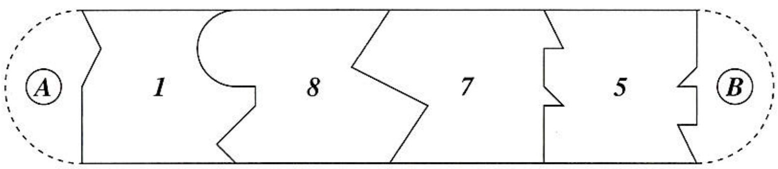
Nombres multiples de 9 :

1	5	3
2	0	7
6	4	8

Une solution parmi d'autres.

Nombres premiers :
La situation est analogue à celle des nombres pairs : cette fois, les seuls chiffres disponibles pour les cases marquées d'une étoile sont 1, 3, 7 et 9.

3. Une bandelette en quatre pièces.



Cette solution est la seule qui tient compte de ce que les pièces doivent toutes montrer la face blanche.

4. Nombres croisés.

$R = 31$ et $S = 11$.

Math-Jeunes Junior
Périodique trimestriel
15, rue de la Halle – 7000 Mons
Bureau de dépôt 7000 Mons 1

Responsable de l'édition: A. PATERNOTTRE
Rue du Moulin 78 – 7300 Boussu
Bureau de dépôt : Mons 1

Autorisation de fermeture
Sluitings toelating

7000 Mons 1
5/156

Belgique - België
P.P.
7000 Mons 1
5/124

Périodique - Peut être ouvert pour contrôle postal

Réservé à la poste

Inconnu
Refusé
Décédé
Adresse insuffisante
N'habite plus à l'adresse indiquée