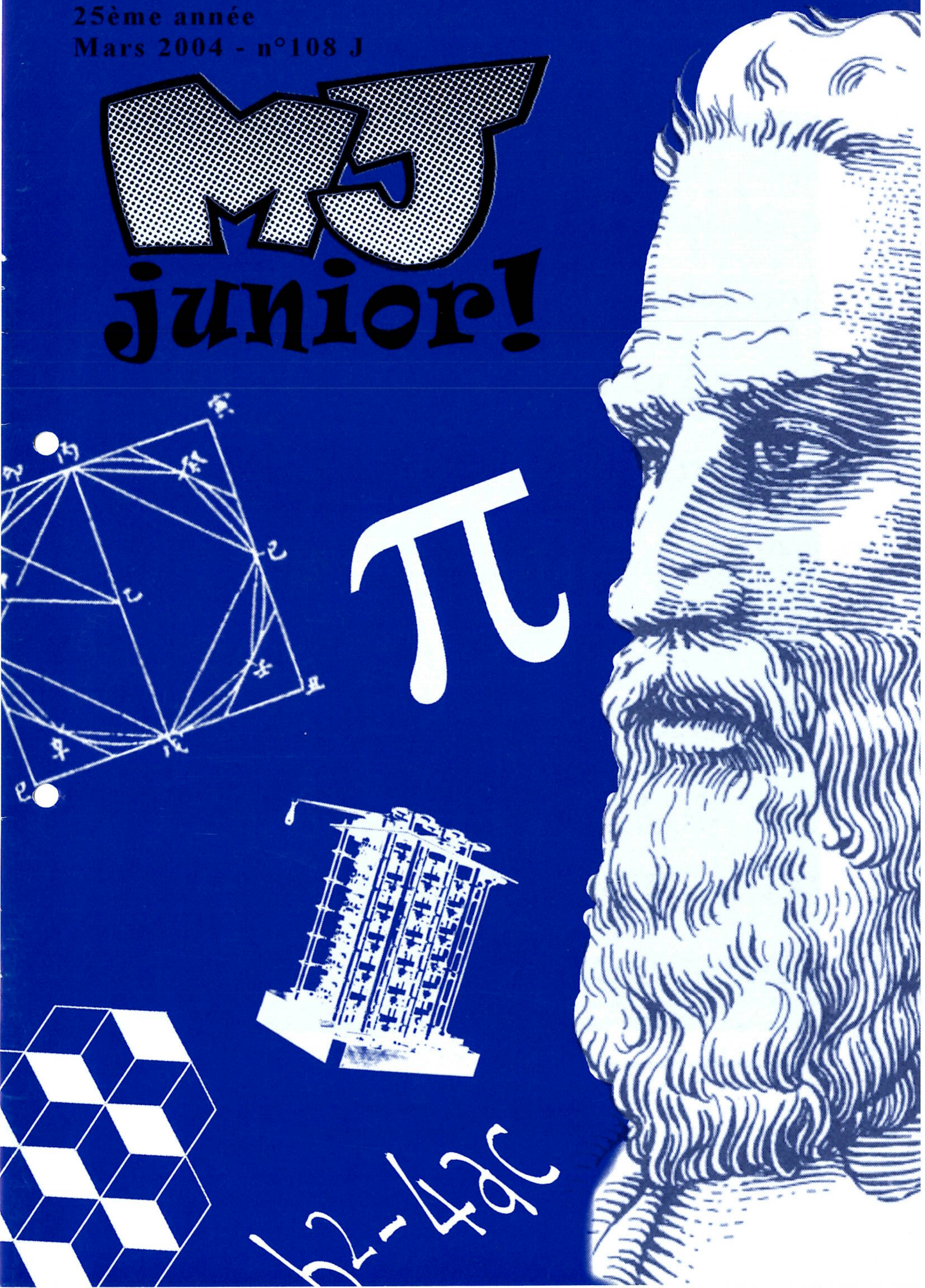
25ème année
Mars 2004 - n°108 J

MJ junior!



Math-Jeunes et Math-Jeunes Junior

Revues trimestrielles publiées par la Société Belge des Professeurs de Mathématique d'expression française

Secrétariat : M.-C. Carruana, S.B.P.M.e.f., rue de la Halle 15, 7000 Mons, ☎-FAX 32-(0)65-373729, e-mail : sbpm@sbpm.be, URL : http://www.sbpm.be.

Tarifs

Abonnements groupés (au moins 5)				
	Une des deux revues		Les **deux** revues	
Belgique	3,80 €		6,60 €	
	✉ (non prior)	prior	✉ (non prior)	prior
Europe	6 €	7,80 €	11 €	14 €
Autres pays	6,60 €	10 €	12 €	18 €

Abonnements individuels				
	Une des deux revues		Les **deux** revues	
Belgique	5 €		10 €	
	✉ (non prior)	prior	✉ (non prior)	prior
Europe	11,50 €	15,80 €	16,50 €	20,50 €
Autres pays	12,75 €	20,40 €	20 €	25 €

Légende : « prior »=prior, « non prior »=✉.

Trois numéros de chaque revue sont publiés annuellement. Pour connaître la liste des anciens numéros encore disponibles et leur prix selon votre localisation, adressez-vous au secrétariat.
Les abonnements destinés aux élèves de l'enseignement secondaire sont de préférence pris par l'intermédiaire d'un professeur. Effectuez vos paiements :

- ☞ pour la Belgique : par virement au Compte n°000-0728014-29 de *S.B.P.M.e.f.*, rue de la Halle 15, 7000 Mons
- ☞ pour la France : par virement au Compte CCP Lille 10 036 48 S
- ☞ pour l'étranger (sauf la France) : par virement international au Compte n°IBAN: BE 26 0000 7280 1429 BIC: BPOTBEB1 au nom de la *S.B.P.M.e.f.*, rue de la Halle 15, B 7000 Mons, Belgique. Les personnes résidant à l'étranger qui ne peuvent faire un virement à ce compte sont invitées à envoyer un mandat postal international. Tout chèque bancaire non encaissable en Belgique devra être majoré de 12,50 € pour frais d'encaissement.

Éditeurs responsables et rédacteurs en chef :

– pour *Math-Jeunes* : G. NOËL, Rue de la Culée 86, 6927 Resteigne

– pour *Math-Jeunes Junior* : A. PATERNOTTRE, Rue du Moulin 78, 7300 Boussu

N°108 J Vingt-cinquième année 2004

MATH-JEUNES JUNIOR

Sommaire

Ce numéro de Math-Jeunes Junior est le dernier de l'abonnement 2003–2004. Vous pouvez dès à présent vous réabonner pour 2004–2005. Voyez les tarifs en page 2 de couverture.

Elle penche un peu moins

A. Paternottre

Personne n'ignore l'existence de cette vielle et respectable dame de la péninsule italienne qui depuis des siècles se tient en position inclinée de quelque 5 degrés vers le sud.
Bien sûr il s'agit de la célèbre « Tour de Pise »dite aussi « Tour penchée ».
Etonnante et fascinante construction que ce campanile connu dans le monde entier et visité chaque année par des dizaines de milliers de touristes et amateurs d'art.

L'environnement de la Tour.

La Tour penchée est un des quatre bâtiments érigés sur la prestigieuse et verdoyante « Place des Miracles »à Pise.

Cette place comprend en effet, outre la Tour Penchée, la Cathédrale (ou Dôme), le Baptistère et le Cimetière (ou Campo Santo), tous aussi remarquables de beauté et d'élégance dans le style qui leur est commun : le roman pisan.

Quant à la merveilleuse ville fortifiée de Pise, elle fait partie de la Toscane, est proche de la mer (Golfe de Gênes), est traversée par le fleuve « Arno »comme sa voisine Florence, autre ville d'art, riche en palais, églises, couvents, bibliothèques et musées.

Ajoutons encore que Pise est la ville natale de Léonardo da Pisa, mieux connu sous le nom de Fibonacci, mathématicien de renom, auteur de la célèbre suite qui porte son nom : 1,1,2,3,5,8,13,21,. . ..

Pise fut aussi la ville où naquit et vécut le célèbre physicien-astronome-mathématicien Galilée.(1564–1642)

Les étapes de la construction de la Tour.

Les travaux ont débuté le 9 Août 1173 et ont été réalisés par tranches successives sur une période d'environ 200 ans.

On cite le plus souvent l'architecte et sculpteur pisan Bonnano Pisano comme auteur du projet. Des recherches récentes l'attribue plutôt à Déotisalvi, par ailleurs aussi constructeur du Baptistère.

Telle qu'on peut l'admirer aujourd'hui, la Tour de Pise est un cylindre circulaire creux de 19,6m de diamètre extérieur et d'environ 60m de haut. Son poids total avoisine les 14000 tonnes. Elle se compose d'un soubassement surmonté de 6 loggia identiques comportant chacune 30 colonnettes avec base et chapiteau finement sculptés. Le tout couronné au sommet par un cylindre de diamètre inférieur à celui des loggia et servant d'abri aux cloches. Un escalier hélicoïdal, comportant 293 marches, court à l'intérieur de la couronne maçonnée et permet l'accès à chacune des loggia de la Tour.

Les matériaux utilisés proviennent en grande partie des marbreries de San Giulano, ville proche de Pise.

De 1173 à 1178 : construction des fondations, du soubassement et des 4 premiers étages.

De 1178 à 1272 : longue interruption des travaux peut-être due aux guerres qui opposent Pise à Gênes, Florence et Lucques mais très probablement due aussi aux premiers indices d'instabilité de la Tour.

De 1272 à 1278 : reprise des travaux sous la direction de Giovanni di Simone qui terminera la sixième loggia.

En 1278 : des mesures au fil à plomb sont très officiellement prises devant notaire, ce qui permet de supposer que l'inclinaison était déjà bien apparente depuis longtemps. Nouvelle interruption des travaux.

En 1360 : l'oeuvre est enfin achevée par Tommaso di Andréa Pisano qui construit la salle des cloches dont il rectifie notoirement l'inclinaison par rapport au bâtiment déjà construit. On accède à cette salle de plain-pied du côté nord et en gravissant six marches du côté sud.

1. Pourquoi la Tour de Pise penche-t-elle et pourquoi ne s'effondre-t-elle pas ?

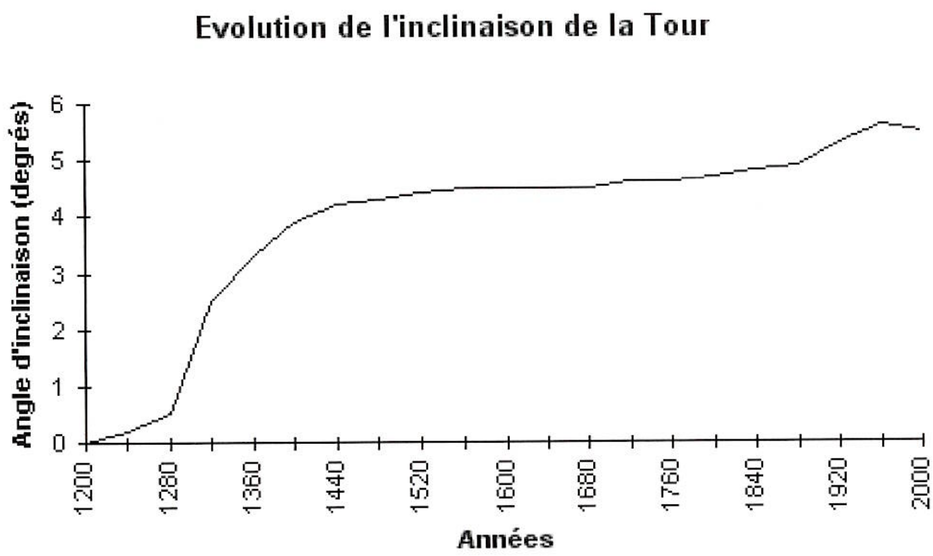
Au début de la construction de la Tour (1173), la Cathédrale voisine existe déjà et le Baptistère est pratiquement achevé.

Où fallait-il donc construire la Tour ?

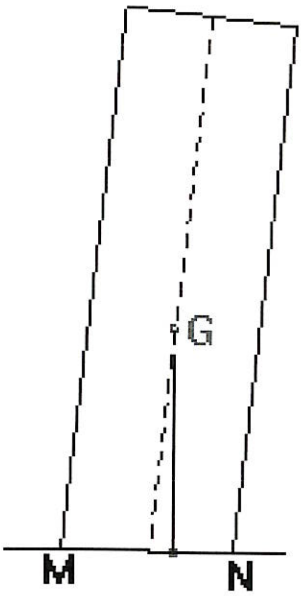
Les autorités locales et les architectes en discutent et décident finalement de l'ériger face à la porte du transept sud à l'arrière de la Cathédrale. Et... c'est pas de chance car juste à cet endroit, un affaissement de terrain va affecter imperceptiblement la stabilité de l'édifice dès le début des travaux et provoquer son inclinaison vers le sud. Et l'angle d'inclinaison ne cessera d'augmenter non seulement durant les deux cents ans que durèrent les travaux mais encore après. (On sait qu'en 1360, à la fin des travaux, cet angle était d'un peu plus de 3^0)

Le graphique ci-après montre l'évolution probable de l'angle d'inclinaison de la Tour jusqu'à nos jours.

Les premières mesures sérieuses de cette inclinaison ont été effectuées par Vasari en 1550.



La Tour a donc penché dès le début. Heureusement ses constructeurs n'ont pas perdu courage pour autant et ont eu à coeur d'achever leur oeuvre malgré cet énorme et malencontreux imprévu. Il convient de leur rendre hommage car sans eux, des millions d'admirateurs de la Tour auraient été privé de la vue de cette étrange et audacieuse construction dont l'originalité en fait tout le charme et l'inclinaison, la curiosité.



Ce qui est remarquable c'est que la Tour de Pise ne s'est jamais écroulée. Pourquoi ? Les physiciens expliquent cette réalité en disant : « La droite verticale qui passe par son centre de gravité perce sa base d'appui à l'intérieur de celle-ci ».

Le centre de gravité G (ou barycentre) est le point de l'axe de la Tour, situé un peu plus bas que sa mi-hauteur et en lequel on pourrait concentrer tout son poids.

Tu apprendras à déterminer le centre de gravité d'une figure au cours de physique.

La base d'appui MN (ou base de sustentation) de la tour est le cercle ceinturant ses fondations.

Il était nécessaire de stabiliser la Tour

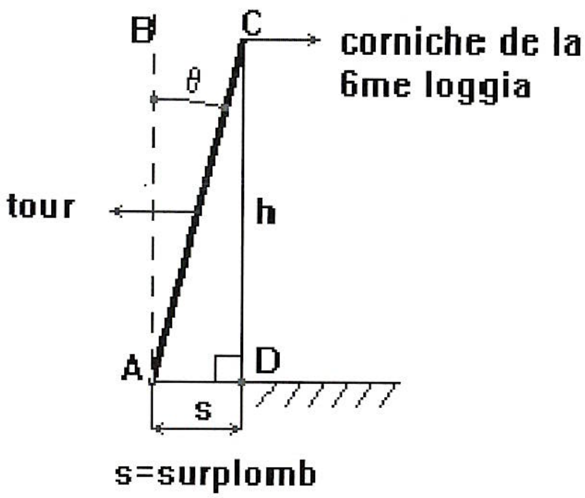
Si vous lisez bien le graphique ci-dessus, vous constatez que l'inclinaison s'est maintenue à une amplitude d'environ $4^o30'$ durant trois siècles (en gros de 1500 à 1800).

A partir de 1817, cette amplitude commence à augmenter de façon inquiétante au point d'atteindre la valeur record de $5^o33'$ en 1993 avec un surplomb de 4,47m.

Soit θ l'amplitude en degrés de l'angle BAC. (angle d'inclinaison de la tour).

Dans le triangle rectangle ADC, calculons le niveau (hauteur) de la corniche de la 6^{e}loggia si le surplomb (projection orthogonale de la tour sur le sol) est de $4,47m$ et $\theta = 5^o33'$:

$h = s.cotg\theta = 4,47.cotg5,55 \cong 46m$



En plus la Tour semble s'enfoncer dans le sol. Il fallait donc prendre des mesures d'urgence, conservatoires et provisoires dans un premier temps, durables dans un deuxième temps. Cette mission fut confiée à un Collège d'experts internationaux déjà nommé par le Président du Conseil Italien en 1990 suite à l'effondrement inopiné en 1989 de la tour civique de Pavie.

C'est en 1997 qu'un belge rejoint cette prestigieuse équipe d'experts et contribue efficacement au sauvetage de la Tour. Il s'agit de

Jean Barthélemy, ingénieur architecte, professeur émérite à la Faculté Polytechnique de Mons et membre correspondant de l'Académie Royale de Belgique.

Les mesures d'urgence provisoires ont consisté essentiellement à tenter de stabiliser la Tour par des moyens techniques :

- ceinturage de la première loggia au moyen de câbles galvanisés légèrement sous tension
- placement de cadres en acier aux endroits les plus sollicités de l'escalier hélicoïdal.
- placement d'une double série de câbles aériens accrochés à la Tour par une sorte de jambière ceinturant la deuxième loggia et ancrés à deux puissants et hauts chevalets situés à quelques dizaines de mètres de la Tour. Ces câbles passent d'ailleurs au dessus des bâtiments de l'opéra tout proche.

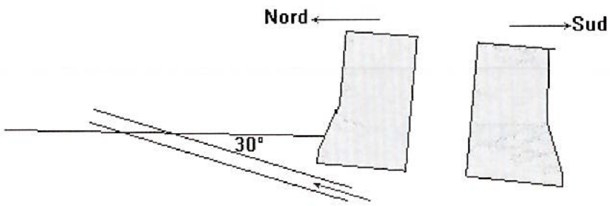
Les mesures définitives destinées redresser et à stabiliser la Tour de façon durable furent mises en oeuvre le 12 janvier 2000. Bien évidemment il n'était pas question d'un redressement à la verticale.

Il fallait garder à la Tour sa position « penchée » qui en fait son originalité et sa célébrité depuis plus de huit siècles. Il fut donc décidé de réduire l'inclinaison d'environ un demi-degré, ce qui est pratiquement imperceptible à l'oeil nu. La méthode utilisée pour ce faire fut celle des « sous-excavations ».

Le principe en est très simple : sous la fondation nord de la Tour on extrait progressivement de la terre.

La cavité ainsi crée se comble sous l'effet de la pression du sol due au poids de la Tour.

Comme on extrait rien du côté sud, le tassement du côté nord a pour effet de faire pivoter le bâtiment et donc de le redresser dans le sens inverse des aiguilles d'une montre.



En janvier 2001, le redressement obtenu est d'environ $1700'' = (1700/3600)^0 \cong 0,472^0$ soit un peu moins d'un demi-degré.

Le surplomb était donc alors de : $46 \times tg(5.55 - 0,472)^0 \cong 4,09m$, soit une diminution de 38 cm par rapport à 1993 .

Actuellement cette diminution est passée à $43cm$

La Tour a ainsi récupéré sa position d' il y a 200 ans. Quant à sa stabilité, elle est considérée comme suffisante compte tenu des renforcements structuraux complémentaires dont elle a été l'objet.

Ces travaux remarquables et spectaculaires ont permis au Comité d'atteindre ses objectifs. Sauf accident (séisme, affaissement important de terrain), la Tour de Pise fera encore longtemps le bonheur de ses admirateurs.

Question :

Si tu tiens compte du texte précédent, et si tu considères que le centre de gravité (G) se trouve à 29m sur l'axe de la Tour mesurés à partir du point de percée de cet axe dans la fondation, peux-tu calculer l'amplitude de « l'angle critique » au delà de laquelle la Tour s'effondrerait sous l'unique effet de son poids ?

Sources :

- J. Barthélemy, conférence prononcée à l'Académie Royale de Belgique en Classe des Beaux-Arts et Classe des Sciences.
- Documents internet.

Déplacer un objet dans Cabri

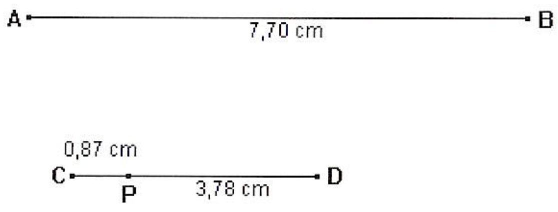
G. Laloux

Si tu connais un peu Cabri-géomètre, tu sais sans doute qu'il est possible, non seulement, de réaliser des constructions géométriques, mais aussi de les animer. Il peut être intéressant et aussi amusant de diriger l'animation à l'aide d'un curseur (un point qui se déplace sur un segment)

Le principe est donc de provoquer le mouvement d'un point en en déplaçant un autre.

1. Le procédé

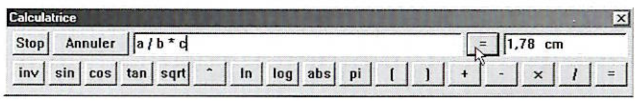
Traçons deux segments $[AB]$ et $[CD]$ (Dans l'illustration, ils sont placés parallèlement, mais ce n'est pas une absolue nécessité). Sur le segment $[CD]$, on marque un point P et on mesure les distances $d(A, B)$, $d(C, D)$ et $d(C, P)$



La suite des opérations consiste maintenant à construire sur $[AB]$, un point S qui se mettra en mouvement lorsqu'on déplacera le point P sur $[CD]$.

- o Tracer la demi-droite $[AB$ (nécessaire pour le report d'une longueur)
- o Afficher la calculatrice Cabri et effectuer le calcul suivant :

$$d(A, B)d(C, D) \times d(C, P)\frac{d(A, B)}{d(CD)} \times d(C, P)$$



Un petit mot à propos de la calculatrice de Cabri

- Cliquer sur le premier nombre, ici $7,70$. Celui-ci est alors introduit dans la calculatrice sous le label « a »
- Cliquer sur l'opérateur /
- Cliquer sur le deuxième nombre, ici $3,78$ $\longrightarrow$ calculatrice $\longrightarrow$ nombre « b »
- Cliquer sur l'opérateur $\times$
- Cliquer sur le troisième nombre, ici $0,87$ $\longrightarrow$ calculatrice $\longrightarrow$ nombre « c »
- Cliquer sur « = » pour afficher le résultat

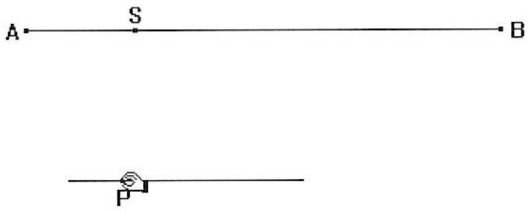
- Cliquer sur le résultat et le faire glisser dans l'espace de travail de Cabri.
  Dès ce moment, si l'on déplace le point P, toutes les valeurs qui en dépendent sont automatiquement mises à jour.
- La valeur ainsi appelée « Résultat » est notre distance $d(A, S)$ telle que

$$\frac{d(A, B)}{d(C, D)} \times d(C, P) = d(A, S)$$

  On reporte donc cette mesure sur la demi-droite $[AB$

  - Sélectionner l'outil de report de mesure
  - Cliquer sur la mesure à reporter (ici $1,78$) et puis sur la demi-droite
  - Nommer S le point ainsi obtenu.

- Pour faciliter ensuite la manipulation, on peut masquer (outil « Cacher/Montrer »la demi-droite $[AB$, les différentes mesures ainsi que les points C et D.



Déplaçons le point P pour constater que le point S suit le mouvement !

2. L'explication

On a calculé $d(A, S)$ telle que $d(A, S) = \dfrac{d(A, B)}{d(C, D)} \times d(C, P)$
$d(A, S)$ est donc directement proportionnelle à $d(C, P)$, la constante de proportionnalité étant $\dfrac{d(A, B)}{d(C, D)}$
Comme toutes les valeurs dépendantes de la position de P sont mises à jour à chaque déplacement de celui-ci, $d(A, S)$ s'adapte donc à chaque mouvement de P, entraînant ainsi le déplacement de S proportionnellement à celui de P.

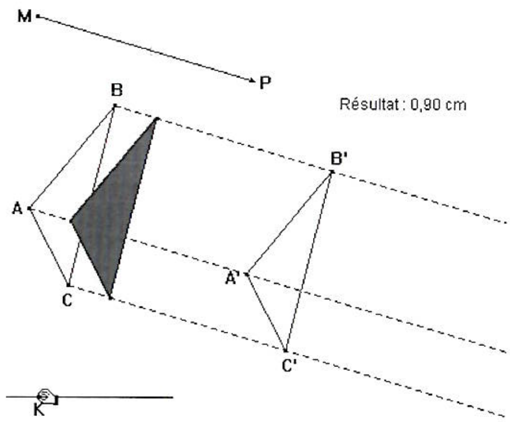
3. Deux applications simples à réaliser

3.1. Simulation du mouvement subi par un triangle lors d'une translation

Cette construction permet de visualiser le glissement que subit un triangle lors d'une translation de vecteur donné.
Le mouvement de la figure sera guidé par le déplacement d'un curseur.

- Construire un triangle quelconque ABC et un vecteur $\overrightarrow{MP}$ (utiliser l'outil « triangle »plutôt que l'outil « segment »)
- Construire l'image du triangle ABC par la translation de vecteur $\overrightarrow{MP} \longrightarrow t_{MP}(ABC) = A'B'C'$.
  Sélectionner l'outil « Translation », cliquer sur le triangle et puis sur le vecteur.

- Mesurer la distance $d(A, A')$
  Cela pourrait tout aussi bien être $d(B, B')$ ou $d(C, C')$ puisque ces trois longueurs sont égales (lors d'une translation, tous les points glissent dans la même direction, le même sens et sur la même longueur)
- Tracer les demi-droites $[AA'$, $[BB'$ et $[CC'$ (on peut les mettre en traits discontinus).
- Tracer un segment $[EF]$ et y placer le point K . Mesurer $d(E, F)$ et $d(E, K)$. Ensuite, masquer les points E et F (cela facilite la manipulation ultérieure).
  Afficher la calculatrice de Cabri et effectuer le calcul suivant : $\dfrac{d(A, A')}{d(E, F)} \times d(E, K) \rightarrow$
  Faire glisser la valeur « Résultat » dans l'espace de travail de Cabri. Masquer les valeurs numériques présentes SAUF « Résultat »
- Reporter la mesure « Résultat » sur les trois demi-droites $[AA'$, $[BB'$ et $[CC'$ et tracer le triangle qui relie les trois points ainsi obtenus. Choisir une couleur de remplissage pour ce triangle.
- Il ne reste plus qu'à déplacer le curseur « K » pour visualiser le déplacement du triangle.



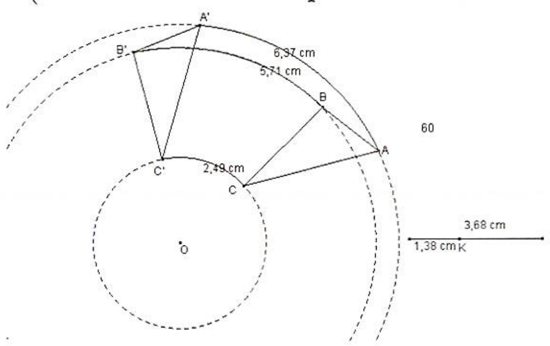
3.2. Simulation du mouvement subi par un triangle lors d'une rotation

Cette construction permet de visualiser le mouvement de rotation d'un triangle (l'amplitude de la rotation est fixée, de même que le centre). Il y a un peu plus de manipulations à effectuer que dans le cas de la translation, car si on peut dire que tous les points se déplacent en décrivant des angles de même amplitude, ils ne parcourent pas la même distance. Une autre différence réside dans le fait que les points se déplacent sur des cercles concentriques plutôt que sur des demi-droites.

- Tracer un triangle quelconque ABC, marquer un point O et un nombre 60.
- Construire l'image du triangle ABC par la rotation $r_{O,60^\circ} \rightarrow r_{O,60^\circ}(ABC) = A'B'C'$. Choisir l'outil « Rotation », cliquer sur le triangle, sur le centre et pour finir, sur le nombre.
- Tracer le cercle C_1 de centre O et passant par A,, le cercle C_2 de centre O et passant par B et enfin, le cercle C_3 de centre O et passant par C (pour tracer un cercle, sélectionner l'outil « Cercle » puis cliquer sur le centre et ensuite sur le point). Mettre ces cercles en traits discontinus.
- Nous allons devoir mesurer chaque arc reliant un point à son image. Or pour définir un arc, Cabri a besoin de 3 points.
  Sur le cercle C_1, marquer un point entre A et A'. Tracer l'arc formé par ces trois points. Répéter l'opération sur C_2 et C_3.

Nous obtenons ainsi 3 arcs que nous appellerons A_1, A_2 et A_3. (outil « Nommer »)
On peut ensuite masquer les points intermédiaires qui ont servis à la fabrication des arcs.
$\longrightarrow$ On peut maintenant mesurer les trois arcs $\longrightarrow$ « outil distance et longueur »

- Tracer un segment $[EF]$ et y marquer un point K . Mesurer $d(E,F)$ et $d(E,K)$.
  Masquer les points E et F (cela facilite la manipulation ultérieure).

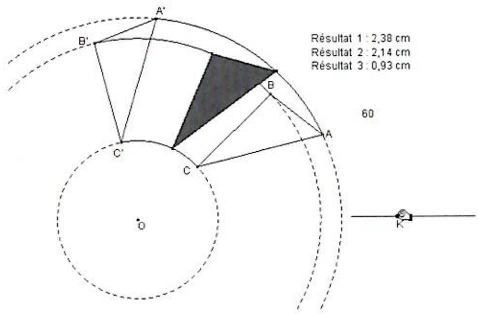


- o Effectuer les calculs suivants et faire glisser chaque résultat dans l'espace de travail de Cabri

$$\frac{\text{mesure}A1}{d(E,F)} \times d(E,K) = \text{Résultat 1}$$
$$\frac{\text{mesure}A2}{d(E,F)} \times d(E,K) = \text{Résultat 2}$$
$$\frac{\text{mesure}A3}{d(E,F)} \times d(E,K) = \text{Résultat 3}$$

Il sera bon ici, de nommer différemment ces trois résultats : Résultat 1, Résultat 2 et Résultat 3 (ou à tout le moins les disposer dans l'ordre).
Pour renommer un « Résultat » en « Résultat 1 », par exemple, cliquer sur l'outil flèche,(bouton le plus à gauche sur la barre d'outil Cabri), double-cliquer sur le mot « Résultat » et effectuer la correction.

- o Les trois résultats vont se reporter sur les 3 cercles.
  - Activer l'outil « report de mesure ».
  - Cliquer sur « Résultat 1 », ensuite sur le cercle $C1$ et pour terminer, sur le point A.
  - Procéder de même avec les deux autres résultats sur les deux autres cercles.
- o Tracer le triangle reliant ces trois points et choisir une couleur de remplissage.
- o Il n'y a plus qu'à déplacer le curseur K et observer le mouvement de rotation ...



Un site de référence sur Cabri-géomètre à visiter absolument : http://users.skynet.be/cabri développé par Pascal Dewaele et http://www.ismreves... cliquer sur le bouton "mathématique"

Jeux

Y. Noël-Roch

1. Nombres croisés.

	1	2	3	4	5
1			■		
2					■
3	■			■	
4			■		
5		■			

Horizontalement

1. La somme des chiffres égale le produit des chiffres. Parmi les multiples de 3 compris entre 80 et 90, celui dont la somme des chiffres est la plus grande.
2. Cube d'un nombre premier.
3. Produit de deux nombres premiers. Nombre premier.
4. Compris entre 80 et 90, il est impair, multiple de 3 et n'est pas un carré parfait. Nombre premier compris entre 90 et 100.
5. Nombre premier. Un palindrome (on pourrait aussi dire un nombre symétrique.)

Verticalement.

1. Le plus petit multiple de 11 strictement supérieur à 11. Le triple d'un nombre premier.
2. Le produit des chiffres vaut 126.
3. Un carré parfait augmenté de 10. Un multiple non nul de 2 et 3.
4. Produit de deux nombres premiers. Nombre de la forme $a \times b^2 \times c$ avec a, b et c premiers et différents deux à deux.
5. Nombre de branches de certains chandeliers. Carré parfait.

2. Les six nombres premiers.

	1	2	3
1			
2			
3			

Trouver six nombres premiers différents à écrire horizontalement et verticalement dans cette grille sachant que

- En ligne 1, le produit des chiffres est 63.
- En ligne 3 et colonne 3, le produit des chiffres est 441.

3. Des grilles de quatre nombres.

Voici une grille de quatre nombres (24 et 88 horizontalement, 28 et 48 verticalement) différents et tous multiples de 4.

2	4
8	8

Peux-tu trouver des grilles analogues faisant intervenir quatre nombres différents et

- tous multiples de 6.
- tous multiples de 5.
- tous multiples de 7.
- tous multiples de 9.
- tous premiers.

Solutions : page 32

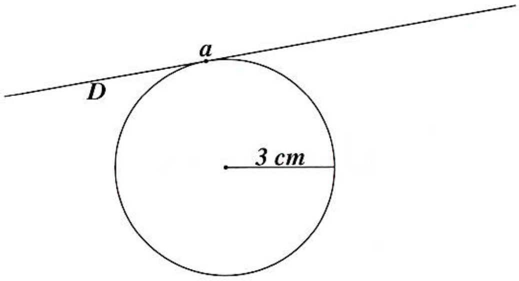
Couper-Toucher (3)

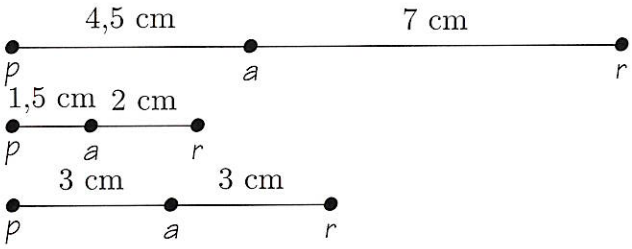
Y. Noël-Roch

Rappel

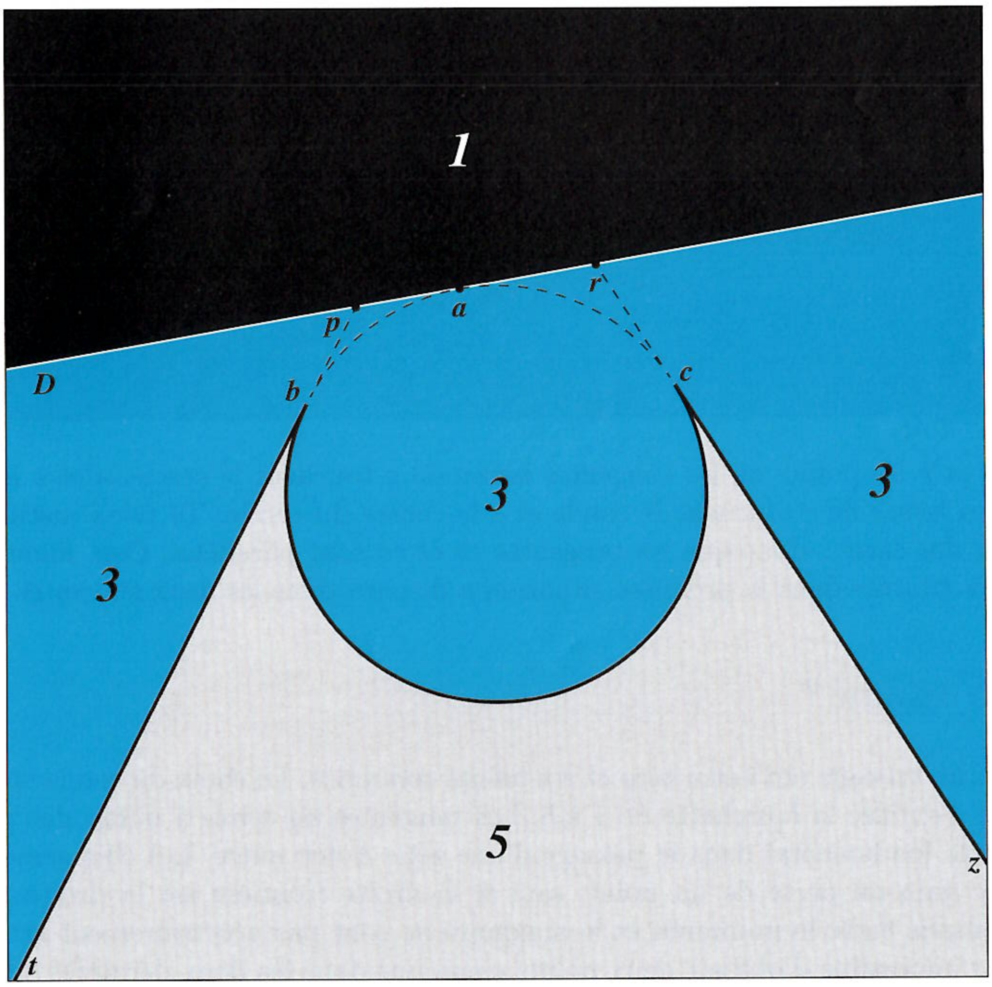
Dans les numéros 106 et 107, nous sommes partis d'un cercle et d'un segment $[pr]$ tangent au cercle en un point a compris entre p et r. Nous avons alors imaginé tous les triangles prs possibles en promenant le point s partout dans le plan (sauf sur la droite pr). Chaque triangle coupe le cercle en un certain nombre de points. Des couleurs différentes ont été utilisées pour chacun de ces nombres : elles montrent le découpage du plan obtenu.

Sur le même dessin de base, trois variantes ont été envisagées :



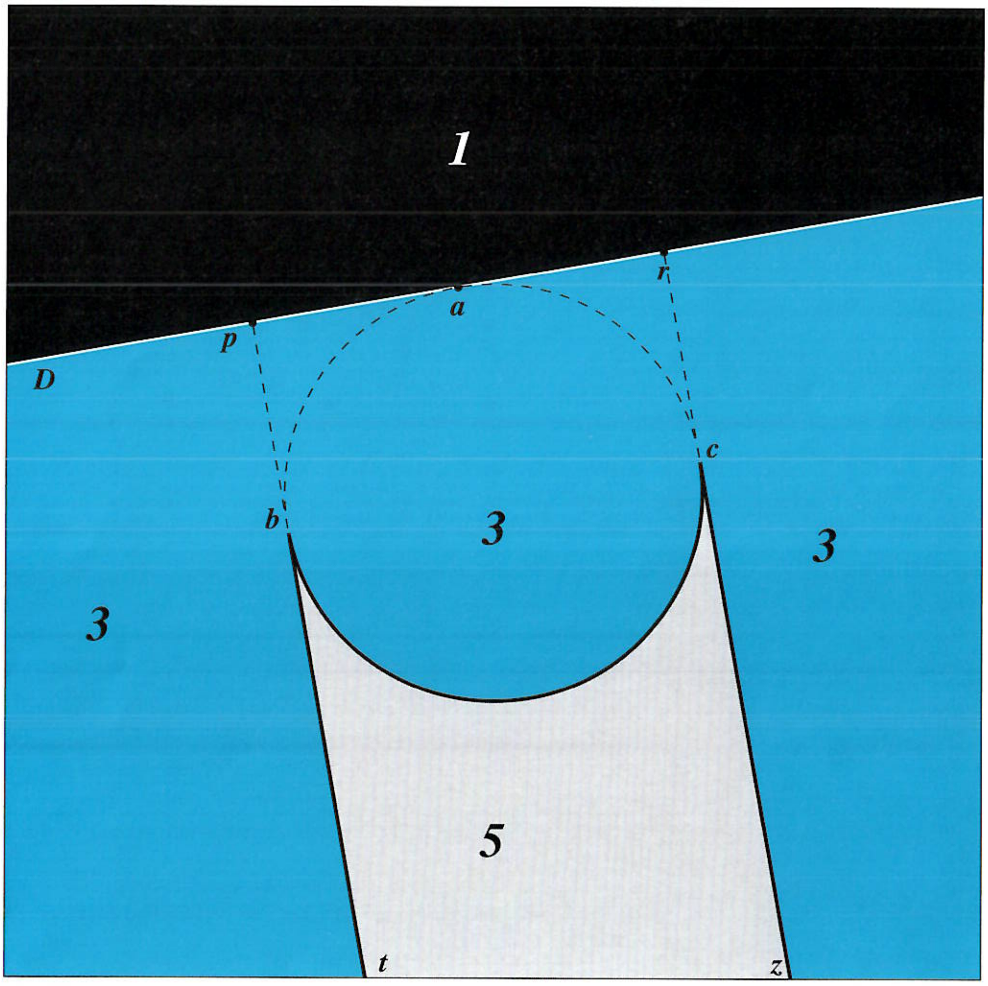


Le premier cas a été représenté dans le n° 107, voici le deuxième :



Rappelons nos conventions : sur cette figure et la suivante, le nombre écrit en grand dans une zone coloriée indique le nombre de points communs au cercle et au triangle prs lorsque le point s appartient à cette zone. Sur les deux figures, une indication est absente : lorsque s appartient aux demi-droites $]bt$ et $]cz$, ou à l'arc inférieur (bc) (points b et c exclus), le nombre de points communs est 4.

Le troisième est très particulier :



Appelons a et b les points où les tangentes issues de p touchent le cercle, a et c les points où les tangentes issues de r touchent le cercle et e le centre du cercle. Tu peux justifier que $apbe$ et $arce$ sont des carrés, donc que les tangentes pb et rc sont parallèles. Cela montre pourquoi la « zone 2 » trouvée dans la première situation a disparu dans les deux suivantes.

Un petit résumé ?

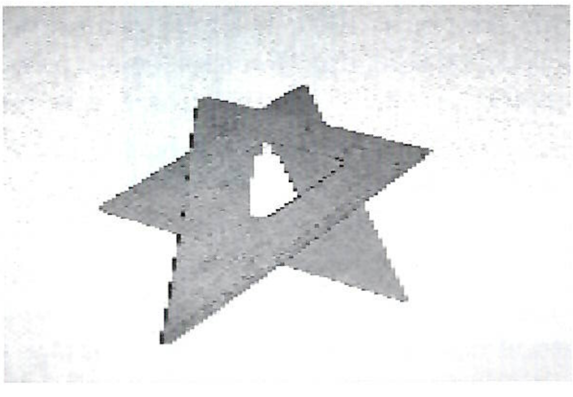
Un cercle et un triangle ont entre zéro et six points communs. Le choix du cercle et du segment $[pr]$ ramène d'emblée la fourchette de 1 à 5. Les tangentes au cercle à partir des points p et r jouent un rôle fondamental dans le passage d'une zone à une autre. Les changements de zone se font avec gain ou perte de un point, sauf si la droite frontière est la droite pr. Tous les nombres compris entre le minimum et le maximun ne sont pas nécessairement atteints : il est par exemple impossible d'obtenir deux points communs dans les deux dernières situations.

Les triangles suspendus

Claude Villers

« Mais c'est bien sûr » Voilà une réplique célèbre d'un non moins célèbre commissaire de police, vedette d'anciens feuilletons (on dit « séries » maintenant) diffusés il y a un bon bout de temps à la télévision française. Vos parents doivent certainement s'en souvenir. Ce sont ces mots qu'il prononçait lorsqu'un élément de l'histoire arrivait bien à-propos (à la fin de l'épisode, bien entendu) et lui donnait la clef de l'énigme qu'il essayait de résoudre.

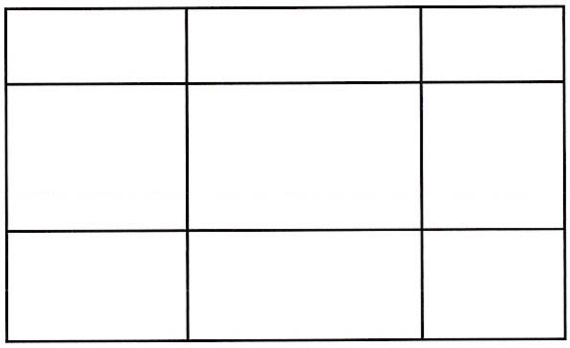
C'est cela aussi que pourraient s'écrier ceux qui s'escriment avec persévérance sur le problème de dénombrement proposé par la suite, à la vision des instruments bien connus de dessins représentés sur la figure suivante. Ces équerres suspendues à un clou nous font penser à des triangles qui le seraient par un de leurs sommets. C'est cette association d'idée qui va être exploitée dans la suite. Mais n'allons pas trop vite en besogne.



De quel problème s'agit-il ?

Vous connaissez certainement ce jeu qui consiste à trouver le nombre de figures particulières que vous pouvez voir dans une figure globale.

Par exemple : combien de rectangles voyez-vous dans la figure ci-après ?



A vous de jouer maintenant !

Si vous avez obtenu 36, c'est que vous avez correctement effectué le dénombrement demandé.

Sinon, recommencez vos calculs en organisant bien le travail.

Par exemple, vous comptez le nombre de rectangles formés de 1 rectangle élémentaire, de 2 rectangles élémentaires, etc...

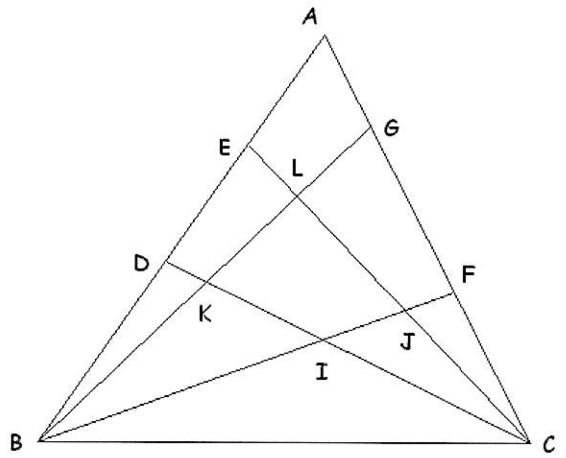
Le problème qui va nous occuper est plutôt celui que voici.

Il a été proposé dans « Mathématical Digest », une revue éditée par l'Université de Cape Town (Afrique du Sud) et destinée à des élèves de l'enseignement secondaire comme Math-Jeunes et Math-Jeunes Junior. Son intérêt est qu'il est relativement simple de trouver la réponse à la question posée (du type de celle posée ci-dessus pour le rectangle). Par contre, il est plus difficile de la justifier. C'est toute la différence entre une bonne intuition et la démonstration de sa validité.

Deux côtés d'un triangle ABC, par ex $[AB]$ et $[AC]$, sont partagés chacun en 1, 2, 3, 4, ... n segments. Les points de division de $[AB]$ sont joints à C par des segments et ceux de$[AC]$ sont joints à B par des segments.

Combien de triangles peut-on voir dans chacune des figures ainsi tracées ?

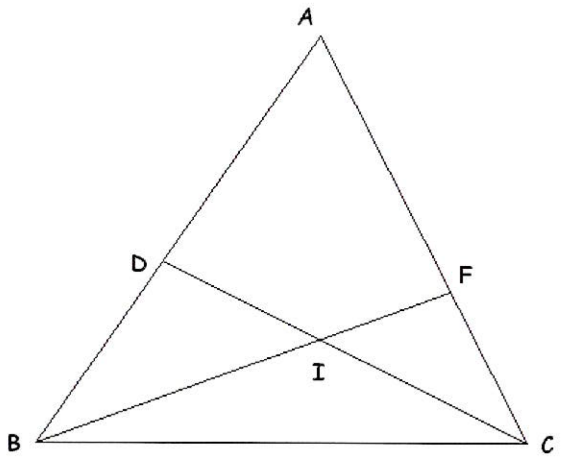
La figure ci-dessous illustre le cas où n vaut 3.



Si vous avez effectué correctement le dénombrement, vous avez obtenu 27 comme réponse.

Si cela n'est pas le cas c'est que, peut-être, vous avez oublié de compter certains triangles formés de plusieurs plages de la figure.

Commençons alors par un cas plus simple, celui où $n = 2$.



Nous y voyons les triangles

- BIC, BDI, CFI, (composés d'une seule plage)
- BDC, CFB , AFB et ADC (composés de deux plages)
- et ABC lui-même (composé de 4 plages).

Nous voyons donc 8 triangles dans cette figure.

Effectuez les calculs pour $n = 1$, $n = 4$, $n = 5$,... et indiquez tous les résultats dans un tableau associant chaque valeur de n , d'une part, au nombre de triangles qui lui correspond d'autre part. Essayez ensuite de découvrir une éventuelle loi qui vous permettrait de donner le nombre de triangles , pour chaque valeur de n. ($n = 1000$ par exemple).

Voici le début d'un tel tableau. Avez-vous trouvé ceci ?

n	Nombre de triangles
1	1
2	8
3	27
4	64
5	125
6	216
7	343
...	...
n	?

Vous pensez certainement avoir « découvert » la loi qui permet de trouver le nombre de triangles en fonction de n Apparemment, il suffit de calculer le cube de n.

Ainsi pour $n = 1000$, la figure comporterait 1000000000 triangles. Bon amusement pour les compter, sans oubli ni répétition encore bien.

Mais cette loi n'est qu'au stade de la conjecture. Rien ne dit que pour des valeurs de n supérieures à celles des essais, les dénombrements donnent toujours n^3 triangles.

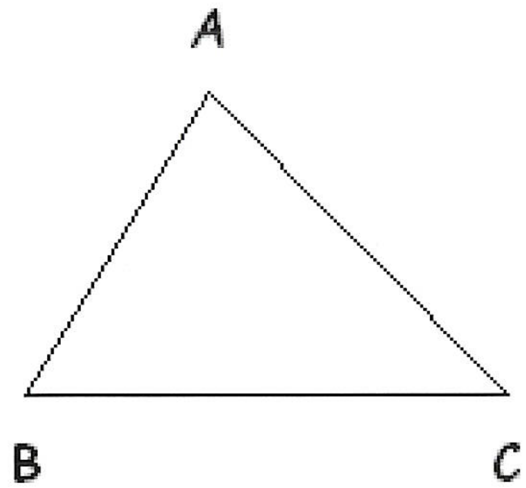
Il faut donc démontrer que quel que soit le naturel non nul n de segments déterminés par $n-1$ points sur chacun des côtés $[AB]$ et $[AC]$ d'un triangle ABC, le nombre de triangles de la figure obtenue (comme ci-dessus) est n^3.

Ce n'est pas évident d'effectuer une telle démonstration. Ce qui est important c'est de chercher une manière systématique de compter ces triangles et de l'exploiter dans l'espoir d'une réussite.

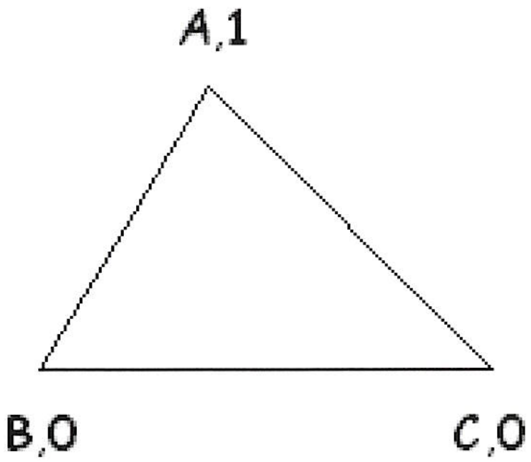
Et c'est ici que l'association d'idée avec les triangles suspendus va bien fonctionner.

Chaque point de la figure peut être associé au nombre de triangles dont il serait le sommet de suspension (pour chacun de ces triangles, les deux autres sommets sont donc situés plus bas que le sommet de suspension).

Commençons ce genre de dénombrement par le cas où $n = 1$. B et C ne sont pas sommets « de suspension » du triangle. Nous leur associons le nombre 0. A est sommet de suspension du triangle ABC. Il reçoit le nombre 1.



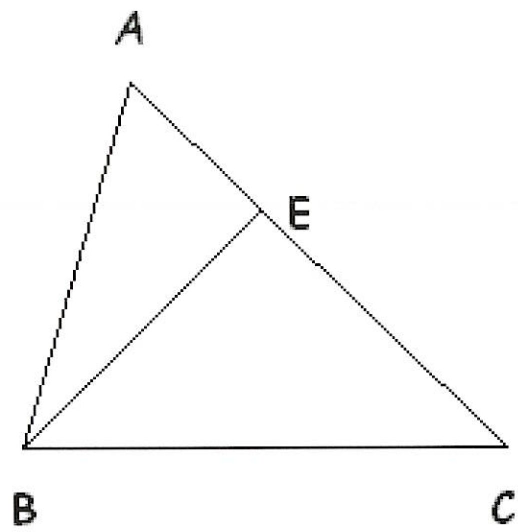
La figure est alors plus explicite comme ceci :



Et le nombre de triangles visibles dans cette figure est $0 + 0 + 1 = 1$, ce que vous saviez depuis longtemps.

Voyons maintenant l'utilisation des triangles suspendus lorsque $n = 2$.

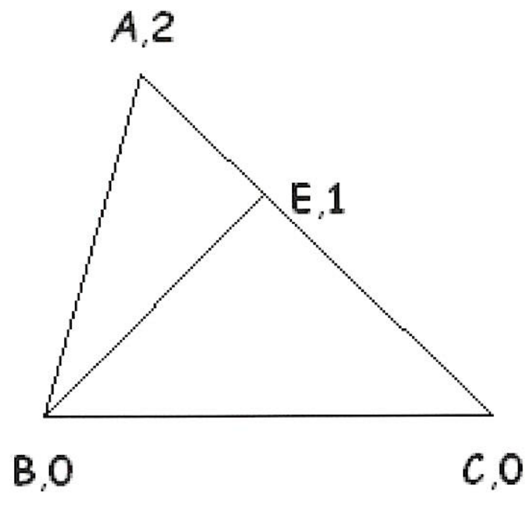
Commençons par diviser $[AC]$ en deux parties par un point E.



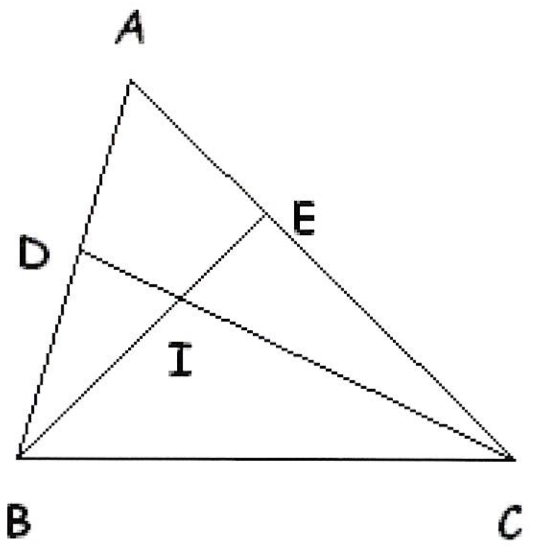
B et C reçoivent 0 comme ce sera d'ailleurs toujours le cas. E joue maintenant le rôle de A et reçoit la caractéristique 1 tandis que A est devenu sommet de suspension d'un triangle supplémentaire. Il reçoit 2.

La caractéristique de A est donc augmentée de 1.

Cette situation est illustrée par la figure ci-dessous



Pour que la figure corresponde bien au cas $n = 2$, il faut aussi partager le segment $[AB]$ en deux segments (par un point D). Cela donne la configuration

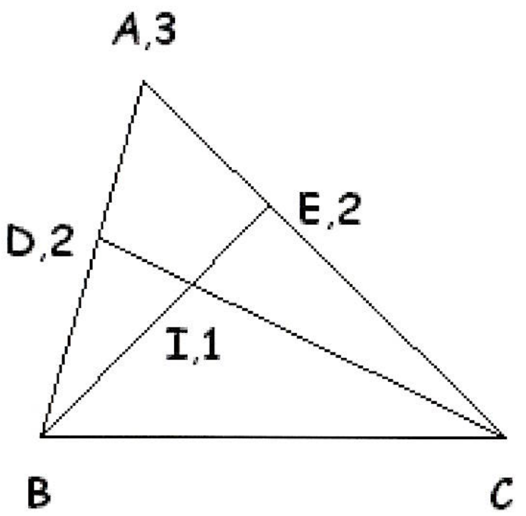


B et C recevant toujours 0, nous ne l'écrirons plus à l'avenir.

I reçoit 1 (le triangle IBC), donc E reçoit 2 (les triangles EIC et EBC) tout comme D (les triangles DIB et DBC).

A reçoit alors 3 (les triangles ADC, AEB et ABC).

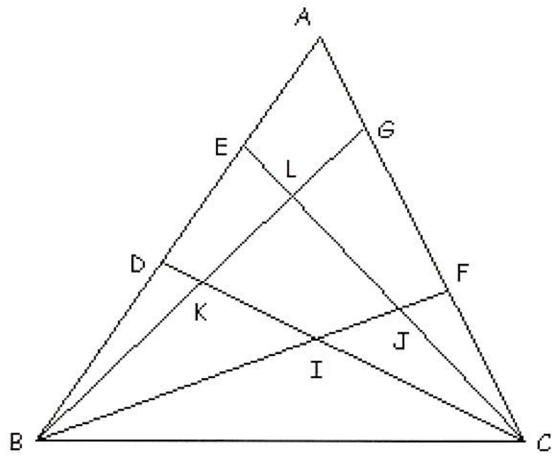
La figure devient :



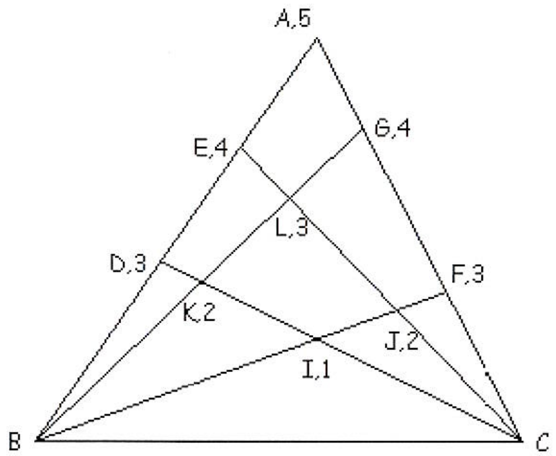
Nombre de triangles visibles dans cette figure est : $1 + 2 + 2 + 3 = 8$.

De même pour le cas $n = 3$.

La figure initiale est celle tracée ci-dessous.



Avec les indications des nombres de triangles suspendus en chaque point (sauf B et C pour lesquels c'est toujours 0), cette figure devient :



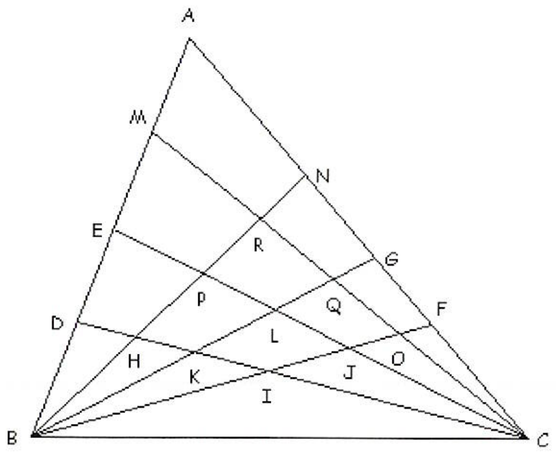
Et pour $n = 3$, le nombre de triangles visibles est :

$1 + 2 \times 2 + 3 \times 3 + 2 \times 4 + 5$

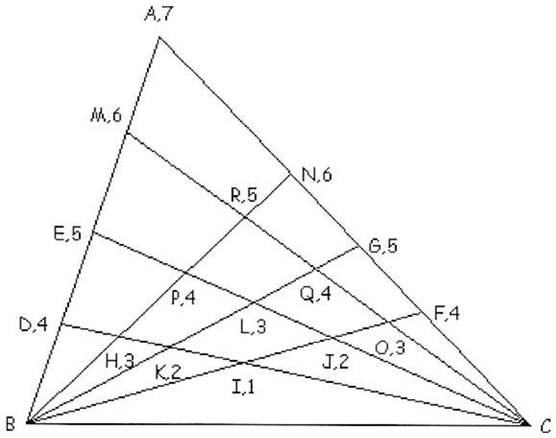
soit $1 + 4 + 9 + 8 + 5$ ou 27.

Appliquez cela au cas $n = 4$.

La figure initiale est :



En appliquant ce qui a été dit précédemment, elle devient :



Et dans ce cas le nombre de triangles visibles est :

$(1+2+3+4)+(2+3+4+5)+(3+4+5+6)+(4+5+6+7)$

ou encore : $10+14+18+22=64$ (cube de 4).
Remarquez que le premier membre comporte 4 groupes de 4 termes consécutifs.

Pour $n=5$, le nombre cherché est une somme de 5 groupes de 5 termes consécutifs :

$(1+2+3+4+5)+(2+3+4+5+6)+(3+4+5+6+7)+(4+5+6+7+8)+(5+6+7+8+9)$

ou encore : $15+20+25+30+35=125$ (cube de 5).

Pour $n=1000$ il faudrait calculer la somme de 1000 groupes de 1000 termes consécutifs.

Ce serait plus simple de calculer 1000^3. Pour cela, il reste à démontrer que, quel que soit le naturel non nul n , de tels calculs donnent bien n^3.

Pour ceux qui persistent !

Voici une telle démonstration qui ne demande que la connaissance de la relation bien utile :

$$1+2+3+4\cdots+(n-1)+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

Soit donc le cas général où n est un nombre naturel non nul.

Le nombre de triangles visibles dans cette configuration est

$(1+2+3+\cdots+n)+(2+3+4+\cdots+(n+1))+(3+4+5+\cdots+(n+2))+\cdots\ldots+(n+(n+1)+(n+2)+\cdots.+(2n-1))$

$$\begin{aligned}=1+2\ &+\ 3+\cdots+n\\ +2\ &+\ 3+4+\cdots+(n+1)\\ &+\ 3+4+5+\cdots+(n+2)\\ &+\ \cdots\\ &+\ n+(n+1)+\cdots+(2n-1)\end{aligned}$$

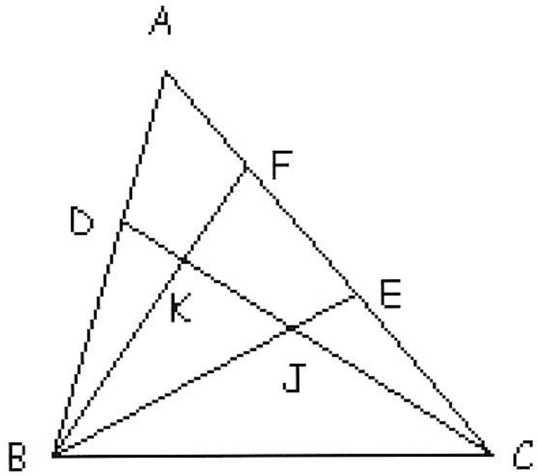
.

$=1+2+3+\cdots+n$
$+(1+2+3+\cdots+n)+n$ (en prélevant 1 dans chaque terme de la deuxième ligne)
$+(1+2+3+\cdots+n)+2n$ (en prélevant 2 dans chaque terme de la troisième ligne)
$+(1+2+3+\cdots+n)+n(n-1)$ (en prélevant n-1 dans chaque terme de la n-ième ligne).
$=n(1+2+3+\cdots+n)+n(1+2+3+\cdots+(n-1))$
$=n\frac{n(n+1)}{2}+n\frac{(n-1)n}{2}=\frac{n^2}{2}(n+1+n-1)=\frac{n^2}{2}2n=n^3.$

NB : Si vous avez trouvé une autre démonstration, faites-la nous parvenir. Merci.

Et pour ceux qui s'acharnent encore un peu.

Que devient tout ce qui précède si $[AB]$ est partagé en m segments et $[AC]$ en n segments ?



Exemple : $m = 2$ et $n = 3$

En travaillant avec des triangles suspendus, vous dénombrerez 15 triangles dans cette figure.

Vous pouvez continuer avec d'autres valeurs de m et de n.

Si vous généralisez le dénombrement vous obtiendrez la formule $\frac{1}{2}(m+n)mn$.

C'est un beau travail à réaliser, éventuellement en groupe dans la classe

Il n'est pas difficile mais demande seulement de la précision et du soin.

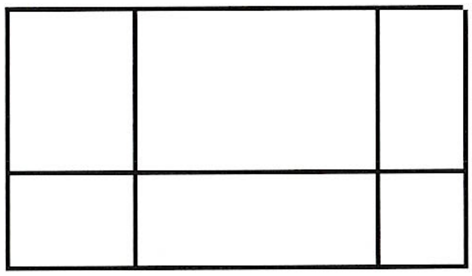
Vous avez certainement remarqué que l'application de cette dernière formule au cas où $m = n$ fournit bien le résultat obtenu précédemment c'est à dire n^3.

Heureusement, n'est-ce pas !

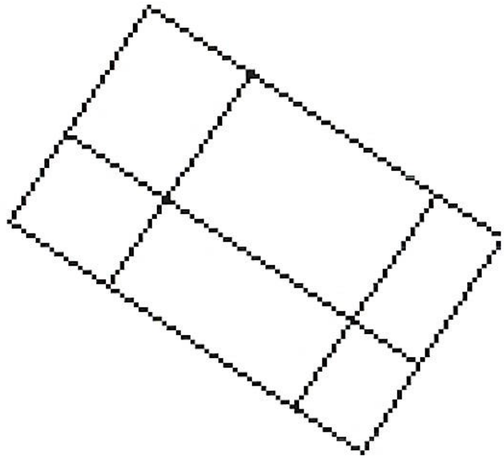
Et, enfin, pour ceux qui continuent à s'interroger.

Et si la figure initiale est un rectangle que l'on « coupe » par des parallèles aux côtés ?

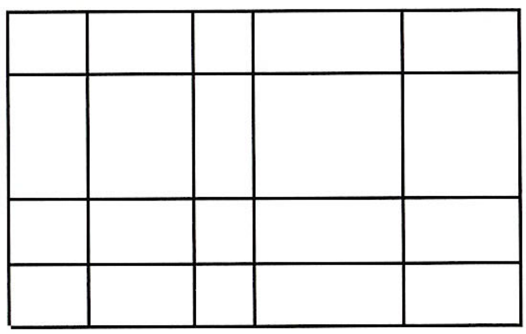
Exemple : dans ce (grand) rectangle 3×2, apparaissent 18 rectangles



Vérifiez cela en « suspendant » les rectangles à dénombrer.



Existe-t-il une formule donnant la réponse si m et n sont les nombres de segments sur deux côtés consécutifs du rectangle ?



Nous serions heureux de connaître votre avis sur cette question. N'hésitez pas à nous envoyer un texte expliquant votre démarche. Il pourrait être publié.

Puissance et économie (3)

Y. Noël-Roch

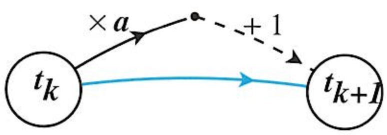
Identification du « générateur » d'une spirale

Dans le n° 106, nous donnions trois spirales en demandant les nombres qui avaient permis de les obtenir ...

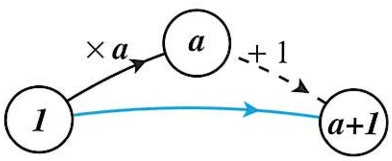
Rappelons le tableau général obtenu dans le n° 107 qui fixe les notations utilisées et qui permet de calculer les totaux successifs des puissances à exposants naturels d'un nombre a :

Exposants	0	1	2	3	....	k	$k+1$
Puissances	1	a	a^2	a^3	....	a^k	a^{k+1}
Totaux	1	$1+a$	$1+a+a^2$	$1+a+a^2+a^3$	....	t_k	t_{k+1}

Rappelons aussi que chaque total peut s'obtenir en multipliant le précédent par a et en ajoutant 1 au produit obtenu. Nous avons représenté ce processus sur un diagramme fléché :



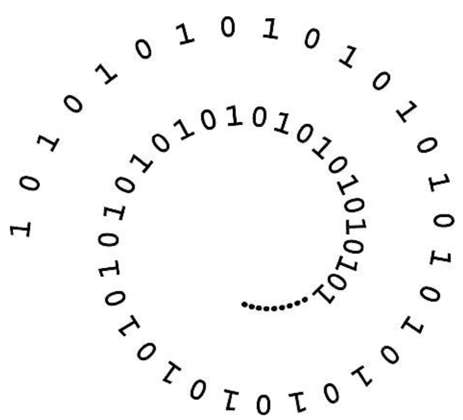
En particulier, comme $a^0 = 1$ quel que soit le nombre a, chaque spirale commence par

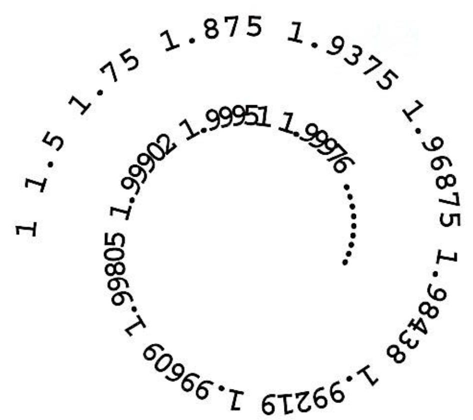


Le total t_1 vaut donc toujours $a+1$. Ainsi, les générateurs des deux premières spirales à identifier étaient successivement les solutions des équations $2 = a+1$, soit 1 ; $11 = a+1$, soit 10. Pour la « sπrale » finale, son nom avait dû t'inspirer ...

Encore deux spirales particulières

Voici la spirale des totaux lorsque $a = -1$ et lorsque $a = \frac{1}{2}$:



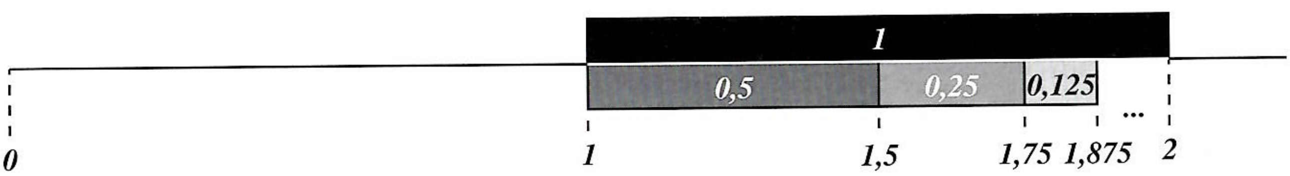


Lorsque $a = -1$, la situation est très différente de tous les autres cas rencontrés. Sans faire aucun calcul, nous connaissons t_{298007} ou tout autre total de la spirale : tout se règle par la parité de l'indice.

Lorsque $a = 2$ ou $a = 3$ ou $a = \frac{1}{2}$, nous aurions bien du mal de donner t_{298007}. En observant les spirales de 2 et 3, nous voyons que les nombres deviennent rapidement très grands. Au contraire, la spirale engendrée par $\frac{1}{2}$ semble très rapidement ne plus progresser beaucoup ... Cela s'explique par le fait que les puissances de $\frac{1}{2}$ qui sont ajoutées sont des nombres de plus en plus petits :

- la quatrième puissance est inférieure à $0,1$;
- la septième est inférieure à $0,01$;
- la dixième est inférieure à $0,001$;
- la $\cdots$ est inférieure à $0,0001$.

Tu vois sur la spirale des nombres supérieurs à $1,999$, en continuant, pourrons-nous dépasser $1,9999$? $1,99995$? 2 ? Répondre à ces questions par du calcul est assez pénible mais un petit dessin peut éviter bien des calculs :



A chaque étape, nous ajoutons au total atteint la moitié de la distance qui sépare ce total de 2. Ainsi, nous comblons petit à petit le « trou » qui nous sépare de 2 mais nous ne dépasserons jamais 2.

Le phénomène géométriquement dessiné sur le segment $[1 \quad 2]$ se traduit de manière très précise en termes numériques.

Traduisons d'abord le fait de ne pas dépasser 2 :

Même si k est très grand, $1 + \left(\frac{1}{2}\right)^1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^k < 2$

Traduisons maintenant le fait de se rapprocher de 2 aussi près qu'on veut :

$$1 + \left(\frac{1}{2}\right)^1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^k + \cdots = 2$$

Math-Quiz

Claude Villers

Nous remercions et nous félicitons très vivement tous ceux qui ont bien voulu chercher des réponses aux questions proposées dans le Math-Quiz 2003-2004, qu'ils nous aient envoyé les résultats de leurs travaux ou non ! Ils ont ainsi fait la preuve de leur intérêt envers les mathématiques en même temps que de leur sagacité.

Nous exprimons également notre gratitude aux enseignants qui ont incité leurs élèves à participer et/ou qui ont utilisé les questions dans le cadre du cours.

« Il y a une chose plus grave que de ne pas réussir, c'est celle de ne pas avoir essayé » (F.D. Roosevelt)

Voici maintenant les réponses attendues aux questions de la deuxième étape.

Question n°	Réponse	Question n°	Réponse	Question n°	Réponse
11	6	15	49 min	19	$\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{30}$
12	3 (ou 4)	16	105°	20	oui
13	3 m^2	17	125 cm		
14	2,5cm	18	Christian		

Le tableau « d'honneur » de cette deuxième étape s'établit comme suit (ordre alphabétique) :

Nom	Commune	Cl.	Nom	Commune	Cl.
Beaujean Audrey	Wezembeek-Oppem	2	Fosty Quentin	Chimay	1
Bruyer Chloé	Cerfontaine	1	Geens Amaury	Villers-lez-Heest	1
Classe de John Kreutz	Waismes	2	Muller Quentin	Nethen	2
Dauphin Guillaume	Bruxelles	1	Rousseaux Vincent	Chimay	1
Deilhes Grégory	Momignies	1	Thonet Adrien	Bourlers	1
Depresseux Adrien	Heusy	3	Van Lerberghe Sara	Chimay	1

Classement général (sur les deux étapes)

Obtiennent un premier prix : Adrien Depresseux de l'Athénée Royal Thil Lorrain de Verviers (3e) et Vincent Rousseaux du Collège St Joseph de Chimay (1re)

Obtiennent un deuxième prix : Adrien Thonet du Collège St Joseph de Chimay (1re) et la Classe de John Kreutz de l'Athénée Royal de Waismes (2e)

Obtient un troisième prix : Guillaume Dauphin du Lycée Dashbeck de Bruxelles (1re)

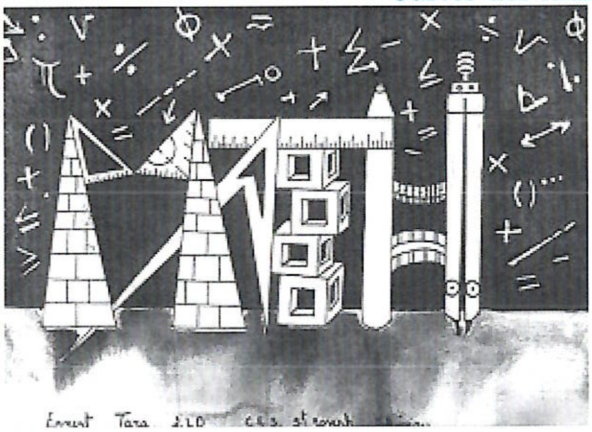
Ces 5 élèves remportent un jeu à caractère mathématique, qui leur a été envoyé. Les 7 autres élèves du tableau d'honneur de la deuxième étape remportent un jeu ou une BD qui leur a également été envoyé(e).

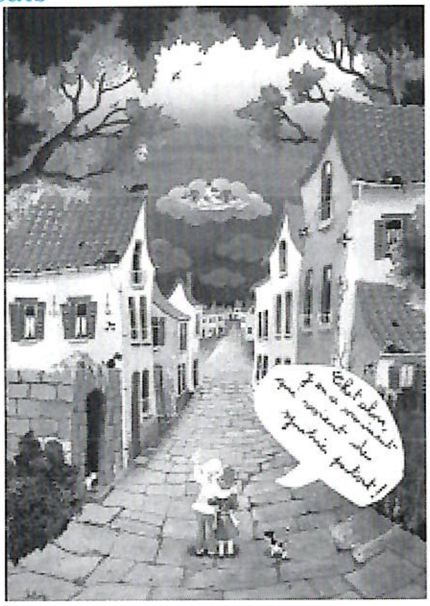
Prix du concours annexe :

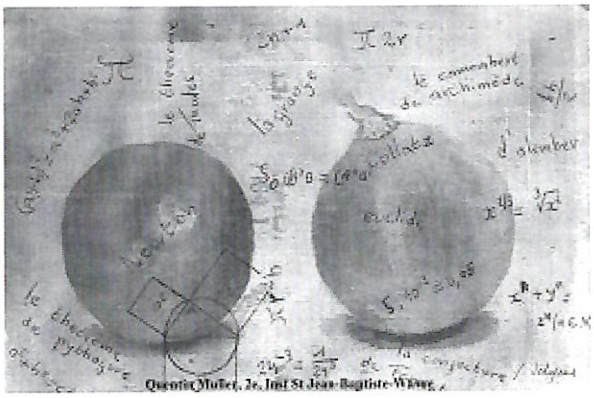
1erprix : Ernest Tara du Collège St Joseph de Chimay (2^e)
2^{e}prix : Adrien Depresseux de l'Athénée Royal Thil Lorrain de Verviers (3^e)
3^{e}prix : Vincent Villers de l'Athénée Bervoets de Mons.
4^{e}prix : Quentin Muller de l'Institut St Jean-Baptiste de Wavre.
Ces 4 élèves remportent un jeu à caractère mathématique, qui leur a été envoyé.

Un prix spécial, hors concours, est attribué au Collège St Joseph de Chimay pour le travail réalisé en synergie avec le cours de dessin.

Cartes des lauréats







Quelques commentaires

Rappelons encore une fois qu'un doute, un désaccord, une interrogation au sujet d'une réponse, ... constituaient en fin de compte autant d'occasions d'en parler en classe avec vos condisciples et/ou votre professeur ! Cela offrait ainsi des possibilités de rappel de matières déjà rencontrées au cours et des sujets de discussions et d ' échanges de points de vue.

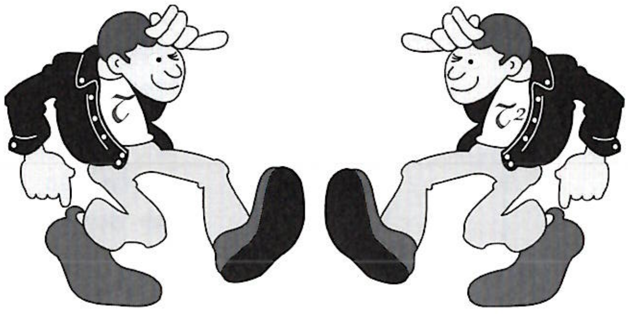
Il y avait quelques modestes pièges à éviter et peut-être aussi parfois la nécessité de connaître une matière pas encore rencontrée. Cela offrait ainsi l'opportunité d'un premier contact avec ces éléments et en préparait une éventuelle étude future plus fouillée.

Nous vous souhaitons une bonne fin d'année scolaire et vous invitons à une éventuelle participation au math-Quiz 2005.

Les frères Hick 11

B. Honclaire

Agence de détectives privés
Les frères Hick
Recherches en tous genres



Ami lecteur,

$\mathcal{T}^2$ (pas très content qu'on ait déformé ses paroles et qui a pris conscience du fait qu'une lettre peut tout changer ! ([1])) t'exposera ses états d'âme sur le cube numérique et son frère te révèlera sa solution. Ensuite, $\mathcal{T}$ donnera à $\mathcal{T}^2$ une nouvelle chance de résoudre, seul, un tel problème.

Bon courage et bon amusement.

Bernard Honclaire

Où il est question d'atteindre les sommets !

Les naturels de 1 à 8, aux sommets d'un cube tu attribueras
Pour former trois faces (64, 84 et 144) tu le feras
Un sentiment de satisfaction t'envahira

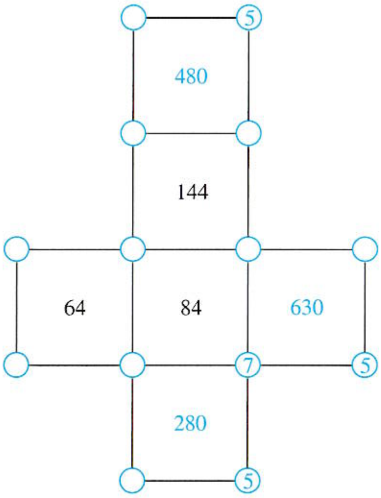
$\mathcal{T}^2$ (d'un air ironique) - « *Atteindre les sommets... atteindre les sommets ! Même en les attaquant par la face nord, j'y suis pas arrivé !* (redevenu sérieux) *Tu avais raison sur un point, si on connaît une face calculée avec quatre des nombres, on connaît celle calculée avec les quatre autres nombres ... les faces vont par deux !* »

$\mathcal{T}$ (admiratif) -« *Tu veux parler des faces parallèles !* »

$\mathcal{T}^2$ (ignorant la remarque) - « *J'ai utilisé ma calculette ... le produit des huit nombres est 40320 ... les faces ... euh ... parallèles sont donc 64 et 630, 84 et 480, 144 et 280 ! Si j'avais eu un cube en bois, j'aurais pu marquer les nombres sur les faces ! ... Les nombres donnés sur trois faces qui se touchent ... Car dans ces trois faces, il n'y en a pas deux qui sont parallèles ... J'ai essayé d'en fabriquer un ! ... Je me suis souvenu qu'il fallait faire une croix avec les six carrés ... et puis je me suis dit que ce n'était pas la peine de plier et coller ... c'est pour t'expliquer ... j'ai fait un dessin ...!* »

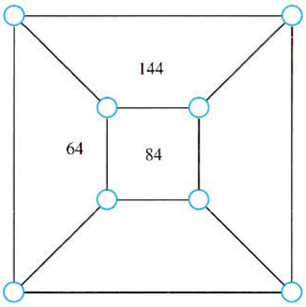
$\mathcal{T}$ (observant le dessin) -« *Tu as fait un magnifique développement du cube ! Sais-tu que l'on peut placer les six faces de plusieurs façons et obtenir ainsi d'autres formes ?* »

([1]) Dans Hick 9 : Math-Jeunes 106J, page 11, ligne 5, il fallait lire... des flèches parlant de nombres premiers... (autrement dit des opérateurs multiplicatifs utilisant des nombres premiers).



$\mathcal{T}^2$ (attentif) -« *J'aime bien les dessins... j'y penserai...! Tu vois que j'ai placé les faces... mais pour les sommets... j'ai placé 7 facilement... 84, 630 et 280 sont multiples de 7... et 5 avec un peu plus de mal... en fait, il faut le noter sur plusieurs carrés... mais en imaginant que le cube se reformait, je crois que je l'ai bien placé... mais après...!* »

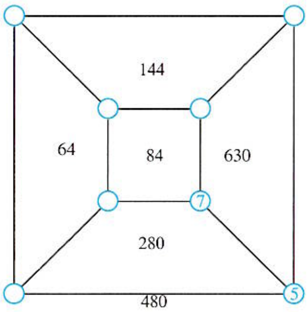
$\mathcal{T}$ (l'air content) -« *Je vais te proposer une autre représentation du cube qui te permettra de ne représenter les sommets qu'une seule fois! Regarde!* »



$\mathcal{T}^2$ (manifestement très intéressé) -« *Je vois! C'est mieux pour les sommets!...*
Mais pour les faces... c'est pas ça!... Mais, comme ce sont les sommets qu'on doit replacer... faut essayer...!...

On dirait qu'on entre dans un tunnel!

...



Pour le grand carré, je vais écrire en dessous...
... pas mal!... »

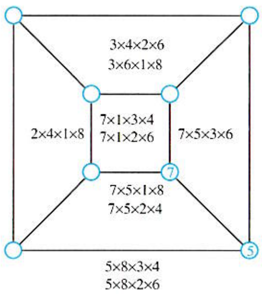
$\mathcal{T}$ (admiratif mais impatient) -« *Je vais t'aider un peu pour la suite...* »

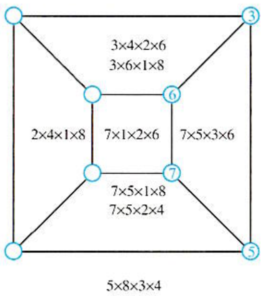
$\mathcal{T}^2$ (le coupant net) -« *Attends, j'ai encore fait pas mal de calculs! J'ai essayé de fabriquer les faces avec les nombres donnés. Le problème, c'est que pour certains nombres, j'ai trouvé plusieurs solutions! Regarde!*

64	8 × 8	2 × 4 × 1 × 8	
84	7 × 12	7 × 1 × 3 × 4	7 × 1 × 2 × 6
144	12 × 12 ou 18 × 8	3 × 4 × 2 × 6	3 × 6 × 1 × 8
630	7 × 5 × 18	7 × 5 × 3 × 6	
280	7 × 5 × 8	7 × 5 × 1 × 8	7 × 5 × 2 × 4
480	5 × 96	5 × 8 × 3 × 4	5 × 8 × 2 × 6

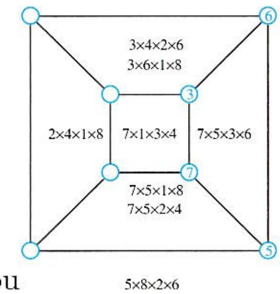
J'ai encore remarqué que 144 et 630 sont multiples de 9 et qu'il faut 3 et 6 pour les fabriquer! »

$\mathcal{T}$ (fier de son frère qui semble épuisé) -« *Je vais t'aider à transcrire toutes tes trouvailles sur notre dessin!* »

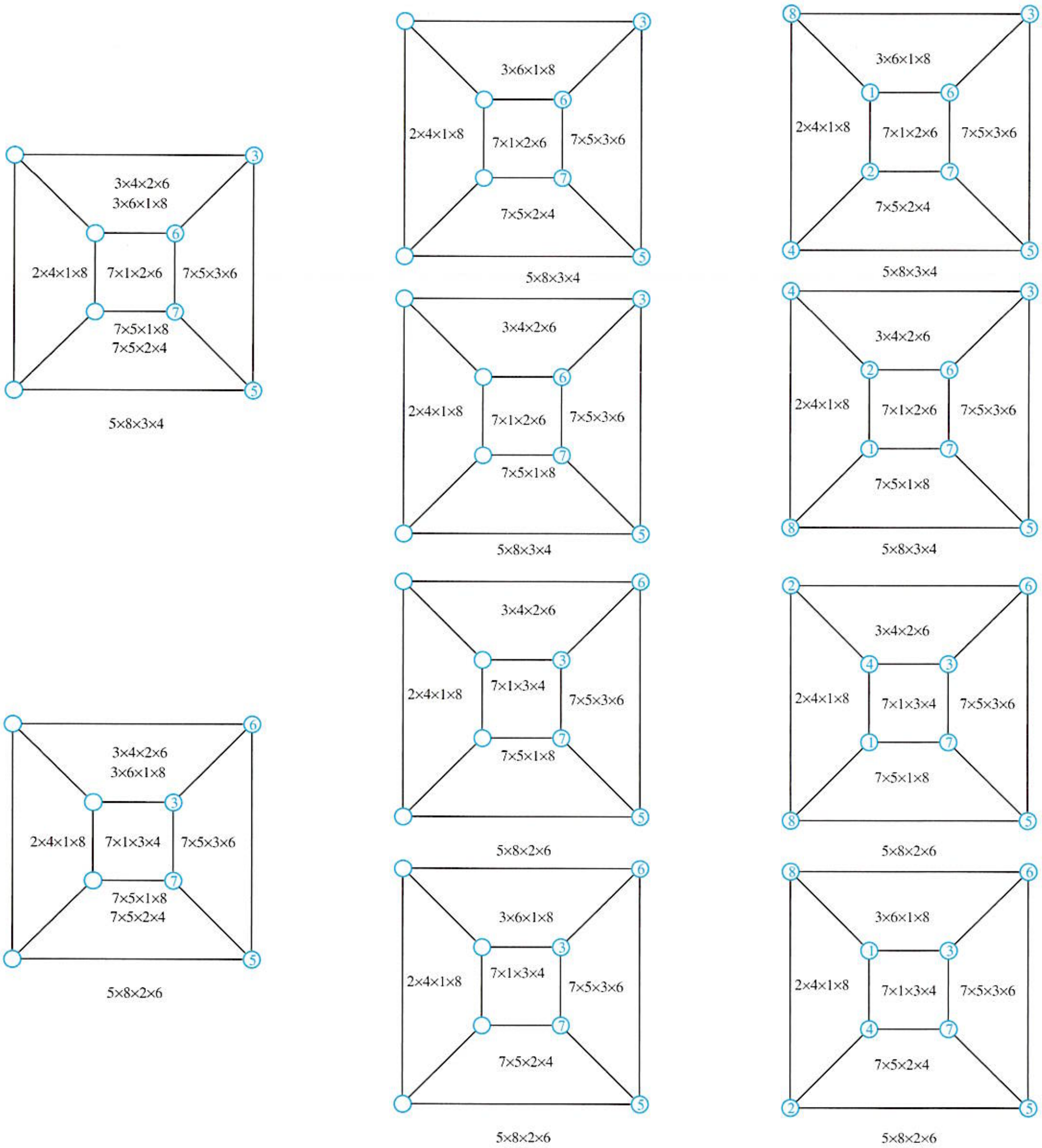




ou



τ^2 (fronçant les sourcils) -« ***Je pense que je peux terminer...*** (jetant un regard interrogateur vers son frère) ... ***mais il y a encore deux choix dans chacun des cas...*** »



τ (esquissant un sourire) -« ***Ce qui nous donne quatre solutions ! Tu vois qu'il était impératif de bien s'organiser pour les trouver toutes ! Je crois que tu as bien mérité un autre problème du même type ! Mais, crois-moi, beaucoup plus facile !*** »

τ^2 (pas du tout convaincu) -« ***Un vrai problème ? Un beau ? Avec une seule solution ? ...*** »

τ (en pleine réflexion) « ***... Les produits sur trois faces sont ... 90, ... 140 ... et 960. A toi de jouer !*** »

τ^2 (inquiet et plus bas) -« ***Il n'a même pas pris sa calculette ...! J'espère qu'il a bien calculé ...!*** »

τ (l'air détaché) -« ***Et n'oublie pas que tu m'as promis de chercher d'autres développements d'un cube !*** »

τ^2 (encore plus bas) -« ***Quelle mémoire ! ... Cela doit l'aider pour les calculs ! ... Vivement les vacances ! ...*** »

à suivre

Olympiades

C. Festraets

Au moment où tu lis ce texte, les demi-finales de l'Olympiade Mathématique Belge ont déjà eu lieu et tu y as peut-être participé. Pour prolonger l'intérêt que tu apportes certainement à l'Olympiade et pour t'exercer en vue de ta prochaine participation, voici quelques unes des questions des demi-finales « mini » et « midi ». Essaye de les résoudre avant de regarder la solution

MINI 15

Sans réponse préformulée – Que vaut la somme de tous les nombres impairs, divisibles par 5 et comportant deux chiffres ?

Solution

On sait que $1+2+3+\cdot+n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

$15+25+35+\ldots+95$

$= 9\cdot 5 + 10(1+2+3+\ldots+9)$

$= 45 + 10\cdot\dfrac{9(1+9)}{2}$

$= 45 + 10\cdot 45 = 495$

MINI 24

L'inverse de la différence des cubes d'un demi et d'un tiers vaut

Ⓐ $\dfrac{1}{216}$ Ⓑ $\dfrac{19}{216}$ Ⓒ 1

Ⓓ $\dfrac{216}{19}$ Ⓔ 216

Solution

La différence des cubes d'un demi et d'un tiers est égale à $\left(\dfrac{1}{2}\right)^3 - \left(\dfrac{1}{3}\right)^3$

$= \dfrac{1}{8} - \dfrac{1}{27} = \dfrac{27-8}{8\cdot 27}$

$= \dfrac{19}{216}$

L'inverse de cette différence est donc $\dfrac{216}{19}$.

MINI 26

Sans réponse préformulée – Un parallélipipède rectangle a comme dimensions 1, a, et $2a$ où a désigne un nombre naturel non nul. Sa surface totale est 54. Quel est son volume ?

Solution

Deux faces opposées ont comme aire $1\cdot a$, deux autres $1\cdot 2a$ et les deux dernières $a\cdot 2a$.
L'aire totale est égale à $2(a+2a+2a^2)$
$= 6a + 4a^2 = 2a(3+2a) = 54$.
a est donc un diviseur de 27.

Les diviseurs de 27 sont 1, 3, 9 et 27 ; 3 est le seul qui conviennent car

$2\cdot 3(3+2\cdot 3)$ est bien égal à 54.

Avec $a = 3$, le volume du parallélipipède est égal à $1\cdot 3\cdot 6 = 18$.

MINI 28

Sans réponse préformulée – Lorsqu'on applique l'opération $\star$ aux deux nombres entiers a et b, on soustrait leur somme de leur produit :

$a\star b = a\cdot b - (a+b)$.

Quelle est la valeur de $(8\star 7)\star(6\star 5)$?

Solution

On calcule d'abord
$8\star 7 = 8\cdot 7 - (8+7) = 56 - 15 = 41$

et $6 \star 5 = 6 \cdot 5 - (6+5) = 30 - 11 = 19$
et puis
$41 \star 19 = 41 \cdot 19 - (41+19) = 779 - 60 = 719$.

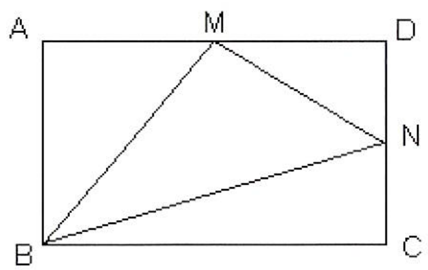
MINI 29

M et N sont les milieux des côtés $[AD]$ et $[DC]$ d'un rectangle $ABCD$.

Si l'aire du triangle BMN est 27, alors l'aire du rectangle $ABCD$ est

Ⓐ 48 Ⓑ 56 Ⓒ 64
Ⓓ 72 Ⓔ 80

Solution



Désignons par S l'aire du rectangle $ABCD$.

On a : $S =$ aire ABM + aire BCN + aire DMN + aire BMN,
aire $ABM = \frac{1}{4}S$, aire $BCN = \frac{1}{4}S$ et aire DMN

$= \frac{1}{8}S$, d'où $S = \frac{1}{4}S + \frac{1}{4}S + \frac{1}{8}S + 27$.
Simplifions cette dernière égalité :

$\frac{3}{8}S = 27$ et donc $S = 72$.

MIDI 20

a, b et c sont trois nombres réels. Quatre des cinq relations ci-dessous sont équivalentes entre elles. Quelle est celle qui n'est équivalente à aucune autre ?

Ⓐ $b = \frac{1}{2}(a+c)$

Ⓑ $b = \frac{1}{3}(a+b+c)$

Ⓒ $b = \frac{1}{5}(2a+b+2c)$

Ⓓ $b = \frac{1}{7}(4a+2b+c)$

Ⓔ $b = a - b + c$

Solution

Lorsqu'on isole a dans les égalités A, B, C et E, on otient $a = 2b - c$,

tandis que lorsqu'on l'isole dans l'égalité D, on obtient $a = \frac{5b-c}{4}$.

C'est donc la relation D qui n'est équivalente à aucune des quatre autres.

MIDI 21

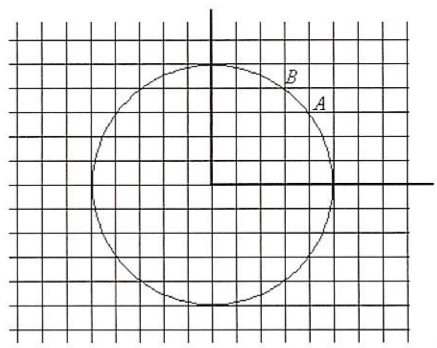
Un disque opaque de rayon 5 est placé sur une grille infinie formée de carreaux de côté 1 et a son centre en un sommet de cette grille.

Combien de carreaux sont entièrement recouverts par ce disque ?

Ⓐ 64 Ⓑ 60
Ⓒ 50 Ⓓ 56 Ⓔ 62

Solution

Comptons combien de carreaux sont entièrement recouverts dans un quart de cercle.



Remarquons que les points A et B sont sur le cercle, en effet, si on désigne par d leur distance au centre du cercle, on a $d^2 = 3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25$, d'où $d = 5$.
Il y a donc 15 carreaux entièrement recouverts dans un quart de cercle, ce qui donne 60 carreaux dans le cercle complet.

MIDI 22

Sans réponse préformulée – La moyenne arithmétique de dix nombres est 166. On supprime un des nombres et la moyenne arithmétique des neuf nombres restants est

153. Quel est le nombre que l'on a supprimé ?

Solution

Appelons x le nombre supprimé et S la somme des neuf autres nombres. Résolvons le système d'équations

$$\begin{cases} \dfrac{S+x}{10} = 166 \\ \dfrac{S}{9} = 153 \end{cases}$$

Calculons S dans chacune des deux équations

$$\begin{cases} S = 1660 - x \\ S = 1377 \end{cases}$$

D'où $x = 1660 - 1357 = 283$

MIDI 26

Sans réponse préformulée – Quel est le produit maximal que l'on peut former avec deux nombres naturels dont la différence des carrés égale 64 ?

Solution

$a^2 - b^2 = 64 \Leftrightarrow (a-b)(a+b) = 1 \cdot 64 = 2 \cdot 32 = 4 \cdot 16 = 8 \cdot 8$

$a-b$ et $a+b$ sont deux naturels tous deux pairs ou tous deux impairs et $a-b \leqslant a+b$.

On a donc trois possibilités :

$a-b=2$ et $a+b=32$, ce qui donne $a=17$, $b=15$ et $a \cdot b = 255$;

$a-b=4$ et $a+b=16$, ce qui donne $a=10$, $b=6$ et $a \cdot b = 60$;

$a-b=8$ et $a+b=8$, ce qui donne $a=8$, $b=0$ et $a \cdot b = 0$.

Le produit maximal est donc 255.

MIDI 27

A la poste, Jean donne 10 euros à l'employé et lui dit "donnez-moi quelques timbres à $0{,}20$ euros, dix fois autant de timbres à $0{,}10$ euros et le reste en timbres à $0{,}50$ euros". Combien Jean reçoit-il de timbres ?

Ⓐ 51 Ⓑ 63 Ⓒ 72 Ⓓ 27

Ⓔ Les données ne déterminent pas le nombre de timbres.

Solution

Posons x le nombre de timbres à $0{,}20$ euros et y le nombre de timbres à $0{,}50$ euros, x et y sont tous deux des naturels non nuls.

L'énoncé nous fournit l'équation :

$0{,}2 \cdot x + 0{,}1 \cdot 10x + 0{,}5 \cdot y = 10$.

Ce qui après simplification donne $12x + 5y = 100$.

$5y$ et 100 sont tous deux multiple de 5, donc $12x$ doit être multiple de 5 et la seule valeur convenable est

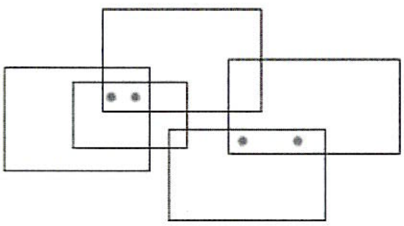
$x = 5$ (sinon $12x > 100$).

On a alors $60 + 5y = 100$, d'où $y = 8$. Et le nombre total de timbres est

$x + 10x + y = 5 + 50 + 8 = 63$.

MIDI 30

Cinq cartons sont posés sur une planche comme l'indique la figure ci-dessous. Ils doivent être fixés à la planche par des punaises dans les positions indiquées sans pouvoir tourner. Quel est le nombre minimum de punaises à utiliser ?



Ⓐ 3 Ⓑ 4 Ⓒ 5 Ⓓ 6 Ⓔ 7

Solution

Il suffit de 4 punaises dont les positions sont indiquées sur la figure.

Infor-Math-Ique 2

N. Vandenabeele

Souvenons-nous de Géo et Algo nos deux amis férus d'informatique. Avant de s'en aller, Algo a proposé un exercice à Géo. Celui-ci consiste à écrire l'algorithme qui résout une équation du premier degré du type $ax + b = 0$ où a et b sont réels. Géo propose sa solution.

Géo : Mon professeur de math me répète toujours que pour résoudre une équation du premier degré, il faut « isoler » l'inconnue. Si j'applique son principe, à partir de $ax + b = 0$, je peux écrire que $ax = -b$ et donc aussi que $x = -b/a$

Algo : Très bien mais est-ce toujours possible ?

Géo : Non... ce n'est valable que dans le cas général c'est-à-dire si a est différent de 0 puisqu'on ne peut jamais diviser par 0 !

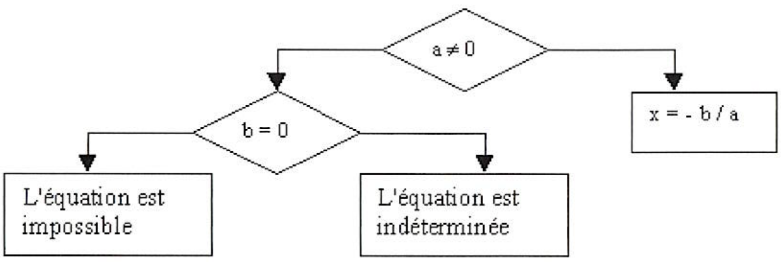
Algo : Et si a vaut 0 ?

Géo : J'y arrive... pas trop vite !

Si a vaut 0, alors l'équation à résoudre devient $0x + b = 0$ c'est-à-dire $b = 0$ Ainsi, si b vaut 0 alors l'équation est toujours vérifiée, quelle que soit la valeur de x. On dit de l'équation qu'elle est indéterminée. Par contre, si b est différent de 0, l'équation est impossible ; il n'y a pas de solution.

Algo : Ton analyse est parfaite...voyons comment écrire l'algorithme. Si je résume, on doit savoir dans quel cas on se trouve pour afficher la bonne réponse

1. Savoir si $a \neq 0$. Si c'est le cas, on est en présence du cas général
2. Sinon, deux cas particuliers peuvent se présenter selon que b vaut ou non 0.



Par convention, le losange représente une condition qui peut être vérifiée(sortie droite du losange) ou non(sortie gauche du losange)et le rectangle regroupe les instructions et opérations à effectuer.

Géo : Chouette ton diagramme... ça a l'air tout simple !

Algo : Franchement, ce n'est pas si difficile ; le tout c'est de bien « décortiquer » le problème. La phase d'analyse est primordiale...Il ne faut surtout pas la négliger. Et l'analyse, c'est toi qui l'as effectuée je t'en félicite !

Géo : Merci Algo... Je crois que plus tard, je veux dire quand j'aurais fini ma 6^e^année, je vais m'orienter vers des études d'informatique. Je pourrais ainsi allier ma passion pour l'informatique et les mathématiques dans ma vie professionnelle.

Algo : Pourquoi pas !? Tu joindras l'utile à l'agréable. Mais tu as encore quelques années devant toi pour y réfléchir

Géo : Oui, je sais et en plus ce sont bientôt les examens...

Algo : Travaille bien car les vacances se méritent

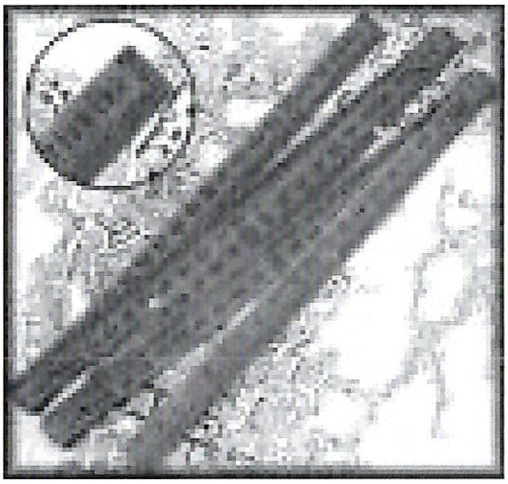
Géo : On se revoit bientôt ?

Algo : Quand tu veux... dans les prochains Math-Jeunes...

Géo : Au revoir et encore merci...!

Qu'est-ce que le mètre ?

S. Trompler



Curieuse question, penserez-vous ? C'est l'unité de longueur utilisée dans notre environnement ! Oui mais ! Il y a d'autres unités de longueur, employées ailleurs. Quelle est donc l'histoire du mètre, cette unité apparemment banale ? Voici quelques éléments de réponse.

Nous savons que les unités mécaniques sont définies à partir du mètre, de la seconde et du kilo. Mais comment définit-on le mètre ?

Depuis quand l'a-t-on adopté ?

Le besoin et le désir d'une mesure universelle de longueur sont très anciens. Plus les échanges entre les peuples se sont multipliés, plus les inconvénients de mesures diverses ont pris de l'importance.

Jusqu'à la fin du 18e siècle, les unités de longueur et de poids variaient, non seulement d'une nation à l'autre, mais également, dans chaque pays, d'une région à l'autre.

Jules César déjà, chercha à imposer en Gaule les lois romaines relatives aux poids et mesures, assura la conservation des étalons (modèles de référence) dans des lieux sacrés et punit sévèrement les fabricants de fausses mesures.

Charlemagne créa des étalons uniformes , décréta l'emploi de mesures identiques dans toute l'étendue de son Empire. Mais les rivalités seigneuriales anéantirent ses décisions, chacun mettant son point d'honneur à avoir ses propres mesures.

A diverses reprises il y eut de nouvelles tentatives d'unification. A la deuxième moitié du 17e siècle, deux idées de mesure naturelle coexistaient : la longueur du pendule qui bat la seconde et la mesure du méridien terrestre. Le pendule séduisit d'abord les savants : sa longueur est facile à retrouver en tout temps. Il suffit d'en déterminer le rapport avec les unités en usage pour les définir et les contrôler.

La mesure du méridien terrestre, faite dans l'Antiquité par Eratosthène ([1]), est reprise et améliorée en 1670 par l'abbé Picard, par un arc de méridien entre Paris et Amiens. L'abbé Mouton prend pour base le méridien et le divise jusqu'à trouver une longueur maniable ; il appelle milliare la longueur d'une minute d'arc de méridien terrestre, soit environ 1852 mètres.

Cette unité est le mille marin, connu précédemment, mais l'idée de l'appliquer à toutes les mesures de longueur, et de là aux surfaces et aux volumes, est nouvelle. La longueur du pendule doit servir de contrôle.

Mais hélas, en 1673, Richer découvre que le pendule battant la seconde à Cayenne est plus court qu'à Paris. « Pas de pendule universel, pas de mesure universelle offerte par la Nature » s'écrie Mouton.

La Condamine reprend le flambeau et est le véritable initiateur du système métrique universel. Puisque le pendule varie d'un endroit à l'autre du Globe, il faut en prendre un particulier.

En 1747, il effectue sa mesure à Quito (sur l'équateur), y fait fondre une règle de bronze

([1]) Voir l'article paru dans le précédent mjj.

Math-Jeunes Junior n°108 J, 30–32, 2004

qui conservera la longueur du pendule, la fait sceller dans le marbre, avec ces mots gravés : « Modèle de pendule simple équinoxial battant la seconde de temps moyen à l'altitude du sol de Quito, exemplaire d'une mesure naturelle ; puisse-t-elle aussi être universelle ». Cette règle est encore visible en ce lieu actuellement. La Condamine meurt en 1774 sans que son projet d'universalité soit reconnu et adopté.

A son tour, Condorcet prend la relève, mais il préfère la latitude de 45° parce que « sa situation au milieu des contrées où les Sciences fleurissent permet d'en vérifier la longueur aussi commodément et aussi souvent qu'on le voudra ». Le méridien passe près de Bordeaux.

Le ministre Turgot ordonne le départ en 1775. Malheureusement, il faut une pendule très précise pour la mesure d'une seconde et la pendule de l'Observatoire ne marche plus.

Le temps d'en construire une autre et Turgot est disgracié : nouvel abandon ! Mais l'aventure n'est pas finie. TAlleyrand élabore un nouveau projet, pour lequel il espère le concours de l'Angleterre : en effet, la Royal Society de Londres, plus ancienne que l'Académie des Sciences de Paris est sa rivale et il est évident que toute recherche conclue sans elle ne pourrait être approuvée par l'Angleterre et l'espoir d'universalité serait anéanti. Le moment est bien choisi car l'Angleterre songe à réformer son système de mesures.

Riggs Muller présente donc le projet de Talleyrand, un peu modifié, à la Chambre des Communes en 1790, avec comme base le pendule de Londres. La France accepte. C'est bien parti. Mais un litige entre l'Angleterre et l'Espagne, alliée de la France, menace la paix. L'Angleterre fait traîner les choses et, après les élections, Riggs Miller n'appartient plus à la Chambre des Communes. Le projet est enterré une nouvelle fois. Entre temps, l'Espagne et les Etats-Unis sont devenus favorables à l'entreprise. Tant pis pour l'Angleterre, la France agira sans elle.

En 1791, l'Académie des Sciences fait une nouvelle proposition basée sur la mesure du méridien terrestre : elle propose la dix-millionième partie du quart du méridien terrestre. Le mathématicien Leblond aurait proposé pour la première fois d'appeler cette unité « mètre », du grec metron, mesure. Les grands savants Condorcet, Lagrange, Laplace, Monge, Coulomb, Delambre, Lavoisier sont les promoteurs de l'entreprise.

En 1792, Delambre et Méchain partent mesurer le méridien de Dunkerque à Barcelone. Delambre écrit : « Nous étions convenus que Méchain aurait dans son lot les 170 000 toises qui assurent la distance entre Rodez et Barcelone. Le mien était composé des 380 000 toises que l'on compte de Rodez à Dunkerque ». Mais de grandes difficultés surgissent. Les habitants se méfient : « on nous reconnaît, on se rappelle que nous avions voulu placer un signal sur la tour de Montjai ; on nous enlève, on nous entraîne à travers champs par une pluie affreuse ».

Puis Méchain est retenu prisonnier en Espagne ; il ne reviendra à Paris qu'en 1795.

1793 : Les Académies sont supprimées et les travaux interrompus, mais la Commission Temporaire des Poids et Mesures est maintenue. Pas pour longtemps : Lavoisier est arrêté ! Delambre raconte : « La Commission avait demandé au Comité de Salut Public que Lavoisier pût sortir tous les matins avec un gendarme pour continuer les travaux qu'il avait commencés. Cette faveur s'accordait assez communément à des hommes moins célèbres et pour des motifs plus ou moins spécieux ».

Le Comité de Salut Public répond : « considérant combien il importe à l'amélioration de l'esprit que ceux qui sont chargés du gouvernement ne déléguent de fonction ni ne donnent de mission qu'à des hommes de confiance pour leurs vertus républicaines et leur haine pour les rois ; après s'en être concerté avec les membres du Comité d'Instruction publique, occupés spécialement de l'opération des poids et mesures, arrête que Borda, Lavoisier, Laplace, Coulomb, Brisson et Delambre, à compter de ce jour, cesseront d'être membres de la commission... ».

1795 : Heureusement, la politique révolutionnaire évolue, les dirigeants se succèdent et, sans attendre la fin des mesures

(1798) , la loi du 7 avril institue le système métrique décimal en France, fixe la nomenclature des nouvelles unités de longueur (mètre), de superficie (are), de capacité (litre) et de poids (gramme).

1799 et suivantes : Divers prototypes furent construits avec un souci croissant de précision.

De 1878 à 1889, le Bureau International des Poids et Mesures construit 30 mètres de prototypes à traits et à section en X. Les prototypes internationaux sont déposés au Pavillon de Breteuil où ils sont encore conservés aujourd'hui.

1889 : Première Conférence générale des poids et mesures. Le mètre est défini comme la distance, à la température de $0°C$, des axes de deux traits parallèles tracés sur le prototype international en platine iridié déposé au pavillon de Breteuil, à Sèvres. Depuis, la précision de ces prototypes ne suffit plus et la définition du mètre a subi des changements. Des phénomènes naturels, non susceptibles d'altération, sont choisis pour remplacer un mètre matériel.

1960 : La conférence générale des poids et mesures adopte une définition basée sur la longueur d'onde d'une des radiations émises par une lampe à décharge contenant du Krypton 86.

1983 : Nouvelle (et dernière, à l'heure actuelle ?)

Définition : le mètre est la longueur du trajet parcouru dans le vide par la lumière durant 1/299792458 de seconde.

Ce n'est vraiment pas une définition très intuitive !

Solutions des jeux

1. Nombres croisés.

	1	2	3	4	5
1	2	2	■	8	7
2	2	1	9	7	■
3	■	9	1	■	5
4	8	7	■	9	7
5	7	■	6	0	6

2. Les six nombres premiers.

Le problème admet 16 solutions. En voici 8. La ou les tiennes figurent peut-être parmi elles.

3	3	7
4	0	9
9	7	7

3	3	7
4	1	9
9	7	7

3	3	7
4	9	9
9	7	7

3	3	7
5	0	9
9	7	7

3	3	7
5	6	9
9	7	7

3	3	7
5	9	9
9	7	7

3	3	7
7	0	9
9	7	7

3	3	7
7	1	9
9	7	7

3. Des grilles de quatre nombres.

Voici des exemples de solutions ... mais il en existe d'autres !

avec des multiples de 6 :

8	4
4	2

avec des multiples de 7 :

2	1
8	4

avec des nombres premiers :

1	3
7	1

avec des multiples de 5, le problème n'admet aucune solution. En effet, les chiffres des unités dans les quatre nombres sont 0 ou 5. De plus, les nombres s'écrivent avec un chiffre des dizaines différent de 0. Ainsi, la grille cherchée doit se présenter de la façon suivante :

	5
5	

... et nous ne pouvons pas obtenir deux nombres différents en ligne 1 et colonne 1.

avec des multiples de 9, il est également impossible de trouver une grille

a	b
c	d

.

Nous recherchons des nombres « ab » et « ac » c'est-à-dire deux nombres dans la même dizaine. De plus tous les deux doivent être multiples de 9. La seule possibilité est donc 90 et 99 ... et le chiffre 0 apparaît dans une case où il ne peut se trouver.

Bonne nouvelle !

Durant cette année scolaire 2003 / 2004, le nombre total de lecteurs de Math-Jeunes Junior fut très approximativement de 2200 (*)

Cela représente 300 lecteurs de plus que l'an dernier.

C'est à la fois réjouissant et encourageant. Si ce total pouvait passer à 2500 l'an prochain, tout le monde en serait ravi, à commencer par le comité de rédaction de MJJ.

Un conseil aux élèves et étudiants : réabonnez-vous dès que possible, avant même les grandes vacances.

Pour ce faire, on peut utiliser les services d'un professeur qui veut bien prendre en charge les abonnements.

Ce n'est cependant pas indispensable : on peut aussi s'abonner individuellement ou, mieux, se grouper par au moins 5 personnes, de façon à obtenir le prix réduit. (Voir à ce sujet les renseignements figurant au dos de la page de couverture de la présente revue.)

Vous remerciant de l'intérêt que vous manifestez à l'égard de MJJ, sa Rédaction vous souhaite, dès à présent, une excellente fin d'année scolaire et des résultats à la hauteur de vos attentes.

(*) Dans ce total sont compris les élèves, les professeurs, les étudiants et des personnes privées. Si on vous dit que le nombre d'élèves-lecteurs dépasse de 20% l'ensemble des autres lecteurs, pouvez-vous calculer l'effectif de chacune de ces deux catégories ? Et oui...on est matheux jusqu'au bout !

Math-Jeunes Junior
Périodique trimestriel
15, rue de la Halle – 7000 Mons
Bureau de dépôt 7000 Mons 1

Responsable de l'édition: A. PATERNOTTRE
Rue du Moulin 78 – 7300 Boussu
Bureau de dépôt : Mons 1

Autorisation de fermeture
Sluitings toelating
7000 Mons 1
5/156

Belgique - België
P.P.
7000 Mons 1
5/124

Périodique - Peut être ouvert pour contrôle postal

Réservé à la poste

Inconnu
Refusé
Décédé
Adresse insuffisante
N'habite plus à l'adresse indiquée