MJ junior!

26ème année - N°111 J
Avril 2005

Math-Jeunes et Math-Jeunes Junior

Revues trimestrielles publiées par la Société Belge des Professeurs de Mathématique d'expression française

Secrétariat : M.-C. Carruana, SBPMef, rue de la Halle 15, 7000 Mons, ☎-FAX 32-(0)65-373729, GSM : 0473973808 e-mail : sbpm@sbpm.be, URL : http://www.sbpm.be.

Tarifs

Abonnements groupés (au moins 5)				
	Une des deux revues		Les deux revues	
Belgique	4 €		7 €	
	✉	~~✉~~	✉	~~✉~~
Europe	7 €	9 €	13 €	17 €
Autres pays	10 €	14 €	15 €	20 €

Abonnements individuels				
	Une des deux revues		Les deux revues	
Belgique	6 €		11 €	
	✉	~~✉~~	✉	~~✉~~
Europe	13 €	16 €	16,50 €	20,50 €
Autres pays	15 €	21 €	20 €	25 €

Légende : « prior »=~~✉~~, « non prior »=✉.

Trois numéros de chaque revue sont publiés annuellement. Pour connaître la liste des anciens numéros encore disponibles et leur prix selon votre localisation, adressez-vous au secrétariat.

Les abonnements destinés aux élèves de l'enseignement secondaire sont de préférence pris par l'intermédiaire d'un professeur. Effectuez vos paiements :

- ☞ pour la Belgique : par virement au Compte n°000-0728014-29 de S.B.P.M.e.f., rue de la Halle 15, 7000 Mons
- ☞ pour la France : par virement au Compte CCP Lille 10 036 48 S
- ☞ pour l'étranger (sauf la France) : par virement international au Compte n°IBAN: BE 26 0000 7280 1429 BIC: BPOTBEB1 au nom de la SBPMef, rue de la Halle 15, B 7000 Mons, Belgique. Les personnes résidant à l'étranger qui ne peuvent faire un virement à ce compte sont invitées à envoyer un mandat postal international. Tout chèque bancaire non encaissable en Belgique devra être majoré de 12,50 € pour frais d'encaissement.

Éditeurs responsables et rédacteurs en chef :

– pour Math-Jeunes : G. Noël, Rue de la Culée 86, 6927 Resteigne

– pour Math-Jeunes Junior : A. Paternottre, Rue du Moulin 78, 7300 Boussu

N°111J Vingt-sixième année 2005

MATH-JEUNES JUNIOR

Sommaire

Ce numéro de Math-Jeunes Junior est le dernier de l'abonnement 2004–2005. Vous pouvez dès à présent vous réabonner pour 2005–2006. Voyez les tarifs en page 2 de couverture.

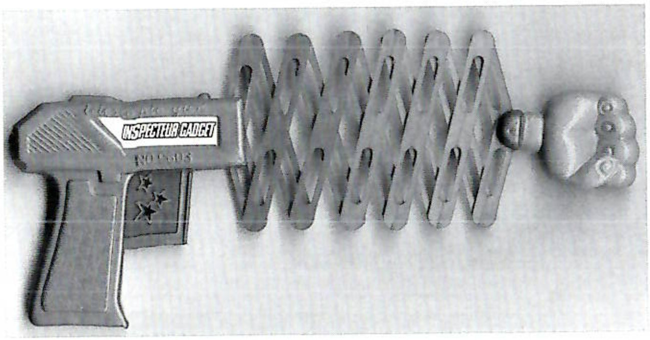
K.O. . . mais c'est O.K.

C. Villers

Une version plus complète de cet article est parue en 2003 dans la revue Math-Jeunes 105.

Un texte relatant une expérience d'enseignement à partir de cette situation est également paru dans la revue « Mathématique et Pédagogie »N° 138 (septembre-octobre 2002).

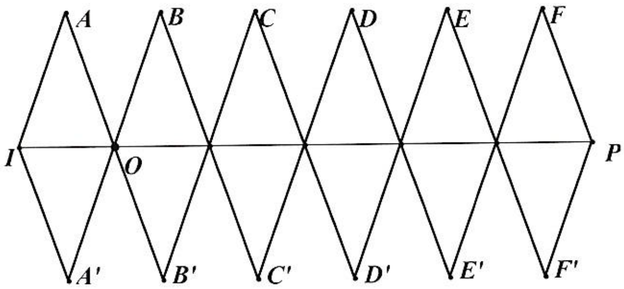
Le coup. . . je n'ai pas eu le temps de l'esquiver. Je l'ai reçu par surprise et juste à la pointe du menton, encore bien. Tout cela avec un grand éclat de rire chez ce jeune membre de la famille qui manipulait de façon experte l'arme infernale tenant à la fois du revolver et du coup de poing, et que vous pouvez voir illustrée ci-contre.



C'était assurément amusant pour celui qui manipulait la gâchette de ce « telescopic-gun » et il lui a été beaucoup pardonné vu son jeune âge. Mais nous pouvons aussi sortir du simple cadre de ce « jouet » amusant et essayer ensemble d'analyser son fonctionnement et d'y trouver matière à « faire des maths ».

Quand on examine diverses situations présentées par cet engin, on voit vite que la poignée révolver et le poing ne sont qu'un habillage de circonstance et que la partie intéressante est essentiellement celle composée par les losanges articulés donc déformables.

Nous pouvons donc idéaliser l'objet et en donner une représentation schématique comme celle que voici.



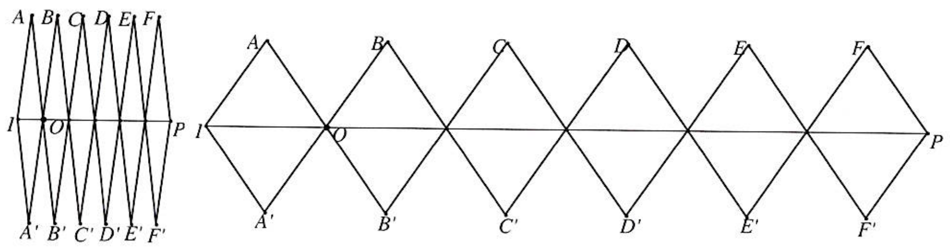
Le point I représente la gâchette.

Le point P représente le poing.

O peut être considéré comme point fixe et I et P comme mobiles sur un axe fixe.

$[AB']$, $[A'B]$, $[BC']$, $[B'C]$, etc... sont des segments tous de même longueur et articulés autour de points communs situés sur $[IP]$.

Des déplacements de I entraînent automatiquement des déplacement de P. Je vous invite à représenter par dessins quelques situations de I donc aussi de P. (N.B : Cabri-géomètre peut vous aider de manière spectaculaire dans ce domaine.) Voici quelques-unes de ces représentations.

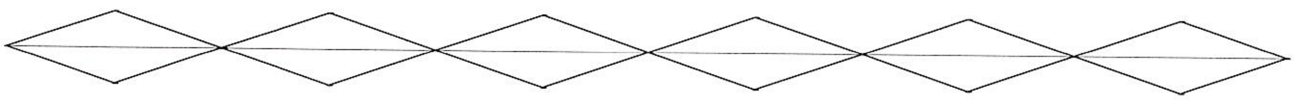


Il n'est pas difficile de se persuader de ce que, dans le cas de notre schéma, $|OP|$ vaut toujours $5|OI|$ puisque tous les losanges sont chaque fois isométriques au losange $IAOA'$. Un déplacement du point I d'une certaine longueur ℓ entraîne un déplacement de P d'une longueur 5ℓ.

Nous pouvons, pour des raisons de simplification, considérer que la longueur de chacun des côtés des losanges vaut 1 donc que $|AB'| = |A'B| = |BC'| = |B'C| = \cdots = 2$.

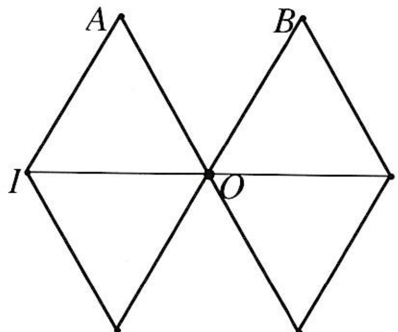
La longueur maximum de $[OI]$ vaut donc aussi 2 et alors celle de $[OP]$ vaut 10.

Pendant que $|OI|$ passe de 0 à 2, $|OP|$ passe de 0 à 10 ce qui explique l'impression de « jaillissement » de P.



On peut maintenant s'interroger sur ce que décrivent les autres points A, B, C, D, E et F quand I est déplacé (nous dirons de 0 à 2).

N.B. : A', B', C', D' et E' sont les symétriques de A, B, C, D et E par rapport à l'axe IP, donc leurs « trajets » seront aussi les symétriques de ceux de A, B, C, D et E par rapport à l'axe IP.



Pour A et B, c'est assez simple car ils possèdent une propriété de distance par rapport au point fixe O.

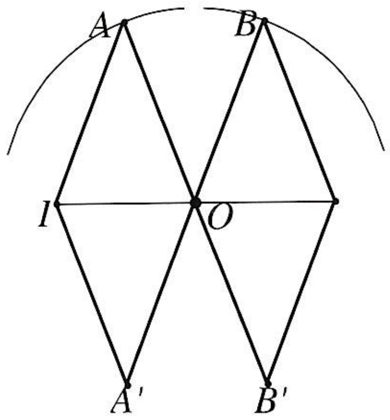
Voyez-vous quelle est cette caractéristique ?

C'est que $|OA| = |OB| = 1$ dans les transformations des losanges.

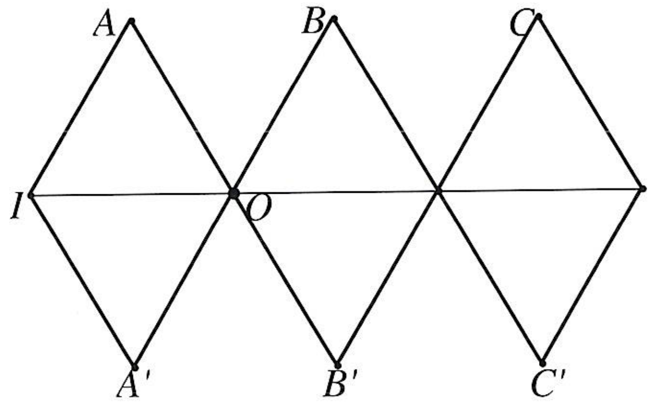
Dès lors A et B décrivent chacun un quart du cercle $C(O, 1)$

En voici une illustration ([1]) !

([1]) Les arcs de courbe dessinés par Cabri géomètre sont parfois incomplets (N.D.L.R.).



Intéressons-nous au trajet (nous dirons dorénavant « au lieu ») du point C.



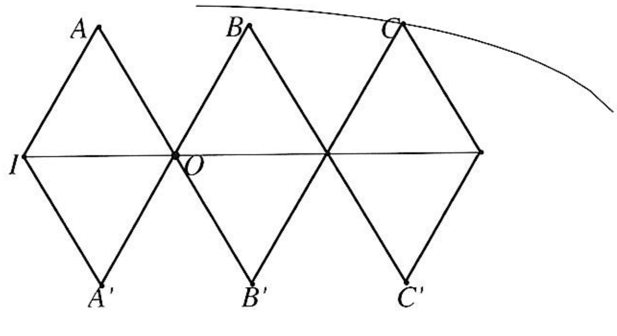
Pour s'en faire une idée, il faut tracer quelques figures représentant l'évolution de la situation et, notamment, en envisageant des positions particulières de I.

Si les losanges sont totalement « refermés » alors I coïncide avec O donc C coïncide avec B (et A) et se trouve « à la verticale » de O à distance 1.

Si les losanges sont totalement « étirés » alors C se trouve sur l'axe IO à distance 3 de O.

Essayez d'imaginer où peut se trouver C pour les configurations intermédiaires des losanges.

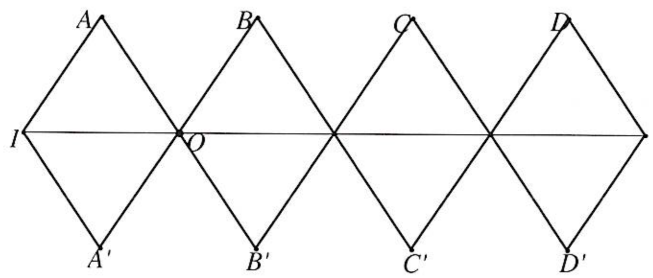
Voici une illustration du lieu de C obtenue avec Cabri-Géomètre.



Le lieu de C est une courbe. Avec plus de connaissances mathématiques, on montre que c'est une partie d'une ellipse.

Intéressons-nous maintenant au lieu du point D.

Pour s'en faire une idée, il faut également tracer quelques figures représentant l'évolution de la situation et, toujours, en envisageant des positions particulières de I.

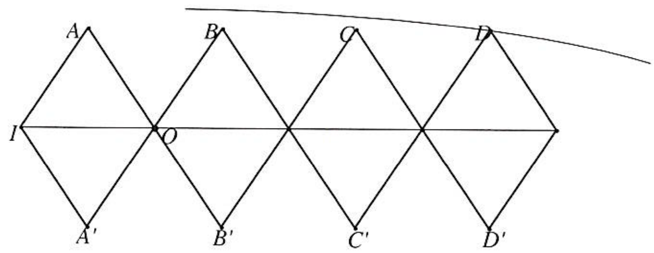


Si les losanges sont totalement « refermés » alors I coïncide aussi avec O donc D coïncide avec B (et A) et se trouve aussi « à la verticale » de O à distance 1.

Si les losanges sont totalement « étirés » alors D se trouve sur l'axe IO à distance 5 cette fois, de O.

Essayez d'imaginer où peut se trouver D pour les configurations intermédiaires des losanges.

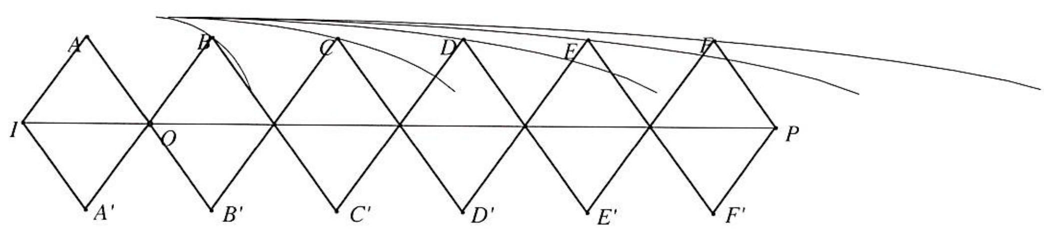
Voici une illustration du lieu de D obtenue avec Cabri-Géomètre.



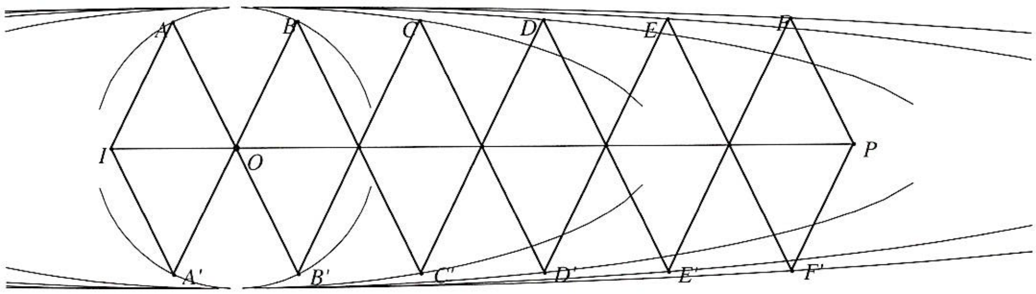
Le lieu de D est une courbe du même genre que celle du lieu de C. C'est aussi une partie d'une ellipse.

Il en sera de même pour les points E et F.

Voici une illustration de tous ces lieux qui ont donc un certain lien de « parenté ».

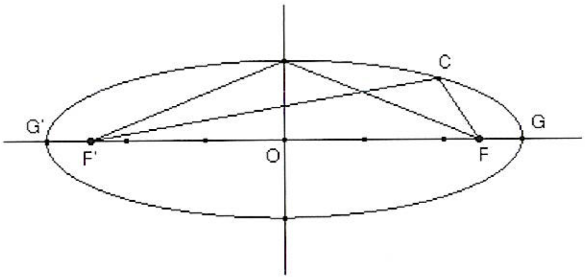


Et voici ce que cela donne en faisant apparaître les traces de A, A', B', C', D', E' et F'.



Peut-être avez-vous déjà entendu parler de l'ellipse et plus particulièrement de l'ellipse du jardinier !

Elle s'obtient en cherchant tous les points du plan de travail dont la somme des distances à deux points fixes est une constante. Le jardinier la réalise en s'aidant de deux piquets plantés en terre et d'un cordeau qui les relie et qui reste tendu pendant le tracé. Ceci est illustré ci-après. Sachez que les deux définitions s'appliquent bien au même objet.



$|CF'| + |CF|$ est constante. F et F' sont appelés foyers de l'ellipse.
Mais où sont situés ces foyers de l'ellipse parcourue (en partie) par C ?

Imaginons que C soit en B. Alors $|CF'| + |CF| = |BF'| + |BF| = 2|BF|$.

Imaginons que C soit en G. Alors $|CF'| + |CF| = |GF'| + |GF| = |GO| + |OF'| + |GO| - |OF| = 2|GO|$.

Dès lors : $2|BF| = 2|GO|$ ou encore $|BF| = |GO| = 3$

Le triangle BOF est un triangle rectangle en O. Nous pouvons donc appliquer la relation de Pythagore. $|OF|^2 + |OB|^2 = |BF|^2$ d'où $|OF|^2 = |BF|^2 - |BO|^2$ ou $|OF|^2 = 3^2 - 1^2$.

Le foyer F relatif à l'ellipse de C est tel que $|OF| = \sqrt{3^2 - 1} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$.

De même, le foyer de l'ellipse de D sera tel que $|OF| = \sqrt{5^2 - 1} = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$.

Le foyer de l'ellipse de E sera tel que $|OF| = \sqrt{7^2 - 1} = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}$.

Dernière remarque (et dernier effort)

Les distances $|OF|$ valent donc, dans l'ordre :

$\sqrt{3^2 - 1}$, $\sqrt{5^2 - 1}$, $\sqrt{7^2 - 1}$, $\sqrt{9^2 - 1}$, $\sqrt{11^2 - 1}$,...

expressions dans lesquelles 3, 5, 7, 9,... sont les distances à O des points d'intersection des ellipses avec le grand axe.

Si on applique cela au lieu de B (cercle $(O, 1)$) on obtient $|OF| = \sqrt{1^2 - 1}$ soit 0.

Les foyers sont alors confondus avec O et le cercle apparaît bien comme un cas particulier d'une ellipse.

Et, après tout, qu'est-ce qui peut bien empêcher un jardinier de tracer un cercle comme il trace une vraie ellipse c'est-à-dire en plantant ses deux piquets au même endroit ?

Quand les pinceaux s'emmêlent !

A. Paternottre

Je ne sais si les participants à notre concours Math-Quiz ont eu la même réaction que moi à la lecture de la question 10 du n°109 de Math-Jeunes Junior.

Personnellement cette question à cinq étoiles m'a interpellé. Je vous en rappelle l'énoncé :

« Vous avez tracé dix droites du plan qui se coupent toutes deux à deux et jamais autrement. Combien de régions du plan déterminent-elles ainsi ? »

La question est claire. Pas de problème de ce côté-là. Mais le contenu ? Dix droites ... c'est beaucoup ! Surtout que chacune d'elles doit être sécante à chacune des neuf autres. Dessiner une telle situation relève presque du travail de bénédictin ! Et même y arriverais-je qu'il me faudrait encore compter les régions après ! S'il ne s'agissait que d'une, deux ou même trois droites (et pourquoi pas zéro ?) passe encore... mais dix droites ! Je décide donc de travailler d'abord avec un petit nombre de droites, puis de l'augmenter progressivement et de généraliser ensuite.

Dans la foulée, bien que cela ne figure pas dans la question, pourquoi ne pas calculer aussi le nombre de points d'intersection de toutes ces droites ?

Voyons cela de plus près :

Désignons par :
n le nombre de droites.
p le nombre de points d'intersection de ces droites.
r le nombre de régions déterminées par ces droites.

Situation 0 : aucune droite n'est tracée dans le plan. ($n = 0$)

Dans ce cas il n'y a évidemment aucun point d'intersection et une seule région : le plan tout entier. Donc $p = 0$ et $r = 1$

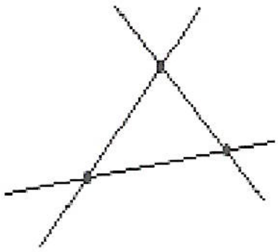
Situation 1 : une seule droite est tracée dans le plan. ($n = 1$)

Dans ce cas il n'y a toujours aucun point d'intersection mais 2 régions situées de part et d'autre de cette droite. Donc $p = 0$ et $r = 2$

Situation 2 : deux droites sécantes sont tracées dans le plan. ($n = 2$)

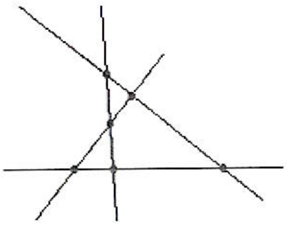
Cette fois il y a un seul point d'intersection et 4 régions. Donc $p = 1$ et $r = 4$

Situation 3 : trois droites telles que chacune coupe les deux autres sont tracées dans le plan. ($n = 3$)



On a clairement : $p = 3$ et $r = 7$

Situation 4 : quatre droites telles que chacune coupe les trois autres sont tracées dans la plan. ($n = 4$)



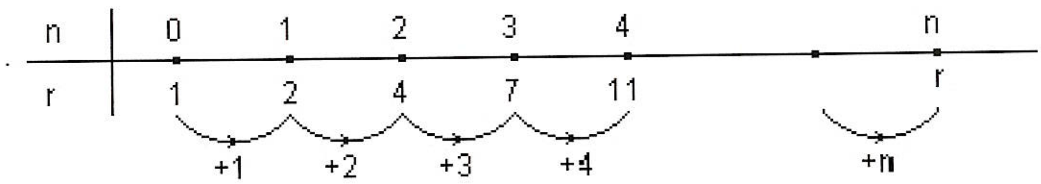
Cette fois on obtient : $p = 6$ et $r = 11$

Situation n : l'examen des 5 situations concrètes précédentes permet maintenant de généraliser le problème à n droites ($n \in \hat{I}N$)

- Commençons par ce qui est le plus facile : calcul de p.
  Reprenons le cas ci-dessus pour lequel $n = 4$ Prenons une première droite : elle coupe les 3 autres droites en 3 points. Il en est de même pour la 2e, la 3e et la 4e droite. En tout on obtient donc $4 \times 3 = 12$ points d'intersection.
  Mais en comptant de cette façon, chaque point a été compté 2 fois. Dès lors pour $n = 4$ on aura $p = \dfrac{4 \times 3}{2} = 6$ On raisonne de même pour n droites : chacune d'elles coupe chacune des $(n-1)$ autres en $(n-1)$ points .En tout cela fait donc $n(n-1)$ points d'intersection, chacun ayant été ainsi compté deux fois. Donc :

$$\boxed{p = \frac{n(n-1)}{2}}$$

- Plus difficile : calcul de r
  Reprenons les cinq situations examinées ci-dessus et observons le tableau suivant qui les résume :



Les flèches tracées ci-dessus suffisent pour comprendre le mécanisme. Ainsi : si $n = 3$ alors $r = 1 + (1 + 2 + 3) = 7$

si $n = 4$ alors $r = 1 + (1 + 2 + 3 + 4) = 11$.

Il est aisé d'en déduire que pour n droites sécantes 2 à 2, on aura : $r = 1 + (1 + 2 + 3 + \cdots + n)$.
Faut-il rappeler cette formule qui revient souvent dans Math-Jeunes Junior :

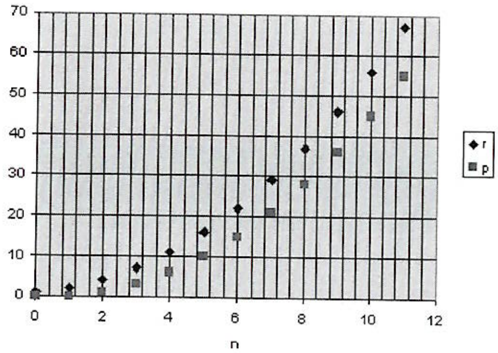
$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Dès lors :

$$r = 1 + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{2 + n(n+1)}{2} = \frac{n^2 + n + 2}{2}$$

$$\boxed{r = \frac{1}{2}(n^2 + n + 2)}$$

La réponse à la question 10 du Math-Quiz n°109 est donc $r = 0,5(10^2 + 10 + 2) = 56$ régions. Quant à la question complémentaire, la réponse est $p = 0,5 \times 10 \times 9 = 45$ points d'intersection. Remarque encore que quel que soit le nombre naturel n, l'expression $n^2 + n + 2$ représente toujours un nombre naturel pair. (justifie)



Ci-contre, dans un même repère cartésien, sont tracés les graphiques de p et de r en fonction de n. La répartition des points dans chacune des deux séries doit sûrement suggérer aux aînés d'entre vous une courbe connue. Laquelle ? Sur ce graphique, on observe non seulement que $r > p$ quel que soit le nombre n de droites mais encore que la différence $r - p$ augmente progressivement avec n.

Calculons cette différence :

$$r - p = \frac{n^2 + n + 2}{2} - \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n^2 + n + 2 - n^2 + n}{2} = \frac{2n+2}{2} = n + 1 > 0 \Rightarrow r > p$$

De cette dernière égalité, on déduit aisément que $r - p - n = 1$, ce que tu peux vérifier dans chacune des situations concrètes précédemment examinées. Peux-tu calculer $r + p$ en fonction de n ? Pour en terminer, je te propose de tenter toi-même le calcul de p et r dans les mêmes conditions que l'énoncé de départ mais en tenant compte en plus d'une des contraintes suivantes :

1. deux des n droites sont strictement parallèles entre elles. ($n \geqslant 2$)

2. trois des n droites sont strictement parallèles entre elles. ($n \geqslant 3$)

3. les n droites sont toutes strictement parallèles entre elles.

4. trois des n droites (distinctes) ont un point commun. ($n \geqslant 3$)

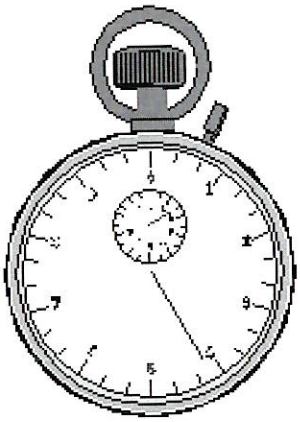
5. les n droites (distinctes) ont un point commun.

6. ... et bien d'autres situations que tu peux inventer.

Dans chacun de ces cas compare les p et r que tu auras calculés aux p et r donnés par les formules découvertes ci-dessus. Bonne recherche et fructueuses découvertes.

Qu'est-ce qu'une seconde ?

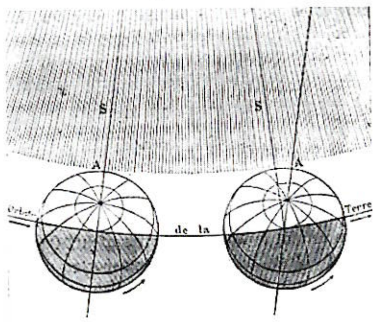
S. Trompler



Elle est beaucoup moins simple à définir qu'on pourrait le croire.
Au départ, comme pour le mètre, la seconde est liée à la Terre, mais plus précisément aux mouvements de la Terre.
La définition officielle de la seconde du Système International d'unité jusqu'en 1960 était :

La seconde est la $\frac{1}{18400}$ partie du jour solaire moyen ($24 \times 60 \times 60$ secondes dans un jour).

Mais il faut préciser de quel jour il s'agit : le jour est la durée de rotation d'un astre autour de son axe. Cela paraît clair. Seulement, cette durée dépend de la référence choisie.



Le jour sidéral se calcule par rapport à une étoile. Il est surtout utilisé par les astronomes.

Le jour solaire est le temps écoulé entre deux passages du soleil au méridien.

Comme la Terre a tourné un tout petit peu autour du soleil pendant ce temps, ces deux types de jour ne coïncident pas tout à fait.

Il y a un autre problème : l'orbite de la Terre n'est pas un cercle, c'est une ellipse et la vitesse de la Terre autour du Soleil n'est pas constante :

elle va le plus vite lorsqu'elle se trouve au périhélie (point de l'orbite terrestre le plus proche du soleil) et le plus lentement lorsqu'elle se trouve à l'aphélie (point de l'orbite terrestre le plus éloigné du soleil).

C'est pour cela qu'on remplace le jour solaire par le jour solaire moyen.

D'autre part , les marées lunaires ralentissent légèrement la rotation de la Terre.

Ces irrégularités et d'autres encore, font que la définition de la seconde n'a pas la précision que notre science moderne exige.

La physique étudie actuellement des phénomènes très courts, comme la durée de vie de certaines particules ; les appareils de mesure sont devenus extrêmement fiables.

Il fallait donc être en possession d'une unité communicable à tous, sans hésitation sur sa valeur très exacte.

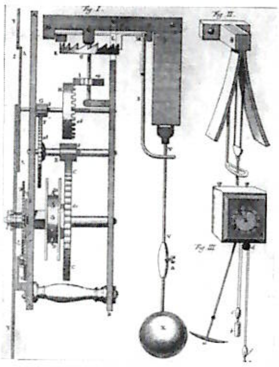
Comme pour le mètre, la référence à la Terre a dû être abandonnée et remplacée par des phénomènes physiques rigoureusement stables.

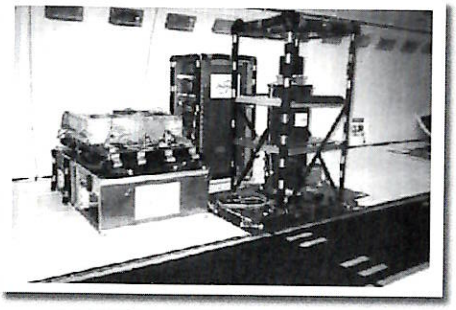
Ceci, malheureusement, toujours comme pour le mètre, s'est fait au détriment de sa compréhension par le profane.

Lors de la treizième conférence générale des poids et mesures, en 1967, a été établie la définition de la seconde :

> La seconde est la durée de 9.192.631.770 périodes de la radiation correspondant à la transition entre les deux niveaux hyperfins $F = 3$ et $F = 4$ de l'état fondamental $6s$ de l'atome de Césium 133 ! ! ! ! !

Cette définition est évidemment impossible à retenir de mémoire, et ne doit rien à l'intuition. Elle est très proche de notre « vieille » seconde, mais l'incertitude relative sur cette seconde est de l'ordre de 10^{-15}, ce qui en fait une des unités du Système International les plus précises.





PHARAO: L'horloge à atomes froids pour expériences en micro-gravité

Le Temps atomique international est une échelle scientifique utilisée par les astronomes pour étudier les mouvements des astres et des satellites. La mesure du Temps atomique international a comme étalons les horloges atomiques à césium. Elles peuvent être remplacées par d'autres types d'horloges, à condition d' être en accord avec elles. Le Bureau international des poids et mesures collecte , (en 2000) les données d'environ 230 horloges réparties dans 65 laboratoires. L'horloge atomique est d'une précision de 1 seconde pour 3000 ans.

Bien entendu, dans la vie courante, nous n'avons vraiment pas besoin d'une telle précision. Nous nous contentons, avec bonheur, d'une montre-bracelet à quartz. Ce type de montre est basé sur l'effet piézo-électrique. L'effet piézo-électrique est un excellent étalon de fréquence. Une montre à quartz ne perd qu'une seconde tous les six ans.

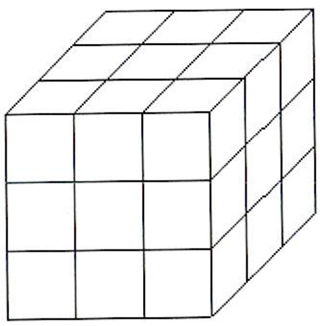
Cube et parallélépipèdes

F. Drouin

Nous allons découper un cube $3 \times 3 \times 3$ de telle sorte qu'à chaque fois les pièces seront des parallélépipèdes (ou des cubes...). Nous verrons que chaque découpage pourra être le support d'une activité mathématique.

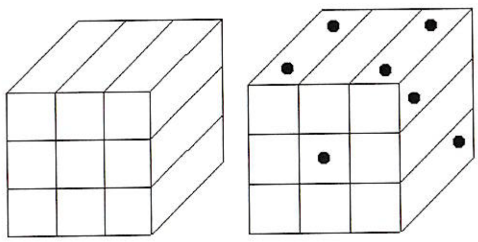
Un premier découpage :

J'obtiens 27 cubes $1 \times 1 \times 1$. Je peins les faces du gros cube en rouge, puis je découpe en 27 petits cubes.



Combien de petits cubes auront quatre faces rouges, trois faces rouges, deux faces rouges, une face rouge, zéro face rouge ?

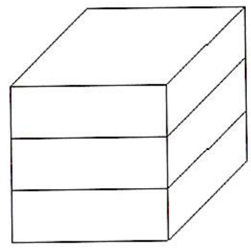
Un deuxième découpage :



J'obtiens 9 parallélépipèdes $3 \times 1 \times 1$. Sur les faces du cube reconstitué, je dessine les points d'un dé. Je te rappelle que la somme des points de deux faces opposées est égale à 7.

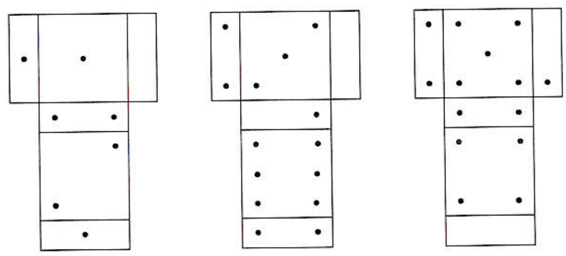
En carton ou en bois, construis- toi 9 parallélépipèdes $3 \times 1 \times 1$. Reconstruis le cube $3 \times 3 \times 3$ et marque les points du dé. Tu obtiens un casse tête appelé « nonabarre ». La reconstruction du dé ne te posera sans doute pas de problème. Ta solution est-elle unique ?

Un troisième découpage :



J'obtiens 3 parallélépipèdes $3 \times 3 \times 1$.

Voici le développement de chacun d'eux :

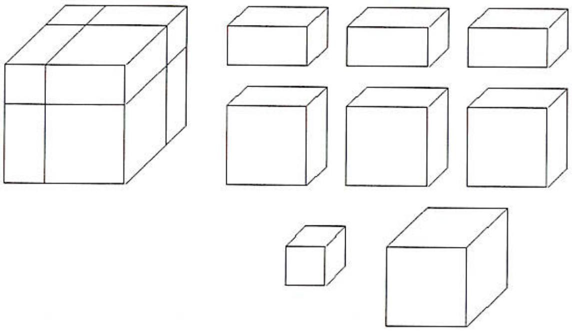


Tu remarques que certaines faces sont restées blanches, d'autres sont marquées de points noirs. Reproduis ces trois dessins sur une feuille de carton fin, découpe-les ensuite et termine en reconstituant les trois parallélépipèdes par pliage et fermeture au moyen de papier collant. Veille bien sûr à ce que les points soient à l'extérieur.

Le jeu consiste à reconstruire un dé (cube $3 \times 3 \times 3$) à partir des trois pièces obtenues. Attention : les trois paires des faces opposées (1 et 6, 2 et 5, 3 et 4) doivent apparaître exactement comme sur un dé traditionnel. Ce jeu est à la fois amusant et... pas si facile. Il s'agit de trois des quatre pièces du casse-tête conçu par notre ami Jo Marfoisse et communément appelé « dé de Jo ».

Math-Jeunes Junior n°111J, 12–14, 2005

Un quatrième découpage :

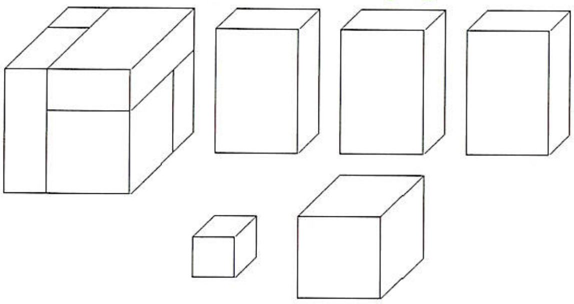


J'obtiens un cube $1\times1\times1$, un cube $2\times2\times2$, trois parallélépipèdes $1 \times 1 \times 2$ et trois parallélépipèdes $1 \times 2 \times 2$.

Si tu nommes « a » l'arête du petit cube et « b » l'arête du grand cube, tu as un cube $a\times a\times a$, un cube $b\times b\times b$, trois parallélépipèdes $a \times a \times b$ et trois parallélépipèdes $a \times b \times b$.

Tu obtiens une visualisation de l'identité remarquable « $(a+b)^3 = a^3+b^3+3a^2b+3ab^2$ ». De plus, sur chaque face du cube obtenu avec les huit pièces, tu peux remarquer une visualisation de l'identité remarquable « $(a+b)^2 = a^2+b^2+2ab$ ».

Un cinquième découpage :

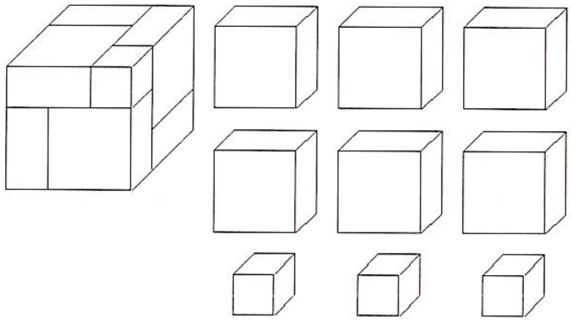


J'obtiens un cube $1\times1\times1$, un cube $2\times2\times2$ et trois parallélépipèdes $1 \times 2 \times 3$. Si tu nommes « a » l'arête du petit cube et « b » l'arête du grand cube, tu as un cube $a \times a \times a$, un cube $b \times b \times b$, trois parallélépipèdes $a \times b \times (a+b)$.

Tu obtiens une visualisation de l'identité remarquable « $(a+b)^3 = a^3+b^3+3ab(a+b)$ ». Celle formule est due au mathématicien italien Cardan (1501–1576). Un peu de calcul algébrique te permettra de montrer que les formules visualisées lors de ces deux derniers découpages sont équivalentes.

Un sixième découpage :

J'obtiens trois cubes $1 \times 1 \times 1$ et six parallélépipèdes $1 \times 2 \times 2$.

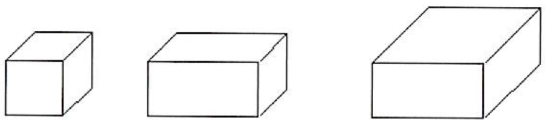


Construis les 9 pièces en bois ou en carton, puis essaie de reconstruire le grand cube. Ce casse-tête est attribué au mathématicien américain John Conway. Sa solution se trouve assez aisément et elle est unique…

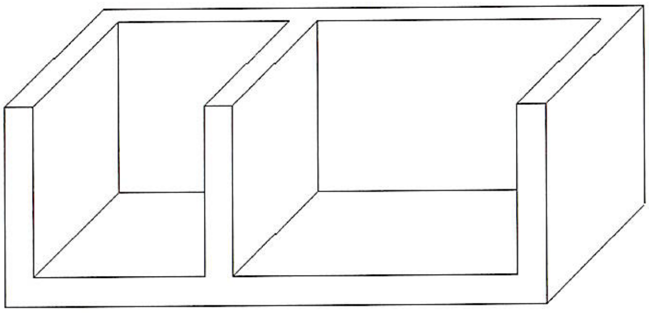
En effet, pour chaque couche du cube reconstitué, chaque parallélépipède apporte 2 ou 4 cubes. Or, il y a 9 cubes par couches, tant horizontales que verticales. Il faut donc un petit cube pour chacune des 9 couches possibles, ce qui nécessite que les petits cubes soient alignés sur la diagonale du cube à reconstruire.

Ce casse-tête s'est retrouvé dans le « petit camion » de l'exposition « math 2000 » présentée en 2001 au « musée des Sciences et des Techniques » de Parentville, près de Charleroi.

Il y a 15 parallélépipèdes $1 \times 2 \times 2$, 4 parallélépipèdes $1 \times 1 \times 2$ et 4 cubes $1 \times 1 \times 1$.



Avec toutes ces pièces, il est demandé de remplir les deux compartiments de la remorque du camion : un cube $3\times3\times3$ et un parallélépipède $3 \times 3 \times 5$.



Une indication était donnée : « commencer par remplir le petit volume en n'utilisant que des grosses pièces et 3 petits cubes ». Nous reconnaissons les pièces du petit cube de Conway. Sans cette aide, le remplissage du camion est loin d'être évident...

Dans ton entourage, tu trouveras sans doute un bricoleur acceptant de te construire le camion, sa remorque et son chargement. Tu pourras à ton tour étonner tes camarades désirant participer au rangement.

Echo de la 30^{e}Olympiade Mathématique Belge

Vous étiez au total 23.337 participants, le 19 janvier dernier, à l'éliminatoire de la 30^{e}OMB !

Comme quoi cette épreuve est toujours aussi populaire et appréciée des élèves du cycle secondaire. Quel que soit votre score, bravo à vous tous qui n'hésitez pas à consacrer un mercredi après-midi à affronter cette épreuve intellectuelle dans laquelle chacun a tout à gagner et rien à perdre. L'épreuve s'est déroulée dans 297 écoles de la partie francophone de notre pays.

Voici la répartition du nombre de participants par année d'étude :

MINI	MIDI	MAXI
1re année : 6.270	3^{e} année : 3.938	5^{e} année : 2.637
2^{e} année : 5.012	4^{e} année : 3.128	6^{e} année : 2.352
Total : 11.282	7.066	4.989

Le tableau suivant vous donnera une idée des scores obtenus en catégories Mini et Midi.

Scores	$\leqslant 25$	[26,51]	[52,77]	[78,103]	$\geqslant 104$
1reannée	99	1.706	3.465	935	65
2^{e}année	31	719	2.215	1.646	401
Total MINI	130	2.425	5.680	2.581	466
3^{e}année	19	790	2.591	524	14
4^{e}année	3	306	1.880	881	58
Total MIDI	22	1.096	4.471	1.405	72

Les demi-finales ont eu lieu de 2 mars dernier et la finale aura lieu le 20 avril prochain.

Encore bravo à tous et ... à l'année prochaine.

Jeux

Y. Noël-Roch

1. Vrai ou faux

Pour chacune des six affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou fausse.

A. $\dfrac{1-2}{3-4} = \dfrac{(1-2)^2}{(3-4)^2} = \dfrac{(1-2)^3}{(3-4)^3} = \dfrac{1^3-2^3}{3^2-4^2} = \dfrac{2^3-3}{4+1} = \dfrac{3-4}{1-2} = \dfrac{4+1}{2+3}$.

B. Quel que soit le naturel $n > 0$, on a $\dfrac{(1-2)^n}{(3-4)^n} = 1$.

C. Quel que soit le naturel $n > 0$, on a $\dfrac{1+2^n}{3^n-4} = 1$.

D. Il existe un naturel $n > 0$ pour lequel $\dfrac{1-2^n}{3^{n-1}-4^{n-1}} = 1$.

E. Quels que soient les naturels $a > 0$ et $b > 0$, on a $\dfrac{(1-2)^a}{(3-4)^b} = 1$.

F. Quels que soient les naturels $a > 0$ et $b > 0$, on a $\dfrac{(a-(a+1))^b}{((a+2)-(a+3))^b} = 1$.

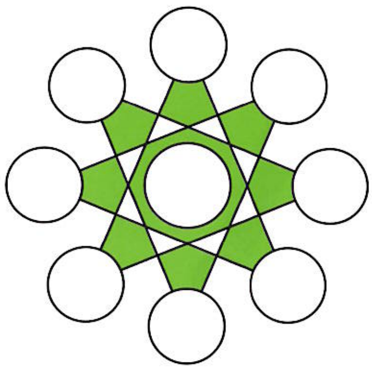
2. Des chiffres en étoile

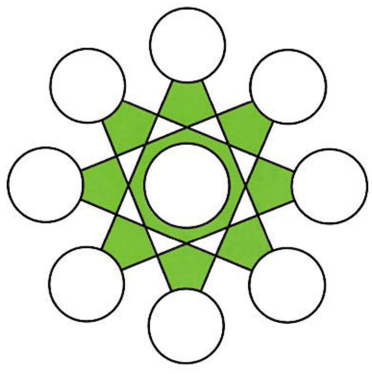
Au centre et sur les pointes de chaque étoile à huit branches, place les chiffres de 1 à 9, chacun une seule fois, de manière à ce que

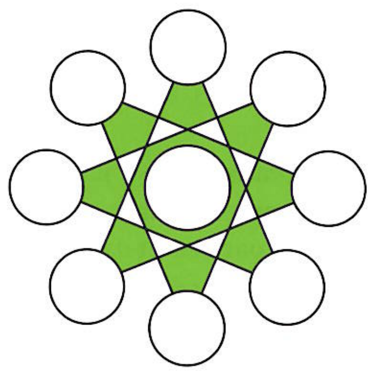
2.1. la somme des nombres situés sur des pointes opposées soit toujours le nombre situé au centre de l'étoile.

2.2. la moyenne arithmétique des nombres situés sur des pointes opposées soit toujours le nombre situé au centre de l'étoile.

2.3. la différence des nombres situés sur des pointes opposées soit toujours le nombre situé au centre de l'étoile ou son opposé.







3. Ni pavage, ni labyrinthe

Dans le tableau suivant, l'étoile centrale est entourée de huit cases qui contiennent — une et une seule fois — les chiffres de 1 à 8.

5	2	7
8	★	4
1	3	6

Complète les cases vides du grand carré ci-contre pour que cette règle soit respectée autour des seize étoiles.

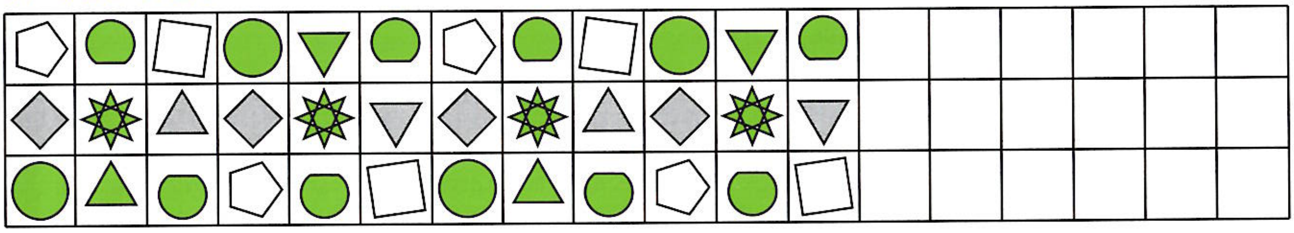
7	1				8	6		5
	★	5	★	1	★		★	8
4		6			5	2	4	
	★	3	★	1	★		★	8
7	2		8	4				5
	★		★		★		★	
8		1		7		2		3
	★	4	★	3	★	1	★	
7	2		5				8	5

4. Comptage des diviseurs.

Dans chaque colonne du tableau suivant indique le plus petit et le plus grand nombre compris entre 1 et 100 qui a le nombre de diviseurs indiqué dans la première ligne.

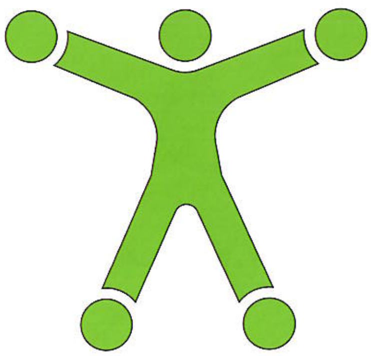
Nombre de diviseurs	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Le plus petit	1		4									
Le plus grand						99						

5. Une frise



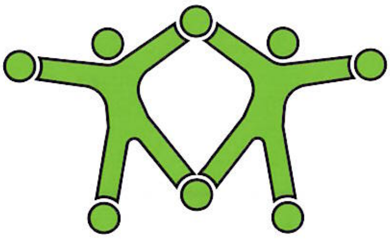
6. Des symétries « miroir »

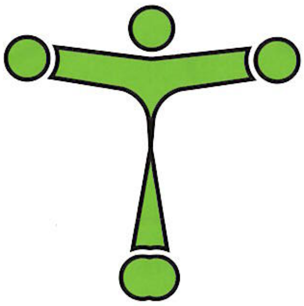
Pour réaliser les jeux du numéro 110 de Math-Jeunes Junior, tu as découpé un miroir en deux parties et tu les as assemblées suivant un des petits côtés.

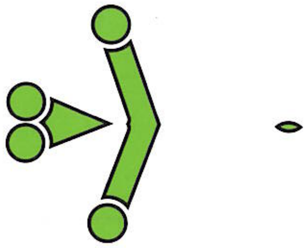


D'après Gonze

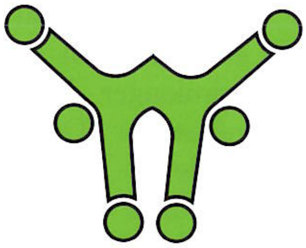
En les plaçant dos à dos sur le bonhomme, crée les figures 1 à 8 ci-dessous et, comme dans le numéro 110 associe-les en paires correspondant aux deux images visibles de part et d'autre de ton miroir double.

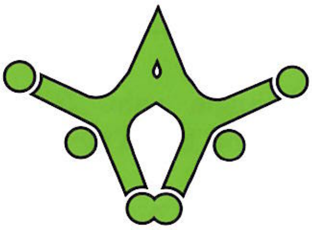

1.

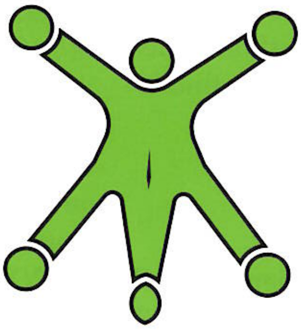

4.

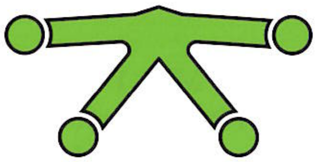

6.


2.

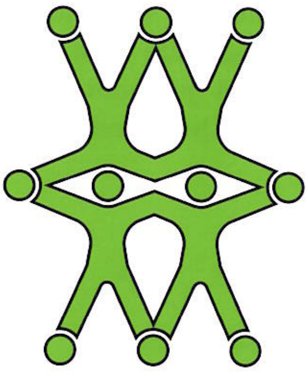

7.

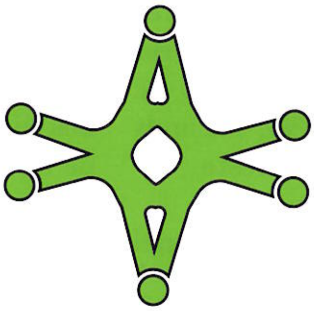

3.


5.

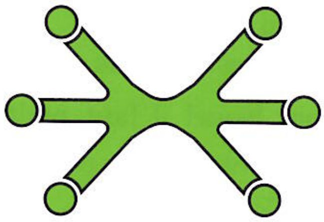

8.

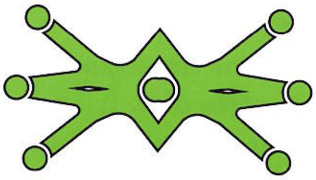
En plaçant les miroirs de façon qu'ils forment entre eux un angle droit, et en regardant simultanément les images dans les deux miroirs, construis les figures 9 à 15.

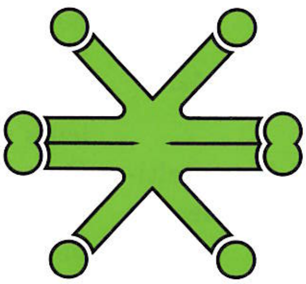

9.

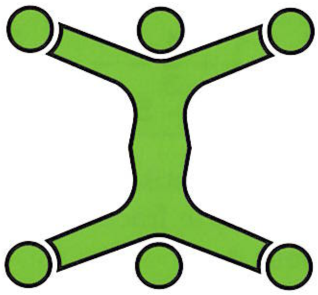

11.


13.


14.


10.


12.


15.

C. Festraets

Au moment où tu lis ce texte, les demi-finales de l'Olympiade Mathématique Belge ont déjà eu lieu et tu y as peut-être participé. Pour prolonger l'intérêt que tu apportes certainement à l'Olympiade et pour t'exercer en vue de ta prochaine participation, voici quelques unes des questions des demi-finales "mini" et"midi".

Mini 6 - Midi 1

Sans réponse préformulée - Combien y a-t-il de naturels dont le reste de la division par 3 est 2 et qui sont compris entre 1 et $2\,005$?

Solution

Les naturels dont le reste de la division par 3 est 2 sont 2, $1 \times 3 + 2 = 5$, $2 \times 3 + 2 = 8$, $3 \times 3 + 2 = 11$, ...Le plus grand des nombres de cette forme situé dans l'intervalle donné est $2\,003 = 667 \times 3 + 2$. Donc depuis $2 = 0 \times 3 + 2$ jusque $2\,003 = 667 \times 3 + 2$, il y a 668 naturels qui divisés par 3 donnent 2 comme reste.

Mini 9

Quel est le plus petit entier positif non nul par lequel il faut multiplier $\frac{1}{6} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4}$ pour obtenir un entier ?

Ⓐ 2 Ⓑ 3 Ⓒ 4
Ⓓ 6 Ⓔ 12

Solution

$$\frac{1}{6} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{2}{12} + \frac{6}{12} + \frac{4}{12} - \frac{3}{12} = \frac{2+6+4-3}{12} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$$

Le plus petit naturel par lequel il faut multiplier cette fraction pour obtenir un entier est donc 4.

Mini 10 - Midi 4

On considère tous les angles de tous les triangles isocèles ayant un angle de $30°$. Quelle est, en degrés, l'amplitude du plus grand de ces angles ?

Ⓐ 60 Ⓑ 75 Ⓒ 90
Ⓓ 105 Ⓔ 120

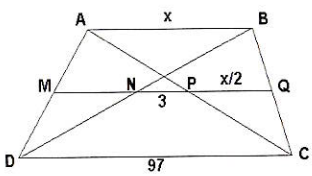
Solution

Deux cas sont possibles dans de tels triangles isocèles :
ou bien un seul angle vaut $30°$ et les deux autres angles ont la même amplitude $\frac{1}{2}(180° - 30°) = 75°$,
ou bien deux angles valent $30°$ et le troisième est égal à $180° - 2 \times 30° = 120°$.
En degrés, l'amplitude du plus grand angle est donc 120.

Midi 6

Sans réponse préformulée - Dans un trapèze, la longueur de la plus grande base vaut 97 et la longueur du segment joignant les milieux des diagonales vaut 3. Quelle est la longueur de l'autre base ?

Solution



Soit x la longueur de la petite base.
Soit MQ la médiane du trapèze ; elle est parallèle aux deux bases et coupe les diagonales en leurs milieux N et P.
On sait que la longueur du segment qui joint les milieux de deux côtés d'un triangle vaut la moitié de la longueur du troisième côté. Donc dans le triangle ACB, $|PQ| = \frac{x}{2}$ et dans le tri-

angle CBD, $|NQ| = \frac{|CD|}{2}$.
Ce qui donne $3 + \frac{x}{2} = \frac{97}{2}$ et de là $x = 97 - 6 = 91$.

Mini 16 - Midi 9

$2^{2005} \cdot 5^{2000}$ est un très grand nombre. Combien a-t-il de chiffres ?

Ⓐ $2\,000$ Ⓑ $2\,001$ Ⓒ $2\,002$
Ⓓ $2\,003$ Ⓔ $4\,005$

Solution $2^{2005} \cdot 5^{2000} = 2^{2000} \cdot 5^{2000} \cdot 2^5 = 10^{2000} \cdot 2^5 = 32\ \underbrace{000\dots0}_{2000\text{chiffres}}$.

Le nombre total de chiffres est donc $2\,002$.

Mini 20 - Midi 14

Sans réponse préformulée - Une diagonale d'un polygone est tout segment de droite joignant un sommet du polygone à un autre sommet non adjacent. Un décagone est un polygone à 10 sommets. Combien y a-t-il de diagonales dans un décagone régulier ?

Solution

Pour obtenir une diagonale, chaque sommet peut être joint à 7 autres sommets (on ne peut pas joindre un sommet à lui-même ni aux deux sommets voisins).

Il y a 10 sommets et $10 \times 7 = 70$; mais ainsi, chaque diagonale a été comptée deux fois, par exemple, la diagonale qui joint les sommets A et F a été comptée partant de A puis partant de F. D'où le nombre de diagonales est $\frac{70}{2} = 35$.

Mini 30

J'ai deux bidons de 3 litres de désherbant pour mon allée large de 5 mètres et longue de 100 mètres. Quelle partie de mon allée restera non pulvérisée si j'utilise 50 cm^3 de produit par mètre carré ?

Ⓐ 24% Ⓑ 50% Ⓒ 76%
Ⓓ 88% Ⓔ 94%

Solution

La surface totale de l'allée, en mètres carrés, vaut $100 \times 5 = 500$.

1 litre $= 1$ dm^3 $= 1\,000$ cm^3, donc 6 litres $= 6\,000$ cm^3. Ceci permet de pulvériser $\frac{6\,000}{50} = 120$ mètres carrés.

380 m^2 ne seront pas pulvérisés, ce qui représente $\frac{380}{500} = \frac{76}{100} = 76\%$ de la surface de l'allée.

Midi 16

Quelle est la fraction dont l'écriture décimale est $0{,}125125$?

Ⓐ $\frac{125}{1001}$ Ⓑ $\frac{125}{999}$ Ⓒ $\frac{\frac{1}{8}}{\frac{1}{3}}$

Ⓓ $\frac{1{,}01}{8}$ Ⓔ $\frac{3003}{24\,000}$

Solution

$0{,}125125 = \frac{125\,125}{1\,000\,000} = \frac{125 \times 1\,001}{1\,000 \times 1\,000} = \frac{1\,001}{8 \times 1\,000} = \frac{3\,003}{24\,000}$.

Midi 18

Sans réponse préformulée - La moyenne de mes notes a été de 80% pour les trois premières interrogations de mathématique et de 60% pour les neuf dernières (chacune des douze interrogations est notée sur 20) . Quelle a été, en %, ma moyenne pour les douze interrogations ?

Solution

En moyenne, j'ai obtenu $\frac{16}{20}$ à chacune des trois premières interrogations et $\frac{12}{20}$ aux neuf suivantes.

La moyenne pour les douze interrogations sera $\frac{1}{12}\left(3 \cdot \frac{16}{20} + 9 \cdot \frac{12}{20}\right) = \frac{1}{12} \cdot \frac{48 + 108}{20} = \frac{156}{240} = \frac{65}{100} = 65\%$.

Midi 25

La factorisation réelle de $x^4 + 2$ est

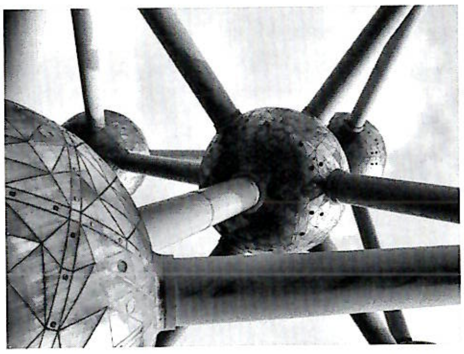
Ⓐ $(x^2+\sqrt{2})(x^2+\sqrt{2})$ Ⓑ $(x^2+\sqrt{2})(x^2-\sqrt{2})$
Ⓒ $(x^2-2x+\sqrt{2})(x^2+2x+\sqrt{2})$ Ⓓ $x^2(x^2+2)$
Ⓔ $(x^2 + \sqrt{2} + x\sqrt[4]{8})(x^2 + \sqrt{2} - x\sqrt[4]{8})$

Solution

$$\begin{aligned}
x^4 + 2 &= x^4 + 2\sqrt{2}x^2 + 2 - 2\sqrt{2}x^2 \\
&= \left(x^2 + \sqrt{2}\right)^2 - 2\sqrt{2}x^2 \\
&= \left(x^2 + \sqrt{2}\right)^2 - \left(\sqrt[4]{8}x\right)^2 \\
&= \left(x^2 + \sqrt{2} + \sqrt[4]{8}\right)\left(x^2 + \sqrt{2} - \sqrt[4]{8}\right)
\end{aligned}$$

L'Atomium en pièces

A. Paternotre



En cette année 2005, les 9 sphères de notre Atomium national seront complètement « dépiautées » de leurs plaques d'aluminium triangulaires qui ont souffert de l'usure du temps depuis l' Exposition Universelle de Bruxelles en 1958.
Plutôt que d'envoyer ces plaques à la mitraille, il a été décidé de les vendre à raison de 1000 euros le triangle dont les côtés mesurent 2,4m , 1,8m et 1,4m.
Sache que chacune des 9 sphères possède un diamètre de 18m et est recouverte d'aluminium à raison de 85% de sa surface .
Dans ces conditions, si toutes les plaques sont vendues, peux-tu calculer combien d'euros rapportera cette vente insolite ?

Avis aux lecteurs-élèves :

La résolution de ce problème te confrontera sans doute à des formules de géométrie que tu ne connais pas encore. Si tel est le cas, renseigne-toi auprès de ton prof de math ou d'une autre personne plus avisée que toi.

Tu peux envoyer ta solution détaillée au secrétariat, 15, rue de la Halle, 7000-Mons avant le 18 mai 2005. Ton nom sera mentionné dans le prochain numéro de Math-Jeunes Junior et la meilleure solution y sera publiée. N'oublie pas d'indiquer tes nom, prénom, classe et établissement scolaire.

Clin d'oeil

Munis-toi de ta calculette puis :

1. Ecris ton âge en nombre entier d'années.
2. Multiplie-le par 5.
3. Ajoute 121 au produit précédent.
4. Multiplie par 20 cette dernière somme.
5. Ajoute la pointure de tes chaussures en nombre entier.
6. Soustrais 2420.

Le résultat final de ces opérations successives est un nombre de 4 chiffres. Les deux premiers chiffres donnent ton âge, les deux derniers ta pointure.

Magie ou logique ?

Des lettres, pourquoi ? (3)

Y. Noël-Roch

1. Deux défis

Décimix et Neufix aiment se lancer des défis. Chacun essaie de découvrir le « truc » utilisé par son ami. Voici leur dernière joute.

Le défi de Décimix

Sans que je ne voie ta feuille, tu vas noter deux nombres naturels, l'un strictement plus petit que 10 et l'autre strictement plus grand que 10. Je vais te donner des opérations à effectuer et tu ne me donneras à la fin que ton dernier résultat. Je pourrai alors deviner les deux nombres que tu as choisis au départ. Mais procédons étape par étape !

1. Ecris tes deux nombres.
2. Additionne-les.
3. Multiplie le résultat par 5.
4. Ajoute le plus petit de tes deux nombres.
5. Multiplie par 2.
6. Soustrais le plus petit de tes deux nombres.
7. Soustrais encore 1.
8. Donne-moi ton résultat final.

Supposons par exemple que le résultat annoncé par Neufix soit 1365. Décimix « devine » alors les deux nombres choisis par son ami : 6 et 130.

Neufix refuse toute explication, il veut avoir le temps de chercher comment procède son ami. Aussi lui lance-t-il à son tour un défi.

Le défi de Neufix

Moi, je peux deviner une somme de cinq nombres en ne connaissant que le premier de ceux-ci ! Et je peux tout calculer mentalement, même si les nombres sont grands ! Cette fois c'est moi qui donne les consignes et je dois voir continuellement ta feuille.

Neufix	Décimix
• Écris un nombre de cinq chiffres	34 671
• Je note, sans te la montrer, la somme que tu obtiendras finalement : ____. Choisis un nouveau nombre et aligne bien tes chiffres verticalement parce que tu devras finalement additionner cinq nombres	47 108
• C'est moi qui choisis le troisième nombre, note-le : 52 891	52 891
• Choisis toi-même le quatrième terme de la somme	10 047
• Je choisis 89 952 comme dernier nombre !	89 952
•Additionne maintenant les cinq nombres	**234 669**

Et Neufix exhibe triomphalement le résultat 234 669 qu'il avait noté plus tôt.

2. Deux démystifications

Neufix a appliqué à plusieurs exemples les consignes de son ami :

5	31	36	180	185	370	365	364
7	150	157	785	792	1584	1577	1576
6	2000	2006	10030	10036	20072	20066	20065

Il remarque que le premier nombre qu'il choisit est formé d'un seul chiffre et que celui-ci est le chiffre des unités dans l'avant-dernière étape. « Deviner » son premier choix est donc tout simple à partir du résultat final :

	Chiffre des unités
$364 \xrightarrow{+1} 365$	5
$1\,576 \xrightarrow{+1} 1\,577$	7
$20\,065 \xrightarrow{+1} 20\,066$	6

Les autres chiffres du résultat révèlent le reste de la clé :

- $31 = \mathbf{36} - 5$
- $150 = \mathbf{157} - 7$
- $2\,000 = \mathbf{2\,006} - 6$.

Mais Neufix aimerait contrer son ami en partant d'un choix embarrassant. Pour avoir une chance d'y arriver, il doit analyser le processus d'une manière générale, sans utiliser des nombres particuliers. Il reprend donc les étapes successives en utilisant des lettres :

- je choisis un entier a ($0 \leqslant a < 10$) et un entier $b > 10$.
- $a + b$
- $5 \times (a + b)$ (ou $5.(a + b)$ ou $5(a + b)$)
- $5 \times (a + b) + a$ (ou $5.(a + b) + a$ ou ?)
- $10.(a + b) + 2a$
- $10.(a + b) + a$
- $10.(a + b) + a - 1$

Ainsi, le nombre de dizaines dans le résultat final est la somme des deux nombres choisis ... à condition que le nombre $a-1$ soit bien un nombre de un chiffre ! C'est le cas lorsque $1 \leqslant a \leqslant 10$. Et Neufix commence à jubiler : pourra-t-il mettre son ami en défaut en choisissant $a = 0$? A toi de vérifier qu'il n'en est rien !

Voici donc le processus de décryptage effectué par Décimix :

- ajouter 1 au résultat
- le chiffre des unités obtenu est a
- retirer a du nombre de dizaines du résultat pour obtenir b.

Ses consignes sont précises et celui qui les respecte ne peut le mettre en difficulté !

Décimix a, lui aussi, analysé le processus appliqué par son ami. Il pense que la clé doit se trouver dans les deux interventions de Neufix. Aussi découpe-t-il le « mystère » en quatre étapes.

Étape 1	Étape 2	Étape 3	Étape 4
34 671	47 108	10 047	
?	52 891	89 952	234 669

Pour que Neufix puisse écrire la somme finale dès la fin de la première étape, il faut qu'il connaisse la somme des nombres des étapes 2 et 3.

Décimix examine donc de plus près ces deux étapes :

	Étape 2	Étape 3
Décimix	47 108	10 047
Neufix	+52 891	+89 952
	99 999	99 999
Total	200 000 − 2	

Décidément, Neufix ne s'est pas foulé avec ses « grands nombres » : en jouant sur les compléments à 9 de chacun des chiffres donnés par Décimix aux étapes 2 et 3, il sait qu'il lui suffit de retirer 2 au nombre initial et d'écrire le chiffre 2 devant cette différence :

$$34\,671 - 2 = 34\,669 \longrightarrow 234\,669.$$

D'une manière plus générale, si le meneur de jeu impose au départ des nombres de n chiffres avec n « grand », il donne l'impression de se compliquer la vie. En réalité, les étapes 2 et 3 lui permettent de créer deux sommes partielles du type $9 \cdots 9$ (formées de n chiffres 9). Ainsi, il ajoute finalement au nombre initial le nombre $2.10^{n+1} - 2$ (qui s'écrit avec $n+1$ chiffres).

Comme 2.10^{n+1} s'écrit avec le chiffre 2 suivi de n zéros, il exécute sans se fatiguer le processus d'écriture de la mystérieuse somme :

- soustraire 2 du « grand nombre » initial (Mais cela peut changer son nombre de chiffres !)
- écrire le chiffre 2 devant le résultat précédent.

Et voilà Décimix très content : il espère maintenant contrer son ami. En effet,l'idée de devoir additionner des grands nombres, donc le souci de bien mettre en colonnes les chiffres des unités, des dizaines, des centaines, ... l'a conduit à choisir chaque fois un nombre ayant la même longueur que le(s) précédent(s). Il constate maintenant que la longueur des nombres joue un grand rôle dans le jeu. Aussi va-t-il essayer de jouer sur cette longueur pour mettre Neufix en difficulté : il lui demande donc deux nouveaux défis. Les voici résumés :

Étape 1	Étape 2	Étape 3	Étape 4
503 132	347	8 312	
?	999 652	991 687	2 503 130

Étape 1	Étape 2	Étape 3	Étape 4
1 000	3 472	1 234	
?	6 527	8 765	20 998

Neufix est encore gagnant dans le premier cas : il a bien pronostiqué le total final 2 503 130. Mais il ne l'est plus dans le deuxième s'il a pronostiqué 2998. Il lui était pourtant possible de prévoir un petit changement de tactique puisqu'il voit le premier nombre. Peux-tu expliquer à Décimix qu'il était pourtant tout près de trouver une parade que son ami ne pourrait pas voir ?

Dans l'avant-dernier tableau, au lieu de choisir un nombre « plus court », Décimix aurait pu introduire un nombre « plus long » dans l'étape 2. Par exemple, en choisissant 7 654 321 au lieu de 347, il aurait empêché la compensation à 9 999 999 dans l'étape 2. Comme Neufix a déjà écrit son résultat à ce moment, celui-ci sera manifestement trop petit ! A moins que Neufix ne puisse utiliser des nombres négatifs ?

Le triangle sublime (2)

A. Paternottre

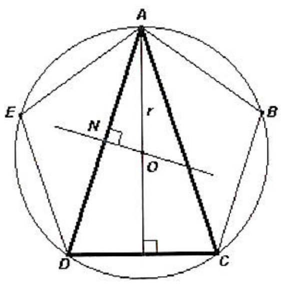
Souviens-toi ! Dans le numéro précédent de Math-Jeunes Junior, nous avons déjà largement abordé le triangle sublime.

Je te rappelle les principaux résultats obtenus :

– Un triangle sublime est, par définition, un triangle isocèle pour lequel le rapport de la longueur du côté à celle de la base vaut le nombre d'or ϕ. Nous avons aussi indiqué comment on pouvait construire un tel triangle.
– Il a ensuite été démontré que l'amplitude de l'angle au sommet d'un triangle sublime est 36°. Celle de chacun des deux angles à la base est donc 72°.
– Enfin nous avons découvert qu'à partir d'un pentagone régulier et convexe, on peut aisément obtenir un triangle sublime en traçant deux diagonales de ce pentagone issues d'un même sommet.

Inversement, à partir d'un triangle sublime, nous pouvons construire un pentagone régulier convexe.

Voici comment procéder :



1. Construire un triangle sublime ADC . (Voir le numéro 110 de Math-Jeunes Junior)
2. Tracer la médiatrice de deux des trois côtés de ce triangle. Elles se coupent au point O.
3. Tracer le cercle de centre O et de rayon $r = |OA|$. C'est le cercle circonscrit au triangle sublime ADC.
4. Avec le compas reporter la base $[DC]$ quatre fois sur le cercle pour obtenir finalement le pentagone régulier convexe $DEABC$.

Et encore. . .

Puisque le triangle sublime possède des angles d'amplitude 36° et 72°, nous pouvons l'exploiter pour calculer les valeurs exactes des nombres trigonométriques de 36° et 72° (resp $\frac{\pi}{5}$ et $\frac{2\pi}{5}$ radians) et par conséquent aussi celles de leurs associés : 144°, 108°, 216° . . . etc . Pour ces derniers, tu utilises bien sûr la réduction au 1er quadrant que tu connais peut-être ou que apprendras prochainement. A dessein, les calculs suivants ne sont pas tous faits dans le dernier détail. Tente donc de les compléter. En ce faisant, tu réalises aussi des exercices sur les radicaux du second degré.

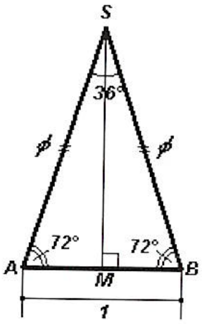
Rappel d'un résultat déjà obtenu dans le n°110 de Math-Jeunes Junior :

$$\cos 36^\circ = \frac{\phi}{2}$$

Dans le triangle sublime ASB tracé ci-dessous, traçons la médiane issue de S dont nous savons qu'elle est aussi, dans un triangle isocèle, médiatrice de la base et bissectrice de l'angle au sommet. Calculons $|SM|$ en appliquant le théorème de Pythagore dans le triangle rectangle SMA :

Math-Jeunes Junior n°111J, 24–26, 2005

$$|SM| = \sqrt{|SA|^2 - |AM|^2} = \sqrt{\phi^2 - (\frac{1}{2})^2} = \sqrt{\phi + 1 - \frac{1}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{4\phi + 3} = \frac{1}{2}\phi\sqrt{\phi + 2}$$



$$\cos 72° = \sin 18° = \frac{|AM|}{|AS|} = \frac{1}{2\phi} = \frac{1}{4}(\sqrt{5} - 1) \approxeq 0.309$$

$$\sin 72° = \cos 18° = \frac{|SM|}{|SA|} = \frac{1}{2}\sqrt{\phi + 2} = \frac{1}{4}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}} \approxeq 0.951$$

$$tg72° = \cot g18° = \frac{|MS|}{|MA|} = \sqrt{4\phi + 3} = \sqrt{5 + 2\sqrt{5}} \approxeq 3.078$$

$$\cos 36° = \sin 54° = \frac{\phi}{2} = \frac{1}{4}(1 + \sqrt{5}) \approxeq 0.809$$

$$\sin 36° = \cos 54° = \sqrt{1 - \cos^2 36°} = \frac{1}{2}\sqrt{3 - \phi} = \frac{1}{4}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}} \approxeq 0.588$$

$$tg36° = \cot g54° = \frac{\sin 36°}{\cos 36°} = \frac{\sqrt{3 - \phi}}{\phi} = \sqrt{5 - 2\sqrt{5}} \approxeq 0.727$$

Suggestion : Si on désigne par « $(1, \phi, \phi)$ » le triangle sublime de la figure ci-dessus, pourrais-tu construire le triangle $(\phi, 1, 1)$ » et calculer l'amplitude de ses angles ? Retrouve-t-on ce triangle dans un pentagone régulier convexe ? Tu peux évidemment utiliser tout ce qui précède.

Et ensuite...

Ayant choisi une unité de longueur, désigne par c_5 la longueur du côté d'un pentagone régulier convexe, inscrit dans un cercle de centre O et de rayon r. Tu peux encore calculer c_5 en fonction de r et inversement. Il te suffit pour cela de travailler dans le triangle rectangle ANO de la première figure ci-dessus et de tenir compte de :

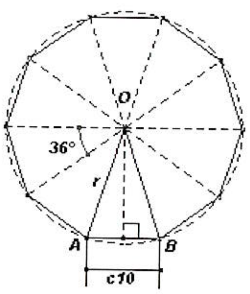
$$\frac{|AD|}{|DC|} = \frac{2|AN|}{c_5} = \phi \Rightarrow c_5 = \frac{2r\cos 18°}{\phi} = r\frac{\sqrt{\phi + 2}}{\phi} = \cdots\ r\sqrt{1 + (\frac{1}{\phi})^2}$$

et finalement tu trouverais :

$$c_5 = \frac{r}{2}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}} \approxeq 1.176r \qquad \text{et} \qquad r = c_5\sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{10}} \approxeq 0.85c_5$$

Et enfin pour en terminer...

Si tu traces la médiatrice de chacun des côtés d'un pentagone régulier convexe et inscrit dans un cercle de centre O et de rayon r, tu obtiens le décagone régulier convexe (longueur du côté $= c_{10}$) inscrit dans le même cercle.



Mais tu peux aussi construire ce décagone à partir d'un triangle sublime. En effet le côté d'un tel décagone est intercepté par un angle au centre de $\frac{360°}{10}$ ou $36°$.Chacun des 10 triangles isocèles de sommet O et de base c_{10} est donc un triangle sublime.

Construis donc un triangle sublime AOB et reproduis-le 9 fois par des symétries orthogonales successives, la 1reayant pour axe $[OA]$. Tu obtiendras finalement un décagone régulier convexe.

Une telle construction est réalisable (laborieusement !) avec la règle et le compas mais bien plus facilement et surtout avec beaucoup plus de précision avec un logiciel de dessin.

$$\frac{1}{2}c_{10} = r \times \cos 18^\circ \Rightarrow c_{10} = 2 \times r \sin 18^\circ = 2r\frac{1}{2\phi} = r\frac{\sqrt{5}-1}{2} \approxeq 0.618.r$$

Voici encore cinq figures géométriques que tu peux tracer à partir d'un pentagone régulier convexe $ABCDE$. La construction des figures 1 et 2 est très facile. Par contre celle de la figure 3 (oeuf) demande quelques explications. La figure 4 est bien connue et est appelée polygone régulier étoilé à 5 branches. Quant à la figure 5 (spirale), je te laisse le soin de la décrypter et de la reproduire !

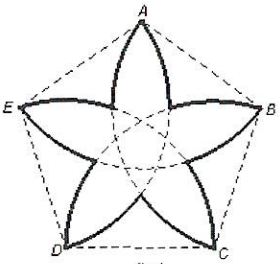


fig 1

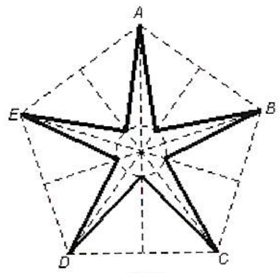


fig 2

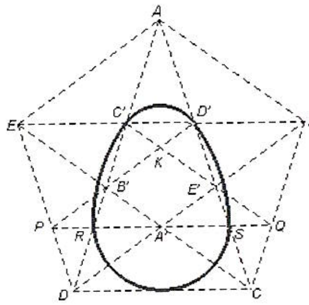


fig 3

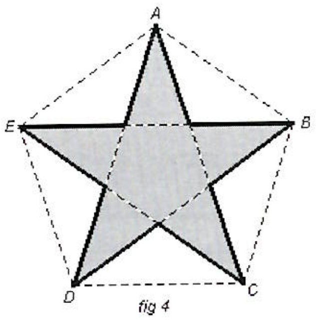


fig 4

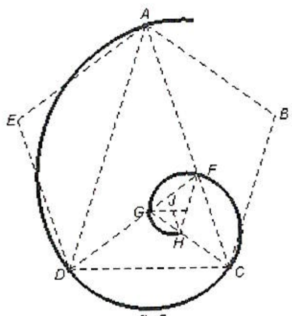


fig 5

Tracé de l'oeuf

1. Tracer toutes les diagonales du pentagone régulier $ABCDE$. Celles-ci, en se coupant 2 à 2, déterminent un second pentagone régulier $A'B'C'D'E'$.
2. La diagonale $[D'B']$ coupe le côté $[DE]$ en P.
   La diagonale $[C'E']$ coupe le côté $[BC]$ en Q.
   $[D'B']$ coupe $[C'E']$ en K.
3. Tracer la droite PQ. Celle-ci coupe $[AD]$ en R et $[AC]$ en S. On peut prouver qu'elle passe aussi par A' et que A' est le milieu de $[RS]$.
4. Tracer les 4 arcs de cercle suivants :
   – l'arc $C'D'$ de centre K et de rayon $|KC'|$

   – le demi-cercle RS de centre A' et de diamètre $|RS|$

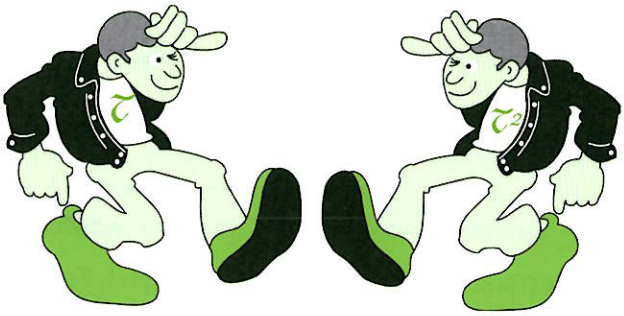
   – l'arc $D'S$ de centre P et de rayon $|PD'|$

   – l'arc $C'R$ de centre Q et de rayon $|QC'|$

Les frères Hick 14

B. Honclaire

Agence de détectives privés
Les frères Hick
Recherches en tous genres



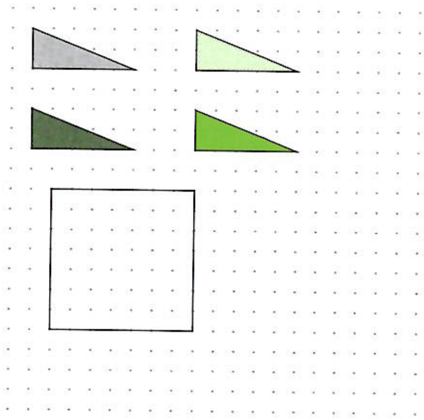
Ami lecteur,

Les frères Hick, Mat ($\mathcal{T}$) et Matt ($\mathcal{T}^2$), te confieront leurs impressions sur le théorème de Pythagore : $\mathcal{T}^2$ est très heureux de l'avoir redécouvert et $\mathcal{T}$, de son côté, est interpellé par une nouvelle question qui se pose à lui au sujet de la fameuse figure illustrant ce théorème !

$\mathcal{T}$ rappellera à son frère comment écrire des nombres en utilisant le signe ! Bon courage et bon amusement.

Bernard Honclaire

$\mathcal{T}^2$ (sans hésitation) -« ***J'ai trouvé trois figures qui correspondent à ce que tu me demandais !***



(pour rappel : Disposer quatre triangles rectangles dont les côtés de l'angle droit mesurent 2 et 5cm, dans des carrés de 7cm de côté, de façon à laisser apparaître un ou plusieurs carrés à l'intérieur.)

Fig.1

Mais j'ai le sentiment que la figure 2 et la figure 4 donnent les mêmes résultats !

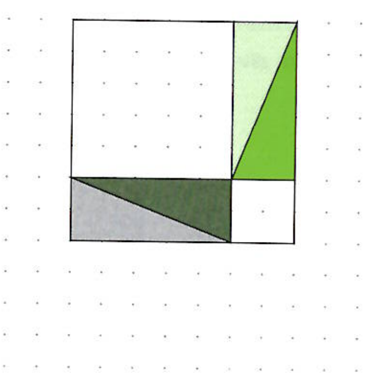


Fig. 2

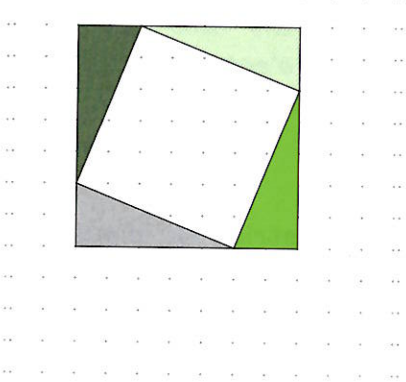


Fig. 3

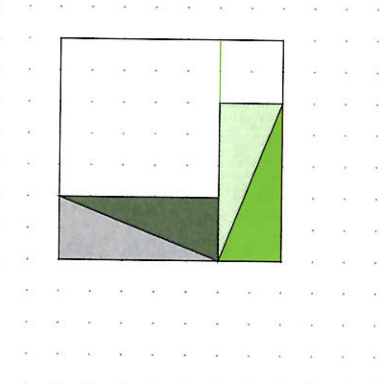


Fig. 4

τ (satisfait) - « *C'est sûr que je me contenterai des figures 2 et 3 par la suite! Mais au fait, tu n'as pas eu de doute pour la figure 3?*

Tu es certain que la figure blanche centrale est un carré? »

τ^2 (dubitatif) - « *...Euh!...Non! ... Les quatre côtés sont les mêmes et c'est comme si on avait fait tourner un triangle à angle droit!* »

τ (amusé) - « *Autrement dit, les triangles sont images par des rotations de 90° et par conséquent le quadrilatère blanc est invariant par rotation de 90°! C'est un carré! Tu peux aussi raisonner sur les angles complémentaires d'un triangle rectangle et en tirer comme conséquence que les angles du quadrilatère blanc sont droits!* »

(voyant son frère froncer les sourcils) *Tu te souviens quand même que dans un triangle rectangle, les deux angles aigus ont une somme de 90°; on les appelle des angles complémentaires!* »

τ^2 (impatient) - « *J'y ai pas pensé! ...Mais, par contre, j'ai réfléchi au problème de la longueur du troisième côté du triangle rectangle ...* »

τ (innocemment) - « *... de l'hypoténuse...* »

τ^2 (en lui-même) - « *...Pythagore... invariant ... hypoténuse.... Si le Capitaine nous lit, il va pouvoir alimenter son stock d'injures ...!* »

(se reprenant) - « *et bien, puisque, dans les deux cas, on enlève quatre triangles du grand carré, on peut dire que le carré blanc de la figure 3 est égal aux deux carrés blancs de la figure 2!...*

- (en lui-même) *j'aurais dû dire ... à leur somme ...*

- il vaut donc $29cm^2 (4+25)$*!* »

τ (insistant) - « *L'aire ... de ce carré égale* $29cm^2$*!* »

τ^2 (soucieux) - « *Quant à son côté!... J'ai pensé que c'était entre 5 cm et 6 cm! ... Puisque 29 est entre 25 et 36!...J'ai donc cherché en mm! Et je t'ai fait un joli tableau! Regarde!*

côté	aire
5,1	26,01
5,2	27,04
5,3	28,09
5,4	29,16
5,5	30,25
5,6	31,36
5,7	32,49
5,8	33,64
5,9	34,81

Tout le tableau n'est pas nécessaire, mais au départ on ne sait pas!
Le côté cherché est entre 53 et 54 mm!
Il aurait fallu passer aux dixièmes de mm , mais c'est tellement petit! Enfin avec une calculatrice...! »

τ (amusé) - « *Tu sais, avec ta calculatrice, tu disposes de la touche* $\sqrt{}$ *. Et tu as alors toutes les précisions que tu veux!* »

τ^2 (se précipitant sur sa calculatrice) - « *C'est vrai! Je l'avais oubliée celle-là!...*

$$29 \xrightarrow{\sqrt{}} 5,3851648$$

C'est rapide ... mais j'ai bien plus de précisions qu'il ne m'en faut ! »

Ƭ (magistral) - « *Tu sais, nous noterons dorénavant ce nombre* $\sqrt{29}$ »

Ƭ^2 (ironique et tout bas) - « *... Encore une invention prodigieuse !... D'accord ça explique comment on fait ! ... Mais si je veux vérifier avec ma latte, ce n'est pas ça qui va m'aider !...* »

Ƭ - « *... Attention, la calculatrice ne nous donne qu'une bonne approximation ! 5,3851648 n'est pas la valeur exacte : si on prend son carré, on trouve un nombre proche de 29 qui comporte 14 chiffres après la virgule ! En fait* $\sqrt{29}$ *a une écriture décimale illimitée ! Mais c'est une autre histoire !... Peut-être plus tard ! ...* »

Ƭ^2 (songeur et tout bas) - « *... J'ai déjà entendu une histoire semblable* (1) *! ... J'ai failli en attraper des complexes !...* »

Ƭ (poursuivant) - « *Je dois te montrer une façon élégante de placer les trois carrés que tu as trouvés sur le triangle rectangle donné !* »

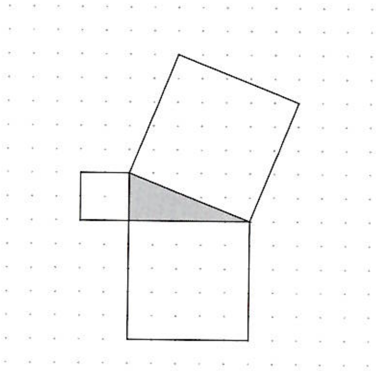


Fig.5

« *Le théorème de Pythagore dit que le carré construit sur l'hypoténuse d'un triangle rectangle est égal à la somme des carrés construits sur les deux autres côtés. Il reste à généraliser !*
Nous prendrons un triangle rectangle dont les mesures des côtés de l'angle droit sont a *et* b.
Peux-tu exprimer les aires des figures 2 et 3 ? »

Ƭ^2 (pris au dépourvu) - « *Euh !... Le grand carré a comme côté* $a+b$*... donc son aire c'est* $(a+b)\times(a+b)$... (ajoutant ironiquement) *que tu voudras sans doute me faire écrire* $(a+b)^2$ *... les triangles rectangles ont comme aire* $\dfrac{ab}{2}$ *...*
donc pour les quatre cela fera $2ab$*... pour le carré blanc de la figure 3 ... j'ai donc* $(a+b)^2-2ab$*... et je cale...* »

Ƭ (fier de son frère) - « *Tu y es presque ! Regarde la figure 2 : tu peux aussi la regarder comme étant formée de deux carrés et de quatre triangles...* »

Ƭ^2 (le coupant net et très excité) - « *Mais, c'est bien sûr ! ... Stop ! Je continue ! ...* $(a+b)^2$ *peut donc s'écrire* a^2+b^2+2ab *je retire* $2ab\cdots$ *il me reste* a^2+b^2 *le carré de l'hypoténuse est donc la somme des deux autres carrés !* »

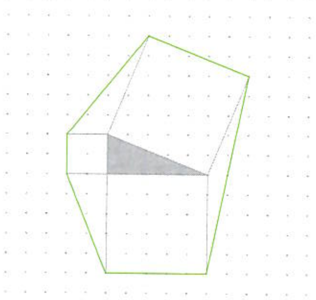


Fig. 6

Ƭ (tel un magicien) - « *Je fais apparaître un hexagone vert ! Et je me demande quelle est son aire ? Dans le cas de l'exemple et dans le cas général ! Que se passe-t-il si le triangle de départ n'est pas un triangle rectangle ?* »

Ƭ^2 (écroulé de rire) - « *Pythagore va se casser la figure !* »

Ami lecteur, peux-tu aider Ƭ à répondre à ces questions ?
Bon courage, bon amusement et à l'année (scolaire) prochaine !

à suivre

(1) voir Hick2,n°97J

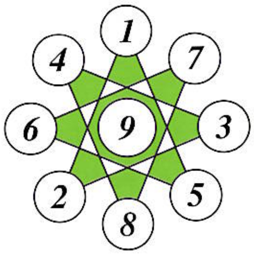
Solutions des jeux des pages 15,16,17

1. Vrai ou faux

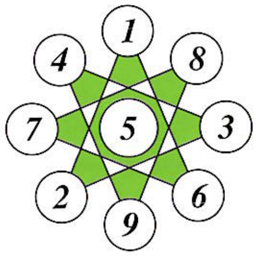
A est vrai, B est vrai, C est faux, D est vrai, E est faux et F est vrai.

2. Des chiffres en étoile

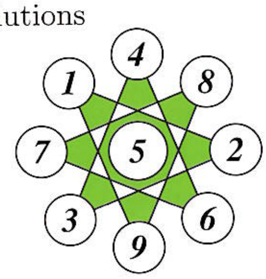
2.1.

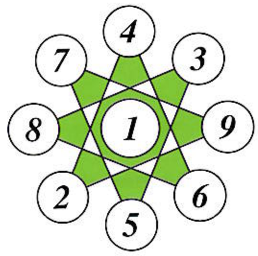


2.2.



2.3. Deux solutions





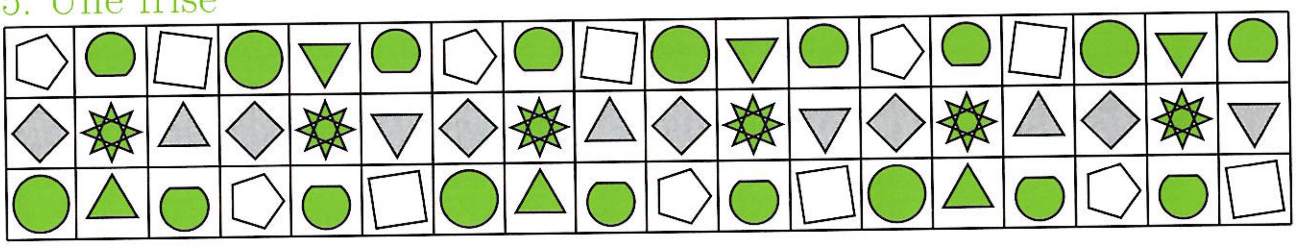
3. Ni pavage, ni labyrinthe

7	1	3	8	4	8	6	7	5
2		5		1		3		8
4	8	6	2	7	5	2	4	1
1		3		1		3		8
7	2	5	8	4	8	6	7	5
4		6		3		1		8
8	3	1	2	7	5	2	4	3
5		4		3		1		7
7	2	6	5	8	4	6	8	5

4. Comptage des diviseurs.

Nombre de diviseurs	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Le plus petit	1	2	4	6	16	12	64	24	36	48		72
Le plus grand	1	97	49	94	81	99	64	54	100	80		98

5. Une frise



6. Des symétries « miroir »

En utilisant deux miroirs dos à dos, on obtient les paires $\{1,2\}$, $\{3,6\}$ et $\{4,5\}$.

Math-Quiz

Nous remercions et nous félicitons très vivement tous ceux qui ont bien voulu chercher des réponses aux questions proposées à l'occasion du concours Math-Quiz 2004-2005, qu'ils nous aient envoyé les résultats de leurs travaux ou non !

Ils ont ainsi fait la preuve de leur intérêt envers les mathématiques en même temps que de leur sagacité. Nous exprimons également notre gratitude aux enseignants qui ont incité leurs élèves à participer et/ou qui ont utilisé les questions dans le cadre de leur cours.

Vous trouverez ci-dessous les réponses attendues aux questions de la première étape.

Question n°	Réponse	Question n°	Réponse
1	6	6	18
2	1,25	7	7
3	6	8	$\frac{1}{21}$
4	400	9	2
5	99	10	56

Voici maintenant les réponses aux questions de la deuxième étape.

Question n°	Réponse	Question n°	Réponse
11	2	16	rouge
12	60	17	72
13	500	18	24
14	1080	19	256
15	1	20	6244

Rappelons encore une fois qu'un doute, un désaccord, une interrogation au sujet d'une réponse,..., constituent en fin de compte autant d'occasions d'en parler en classe avec vos condisciples et/ou votre professeur ! Cela offre ainsi des possibilités d'effectuer des rappels de matières déjà rencontrées au cours ainsi que des sujets de discussions et d 'échanges de points de vue.

Il y avait quelques modestes pièges à éviter et peut-être aussi parfois la nécessité de connaître une matière pas encore rencontrée. Cela offrait donc également l'opportunité d'un premier contact avec ces éléments nouveaux et en préparait une éventuelle étude future plus fouillée.

Tableau d'honneur de la deuxième étape (ordre alphabétique)

Nom et prénom de l'élève	Commune	Classe	Ecole
Beaujean Audrey	Wezembeek-Oppem	3	Sacré-Coeur de Lindhout (Bruxelles)
Cambron Blandine	Brûly	3	Collège St Joseph Chimay
Classe de 2Aa-Athénée	Waismes	2	Athénée Royal de Waismes
Classe de 3Ga-Athénée	Waismes	3	Athénée Royal de Waismes
Coquelet Danae	Sivry	1	Collège St Joseph Chimay
Dauphin Guillaume	Saint-Gilles	2	Lycée Daschsbeck Bruxelles
Demany Martial	Lobbes	1	Athénée Royal de Thuin
Jesupret Clémence	Vellereille les B	4	Collège ND de Bonne Espérance
Monin Thomas	Momignies	1	Collège Saint Joseph Chimay
Nguyen Thi Tuyet Minh	Liège	4	Collège Saint Louis Liège
Rosen Justine	Waismes	2	Athénée Royal de Waismes
Rousseaux Vincent	Chimay	2	Collège St Joseph de Chimay
Simon Valentin	Virelles	1	Collège St Joseph de Chimay
Thonet Adrien	Bourlers	2	Collège St Joseph de Chimay
Van Lerberghe Rémi	Virelles	1	Collège St Joseph de Chimay

Classement général (sur les deux étapes)

Nous avons reçu l'appui appéciable de la firme DEXXON Belgium, distributrice notamment des calculatrices scientifiques & graphiques CASIO ainsi que des dictionnaires et traducteurs électroniques FRANKLIN. Elle dote le concours Math-Quiz d'un certain nombre de ces matériels.

Classement final du Math-Quiz 2004-2005

Obtiennent un premier prix

Nom et prénom	Commune	Classe	Ecole
Rousseaux Vincent	6460-Chimay	2	Collège St Joseph de Chimay
Thonet Adrien	6464-Bourlers	2	Collège St Joseph de Chimay

Obtiennent un deuxième prix

Nom et prénom	Commune	Classe	Ecole
Dauphin Guillaume	1060-Saint Gilles	2	Lycée Daschsbeck Bruxelles
Cambron Blandine	5660- Bruly	3	Collège St Joseph Chimay
Rosen Justine	4950-Waismes	2	Athénée Royal de Waismes
Jesupret Clémence	7120-Vellereille les B	4	Collège ND de Bonne Espérance

Obtiennent un troisième prix

Nom et prénom	Commune	Classe	Ecole
Simon Valentin	6461-Virelles	1	Collège St Joseph Chimay
Beaujean Audrey	1970-Wezembeek-Oppem	3	Sacré-Coeur de Lindhout (Bruxelles)
Monin Thomas	6590-Momignies	1	Collège St Joseph Chimay
Demany Martial	6540-Lobbes	1	Athénée Royal de Thuin

Prix spéciaux (travail collectif)

Nom et prénom	Commune	Classe	Ecole
Classe de 3Ga	4950-Waismes	3	Athénée Royal Waismes
Classe de 2Aa	4950-Waismes	2	Athénée Royal Waismes

Tous ces lauréats recevront sous peu, à leur adresse, la calculatrice ou le traducteur qui leur a été attribué.

Encore une fois, félicitations à ces lauréats.

Concours annexe :

Les projets retenus seront publiés dans la revue Math-Jeunes Junior 2005-2006.

Nous vous souhaitons une bonne fin d'année scolaire et vous invitons à vous préparer à participer au Math-quiz 2005-2006.

ANNONCE IMPORTANTE

Nous vous rappelons que ce numéro (MJJ 111) est le dernier de l'abonnement pour l'année scolaire 2004-2005.

Un conseil aux élèves et professeurs : réabonnez vous dès que possible avant même les grandes vacances afin de ne pas oublier.

Comment s'abonner ou se réabonner ?... rien de plus simple :

vous versez la somme de :

pour un abonnement individuel :

- 6 euros pour l'abonnement à une des deux revues
- 11 euros pour les deux revues ensemble (MJ et MJJ).

pour les abonnements groupés, à partir de 5 exemplaires

- 4 euros pour l'abonnement à une des deux revues
- 7 euros pour les deux revues ensemble(MJ et MJJ)

sur notre CCP :000-0728014-29

en n'oubliant pas d'indiquer en communication « abonnement MJJ année 2005-2006 ».

Merci pour votre fidélité...

La Rédaction de Math-Jeunes Junior

Math-Jeunes Junior
Périodique trimestriel
15, rue de la Halle – 7000 Mons
Bureau de dépôt 7000 Mons 1

Responsable de l'édition: A. PATERNOTTRE
Rue du Moulin 78 – 7300 Boussu
Bureau de dépôt : Mons 1

Autorisation de fermeture
Sluitings toelating

7000 Mons 1
5/156

Belgique - België
P.P.
7000 Mons 1
5/124

Périodique - Peut être ouvert pour contrôle postal

Réservé à la poste

Inconnu
Refusé
Décédé
Adresse insuffisante
N'habite plus à l'adresse indiquée