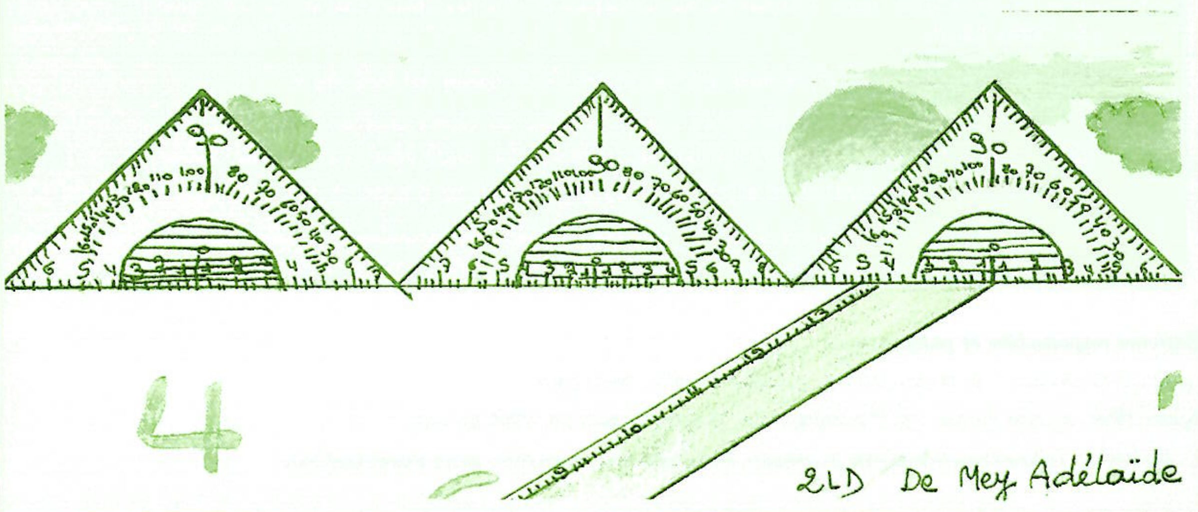
MJ junior!

26ème Année - N°109 J
Novembre 2004



Math-Jeunes et Math-Jeunes Junior

Revues trimestrielles publiées par la Société Belge des Professeurs de Mathématique d'expression française

Secrétariat : M.-C. Carruana, SBPMef, rue de la Halle 15, 7000 Mons, ☎-FAX 32-(0)65-373729, GSM : 0473973808 e-mail : sbpm@sbpm.be, URL : http://www.sbpm.be.

Tarifs

Abonnements groupés (au moins 5)				
	Une des deux revues		Les **deux** revues	
Belgique	4 €		7 €	
	✉ (non prior)	prior	✉ (non prior)	prior
Europe	7 €	9 €	13 €	17 €
Autres pays	10 €	14 €	15 €	20 €

Abonnements individuels				
	Une des deux revues		Les **deux** revues	
Belgique	6 €		11 €	
	✉ (non prior)	prior	✉ (non prior)	prior
Europe	13 €	16 €	16,50 €	20,50 €
Autres pays	15 €	21 €	20 €	25 €

Légende : « prior »=prior, « non prior »=✉.

Trois numéros de chaque revue sont publiés annuellement. Pour connaître la liste des anciens numéros encore disponibles et leur prix selon votre localisation, adressez-vous au secrétariat.

Les abonnements destinés aux élèves de l'enseignement secondaire sont de préférence pris par l'intermédiaire d'un professeur. Effectuez vos paiements :

- ☞ pour la Belgique : par virement au Compte n°000-0728014-29 de *S.B.P.M.e.f.*, rue de la Halle 15, 7000 Mons
- ☞ pour la France : par virement au Compte CCP Lille 10 036 48 S
- ☞ pour l'étranger (sauf la France) : par virement international au Compte n°IBAN: BE 26 0000 7280 1429 BIC: BPOTBEB1 au nom de la *SBPMef*, rue de la Halle 15, B 7000 Mons, Belgique. Les personnes résidant à l'étranger qui ne peuvent faire un virement à ce compte sont invitées à envoyer un mandat postal international. Tout chèque bancaire non encaissable en Belgique devra être majoré de 12,50 € pour frais d'encaissement.

Éditeurs responsables et rédacteurs en chef :

– pour *Math-Jeunes* : G. Noël, Rue de la Culée 86, 6927 Resteigne

– pour *Math-Jeunes Junior* : A. Paternottre, Rue du Moulin 78, 7300 Boussu

N°109J Vingt-sixième année 2005

MATH-JEUNES JUNIOR

Sommaire

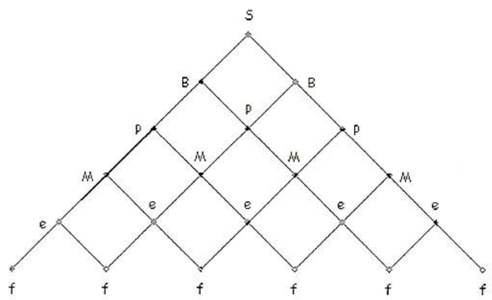
Le triangle de Pascal

C. Villers

Cheminons !

La première étape du concours Math-Quiz 2003-2004, publiée dans le n°106J de la revue, comportait la question suivante :

De combien de manières pouvez-vous épeler le mot « SBPMef » en suivant les segments du réseau, du haut vers le bas ?



Diverses stratégies permettent de répondre à cette question.

Par exemple, se convaincre que pour « aller » du point S à un des points f il faut parcourir 5 segments consécutifs et qu'en S et en tous les points intermédiaires entre ce S de départ et les f d'arrivée, il y a chaque fois choix entre deux possibilités.

Le nombre total de possibilités, qui se multiplient, est donc $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 32$.

Une autre méthode consiste à progresser dans le cheminement tout en indiquant, en chaque point rencontré, le nombre de possibilités d'y arriver.

Ainsi pour atteindre le B de gauche en partant du S, il n'y a qu' une seule possibilité tout comme pour le B de droite d'ailleurs.

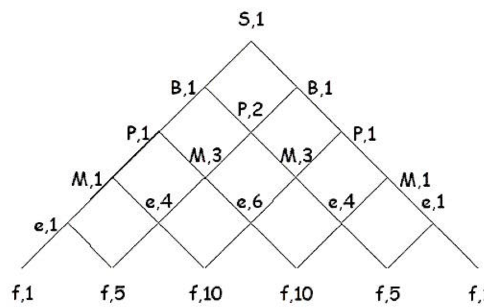
Pour atteindre le P de gauche, il n'y a qu'une seule possibilité qui consiste à venir du B de gauche.

Il en est de même pour atteindre le P de droite.

Mais pour atteindre le P central, il y a deux possibilités : l'une nous amenant du B de gauche, l'autre du B de droite.

Ce P central reçoit ainsi la caractéristique $1+1$ soit 2.

En travaillant ainsi de proche en proche, vous obtiendrez le schéma que voici.



Et le nombre total de façons d'atteindre f est la somme des nombres qui sont associés aux f soit donc $1 + 5 + 10 + 10 + 5 + 1$ ou encore 32.

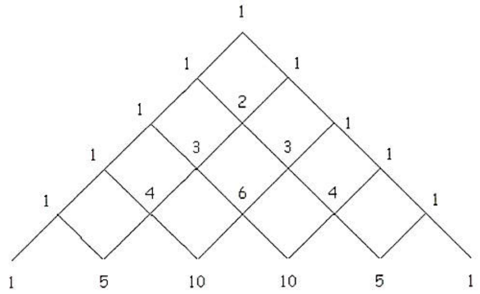
Cette technique de dénombrement des possibilités de cheminement dans un réseau est souvent utile. Elle mérite de trouver une place dans vos connaissances.

Dans le schéma précédent, ce ne sont pas les 6 lettres S, B, P, M, e et f qui sont importantes mais bien les nombres marqués en chaque point du réseau.

Ce dernier prend alors la forme suivante, facile à reconstituer.

Les points extérieurs reçoivent 1 et les points intérieurs reçoivent la somme des nombres des deux points qui le précèdent.

Exercez-vous en prolongeant un peu ce tableau.



Il faut noter qu'il n'est pas nécessaire de tracer les segments séparant les points.

Le schéma peut s'écrire sous la forme d'un tableau de nombres, comme suit :

1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

1 5 10 10 5 1

1 6 15 20 15 6 1

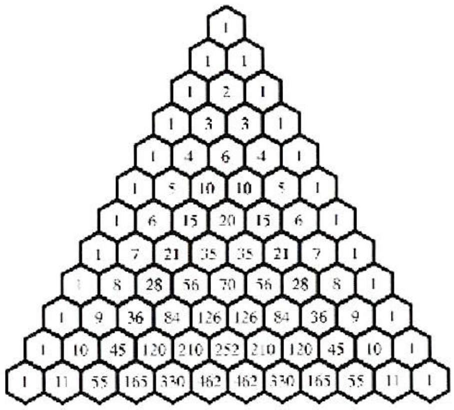
1 7 21 35 35 21 7 1

1 8 28 56 70 56 28 8 1

ou encore

1								
1	1							
1	2	1						
1	3	3	1					
1	4	6	4	1				
1	5	10	10	5	1			
1	6	15	20	15	6	1		
1	7	21	35	35	21	7	1	
1	8	28	56	70	56	28	8	1

Voici encore une autre forme de ce triangle. Elle utilise un pavage du plan par des hexagones.



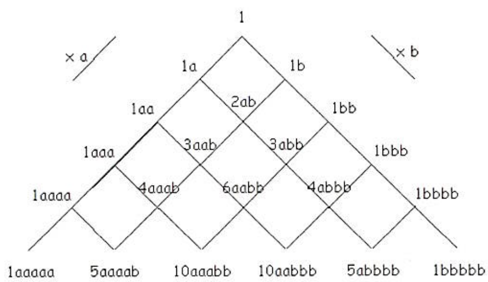
Ce tableau, qu'il soit écrit sous l'une ou l'autre forme, porte le nom de « Triangle de Pascal » du nom du penseur, mathématicien et philosophe Blaise Pascal.

Le triangle de Pascal possède de nombreuses propriétés. En voici deux qui s'inscrivent bien dans le cadre de notre revue.

Puissances d'un binôme

Reprenons le triangle de Pascal et convenons que parcourir un segment vers la gauche traduit une multiplication par a et que parcourir un segment vers la droite traduit une multiplication par b (ou l'inverse si vous voulez).

En continuant à tenir compte des nombres indiqués en chaque point, vous obtenez alors la forme suivante :



En lisant les caractéristiques du point situé à la distance 0 du sommet, c'est à dire le sommet lui-même, vous obtenez $(a+b)^0 = 1$

En lisant les caractéristiques des 2 points situés à la distance 1 du sommet vous obtenez $(a+b)^1 = a+b$.

En lisant les caractéristiques des 3 points situés à la distance 2 du sommet vous obtenez

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

En lisant les caractéristiques des 4 points situés à la distance 3 du sommet vous obtenez $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$..

Ce sont les produits remarquables que vous avez peut-être rencontrés dans votre cours de mathématiques.

Mais vous pouvez aussi continuer de cette manière.

En lisant les caractéristiques des 5 points situés à la distance 4 du sommet vous obtenez $(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$.

Etc ...

Ceci est un moyen simple de retrouver les puissances naturelles d'un binôme.

Est-ce si étonnant ? ? ?

Observez le triangle de Pascal écrit comme cidessous.

1								
1	1							
1	2	1						
1	3	3	1					
1	4	6	4	1				
1	5	10	10	5	1			
1	6	15	20	15	6	1		
1	7	21	35	35	21	7	1	
1	8	28	56	70	56	28	8	1

Ligne par ligne, on peut y lire les nombres 1, 11, 121, 1331, 14 641, etc...

Vous serez certainement d'accord pour reconnaître que ce sont les premières puissances naturelles de 11.

On a bien , $11^0 = 1$, $11^1 = 11$,$11^2 = 121$, $11^3 = 1331$, $11^4 = 14641$, vous pouvez le vérifier.

Mais pour la cinquième puissance de 11, cela ne va plus si bien. Elle ne vaut certainement pas 15101051.

Vous avez compris que le problème provient des deux 10 qui comptent deux chiffres et plus seulement un seul.

Alors il suffit de travailler de droite à gauche comme dans les additions écrites, de ne prendre que le chiffre de droite des nombres dépassant 9 et de reporter, dans le nombre suivant, la valeur du nombre formé par le ou les autres chiffres à gauche.

Pour 11^5 , on a, dans le triangle de pascal :

	1	5	10	10	5	1
qui devient	1	5	11	0	5	1
puis	1	6	1	0	5	1

qui fournit 161 051 soit bien 11^5 .

Pour 11^6 , on a, dans le triangle de pascal :

	1	6	15	20	15	6	1
qui devient	1	6	15	21	5	6	1
qui devient	1	6	17	1	5	6	1
qui devient	1	7	7	1	5	6	1

qui fournit $11^6 = 1\ 771\ 561$.

Vous pouvez aussi vérifier que c'est exact.

Quelle peut bien être la justification mathématique de ce « phénomène » ?

C'est simplement que 11 n'est rien d'autre que $10 + 1$.

Dans $(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^3b^2 + 5ab^4 + b^5$, il suffit de remplacer a par 10 et b par 1 pour obtenir $11^5 = 100000 + 50000 + 10000 + 1000 + 50 + 1$ soit bien 161 051.

Idem pour 11^6.

A faire ! Bon amusement.

Blaise Pascal
Clermont-Ferrand
1623–Paris 1662

- Mathématicien : probabilités, combinatoire, géométrie analytique, calcul infinitésimal.
- Physicien : machine à calculer, pesanteur de l'air, lois de la pression, inventeur de la presse hydraulique, de la seringue et de la brouette.

- Ecrivain - penseur - philosophe : « Provinciales » « Pensées »

Un jeu de bascule

Y. Noël-Roch

1. Des nombres de 1 à 100

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Dans ce tableau, chaque nombre peut être éteint ou allumé. Dans la suite, **changer l'état d'un nombre** signifiera
– allumer ce nombre s'il est éteint,
– éteindre ce nombre s'il est allumé.
Au départ, tous les nombres sont éteints : nous disposons du tableau ci-dessus.

1^re^ étape : changer l'état de **tous les multiples de 1**

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

2^e^ étape : changer l'état de **tous les multiples de 2**

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

3^e^ étape : changer l'état de **tous les multiples de 3**

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

4^e^ étape : changer l'état de **tous les multiples de 4**

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Quel sera l'état des nombres de 1 à 20 après la 20^e^ étape ? Quel sera le tableau final après la centième étape ? *Essaie d'avoir une opinion avant de continuer ta lecture.*

2. Un autre regard

Voici une autre présentation des aventures des nombres de 1 à 10 dans un tableau où

- A signifie que nous « Allumons » le nombre,
- E signifie que nous « Éteignons » le nombre,
- – signifie que rien ne se passe parce que le nombre n'est pas multiple du numéro de l'étape.

Nous appliquons bien la règle imposée dans la première partie : **un nombre change d'état s'il est multiple du numéro de l'étape**.

		Étape n°									
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	1	A	–	–	–	–	–	–	–	–	–
	2	A	E	–	–	–	–	–	–	–	–
N	3	A	–	E	–	–	–	–	–	–	–
o	4	A	E	–	A	–	–	–	–	–	–
m	5	A	–	–	–	E	–	–	–	–	–
b	6	A	E	A	–	–	E	–	–	–	–
r	7	A	–	–	–	–	–	E	–	–	–
e	8	A	E	–	A	–	–	–	E	–	–
	9	A	–	E	–	–	–	–	–	A	–
	10	A	E	–	–	A	–	–	–	–	E

Tout nombre n change nécessairement d'état à l'étape n°1 et à l'étape n°n (puisque n est multiple de 1 et de n). Il ne changera plus jamais d'état **après** l'étape n°n (puisque n n'est multiple d'aucun nombre strictement plus grand que lui). Il se peut que n change d'état **entre** les étapes n°1 et n°n : c'est le cas chaque fois que n est multiple du numéro de l'étape (autrement dit, chaque fois que le numéro de l'étape est un diviseur de n).

En comparant les aventures des nombres de 1 à 10, nous voyons que
- seuls 1, 4 et 9 sont finalement allumés. Vois-tu une propriété qui caractérise ces trois nombres ?
- 2, 3, 5 et 7 connaissent le même sort : allumés chacun une seule fois (à l'étape 1) et éteints chacun une seule fois (respectivement à l'étape 2, 3, 5 et 7). Vois-tu une propriété qui caractérise ces quatre nombres ?

Si tu ne maitrises pas bien le processus, écris encore les aventures de quelques nombres. Quels sont les nouveaux nombres allumés jusqu'à 20 ? Quels sont ceux qui ont la même histoire que 2, 3, 5 et 7 ?

3. Une piste

Les nombres 2, 3, 5 et 7 sont les nombres premiers inférieurs à 10. Quelle est, d'une manière plus générale, l'aventure de tout nombre premier p ?
- ses seuls diviseurs sont les deux nombres 1 et p.
- p est donc allumé à l'étape 1,
- p ne change pas d'état de l'étape 2 à l'étape $p-1$,
- p est donc éteint à l'étape p et il le reste définitivement.

En fin de processus, tous les nombres premiers sont donc éteints. Mais ils ne sont pas les seuls puisque 6 et 8 par exemple le sont également. Les nombres 6 et 8 ont-ils une propriété commune avec tous les nombres premiers, propriété qui expliquerait que ces nombres soient finalement éteints ?

- 6 s'allume à l'étape 1, s'éteint à l'étape 2, s'allume à l'étape 3 et s'éteint à l'étape 6.
- 8 s'allume à l'étape 1, s'éteint à l'étape 2, s'allume à l'étape 4 et s'éteint à l'étape 8.

Leur aventure se résume ainsi en la suite $(A \to E \to A \to E)$, tandis que l'aventure commune à tous les nombres premiers est la suite $(A \to E)$.

Après la 100$^{\text{e}}$ étape, les nombres **éteints** sont les nombres dont l'aventure est du type

$$(A \to E) \qquad \text{ou} \qquad (A \to E \to \cdots \to A \to E).$$

Ce sont les nombres ayant exactement deux diviseurs ou, plus généralement **un nombre pair de diviseurs**.

Au contraire, les nombres finalement **allumés** ont connu l'aventure

$$(A) \qquad \text{ou} \qquad (A \to E \to \cdots \to A \to E \to A).$$

Ce sont les nombres ayant exactement un diviseur ou, plus généralement **un nombre impair de diviseurs**. (Seul 1 correspond à la suite (A) : allumé à la 1$^{\text{re}}$ étape, il reste toujours ensuite dans cet état … il est le seul nombre qui possède un seul diviseur !)

4. Parité du nombre de diviseurs de n

Prenons par exemple le nombre 96. Il admet beaucoup de diviseurs et nous risquons d'en oublier si nous n'organisons pas notre recherche !

Vois ci-contre une organisation possible.

Calculs	Diviseurs
$96 = 1 \times 96$	1, 96
$96 = 2 \times 48$	2, 48
$96 = 3 \times 32$	3, 32
$96 = 4 \times 24$	4, 24
$96 = 6 \times 16$	6, 16
$96 = 8 \times 12$	8, 12

La ligne suivante serait $96 = 12 \times 8$ et elle est inutile ainsi que toutes les suivantes qui nous feraient retrouver les diviseurs déjà obtenus ! Nous avons trouvé six **paires de diviseurs** de 96, soit 12 diviseurs.

Appliquons cette méthode aux premiers carrés parfaits

Calculs	Diviseurs	Calculs	Diviseurs	Calculs	Diviseurs	Calculs	Diviseurs
$1 = 1 \times 1$	1	$4 = 1 \times 4$	1, 4	$9 = 1 \times 9$	1, 9	$16 = 1 \times 16$	1, 16
		$4 = 2 \times 2$	2	$9 = 3 \times 3$	3	$16 = 2 \times 8$	2, 8
						$16 = 4 \times 4$	4

Les exemples qui précèdent montrent que nous trouvons les diviseurs d'un nombre **par paires**, sauf dans le cas d'un dernier calcul type $n = x \times x$ qui ne donne qu'**un seul diviseur** … Cela se produit lorsque n est un **carré parfait**.

5. Conclusion

Les nombres qui admettent un nombre impair de diviseurs sont les carrés parfaits.

Voici donc le tableau attendu après la 100$^{\text{e}}$ étape :

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Fibonacci, un homme en or

A. Paternottre

Nombre et rectangle d'or.

Le nombre d'or n'est pas inconnu des lecteurs de *Math-Jeunes Junior*. Dans l'article intitulé « Jolies égalités » du numéro 104 de notre revue, il en a déjà été largement question. Nous l'avions alors noté ϕ (phi) et l'avions défini comme étant la racine carrée positive de l'équation du second degré :

$$x^2 - x - 1 = 0$$

La résolution de cette équation fournit deux racines (que tu apprendras à calculer en 4e année) :

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2} = \phi \cong 1,618 \text{ (nombre d'or)} \quad \text{et} \quad \frac{1-\sqrt{5}}{2} = -\frac{1}{\phi} \cong -0,618$$

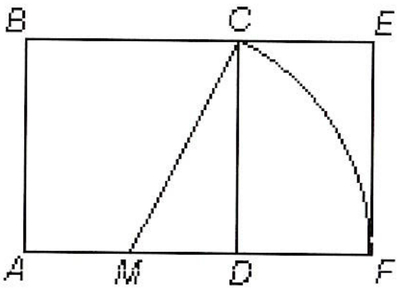
Puisque ϕ est racine de l'équation $x^2 - x - 1 = 0$, on a : $\phi^2 - \phi - 1 = 0$ ou $\phi^2 = \phi + 1$

Rappelons aussi qu'un rectangle d'or est un rectangle tel que le rapport $\dfrac{\text{longueur}}{\text{largeur}} = \phi$.

Ce rapport est aussi appelé « divine proportion ».

Voici une des constructions du rectangle d'or :

1. $ABCD$ est un carré de côté 1. M est le milieu de $[AD]$.
2. De M comme centre avec $|MC|$ comme rayon, tracer un arc de cercle coupant le prolongement de $[AD]$ en F.
3. Tracer le rectangle $ABEF$ qui est un rectangle d'or. Justifions cette construction :



$$|MF|^2 = |MC|^2 = |MD|^2 + |DC|^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1^2 = \frac{5}{4}$$

Dès lors : $|MF| = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$

et $|AF| = |AM| + |MF| = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} = \phi$

Finalement : $\dfrac{|AF|}{|AB|} = \dfrac{\phi}{1} = \phi \iff ABEF$ est un rectangle d'or.

A propos du rectangle d'or, sache que depuis l'Antiquité, il intéresse tous les créateurs d'art : architectes, peintres, sculpteurs, graveurs, géomètres, mathématiciens, bâtisseurs de pyramides et de cathédrales. . .etc.

Voici une citation : « Avec le rectangle d'or, tout est harmonie et beauté ».

Pour ton information sache aussi que :

- Le rectangle qui limite l'aire de jeu d'un terrain de foot est presque un rectangle d'or. Depuis 1984 en effet, le règlement de la FIFA impose que les rencontres internationales ainsi que celles de division 1 se jouent à l'intérieur d'un rectangle de 105m sur 68m.
  Or $\frac{105}{68} \cong 1,544 \cong \phi$.
- Une carte à jouer est proche aussi d'un rectangle d'or. Vérifie-le.

Suites de Fibonacci

Leonardo da Pisa, mieux connu sous le nom de Fibonacci, est un mathématicien italien qui a vécu approximativement entre 1175 et 1240. Ayant voyagé en Algérie, il en ramena les riches mathématiques arabes qu'il diffusa en Occident dans son « Liber Abaci » (livre de l'Abaque).

Nous nous intéressons, dans cet article, à la partie de son œuvre qui traite des célèbres suites de nombres qui portent son nom.

Pour construire une suite de Fibonacci, il suffit de se donner deux nombres qui seront les deux premiers termes. Chacun des termes suivants est alors la somme des deux termes qui le précèdent.

Voici quelques exemples :

$\boxed{1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34 \ldots}$ (connue sous la dénomination « la suite de Fibonacci ».)

- 3, - 7, -10, -17, -27, - 44, -71 ...

$\frac{1}{3}, 1, \frac{4}{3}, \frac{7}{3}, \frac{11}{3}, 6, \frac{29}{3}, \ldots$

$a, b, a+b, a+2b, 2a+3b, 3a+5b, 5a+8b, \ldots$

Compare cette dernière suite (suite générale) à la suite de Fibonacci. Les deuxième et troisième suites sont quelconques. Fibonacci qui ne connaissait que les nombres naturels ne les a sûrement pas envisagées.

Nombre d'or et suites de Fibonacci

- Forts de la formule $\phi^2 = \phi + 1$ établie plus haut, nous allons pouvoir calculer les puissances successives de ϕ à exposants naturels :

$$\begin{aligned}
&\phi^0 = 1 \text{ et } \phi^1 = \phi \quad \text{comme pour tout nombre} \\
&\phi^2 = \phi + 1 \\
&\phi^3 = \phi \times \phi^2 = \phi \times (\phi + 1) = \phi^2 + \phi = (\phi + 1) + \phi = 2\phi + 1 \\
&\phi^4 = \phi \times \phi^3 = \phi \times (2\phi + 1) = 2\phi^2 + \phi = 2(\phi + 1) + \phi = 3\phi + 2 \\
&\phi^5 = \phi \times \phi^4 = \cdots = 5\phi + 3 \quad \text{Vérifie-le.}
\end{aligned}$$

  Si tu continues tu obtiendras :
  $\phi^6 = 8\phi + 5$; $\phi^7 = 13\phi + 8$; $\phi^8 = 21\phi + 13$ etc...
- La suite $\phi^0, \phi^1, \phi^2, \phi^3, \phi^4 \cdots$ est telle qu'à partir de son 2e terme, chacun des termes est obtenu en multipliant le précédent par ϕ.
  On dit que cette suite est géométrique de raison ϕ.

Mais, si on tient compte des égalités précédentes, cette suite peut aussi s'écrire :
$1, \phi, \phi+1, 2\phi+1, 3\phi+2, 5\phi+3, 8\phi+5, 13\phi+8 ; 21\phi+13$ etc...
Tu constates que, à partir du 3e, chaque terme s'obtient en sommant les deux précédents. Tu peux dès lors affirmer que :
La suite géométrique formée à l'aide des puissances successives du nombre d'or ϕ est aussi une suite de Fibonacci.
On a donc :
$\phi^2 = \phi^1 + \phi^0 ; \phi^3 = \phi^2 + \phi^1 ; \phi^4 = \phi^3 + \phi^2 ; \phi^5 = \phi^4 + \phi^3 \cdots \phi^n = \phi^{n-1} + \phi^{n-2} (n \in N)$
Cette dernière formule reste vraie si on remplace n par $-n$:
En effet :
$\phi^2 = \phi+1 \iff 1 = \frac{\phi+1}{\phi^2} \iff 1 = \frac{1}{\phi} + \frac{1}{\phi^2} \iff \frac{1}{\phi^n} = \frac{1}{\phi^{n+1}} + \frac{1}{\phi^{n+2}} \iff \phi^{-n} = \phi^{-n-1} + \phi^{-n-2}$
Finalement : quel que soit le nombre entier z, on a : $\phi^z = \phi^{z-1} + \phi^{z-2}$

- Convenons que :
  VAD signifie « valeur approchée par défaut »
  VAE signifie « valeur approchée par excès »
  ε signifie « erreur commise » et $|\varepsilon|$ désigne la valeur absolue de cette erreur.
  Observe les calculs suivants :

$$\phi = \frac{\phi^2}{\phi} = \frac{\phi+1}{\phi} = 1 + \frac{1}{\phi} \qquad \Rightarrow 1 \text{ est une } VAD \text{ de } \phi \text{ avec } |\varepsilon| = \frac{1}{\phi}$$
$$\phi = \frac{\phi^3}{\phi^2} = \frac{2\phi+1}{\phi+1} = 2 - \frac{1}{\phi+1} \qquad \Rightarrow 2 \text{ est une } VAE \text{ de } \phi \text{ avec } |\varepsilon| = \frac{1}{\phi+1} = \frac{1}{\phi^2}$$
$$\phi = \frac{\phi^4}{\phi^3} = \frac{3\phi+2}{2\phi+1} = \frac{3}{2} + \frac{1}{2(2\phi+1)} \qquad \Rightarrow \frac{3}{2} \text{ est une } VAD \text{ de } \phi \text{ avec } |\varepsilon| = \frac{1}{2(2\phi+1)} = \frac{1}{2\phi^3}$$
$$\phi = \frac{\phi^5}{\phi^4} = \frac{5\phi+3}{3\phi+2} = \frac{5}{3} - \frac{1}{3(3\phi+2)} \qquad \Rightarrow \frac{5}{3} \text{ est une } VAE \text{ de } \phi \text{ avec } |\varepsilon| = \frac{1}{3(3\phi+2)} = \frac{1}{3\phi^4}$$
$$\phi = \frac{\phi^6}{\phi^5} = \frac{8\phi+5}{5\phi+3} = \frac{8}{5} + \cdots \qquad \text{Achève puis continue avec } \phi = \frac{\phi^7}{\phi^6} = \cdots$$

Souviens-toi de la suite de Fibonacci : 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21 ...
Tu constates que les valeurs approchées successives de ϕ trouvées ci-dessus sont aussi les quotients successifs d'un terme de la suite de Fibonacci par son précédent.
Et ce qui est heureux, c'est que plus on progresse dans cette suite et plus ce quotient est voisin de la valeur du nombre d'or ϕ. En effet la valeur absolue de l'erreur commise sur ϕ est alors de plus en plus voisine de zéro car :

$$\phi > 1 \Rightarrow \frac{1}{\phi} > \frac{1}{\phi^2} > \frac{1}{2\phi^3} > \frac{1}{3\phi^4} > \ldots$$

et ces rapports successifs sont de plus en plus voisins de zéro.
Si t_n et t_{n+1} désignent deux termes consécutifs de la suite de Fibonacci, ce que nous venons de découvrir sera, en 5e année, exprimé mathématiquement en disant :
Le rapport $\frac{t_{n+1}}{t_n}$ tend vers ϕ lorsque n croît indéfiniment et on écrira :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{t_{n+1}}{t_n} = \phi$$

Tu en es à présent persuadé, je suppose : ce Fibonacci était vraiment un homme en or.

Y. Noël-Roch

1. Créer des nombres et les additionner.

Nous allons utiliser tous les nombres qui s'écrivent avec les chiffres 1, 2, 3, 4 et 5, chacun pris une seule fois.

- Écris tous ceux qui commencent par 1. Combien y en a-t-il ?
- Sans les écrire tous cette fois, combien existe-t-il de nombres si nous utilisons les cinq chiffres chacun une seule fois
- Quelle est la somme de tous ces nombres ?

2. Changer une seule lettre à la fois.

Passe du mot SEPT au mot HUIT puis au mot NEUF en appliquant les règles suivantes :

1. tous les mots rencontrés doivent être des mots de la langue française,
2. on passe d'un mot au suivant en modifiant une seule lettre et sans modifier l'ordre des lettres. Exemple SEPT peut devenir SERT.

3. Tous intrus !

Parmi les cinq nombres qui suivent, chacun peut être considéré comme l'unique intrus de la famille. Trouve pour chacun une propriété qu'il est le seul à posséder.

1013 3125 1023 3025 3113

4. Parenthèses parfois utiles.

$$\boxed{5} \ldots \boxed{-4} \ldots \boxed{3} \ldots \boxed{-2} \ldots \boxed{1} = 1$$

$$\boxed{5} \ldots \boxed{-4} \ldots \boxed{3} \ldots \boxed{-2} \ldots \boxed{1} = -2$$

$$\boxed{5} \ldots \boxed{-4} \ldots \boxed{3} \ldots \boxed{-2} \ldots \boxed{1} = 3$$

$$\boxed{5} \ldots \boxed{-4} \ldots \boxed{3} \ldots \boxed{-2} \ldots \boxed{1} = -4$$

$$\boxed{5} \ldots \boxed{-4} \ldots \boxed{3} \ldots \boxed{-2} \ldots \boxed{1} = 5$$

Remplace les ... par $+$, $-$, $\times$ ou : (avec ou sans répétition) et introduis autant de parenthèses que tu veux, de façon que chaque ligne complétée constitue un calcul correct.

5. Pair — impair

Est-il possible d'obtenir une multiplication correcte en remplaçant les étoiles

par 1, 3, 5, 7 ou 9 :

$$\begin{array}{cccccc}
 & & & * & 2 & 4 \\
 & & \times & * & 8 & * \\
\hline
 & & 4 & * & * & * \\
 & * & * & * & 2 & \\
* & 8 & * & & & \\
\hline
* & * & * & * & * & *
\end{array}$$

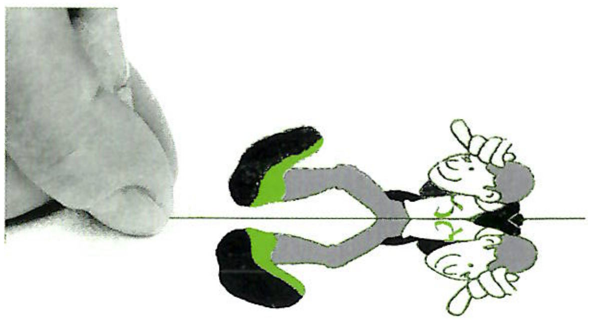
par 0, 2, 4, 6 ou 8 :

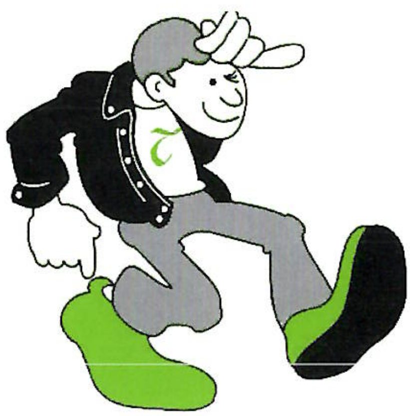
$$\begin{array}{cccccc}
 & & & * & 1 & 5 \\
 & & \times & * & 3 & * \\
\hline
 & & 3 & * & * & * \\
 & * & * & * & 5 & \\
* & 1 & * & & & \\
\hline
* & * & * & * & * & *
\end{array}$$

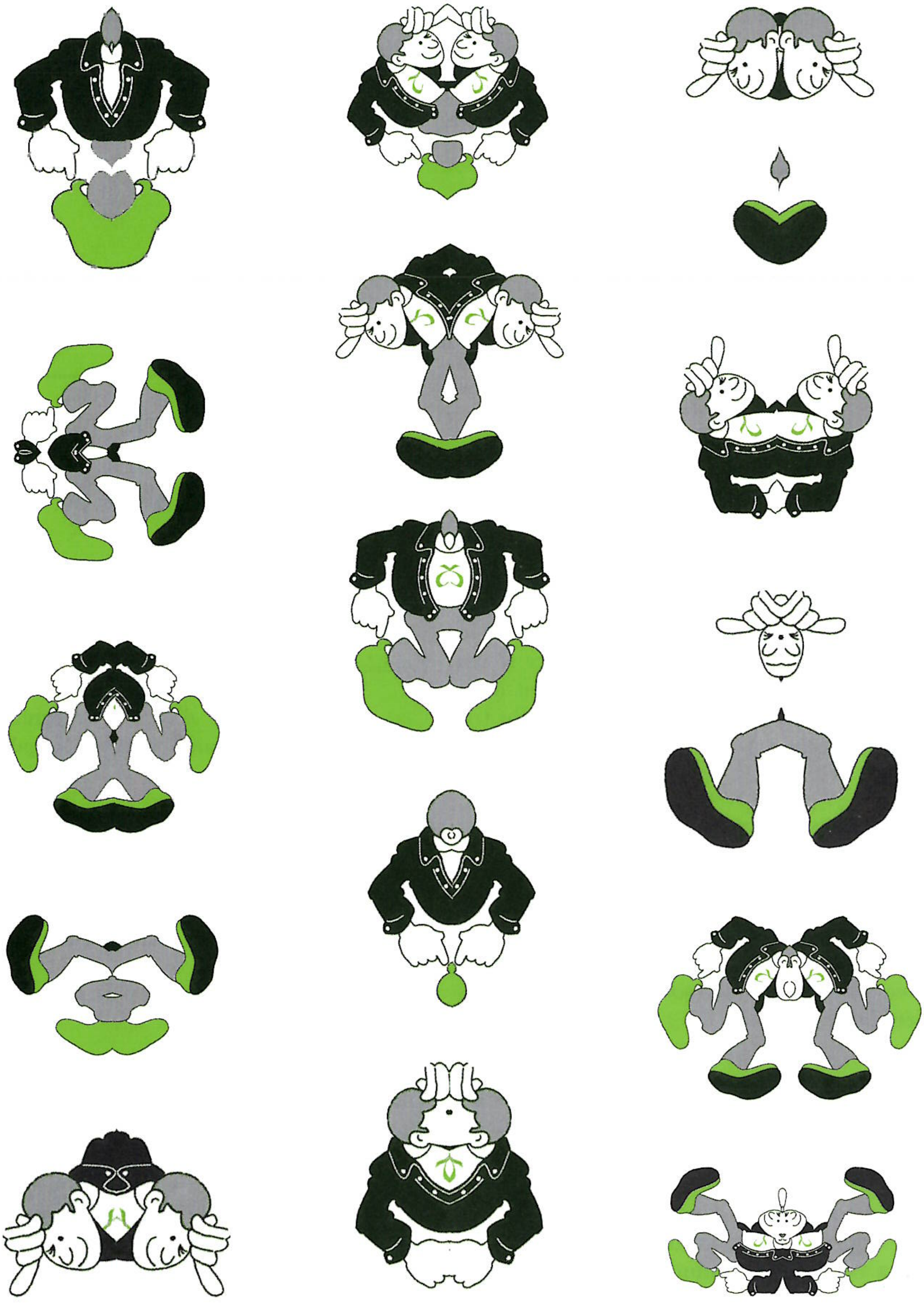
Solutions page 28.

6. Des symétries « miroir »

Place le miroir inséré dans ce numéro de *Math-Jeunes Junior* sur la figure ci-dessous de manière à créer les quinze figures de la page suivante.
Attention : conserve précieusement le miroir, nous le réutiliserons dans le prochain numéro de Math-Jeunes Junior *!*







Informatique et Géométrie

N. Vandenabeele

Géo est dans sa chambre. Il termine ses devoirs. Un de ses amis passe dans la rue.

Géo : Eh ! Algo ? Comment vas-tu ?

Algo : Bien et toi ? Si tu veux, on peut aller chez moi et jouer à l'ordinateur.

Géo : Merci mais je dois terminer mon devoir de math ! C'est pour demain et c'est assez long !

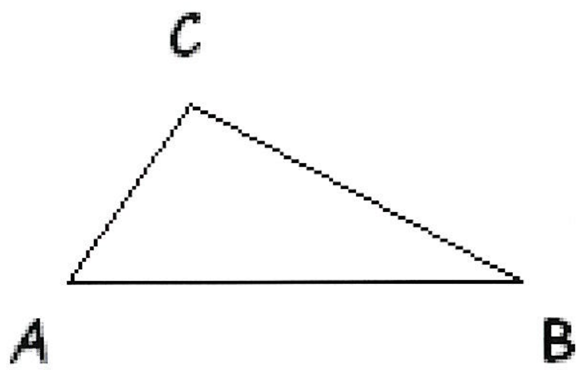
Algo : Aimerais-tu que je te donne un coup de pouce ?

Géo : Je n'osais pas te le demander. Merci. Voilà ce que l'on me demande. Connaissant la mesure de trois segments, je dois dire si ces segments peuvent former un triangle et dans l'affirmative, il faut préciser la nature du triangle (isocèle,...)

Algo : Sans les dessiner bien sûr !

Géo : Pour savoir si les segments peuvent déterminer un triangle, on a vu au cours le critère suivant : « la mesure du plus grand côté doit être inférieure à la somme des mesures des deux autres côtés ».

Algo : C'est effectivement le bon critère mais j'ai l'impression que tu viens de lire du chinois. En fait, cela signifie tout simplement que la ligne droite est le chemin le plus court pour se rendre de A en B. Si tu passes par C extérieur à $[AB]$, le chemin sera plus long ! C'est ce que l'on traduit mathématiquement par $|AB| < |AC| + |CB|$. C'est l'inégalité triangulaire !



Géo : C'est si simple dit comme ça ! Mais il y a deux autres inégalités :

$|AC| < |AB| + |BC|$ et $|BC| < |BA| + |AC|$

Algo : Oui, mais il n'y a que celle que j'ai mentionnée qui est à vérifier !

Géo : Donc, il faut d'abord déterminer le côté le plus long. Ensuite vérifier l'inégalité et conclure.

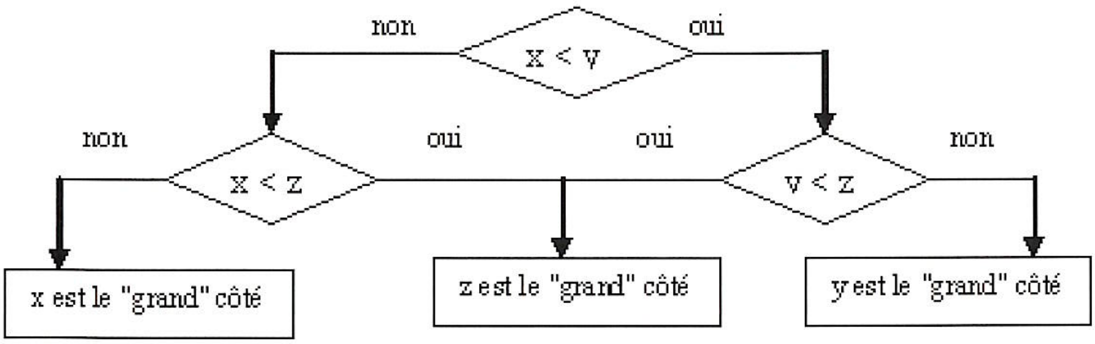
Algo : Si tu veux, on peut utiliser l'informatique pour répondre à la première partie de l'énoncé.

Géo : Oh oui ! Ce serait plus amusant !

Algo : Comment déterminer le côté le plus long ?

Géo : Il suffit de comparer la mesure d'un côté avec celle d'un autre. On garde la plus grande des deux que l'on compare avec la troisième.

Algo : Exactement, c'est l'algorithme qui recherche le maximum de trois nombres donnés. Notons x, y et z les trois longueurs. Dans un losange, on place la condition à vérifier. Deux cas peuvent alors se présenter selon que cette condition est satisfaite ou non.

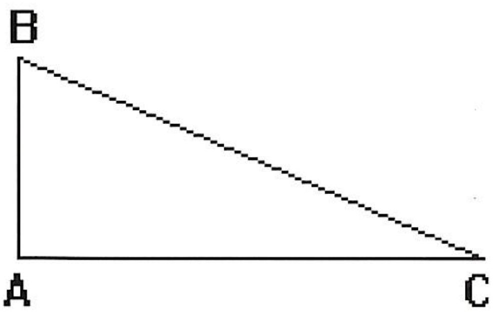


Géo : Super ! Et maintenant, il suffit de vérifier l'inégalité triangulaire dans les différents cas de l'organigramme. Par exemple, dans le cas où z est le « grand » côté, il faut vérifier si $z < x + y$. Si c'est le cas, alors on peut tracer un triangle.

Algo : A présent, il faut en déterminer les propriétés. Ce triangle est-il équilatéral, isocèle, rectangle, isocèle rectangle ou scalène c'est-à-dire quelconque ?

Géo : Un triangle ABC est rectangle (qui a un angle droit) en son sommet A si la relation de Pythagore est satisfaite. Autrement dit, il faut que le carré de la mesure de l'hypoténuse soit égal à la somme des carrés des mesures des deux autres côtés. On retient donc que $|BC|^2 = |AB|^2 + |AC|^2$

Algo : Remarque que l'hypoténuse est toujours le « grand » côté ! A partir de maintenant, nous supposons que z est la longueur du plus « grand »côté.



Géo : Ainsi, on n'a plus qu'une seule relation à vérifier : $z^2 = x^2 + y^2$

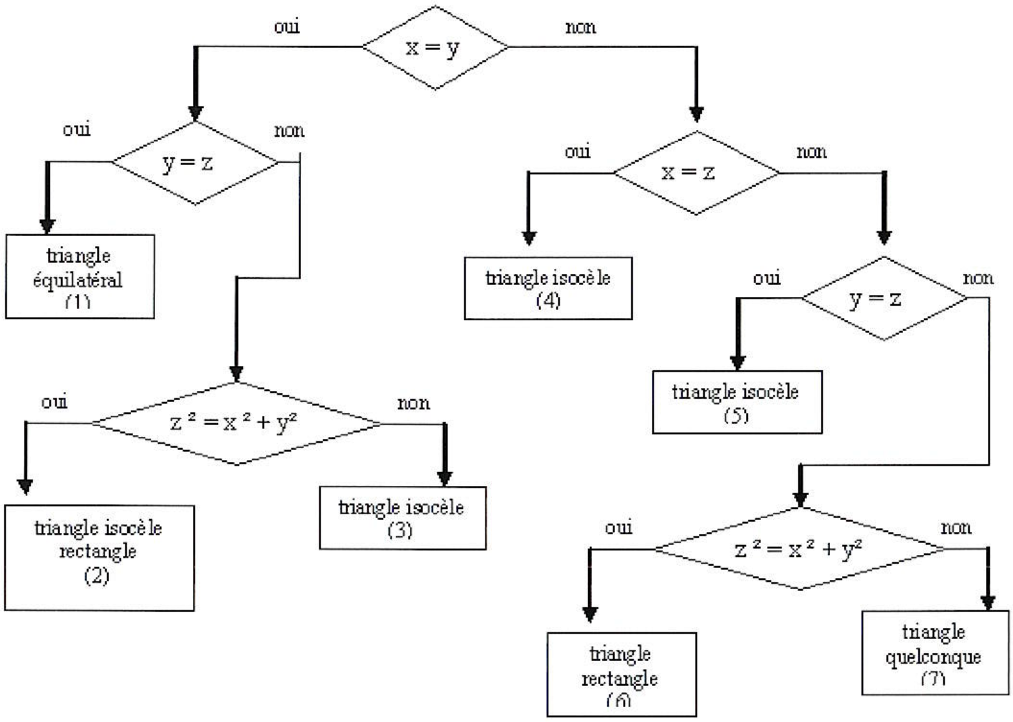
Algo : « Le cas que nous traitons maintenant est le suivant. Etant donné trois longueurs x, y et z, où z est la est la longueur du « grand » côté, on sait que l'on peut construire un triangle. A toi de réfléchir !...Comment procèderais-tu pour déterminer la nature du triangle ?

Géo : Et bien, il me semble que le cas le plus facile est celui où les trois côtés sont de même longueur $x = y$ et $y = z$ (ou $x = y = z$) : c'est un triangle équilatéral. C'est ce que l'on retrouve dans l'organigramme ci-dessous en suivant les branches de gauche. L'autre cas extrême est celui où les trois longueurs sont différentes. Le triangle est alors quelconque ou rectangle si la relation de Pythagore est vérifiée ! C'est ce que l'on retrouve en suivant les branches de droite de l'organigramme.

Algo : C'est bien ! Tu n'es pas tombé dans le piège. En effet, dans le premier cas que tu as traité, un triangle équilatéral a des angles de 60 ° et donc ne peut pas être rectangle en même temps !

Vas-y, je te laisse continuer.

Géo : Et bien je te propose d'étudier les autres possibilités en parcourant l'organigramme ci-dessous.



Algo : Cela me semble parfait ! Tu vois quand tu veux !

Géo : Oui, je sais mais ce devoir paraissait long. Quand tu es là, c'est un jeu en quelque sorte !

Algo : Je suis sûr que tu n'as pas eu cet énoncé de devoir aujourd'hui, n'est-ce pas ?

Géo : Je l'ai reçu la semaine dernière… et je n'aurais pas dû attendre la veille !

Algo : Promets-moi que chaque week-end, tu feras tes devoirs et préparations prévus pour la semaine à venir.

Géo : Oui Algo promis… non seulement j'ai dû travailler tard ce soir et en plus je n'ai pas eu le temps de me détendre. Je suis deux fois puni !

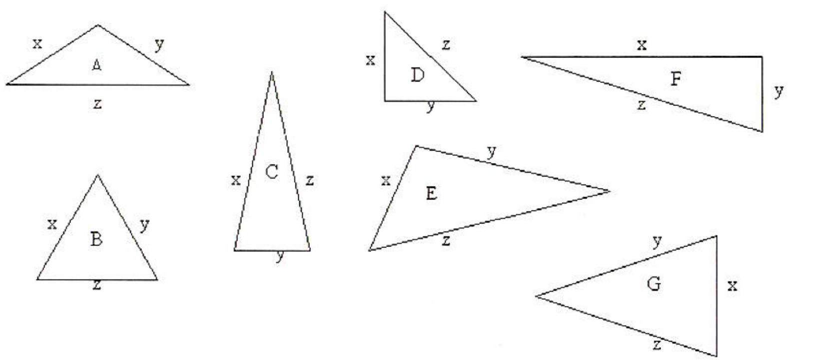
Algo : Il faut savoir gérer son temps : travailler efficacement et se détendre chaque jour. Même le week-end ! Tu verras, tu gagneras du temps. Dis-toi bien que : « Tout ce qui est fait, n'est plus à faire ! »

Géo : Je m'en souviendrai et ce sera ma devise dorénavant !

A bientôt Algo et encore merci.

Et toi, peux-tu aider notre ami Géo ?

Voici sept triangles : x, y et z représentent les mesures des côtés avec z la mesure du plus « grand » côté. Relie les différents triangles aux sept cas rencontrés dans l'organigramme ci-dessus.



Voici les réponses

cas	triangle
(1)	B
(2)	D
(3)	A
(4)	C
(5)	G
(6)	F
(7)	E

Des lettres, pourquoi ? (1)

Y. Noël-Roch

1. Comment compléter ?

Voici un tableau incomplet :

Des puissances de 2	Des puissances de 3
$\vdots$	$\vdots$
$2^3 - 2^2 = 8 - 4 = 4 = 2^2$	$3^3 - 3^2 = 27 - 9 = 18 = 2 \times 9 = 2 \times 3^2$
$2^4 - 2^3 = 16 - 8 = 8 = 2^3$	$3^4 - 3^3 = 81 - 27 = 54 = 2 \times 27 = 2 \times 3^3$
$2^5 - 2^4 = \cdots$	$\ldots$
$\vdots$	$\vdots$

a) Ecris des égalités qui te semblent compléter ce tableau.

b) En utilisant une lettre, comment résumerais-tu en une seule ligne la partie gauche du tableau d'une part, le partie droite du tableau d'autre part ?

c) Que se passe-t-il si tu utilises le nombre 5 au lieu de 2 ou 3... et la mise en évidence ?

Essaie de répondre à ces questions avant de continuer ta lecture.

Voici les résultats attendus, peut-être sans la première ligne si l'exposant 0 ne t'est pas familier :

a)

Des puissances de 2
$2^1 - 2^0 = 2 - 1 = 1 = 2^0$
$2^2 - 2^1 = 4 - 2 = 2 = 2^1$
$2^3 - 2^2 = 8 - 4 = 4 = 2^2$
$2^4 - 2^3 = 16 - 8 = 8 = 2^3$
$2^5 - 2^4 = \cdots = 2^4$
$2^6 - 2^5 = \cdots = 2^5$
$\vdots$

Des puissances de 3
$3^1 - 3^0 = 3 - 1 = 2$
$3^2 - 3^1 = 9 - 3 = 6 = 2 \times 3 = 2 \times 3^1$
$3^3 - 3^2 = 27 - 9 = 18 = 2 \times 9 = 2 \times 3^2$
$3^4 - 3^3 = 81 - 27 = 54 = 2 \times 27 = 2 \times 3^3$
$3^5 - 3^4 = \cdots = 2 \times 3^4$
$3^6 - 3^5 = \cdots = 2 \times 3^5$
$\vdots$

b) En une seule ligne et en utilisant une lettre pour désigner les exposants :

$$\boxed{2^{n+1} - 2^n = 2^n} \qquad \boxed{3^{n+1} - 3^n = 2 \times 3^n}$$

c) En utilisant des puissances de 5 ...

$$\begin{aligned}
5^1 - 5^0 &= 5 - 1 &&= 4 &&= 4 \times 1 &&= 4 \times 5^0\\
5^2 - 5^1 &= 25 - 5 &&= 20 &&= 4 \times 5 &&= 4 \times 5^1\\
5^3 - 5^2 &= 125 - 25 &&= 100 &&= 4 \times 25 &&= 4 \times 5^2\\
5^4 - 5^3 &= 625 - 125 &&= 500 &&= 4 \times 125 &&= 4 \times 5^3
\end{aligned}$$

$$\boxed{5^{n+1} - 5^n = 4 \times 5^n}$$

... et peut-être des mises en évidence ?

$$\begin{aligned}
5^3 - 5^2 &= 5^2 \times 5 - 5^2 \times 1 = 5^2 \times (5 - 1)\\
&= 5^2 \times 4\\
5^4 - 5^3 &= 5^3 \times 5 - 5^3 \times 1 = 5^3 \times (5 - 1)\\
&= 5^3 \times 4
\end{aligned}$$

$$\boxed{\begin{aligned}5^{n+1} - 5^n &= 5^n \times 5 - 5^n \times 1 = 5^n \times (5 - 1)\\ &= 5^n \times 4\end{aligned}}$$

2. Trois résultats en un !

En observant les résultats encadrés successivement avec les puissances de 2, puis celles de 3 et enfin celles de 5, nous pouvons écrire les trois égalités en une seule :

$$\boxed{k^{n+1} - k^n = (k-1) \times k^n}$$

3. Dernière mise au point.

Les tableaux complétés illustrent l'encadré ci-dessus lorsque

- $k = 2$ et n prend les valeurs entières de 0 à 5,
- $k = 3$ et n prend les valeurs de 0 à 5,
- $k = 5$ et n prend les valeurs de 0 à 3.

Les calculs des différents tableaux resteront-ils corrects si nous prolongeons ces tableaux ? Ou si nous prenons un autre tableau, avec des puissances d'un nombre k qui n'est ni 2, ni 3, ni 5 ? Autrement dit, est-il exact que

> Quel que soit le naturel k, quel que soit le naturel n,
>
> $$k^{n+1} - k^n = (k-1) \times k^n.$$

Nous ne pouvons pas le savoir en prolongeant les tableaux entamés : nous ne serons jamais *au bout d'un tableau* ... et nous n'aurons jamais épuisé *tous* les tableaux possibles. Pour savoir si le texte encadré est vrai, nous devons donc analyser la différence $k^{n+1} - k^n$ sans savoir quelles valeurs sont cachées par les lettres k et n :

$$k^{n+1} - k^n = (k \times k^n) - k^n = k^n \times (k-1) = (k-1) \times k^n.$$

Nous avons *démontré* le théorème encadré !

4. Magie et mathématique.

Le magicien Médiomix a acheté une boule de cristal qui fait défiler des multiples de 7. La voici en action :

123 123 175 175 263 263 685 685 527 527 729 729 983 983 ...

– Tu peux vérifier que Médiomix a fait un bon achat !
– Tu peux trouver la clé du mystère et économiser ainsi l'achat d'une boule de cristal.
– Tu peux encore constater que les nombres donnés sont aussi multiples de 11 et de 13.
– Tu peux enfin exprimer mathématiquement le mystère et démontrer qu'il n'y en a pas !

Quels que soient les **chiffres** a, b et c : « $abcabc$ » = « abc » $\times 1001$ = « abc » $\times 7 \times 11 \times 13$

Jacques Bernoulli

S. Trompler

Jacques BERNOULLI (1654–1705)

Mathématicien suisse. Sa famille, d'origine anversoise avait fui le pays en 1583 à cause des persécutions du duc d'Albe contre les protestants. Son père voulait en faire un théologien. Il suivit les cours nécessaires à l'université, mais il y ajouta des cours de mathématiques et d'astronomie contre les souhaits de ses parents.

Licencié en philosophie en 1671, puis en théologie, en 1676, il voyagea en France, puis aux Pays-Bas, où il rencontra de nombreux mathématiciens.

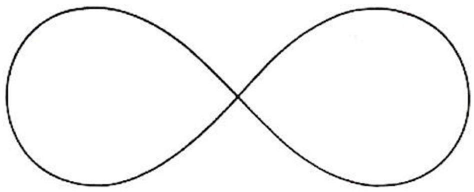
Il passa ensuite en Angleterre et compléta ainsi ses relations avec les principaux mathématiciens de l'époque. Revenu à Bâle, il devint professeur à l'université de Bâle à partir de 1687 et poursuivit des recherches en mathématique et en physique jusqu'à la fin de sa vie.

Son jeune frère Jean le suivit bientôt dans ses études et devint rapidement son rival, après avoir été son collaborateur. Il faut dire que Jacques Bernoulli est le premier d'une famille extraordinairement fertile en mathématiciens de tout premier plan : frères, neveux, petits-neveux et arrière-petits neveux, soit une douzaine en tout, devaient marquer leur époque par des recherches restées célèbres !

L' oeuvre posthume « Ars conjectandi » (1713) est la plus importante : c'est le premier grand traité de probabilité et de statistique.

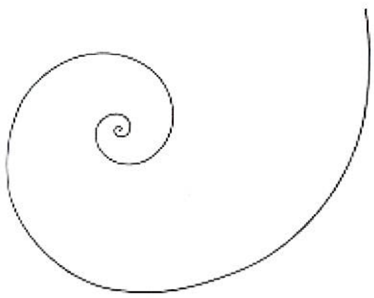
Jacob Bernoulli s'est aussi beaucoup intéressé à des courbes : l'une d'elle porte son nom : la lemniscate de Bernoulli. On peut la tracer point par point à partir de sa définition géométrique ; c'est le lieu des points dont le produit des distance depuis deux points fixes est constant et égal au carré de la demi-distance entre ces points.

Voici une lemniscate de Bernouilli :



Une autre courbe l'a tellement fasciné qu'il a désiré la faire graver sur sa tombe. Il s'agit de la spirale logarithmique qu'il appelle spira mirabilis. On l'obtient en traçant des rayons d'angle uniformément croissant ,à partir d'un point O.

Voici une spirale de Bernouilli :



Carré de somme et somme de cubes

A. Paternottre

Voici une égalité assurément remarquable mais pas pour autant indispensable. On l'aborde (parfois) au cycle secondaire supérieur. Pourtant, cher lecteur, toi qui es élève du secondaire inférieur, tu peux déjà l'établir avec les outils mathématiques qui sont les tiens présentement.

Voici cette jolie formule :

$$\boxed{(1+2+3+\cdots+n)^2 = 1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3 \text{ avec } n \in N}$$

On l' énonce :

Le carré de la somme des n premiers nombres naturels est égal à la somme des cubes de ces mêmes nombres.

Commençons par une anecdote de la vie de Carl Friedrich Gauss (1777–1855)

En 1787, le petit Carl Friedrich fréquentait l'école primaire Sainte-Catherine de Braunschweig, sa ville natale. Un jour ses condisciples et lui furent invités par leur instituteur, un certain Büttner, à calculer la somme $1+2+3+\cdots+99+100$.

Obéissants et pleins d'ardeur, les écoliers se mirent donc à calculer :

$$1+2=3,\ 3+3=6,\ 6+4=10,\ 10+5=15,\ 15+6=21\cdots \text{ etc}$$

Long et laborieux travail que celui-là ! Patient, l'instituteur laissa faire. Mais voilà qu'au bout de quelques dizaines de secondes, Carl Friedrich écrivit sur son ardoise : « 5050 ». Stupéfaction dans la classe ! Le petit intello fut évidemment invité à s'expliquer. C'est très simple, dit Gauss, il suffit d'écrire deux fois la somme, d'abord à l'endroit puis à l'envers. Observez plutôt :

$$\begin{array}{ccccccccccccccc} 1 & + & 2 & + & 3 & + & 4 & + & \cdots & + & 97 & + & 98 & + & 99 & + & 100 \\ 100 & + & 99 & + & 98 & + & 97 & + & \cdots & + & 4 & + & 3 & + & 2 & + & 1 \end{array}$$

Ensuite on additionne les deux nombres situés sur une même verticale :

$$1+100=101,\ 2+99=101,\ 3+98=101,\cdots 98+3=101,\ 99+2=101,\ 100+1=101$$

« Il me paraît donc clair que $1+2+3+4+\cdots\ 97+98+99+100 = \frac{1}{2}\times(100\times 101) = 5050.$ », conclut Gauss.

Procédé de calcul simple, rapide, tout simplement génial. Evidemment n'est pas Gauss qui veut !

En nous inspirant de ce procédé de calcul, nous pouvons maintenant établir la formule générale donnant la somme S_n des n premiers nombres naturels non nuls :

Math-Jeunes Junior n°109J, 20–22, 2005

$$\begin{array}{llr}
\text{On a :} & S_n = 1 + 2 + 3 + \cdots + (n-2) + (n-1) + n & (1) \\
\text{Mais aussi :} & S_n = n + (n-1) + (n-2) + \cdots + 3 + 2 + 1 & (2) \\
\text{Et en sommant :} & 2S_n = (n+1) + (n+1) + (n+1) + \cdots + (n+1) + (n+1) + (n+1) & (1)+(2)
\end{array}$$

Ou encore : $2S_n = n \times (n+1)$ car $n+1$ est ajouté n fois à lui-même dans la dernière égalité.

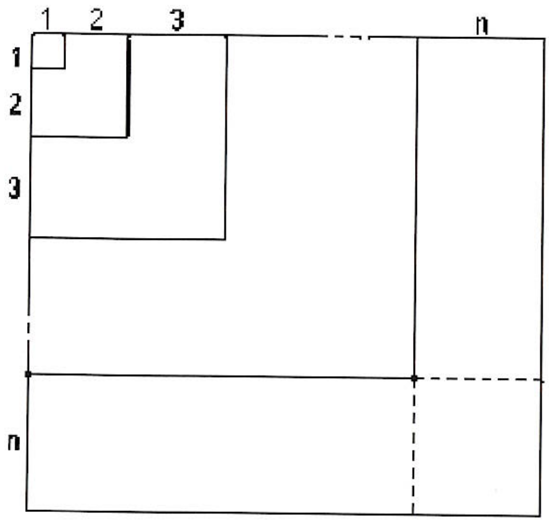
Finalement :$S_n = 1 + 2 + 3 + \cdots + (n-2) + (n-1) + n = \boldsymbol{n \times \dfrac{(n+1)}{2}}$

Etablissons à présent à présent l'égalité encadrée ci-dessus.

Pour ce faire, on dessine un carré dont la longueur du côté est S_n .

Difficile, me diras-tu, de dessiner un tel carré si le nombre naturel n est grand et surtout si n n'est pas précisé !

Et tu as parfaitement raison. Tu peux cependant contourner la difficulté en amputant le côté de ce carré d'une partie de sa longueur. Il te faut alors imaginer le carré complet, ce qui ne constitue pas un gros effort d'abstraction.



Tu constates qu'à l'intérieur du grand carré, on a tracé des parallèles aux côtés de façon qu'apparaissent dans le coin supérieur gauche un petit carré de côté 1 puis une suite de $n-1$ hexagones imbriqués les uns dans les autres et dont les largeurs respectives sont : 2, 3, $\cdots$, n.

Désignons par :

A : l'aire du grand carré de côté S_n.

$$A = S_n^2$$

A_1 : l'aire du petit carré de côté 1.

$$A_1 = 1^2 = 1 = 1^3$$

A_n : l'aire de l'hexagone de largeur n

Calculons A_n :

$$\begin{aligned}
A_n &= 2 \times \text{ aire du rectangle de largeur } n \text{ et de longueur} S_n - \text{ aire du carré de côté } n \\
&= 2n \times S_n - n^2 \\
&= n(2S_n - n) \\
&= n[n(n+1) - n] \; car \; 2S_n = n(n+1) \\
&= n[n^2 + n - n] \\
&= n \times n^2 \\
&= n^3
\end{aligned}$$

Le calcul de A_n ci-dessus est relatif non seulement à l'hexagone situé le plus à droite sur la figure mais aussi aux hexagones intermédiaires situés entre ce dernier et le petit carré de côté 1.

Ainsi on a successivement : $A_2 = 2^3 = 8$, $A_3 = 3^3 = 27$, $A_4 = 4^3 = 64$, $\cdots$,$A_{n-1} = (n-1)^3$

Exprimons maintenant l'aire A du grand carré de deux façons :

D'une part : $A = S_n^2 = (1+2+3+\cdots+n)^2$ (3)

D'autre part : $A = A_1 + A_2 + A_3 + \cdots + A_{n-1} + A_n = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3$ (4)

Des égalités (3) et (4) on déduit aisément l'égalité encadrée au début de cet article.

Cette démonstration géométrique d'une égalité algébrique t'a sans doute rappelé celles que ton professeur a faites pour établir une ou plusieurs des égalités remarquables suivantes :

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$; $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$; $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$; $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

Tu peux peut-être oublier l'égalité établie ci-dessus mais certainement pas les égalités remarquables !

Carl Friedrich GAUSS, allemand, Brunswick (1777)–Göttingen (1855).

Astronome : Directeur de l'Observatoire et professeur à l'Université de Göttingen.

Physicien : magnétisme, électromagnétisme, optique.

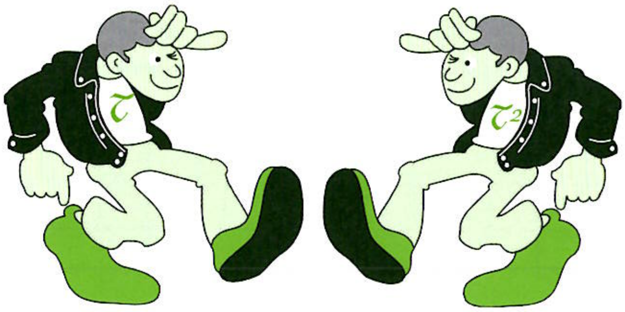
Mathématicien :

- Construction à la règle et au compas du polygone régulier de 17 côtés.
- Nombres complexes (plan de Gauss).
- Théorème fondamental sur le(s) zéro(s) d'un polynôme à coefficients entiers.
- Méthode des moindres carrés.
- Probabilités : courbe de Gauss dite aussi « courbe en cloche ».
- Géodésie.

Les frères Hick 12

B. Honclaire

Agence de détectives privés
Les frères Hick
Recherches en tous genres



Ami lecteur,

$\mathcal{T}^2$ te confiera sa satisfaction d'avoir résolu seul le dernier cube numérique proposé par son frère. ([1])

$\mathcal{T}$ ordonnera la recherche des développements d'un cube et ensuite il te proposera une nouvelle énigme.

Bon courage et bon amusement.

Bernard Honclaire

$\mathcal{T}^2$ (l'air détendu) - « *Il était facile ton dernier problème sur le cube...*

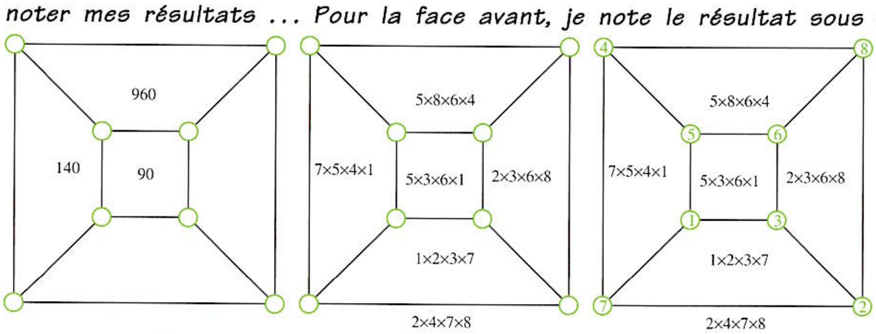
Pour rappel : on attribue les nombres de 1 à 8 aux sommets d'un cube. Pour chaque face, on effectue le produit des sommets et on communique les résultats relatifs à trois faces : 90, 140 et 960. Il s'agit de retrouver les valeurs attribuées aux sommets.

Comme produits de quatre nombres de 1 à 8, les trois nombres 90, 140 et 960 ne peuvent se construire que d'une seule façon...

90	5×18	$5 \times 3 \times 6 \times 1$	
140	7×20	$7 \times 5 \times 4 \times 1$	
960	5×192	$5 \times 8 \times 24$	$5 \times 8 \times 6 \times 4$

... les faces opposées sont donc $5 \times 3 \times 6 \times 1$ *et* $2 \times 4 \times 7 \times 8$, $7 \times 5 \times 4 \times 1$ *et* $2 \times 3 \times 6 \times 8$, $5 \times 8 \times 6 \times 4$ *et* $1 \times 2 \times 3 \times 7$.

Je ne dois même pas les calculer ! Chaque sommet se retrouve dans trois faces et j'ai adopté ta disposition pour noter mes résultats ... Pour la face avant, je note le résultat sous le dessin.

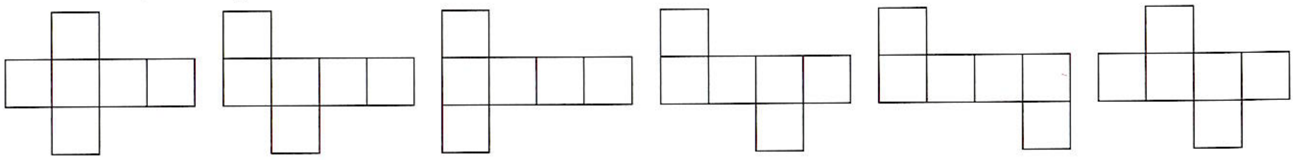


([1]) *Le présent article fait suite à l'épisode 11 de cette série publié dans le numéro 108 de* Math-Jeunes Junior. *Il peut néanmoins être lu indépendamment.*

... en fait j'ai quand même cherché un peu ... pour trouver les produits de quatre nombres... »

$\mathcal{T}$ (admiratif) - « C'est pas mal! J'espère que tu as quand même gardé un peu de temps pour rechercher des assemblages de six carrés qui sont des développements d'un cube ... »

$\mathcal{T}^2$(mal à l'aise) - « ... Euh! ... Je dois t'avouer que mes trouvailles sont en rapport avec le peu de temps que j'y ai consacré! ... Je suis parti de la " croix" et je me suis dit que l'on pouvait sans doute changer les positions des deux bases ... Regarde ...

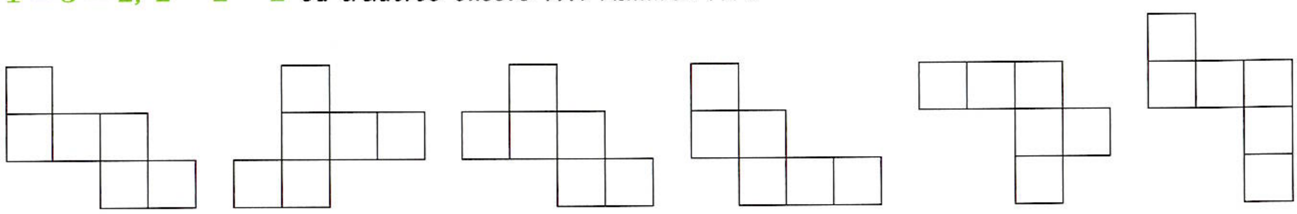


...Toutes les positions possibles sont là! ... En fait, on peut encore situer les deux bases autrement, mais en faisant tourner un de ces nouveaux assemblages, on retrouve toujours un des six premiers! ... Et je suppose que tu ne vas pas les accepter! »

$\mathcal{T}$(observant les dessins) - « Tu as effectivement trouvé tous les développements non isométriques d'un cube formés à partir d'une ligne de quatre carrés! ... (un peu narquois)... Tu as, sans doute, bien imaginé que l'on ne peut pas placer plus de quatre carrés en ligne! ... Il faudrait superposer le premier et le dernier pour refermer le cube! ... Il est tout aussi inutile d'essayer de placer les deux bases du même côté de la ligne de quatre carrés! »

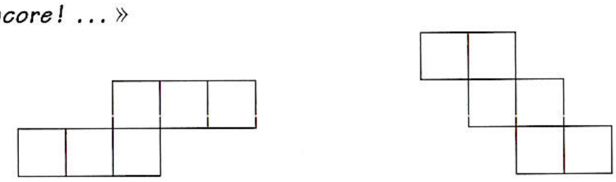
$\mathcal{T}^2$ (fièrement) - « Je suis meilleur que je ne croyais! ... (malicieusement) ... Tu aurais pu ajouter qu'il est inutile de placer quatre carrés formant un plus grand carré! ... On ne pourrait même pas plier l'assemblage!... »

« $\mathcal{T}$ (écroulé de rire) - « Pas si vite! ... Pour clarifier tes idées, les six assemblages que tu as trouvés, je vais les appeler **1 — 4 — 1**! Si tu avais été plus tenace, tu aurais vérifié que l'on peut très bien éviter de placer quatre carrés alignés! Ce qui t'aurait donné de nombreux assemblages de type **1 — 3 — 2, 2 — 2 — 2** ou d'autres encore ...! Admire! ... »



$\mathcal{T}^2$(se prenant au jeu) - « A mon tour!... »

$\mathcal{T}$(euphorique) - « Et encore! ... »



$\mathcal{T}^2$ (le coupant net) - « Attends, pas si vite! Il faut que je les referme mentalement pour être sûr que c'est bon! »

$\mathcal{T}$(regardant son frère qui mime des pliages avec les mains) -« ... C'est comme tu le fais maintenant que tu pourras vérifier leur fonctionnement ou non! »

$\mathcal{T}^2$ (agité) - « *...Tu m'en fais voir de toutes les couleurs! ...* »

$\mathcal{T}$(esquissant un sourire, l'air inspiré)- « *En parlant de couleurs ...! Un bon moyen de vérifier si un assemblage de six carrés est un développement de cube, c'est de repérer, en les coloriant d'une même couleur par exemple, les paires de faces parallèles ...!*

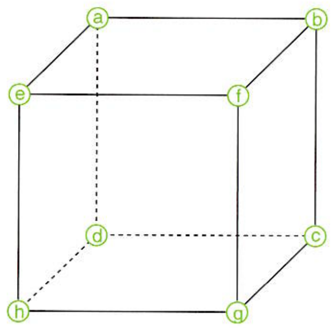
Voilà un exercice que tu pourras effectuer sur tous les assemblages proposés et sur tous ceux que tu pourrais encore inventer!! »

$\mathcal{T}^2$ (en lui-même) - « *... Les vacances, c'est fini! ... Des coloriages...! Non mais, je retombe en enfance! ... Finalement, c'est peut-être moins pénible que des découpages et des pliages! ...* »

$\mathcal{T}$ (l'air pressé)-« *Il est temps de prendre connaissance de la nouvelle énigme!* »

Où il est question d'économie!

Sur la surface d'un cube, tu voyageras
Deux points de deux faces parallèles, tu choisiras
De la façon la plus courte, tu les relieras
Un sentiment de satisfaction t'envahira



$\mathcal{T}$ (concentré) - « *... Nous allons donc choisir un cube de 10 cm d'arête, par exemple, et les deux faces parallèles* ***abcd*** *et* ***efgh*** *... Donne-moi quatre nombres entre* 1 *et* 10 *...* »

$\mathcal{T}^2$ (inquiet) - « *Euh ... 6 ... 2 ... 3 ... 4 ...* »

$\mathcal{T}$ (magistralement) - « *Nous dirons donc que le point* x *est sur la face* ***abcd*** *à 6 cm de* ***ab*** *et à 2 cm de* ***ad*** *et que le point* y *est sur la face* ***efgh*** *à 3 cm de* ***ef*** *et à 4 cm de* ***fg*** *... Il ne nous reste plus qu'à chercher le plus court chemin, sur la surface du cube, pour relier les points* x *et* y*!* »

$\mathcal{T}^2$ (moqueur)-« *Faudra pas se perdre en route!!* »

Ami lecteur, peux-tu aider $\mathcal{T}^2$ à surmonter ces défis :

- détecter les développements parmi les assemblages de six carrés (et pourquoi ne pas en inventer d'autres!) en repérant les faces parallèles,
- rechercher le trajet le plus court pour rejoindre x et y sur le cube!

Bon courage et bon amusement!

à suivre...

Olympiades

C. Festraets

Participons à l'Olympiade

Durant cette année scolaire, aura lieu la trentième édition de l'Olympiade Mathématique Belge (OMB).

Comme *presque* tout le monde le sait, l'OMB est une épreuve mathématique ouverte à tous les élèves de l'enseignement secondaire, de la première à la sixième. Depuis cinq ans déjà, cette épreuve est divisée en trois concours. Ceux-ci se déroulent en parallèle. La « Mini-Olympiade » accueille les élèves de première et de deuxième années ; la « Midi-Olympiade » est réservée aux élèves de troisième et de quatrième années ; enfin, la « Maxi-Olympiade » est destinée aux élèves de cinquième et de sixième années.

Voici en quelques mots le principe commun à tous ces concours. Pour chacun d'entre eux, il y a trois étapes : une éliminatoire qui a lieu dans les locaux mêmes de ton école, une demi-finale organisée dans des centres régionaux et une finale qui se tient à Namur.

Le calendrier de la trentième Olympiade Mathématique Belge est le suivant :

éliminatoire : le 19 janvier 2005
demi-finale : le 2 mars 2005
finale : le 20 avril 2005
proclamation : le 14 mai 2005

Evidemment, ton professeur reçoit toutes les informations utiles sur cette Olympiade. Alors si tu désires en savoir plus, il te suffira de lui poser les questions auxquelles cet article n'apporte pas de réponse. Il se fera certainement un plaisir de mieux t'informer.

Se préparer

Si tu souhaites te préparer à cette épreuve, tu trouveras plus loin quelques problèmes posés dans le passé. Ils vont non seulement éveiller ta curiosité mais encore te permettre de te familiariser avec la forme du questionnaire.

Comme tu vas bientôt le constater, il y a, pour toutes les questions, cinq réponses proposées. Une seule d'entre elles est correcte. Par contre, certaines questions n'ont pas reçu de réponse « pré formulée ». Dans ce cas, ce que tu dois trouver est un nombre entier appartenant à l'intervalle [0, 999], autrement dit un nombre entier positif, éventuellement nul, strictement inférieur à 1000. Ne réponds que si tu es sûr de ta réponse. En effet, la manière de calculer ton score lors du concours est la suivante : 5 points pour une bonne réponse, 0 pour une mauvaise réponse. Tout à fait normal, diras-tu ! Mais, si tu t'abstiens de répondre à une question, tu reçois 2 points. Là tu te demandes peut-être quel est le but de ce procédé ? Mais précisément de te faire prendre conscience qu'il vaut mieux ne rien répondre plutôt que de répondre n'importe quoi. Enfin tu dois savoir qu'il est nécessaire de répondre à un minimum de 5 questions pour être classé. Les problèmes que tu vas résoudre ci-dessous ont été choisis dans le tome 3 des OMB reprenant toutes les questions posées de 1988 à 1993. Malheureusement, ce tome n'est plus en vente, il est épuisé. Par contre, si tu désires peaufiner ta préparation et évaluer ton potentiel olympique, tu peux acquérir les tomes 4 et 5 des OMB. Voici tous les renseignements nécessaires pour cela :

Olympiades Mathématiques Belges
Tome 4 (1994-1998) : 5 euros
Tome 5 (1999-2002) : 6 euros
Tome 4 + tome 5 : 10 euros
Ajouter 1,80 euros de port pour un tome et 3,50 euros de port pour deux tomes.
Les commandes sont à adresser à

SBPMef, rue de la Halle, 15, 7000 Mons

Compte : 000-0728014-29

Fax et téléphone : 065 37 37 29.

Exerçons-nous !

1. Opposé et inverse (éliminatoire - 1992)
Quel est l'inverse de l'opposé de $\dfrac{1}{\frac{2}{5}+\frac{5}{2}}$?
Ⓐ $-2,9$ Ⓑ $-2,1$ Ⓒ -2
Ⓓ -1 Ⓔ Aucune de ces réponses

2. Fraction (éliminatoire - 1991)
Sous forme de fraction, 35% devient :
Ⓐ $\frac{5}{7}$ Ⓑ $\frac{20}{7}$ Ⓒ $\frac{1}{3}$
Ⓓ $\frac{7}{2}$ Ⓔ $\frac{7}{20}$

3. Une somme (éliminatoire - 1989)
Sans réponse préformulée - En ajoutant à un nombre naturel le quart de son tiers, on obtient 91. Quel est ce nombre ?

4. Echelle (demi-finale - 1989)
Sur une carte à l'échelle $\frac{1}{15\,000}$, la représentation d'un bois est un carré de 64 centimètres carrés. Que vaut, en kilomètres, le périmètre réel de ce bois ?
Ⓐ $3,6$ km Ⓑ $0,96$ km Ⓒ $4,8$ km
Ⓓ $6,4$ km Ⓔ aucune de ces réponses.

5. Multiplication (éliminatoire - 1990)
Pour obtenir 2^{30}, on multiplie 2^{32} par
Ⓐ $0,2$ Ⓑ $0,25$ Ⓒ $0,4$
Ⓓ $0,5$ Ⓔ 2

6. Histoire de lapins (éliminatoire - 1991)
Si tous les lapins gentils sont gris, alors
Ⓐ les lapins qui ne sont pas gris ne sont pas gentils ;
Ⓑ les lapins qui ne sont pas gentils ne sont pas gris ;
Ⓒ les lapins qui ne sont pas gentils sont gris ;
Ⓓ les lapins qui ne sont pas gris sont gentils ;
Ⓔ les lapins gris sont gentils.

7. Cubes (éliminatoire - 1991)
Un cube d'arête 4 dm est réalisé en bois blanc, puis ses faces sont peintes en rouge. S'il est débité en 64 cubes d'arête 1 dm, combien de ces cubes ont exactement une face rouge ?
Ⓐ 6 Ⓑ 12 Ⓒ 24
Ⓓ 32 Ⓔ 64

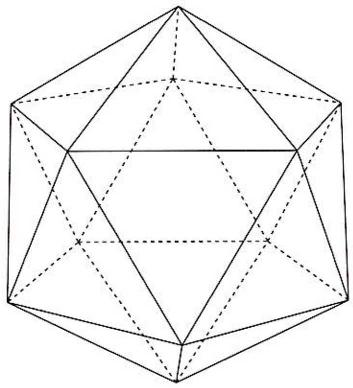
8. Bornage (éliminatoire - 1992)
Sans réponse préformulée - Un chemin long de 1800 m est partagé en 15 parties égales entre elles par des bornes rouges et en 6 parties égales entre elles par des bornes vertes. Quelle est , en mètres, la plus petite distance entre deux points du chemin en chacun desquels se trouvent une borne rouge et une borne verte ?

9. Moyenne (éliminatoire - 1989)
Sachant que 9 est la moyenne arithmétique des nombress 8, 11, 5, 4, p, 21, 5, 4 et 14, que vaut p ?
Ⓐ 9 Ⓑ 8 Ⓒ 7
Ⓓ 0 Ⓔ 18

10. Puissances (éliminatoire - 1991)
Que vaut $(-2)^4 - 2^4 + (-2)^3 + 2^3 + 2^2 - 2^1 + 2^0$?
Ⓐ 0 Ⓑ 1 Ⓒ 3
Ⓓ 5 Ⓔ une infinité.

11. Icosaèdre (éliminatoire - 1992)
Sans réponse préformulée - Les faces du solide représenté en perspective, avec vus et cachés, sont toutes triangulaires. Quel est le nombre

de ces faces ?



12. Hypoténuse (demi-finale - 1988)
Chacun des côtés de l'angle droit d'un triangle rectangle isocèle mesure 5 cm. Si on augmente chacun de ces côtés de 10 cm, l'hypoténuse du triangle

Ⓐ double ;
Ⓑ augmente de 10 cm ;
Ⓒ augmente de 14 cm ;
Ⓓ augmente de 20 cm
Ⓔ triple.

Solutions

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
A	E	84	C	B	A	C	600	A	C	20	E

Solutions des jeux

1. Créer des nombres et les additionner.

Tu peux écrire 24 nombres qui commencent par 1, 24 nombres qui commencent par 2... donc 120 nombres en tout.

Comme $1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$, la somme de ces 120 nombres vaut $24 \times (15 + 150 + 1500 + 15\,000 + 150\,000)$, soit 399 960.

2. Changer une seule lettre à la fois.

Voici un cheminement parmi d'autres :

SEPT — SERT — SORT — SOIT — SAIT — SAIS — HAIS — HUIS — HUIT — HAIT — HAUT — VAUT — VEUT — VEUF — NEUF.

3. Tous intrus.

1013 est le seul nombre premier.

3125 est la seule puissance de 5.

1023 est le seul multiple de 3. (ou le seul formé de trois chiffres consécutifs.)

3025 est le seul carré parfait.

3113 est le seul palindrome (ou nombre symétrique).

Tu as peut-être trouvé d'autres critères tout aussi valables !

4. Parenthèses parfois utiles.

$5 + (-4) + 3 + (-2) - 1 = 1$

$((5 + (-4) + 3) : (-2)) : 1 = -2$

$5 + (-4) + 3 + (-2) + 1 = 3$

$5 - ((-4) \times 3 : (-2)) + (-2) - 1 = -4$

$(5 + (-4) - 3) \times (-2) + 1 = 5.$

Comme pour la recherche des intrus, tu as probablement trouvé d'autres solutions.

5. Pair — impair.

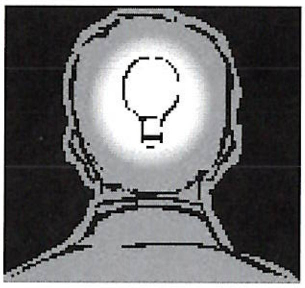
Il est impossible de compléter les multiplications ébauchées. En effet, repérons par A, B, C, D, E et F les trois lignes de nombres intervenant de haut en bas dans les opérations écrites :

- dans le premier cas, le chiffre des unités dans C est le chiffre des unités d'un multiple de 4. Il ne peut donc être ni 1, ni 3, ni 5, ni 7, ni 9.
- dans le deuxième cas, il n'y a pas de report dans le calcul des dizaines de F et le chiffre des dizaines est impair.

Math-Quiz

Claude Villers

Math-Quiz est de retour !



Organisé pour la première fois dans le courant de l'année scolaire 2003-2004, ce « concours » a remporté un certain succès puisque près de quarante participations ont pu être enregistrées.

Les objectifs :

Comme ce fut déjà le cas l'an dernier, nous vous proposons de relever un « défi ». Celui de trouver le maximum de réponses correctes aux questions qui vous sont proposées dans cette rubrique. (NB : Défi= provocation à un effort de dépassement).

La plupart des questions font appel au bon sens et ne nécessitent que de l'attention, un peu de recherche et de la débrouillardise. Ce sont donc vos facultés d'investigation qui vont être sollicitées. A vous de faire la preuve de votre esprit de participation et de vos capacités à vous organiser..

Ce « challenge », qui ne requiert aucun droit d'inscription, se déroulera à nouveau en deux étapes (proposées dans les deux premiers numéros de l'année scolaire 2004-2005) qui feront l'objet de classements séparés. Il vous est même loisible de ne participer seulement qu'à l'une ou l'autre de ces étapes (mais ce n'est pas conseillé). En outre, un classement général sera établi à l'issue de la deuxième étape. Chaque étape ainsi que le classement général nous permettront d'établir un tableau d'honneur et d'attribuer des récompenses aux meilleurs envois.

Cette année nous avons reçu l'appui appréciable de la firme DEXXON Belgium, distributrice notamment des calculatrices scientifiques et graphiques CASIO ainsi que des dictionnaires et traducteurs électroniques FRANKLIN, qui dotera le concours de ces matériels.

Le principe :

A chaque étape, 10 questions vous sont proposées. Chacune d'elles possède un coefficient de difficulté indiqué sous la forme d'étoiles. Chaque étoile vous permet de gagner des points ... si votre réponse est correcte, bien entendu. Vous répondez à autant de questions que vous le souhaitez.

Participez à ce jeu-concours et invitez vos condisciples à y prendre part.

Comment répondre :

Vous nous envoyez vos réponses sur une carte (bristol) de format 10cmx15cm,mise sous enveloppe affranchie, à l'adresse suivante :

SBPMef - Math-Quiz Rue de la Halle 15   7000 Mons

Attention, respectez bien la procédure ci-après : sur une même face, indiquez lisiblement (en caractères d'imprimerie SVP), vos nom et prénom, votre adresse complète, le nom de votre école et son adresse, le niveau de votre classe en 2004-2005, ainsi que vos réponses aux questions de l'étape sous la forme d'un tableau comme ci-après.

Question	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Réponse										

L'autre face est destinée à recevoir votre participation éventuelle au concours annexe.

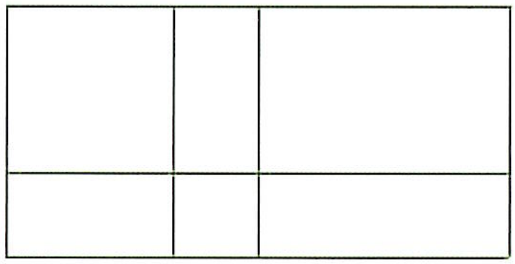
Car nous vous invitons en outre à être imaginatif et créatif et à réaliser un dessin à caractère mathématique sur l'autre face de la carte. Vous pouvez librement le créer. A ce propos, voyez des réalisations 2003-2004 sur les pages de couverture des trois *Math-Jeunes Junior* de cette année scolaire.

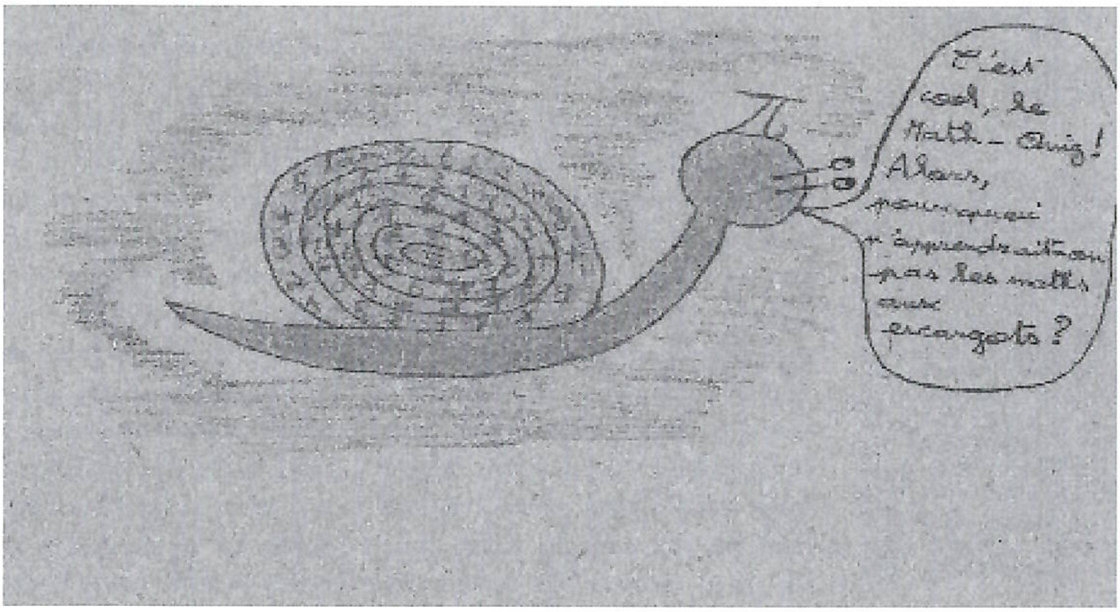
A vous de faire preuve d'originalité. Les meilleures propositions seront également récompensées. NB : Toutes les réalisations de l'année dernière ont été exposées lors du congrès des Professeurs de mathématiques, à Liège en août dernier. Elles ont unanimement été appréciées par les nombreux visiteurs. Alors, pourquoi pas les vôtres en août 2005 ? ? ?

Attention : Vos réponses à cette première étape doivent nous être parvenues avant le samedi 4 décembre 2004

Voici maintenant les questions de la première étape. Notez que chaque étoile aura cette fois une valeur de 3 points. 78 points sont donc mis en jeu lors de cette étape.

1	*	6 personen eten 6 koekjes in 6 minuten. Hoeveel personen heeft men in dezelfde omstandigheden nodig om 12 koekjes in 12 minuten te eten ?
2	*	Une marchandise est vendue en solde avec une réduction de 20%. Par quel nombre fait-il diviser le prix ancien pour connaître le prix nouveau ?
3	**	Les points A et B sont deux sommets opposés d'un cube. Combien de plus courts chemins différents mènent de A àB si l'on parcourt uniquement des arètes du cube ?
4	**	A cistern, of a capacity of 16,000l, has the form of a right-angled arallelepiped with a square base. Its height is the double of its width. What is its height, measured in cm, if the thickness of the walls is regarded as negligible ?
5	**	Quel est le plus grand nombre naturel de deux chiffres qui soit égal au produit de ses chiffres augmenté de leur somme ?

6	$* * *$	Combien de rectangles voyez-vous dans cette figure ? 
7	$* * *$	Un premier client d'un crémier lui a acheté la moitié de son stock d'oeufs et encore $\frac{1}{2}$ oeuf. Un deuxième client lui a acheté la moitié du stock restant et encore $\frac{1}{2}$ oeuf. Un troisième client lui a acheté la moitié du stock restant et encore $\frac{1}{2}$ oeuf. Le crémier est content car il a vendu tous ses oeufs et sans aucune casse. Quel était le nombre initial d'oeufs ?
8	$* * *$	En moyenne, un garçon sur 20 est daltonien alors que seulement une fille sur 400 l'est. Dans ma classe qui compte autant de garçons que de filles, il y a un et un seul élève daltonien. Quelle est la probabilité que ce soit une fille ? (la réponse sera une fraction irréductible)
9	$* * **$	Un triangle équilatéral est inscrit dans un cercle lui-même inscrit dans un autre triangle équilatéral. Si la longueur du côté du petit triangle vaut 1 alors que vaut celle du côté du grand triangle ?
10	$* * * * *$	Vous avez tracé dix droites du plan qui se coupent toutes deux à deux et jamais autrement. Combien de régions du plan déterminent-elles ainsi ?



Y'en a qui se sucrent ! ! ...

C. Villers

Lire un journal, une revue, est une activité tout à fait recommandable. Encore faut-il être attentif au contenu de ces textes et ne pas se contenter de les recevoir comme argent comptant. Il est recommandé d'être vigilant et de faire la preuve d'esprit critique. C'est d'ailleurs une des composantes de votre formation et ce doit être une pratique constante. En tout cas c'est particulièrement vrai pour les mathématiques. Le texte reproduit ci-contre est un exemple illustrant fort bien ce conseil à lecture attentive et critique. Il figurait « à la une » de mon quotidien habituel. Cette situation privilégiée peut faire croire qu'il relate un fait exceptionnel, extraordinaire ou très important. En outre, la suite de l'article (qui n'est pas reproduite ici) nous informe que chaque paquet de 1kg comportait 160 morceaux de sucre. Je vous incite à prendre connaissance de l'extrait illustré et à vous livrer à quelques calculs élémentaires avant de poursuivre la lecture de ce qui suit.

Fort de café...

60 ans après, leur sucre est toujours bon !

M. et Mme un couple de Liégeois, utilisent encore dans leur café du sucre Tirlemont acheté juste avant la guerre 40-45. Il faut dire que le stock qu'ils avaient constitué au moment de l'invasion de la Pologne par Hitler et de la mobilisation générale était imposant puisqu'il y en avait au bas mot 150 kilos dont il reste encore aujourd'hui 20 kilos. Josée (79 ans) nous a expliqué qu'ils avaient également conservé pendant longtemps des sardines... P. 3

⋆⋆⋆

Si j'ai bien compris, ce couple, par ailleurs éminemment sympathique, a donc mis 60 ans pour utiliser (dans son café) 130kg de sucre en morceaux. Un premier calcul nous donne le nombre total de morceaux ainsi consommés au cours de ces soixante longues années. C'est 160 morceaux $\times$130 soit 20 800 morceaux. Comme la vie d'un couple ne peut être qu'harmonieuse, on peut donc estimer que chacun des conjoints a englouti dans son café la moitié des 20 800 morceaux soit donc 10 400 morceaux. C'est ainsi qu'à juste titre, chaque élément du couple peut parler de sa moitié. Un autre calcul nous permet de connaître le nombre total de jours consacrés à cette consommation. Pour faire simple, nous admettrons qu'une année compte 360 jours. Le nombre de jours de consommation est donc 360 jours $\times$60 soit 21 600 jours. A ce stade, nous savons que chacun des époux a utilisé 10 400 morceaux de sucre pour sucrer son café et cela en 21 600 jours. Dès lors, en moyenne, le nombre de morceaux de sucre utilisé journellement par chacun des deux conjoints est $\frac{10\,400}{21\,600}$ ce qui correspond à 0,48148... morceau quotidien. Même pas un demi-morceau ! ! ! Est-ce si extraordinaire ? Cela mériterait-il de figurer à la une du journal alors que des événements bien plus graves ne récoltent que quelques lignes perdues dans les pages intérieures. A vous de vous forger votre propre opinion, en sirotant peut-être une bonne tasse de café sucré.

Math-Jeunes Junior n° 109J, 32–32, 2005

Math-Jeunes Junior
Périodique trimestriel
15, rue de la Halle – 7000 Mons
Bureau de dépôt 7000 Mons 1

Responsable de l'édition: A. PATERNOTTRE
Rue du Moulin 78 – 7300 Boussu
Bureau de dépôt : Mons 1

Autorisation de fermeture
Sluitings toelating

7000 Mons 1
5/156

Belgique - België
P.P.
7000 Mons 1
5/124

Périodique - Peut être ouvert pour contrôle postal

Réservé à la poste

Inconnu
Refusé
Décédé
Adresse insuffisante
N'habite plus à l'adresse indiquée