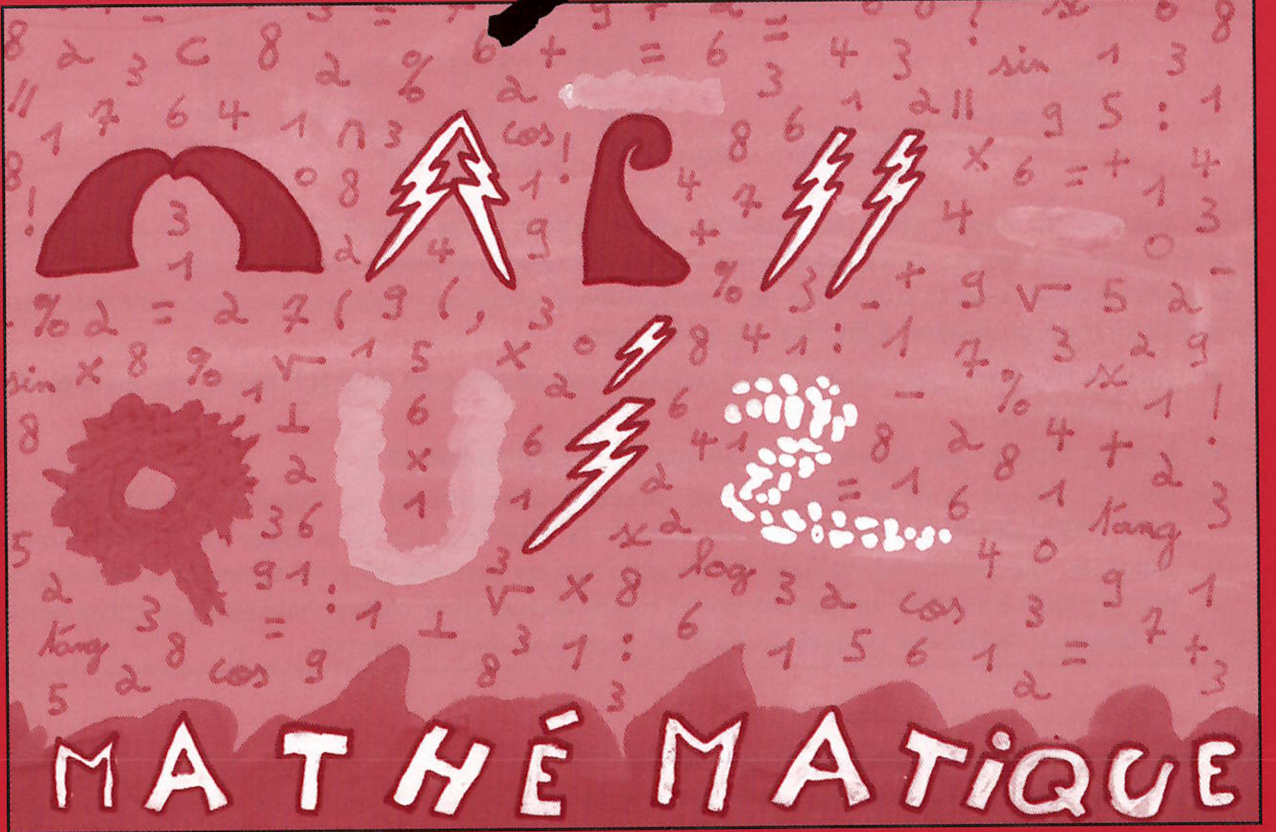
Math Junior



Rousseau Vincent 2e Chimay

27e année - N° 112j
Novembre 2005

Math-Jeunes et Math-Jeunes Junior

Revues trimestrielles publiées par la Société Belge des Professeurs de Mathématique d'expression française

Secrétariat : M.-C. Carruana, SBPMef, rue de la Halle 15, 7000 Mons, ☎-FAX 32-(0)65-373729, GSM : 0473973808 e-mail : sbpm@sbpm.be, URL : http://www.sbpm.be.

Tarifs

Abonnements groupés (au moins 5)		
	Une des deux revues	Les **deux** revues
Belgique	4 €	8 €

Abonnements individuels				
	Une des deux revues		Les **deux** revues	
Belgique	6 €		12 €	
France (abonnement(s) pris par l'intermédiaire de l'APMEP)	8€		16€	
	⊠	⚡⊠	⊠	⚡⊠
Europe	18 €	20 €	24 €	26 €
Autres pays	19 €	22 €	25 €	28 €

Légende : « prior »=⚡⊠, « non prior »=⊠.

Trois numéros de chaque revue sont publiés annuellement. Pour connaître la liste des anciens numéros encore disponibles et leur prix selon votre localisation, adressez-vous au secrétariat.
Les abonnements destinés aux élèves de l'enseignement secondaire sont de préférence pris par l'intermédiaire d'un professeur. Effectuez vos paiements :

- ☞ pour la Belgique : par virement au Compte n°000-0728014-29 de *S.B.P.M.e.f.*, rue de la Halle 15, 7000 Mons
- ☞ pour la France : par virement au Compte CCP Lille 10 036 48 S
- ☞ pour l'étranger (sauf la France) : par virement international au Compte n°IBAN: BE 26 0000 7280 1429 BIC: BPOTBEB1 au nom de la *SBPMef*, rue de la Halle 15, B 7000 Mons, Belgique. Les personnes résidant à l'étranger qui ne peuvent faire un virement à ce compte sont invitées à envoyer un mandat postal international. Tout chèque bancaire non encaissable en Belgique devra être majoré de 12,50 € pour frais d'encaissement.

Éditeurs responsables et rédacteurs en chef :

– pour *Math-Jeunes* : G. Noël, Rue de la Culée 86, 6927 Resteigne

– pour *Math-Jeunes Junior* : A. Paternottre, Rue du Moulin 78, 7300 Boussu

N°112J Vingt-sixième année 2005

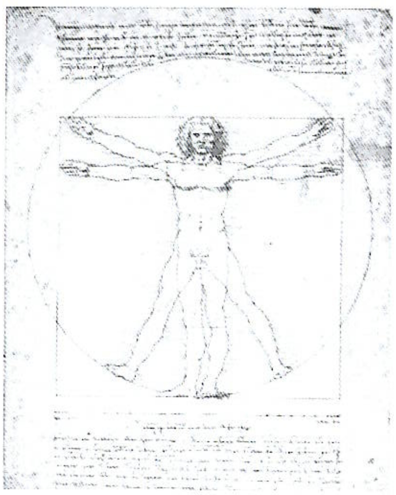
MATH-JEUNES JUNIOR

Sommaire

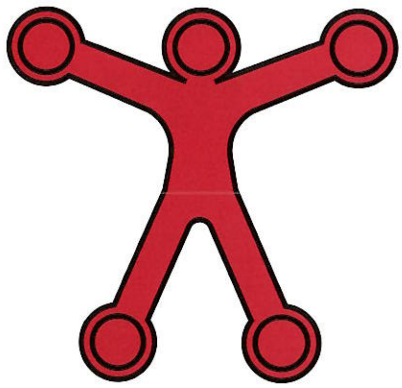
Tapisseries et frises (1)

Y. Noël-Roch

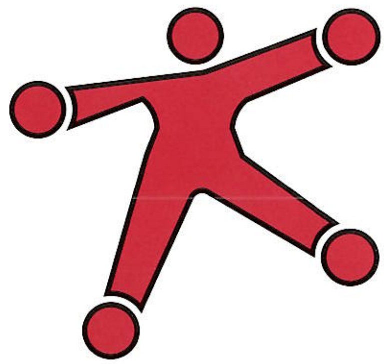
La naissance de Narcisse



L'homme de Vitruve par Léonard de Vinci.



Le module des *Iles de Paix* de Paul Gonze.



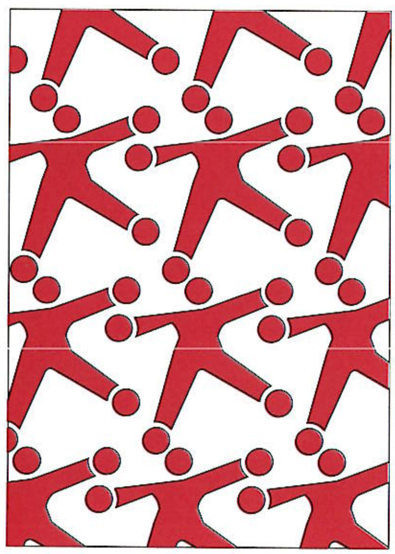
Moi, Narcisse Vitruve, personnage de *Math-Jeunes Junior*.

Translations et des symétries orthogonales

J'aime me promener.

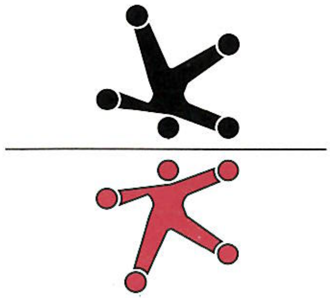
Les mathématiciens disent que je me *translate*.

Moi et mes translatés, envahissons la feuille ... le plan ... y créant la tapisserie *Vitruve 1* !



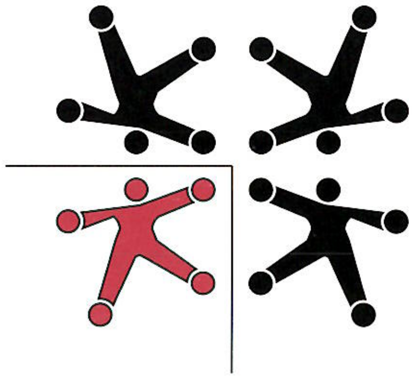
Vitruve 1

J'aime me regarder dans un miroir.



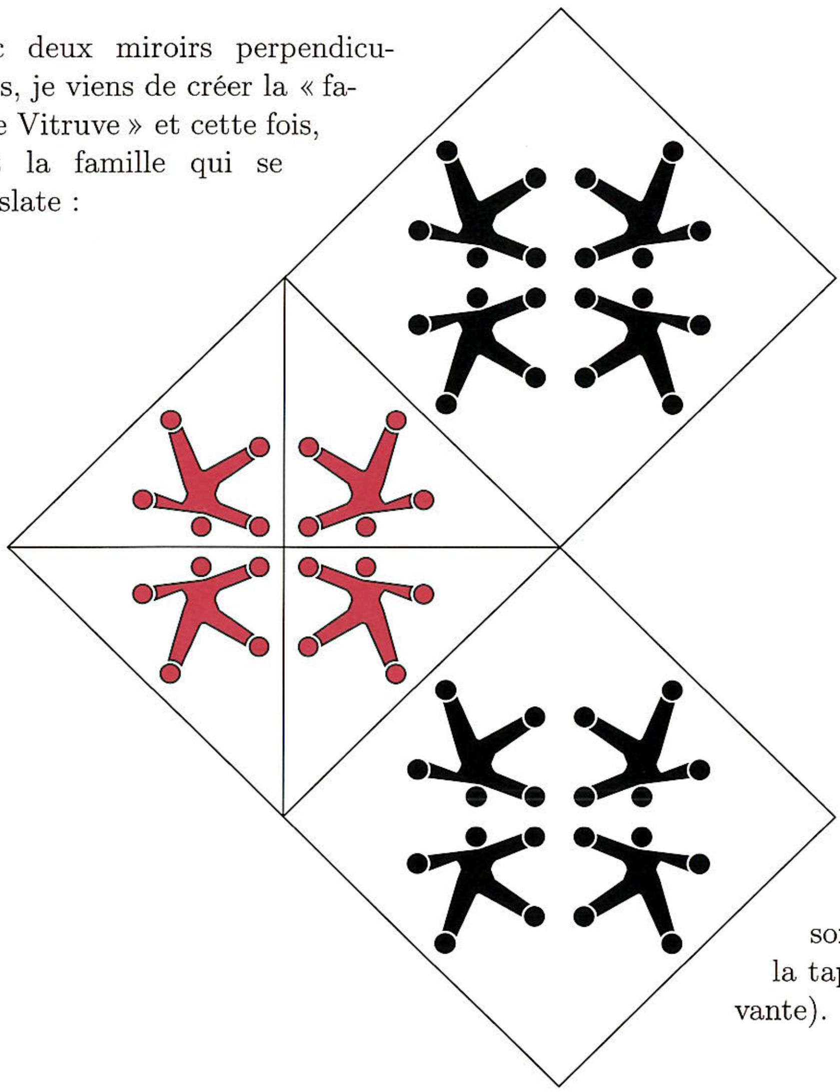
Les mathématiciens disent que je contemple mon *symétrique*.

Mieux, j'aime me regarder dans deux miroirs perpendiculaires.



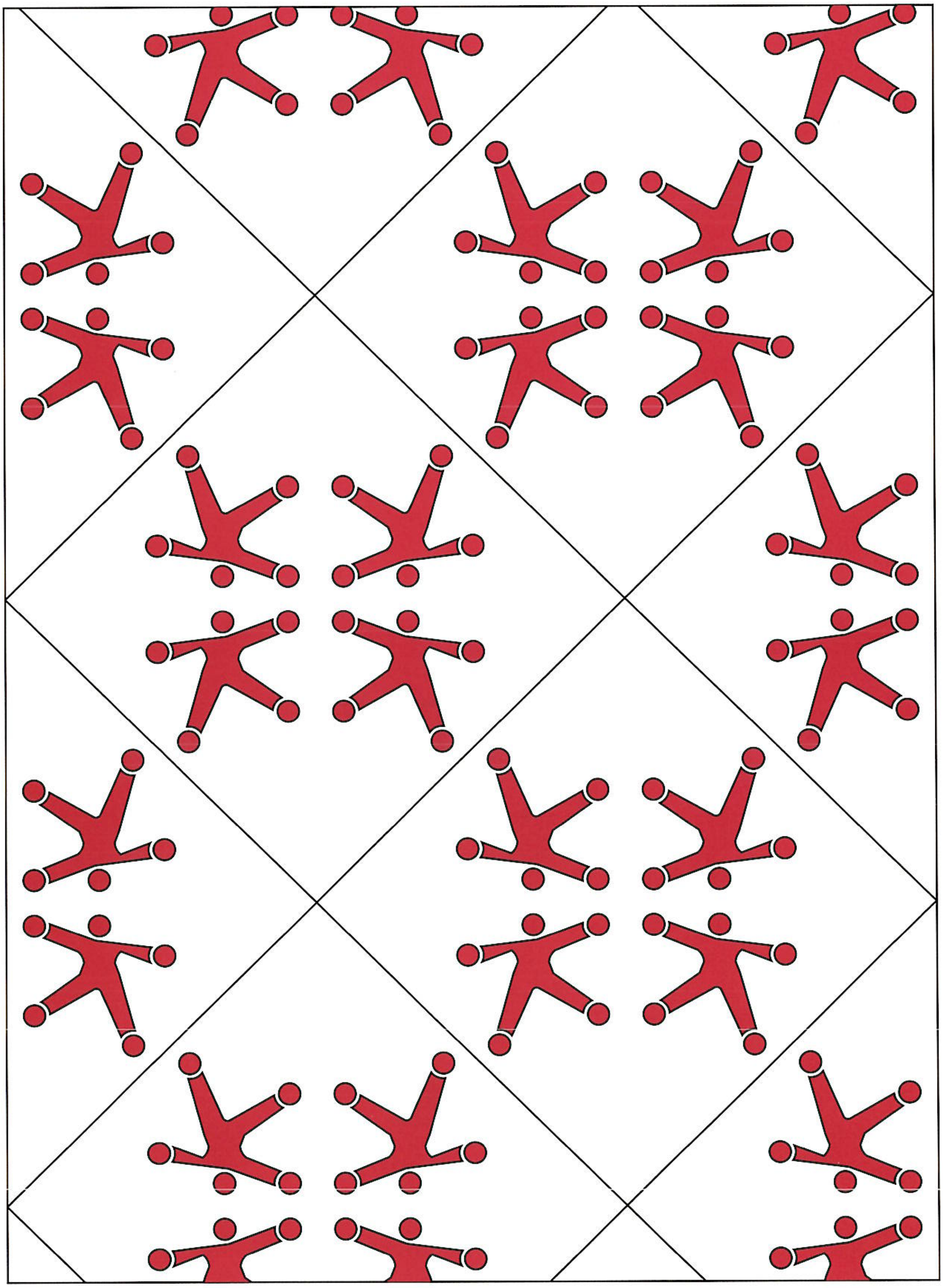
Cette fois, les mathématiciens m'attribuent deux frères (par deux *symétries axiales*) et un troisième (par une *symétrie centrale*)

Avec deux miroirs perpendiculaires, je viens de créer la « famille Vitruve » et cette fois, c'est la famille qui se translate :



En famille, nous envahissons la feuille… le plan, créant la tapisserie *Vitruve 2* (page suivante).

Compare les tapisseries *Vitruve 1* et *Vitruve 2* . Dans les deux cas, deux translations interviennent fondamentalement.



Vitruve 2

Des transformations et des composées de ...

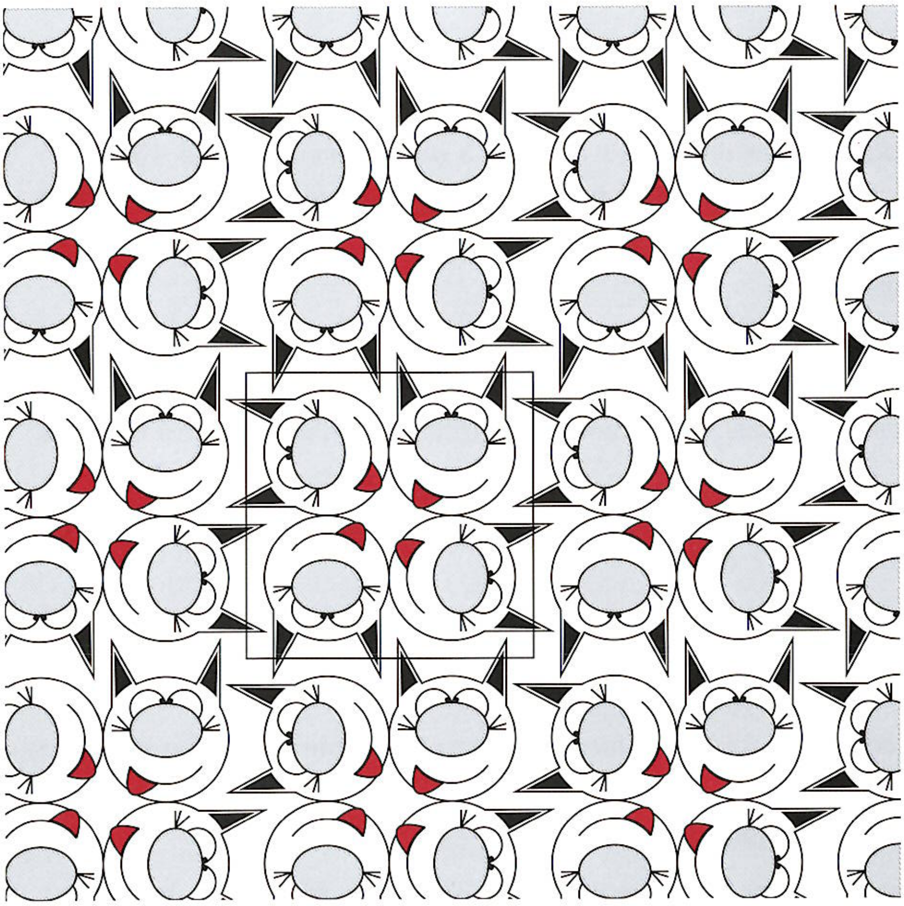
La tapisserie *Vitruve 2* a été créée progressivement : Narcisse s'est créé une famille et cette famille a ensuite envahi le plan.

Tu peux aussi observer des **détails** de cette tapisserie. Parmi tous les sosies, commence par choisir qui est Narcisse. Tu peux ensuite trouver sur la tapisserie ou imaginer dans son prolongement au plan

- Narcisse et son image par différentes translations,
- Narcisse, son image par une translation et l'image de cette image par la même translation,
- Narcisse et son image par une symétrie axiale, par une symétrie centrale,
- Narcisse, son image par une symétrie axiale et l'image de cette image par une autre symétrie axiale,
- Narcisse, son image par une symétrie axiale et l'image de cette image par une translation.

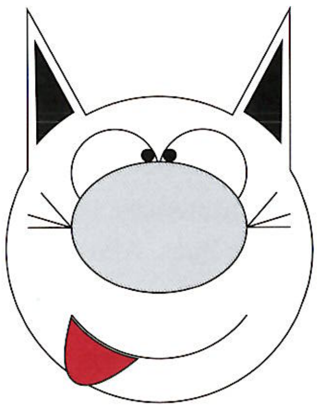
Si les transformations ne te sont pas suffisamment familières, aide-toi en décalquant Narcisse sur un papier transparent. Tu pourras ensuite faire glisser ce calque, le retourner, le faire tourner autour d'un point où il sera maintenu par la pointe de ton crayon ... Tu concrétiseras ainsi les notions de translation, symétries (axiale et centrale) et tu pourras même découvrir une transformation que nous avons rencontrée sans le dire, la rotation.

Une autre tapisserie : *Le chat 1*



Lechat 1

Cette tapisserie présente des ressemblances ... mais aussi des différences avec la tapisserie *Vitruve 2*. Peux-tu analyser ces ressemblances et ces différences ? Nous y reviendrons dans *Math-Jeunes Junior* n°113, en compagnie de Mistigrou.



UnPlusUn

Claude Villers

Dénombrements/1

Observations

Vous savez très certainement que l'ensemble N des nombres naturels est l'ensemble $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \ldots\}$ et, que pour y passer d'un élément à son suivant, il suffit de savoir « ajouter 1 ».

Cet ensemble peut paraître assez banal. Mais un peu de curiosité permet aussi de mener une réflexion fructueuse.

Ainsi, si nous n'utilisons que les éléments non nuls de N et l'addition, la seule façon d'écrire le nombre 1 est de noter 1 lui-même.

Par contre, il existe deux façons différentes d'écrire 2.

Ce sont : $1 + 1$ qui comporte 2 termes et 2 lui-même qui n'en comporte que 1, bien entendu.

Ces deux façons diffèrent par la valeur des termes utilisés.

Et pour 3 ?

Ecrivons-les toutes, en convenant qu'elles doivent différer non seulement par la valeur d'au moins un des termes utilisés mais aussi par la place qu'ils occupent.

Vous avez certainement déjà trouvé toutes ces façons d'écrire 3 selon ces conditions. Ce sont : $1 + 1 + 1$ (3 termes), $1 + 2$ et $2 + 1$ (2 termes) ainsi que 3 (1 terme). Ce qui fait un total de 4 façons d'écrire ainsi le nombre 3.

Persévérons dans notre recherche.

Pour 4, nous trouvons : $1 + 1 + 1 + 1$ (4 termes), $1 + 1 + 2$, $1 + 2 + 1$ et $2 + 1 + 1$ (3 termes), $1 + 3$, $3 + 1$ et $2 + 2$ (2 termes) et 4 (1 terme) soit donc un total de 8 façons.

Vous avez certainement remarqué que nous avons énoncé ces différentes façons en les classant selon leur nombre de termes.

Pour 5, nous savons maintenant que nous écrirons successivement des sommes de 5 termes, de 4 termes, de 3 termes, de 2 termes et de 1 terme.

Ces sommes sont : : 1 + 1 + 1 + 1 +1 , 1 + 1 + 1 + 2, 1 + 1 + 2 + 1, 1 + 2 + 1 + 1, 2 + 1 + 1 + 1, 1 + 2 + 2, 2 + 1 + 2, 2 + 2 + 1, 1 + 1 + 3, 1 + 3 + 1, 3 + 1 + 1, 1 + 4, 4 + 1, 2 + 3 , 3 + 2 et 5 soit donc 16 façons (ouf!).

Vous êtes maintenant invités à rechercher toutes les façons d'écrire 6 comme somme de nombres naturels non nuls. Allez-y !

Faites l'effort de ne pas lire trop vite la suite de ce texte.

C'est fait ? Si vous avez bien travaillé, vous devez avoir trouvé 32 façons différentes. Résumons nos trouvailles dans un petit tableau.

Nombre	1	2	3	4	5	6
Nombre de façons	1	2	4	8	16	32

Une conjecture apparaît clairement.

Il semblerait que le nombre de façons d'écrire le naturel n est obtenu en élevant 2 à la puissance $n-1$.

Ainsi pour 10, il devrait y avoir $2^{10-1} = 2^9 = 512$ façons différentes de l'écrire comme somme de nombres naturels non nuls.

Pour le naturel 31, ce serait $2^{31-1} = 2^{30} = 1073741824$

Bon amusement si vous souhaitez les réaliser toutes.

L'emploi du conditionnel dans l'affirmation précédente se justifie par le fait qu'une conjecture n'est pas une certitude. Pour pouvoir utiliser la formule conjecturée, il faut démontrer sa validité pour tout n naturel non nul.

Vers une démonstration !

Essayons donc d'aller plus loin dans notre recherche.

Nous allons continuer à dénombrer les façons en question en les regroupant selon leur nombre de termes. Les nombres de façons obtenus précédemment, se trouvent indiqués dans la partie doublement encadrée de ce tableau.

		Nombre de termes des sommes					
		1	2	3	4	5	6
Nombres	1	1					
	2	1	1				
	3	1	2	1			
	4	1	3	3	1		
	5	1	4	6	4	1	
	6	1	5	10	10	5	1

Les totaux de chaque ligne dans cette partie doublement encadrée sont bien 1, 2, 4, 8, 16 et 32.

En outre, la présentation de ces nombres doit peut-être vous rappeler quelque chose. Il s'agit du (fameux) triangle de Pascal qui possède une grande utilité en mathématique. Pour ceux qui le rencontrent pour la première fois, ajoutons qu'il peut encore s'écrire sous la forme suivante.

```
                    1
                1       1
            1       2       1
        1       3       3       1
    1       4       6       4       1
1       5       10      10      5       1
etc...
```

Chaque ligne commence et finit par 1 et chaque autre nombre y est la somme des deux nombres de la ligne précédente qui le surmontent .

Vous pouvez donc poursuivre l'écriture de ce triangle de Pascal aussi loin que vous le souhaitez.

Ainsi pour le naturel qui suit 6 (c'est à dire 7), la ligne utile du triangle de Pascal serait :

$$1 \quad 6 \quad 15 \quad 20 \quad 15 \quad 6 \quad 1$$

Elle fournit, par addition, le nombre total de façons d'écrire 7 (à l'aide de naturels bien entendu) soit $1 + 6 + 15 + 20 + 15 + 6 + 1$ soit 64 qui d'ailleurs vaut bien 2 à la 6^e puissance.

Les deux méthodes de dénombrement fournissent (heureusement) le même résultat.

Mais nous sommes toujours restés dans le domaine du constat et de sa (dangereuse) généralisation.

Comment pourrions-nous démontrer que cette formule est correcte ? ? ?

Il existe certainement de nombreuses méthodes pour y arriver. Cela peut constituer un beau sujet d'activité pour votre classe.

En voici une, relativement abordable. Elle demande un peu d'attention de votre part.

Commençons par un exemple : le cas du nombre naturel 7 (cfr ci-dessus).

On a : $7 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1$ qui comporte 7 termes 1 et donc 6 fois le signe +.

Ce sont ces signes + qui vont retenir notre attention.

Pour obtenir une façon d'écrire 7 comme somme de naturels, il faut et il suffit d'activer certains de ces signes + et de neutraliser tous les autres.

Ainsi $1 + \underline{1 + 1} + 1 + \underline{1 + 1} + 1$ fournit $1 + 2 + 1 + 2 + 1$

Et $\underline{1 + 1 + 1} + 1 + 1 + \underline{1 + 1}$ donne $3 + 1 + 1 + 2$.

Voici le principe de la démonstration.

Toutes les façons d'écrire 7 comme somme de naturels correspondent à toutes les façons d'activer ou non les 6 signes +.

Peut-être pensez-vous maintenant que le problème a seulement été déplacé.

Voici maintenant la partie délicate de la recherche. Soyez attentif !

Au départ, on dispose de 6 signes + (+ + + + + +) encadrés du nombre unitaire 1.

Pour montrer qu'un signe + est neutralisé on indique le signe 0 et s'il est activé on indique 1.

Ainsi $1 + 1 \underline{+ 1} + 1 + \underline{1 + 1} + 1$ correspond à 010010 (les 2^e^et 5^e^signes + sont activés) tandis que $\underline{1 + 1 + 1} + 1 + 1 + \underline{1 + 1}$ correspond à 110001 (les 1^er^, 2^e^et 6^e^signes + sont activés).

Chaque façon de former 7 comme somme de nombres naturels correspond donc à un code comportant 6 chiffres qui sont 0 ou 1.

Ces codes sont, en fait, des nombres naturels écrits en numération binaire (de base 2) et comportant 6 chiffres qui sont soit 0 soit 1.

Le plus petit sera 000000 qui indique qu'aucun signe + n'est activé et qui correspond donc à l'écriture 1+1+1+1+1+1+1.

Le plus grand sera 111111 qui indique que tous les signes + sont activés et qui correspond donc à l'écriture 7.

Il y a donc autant de façons d'écrire 7 comme somme de nombres naturels qu'il y a de codes binaires de 000000 à 111111.

Que vaut le binaire111111 dans le système décimal ?

Le tableau de la numération décimale des nombres naturels est :

...	...	1000000	100000	10000	1000	100	10	1

et celui de la numération binaire est

...	128	64	32	16	8	4	2	1
			1	1	1	1	1	1

Donc le binaire 111111 vaut le décimal 1 + 2 + 4 + 8 +16 + 32 (en comptant de droite à gauche) soit donc 63.

Et de 0 à 63, il y a 64 nombres naturels.

De même, si n est un nombre naturel alors il peut s'écrire $1 + 1 + 1 + \ldots + 1 + 1$ et cette somme comporte n chiffres 1 et donc $n - 1$ signes +.

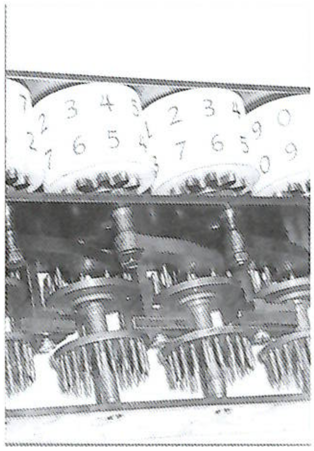
Il y a donc autant de façons d'écrire n comme somme de nombres naturels qu'il y a de codes binaires possédant $n - 1$ chiffres.

Comme il y a chaque fois 2 possibilités pour la valeur de chaque chiffre (0 ou 1) et que les possibilités se multiplient, leur nombre est $2 \times 2 \times \cdots \times 2 \times 2$ (produit de $n - 1$ facteurs) soit donc 2^{n-1}.

C'est bien ce que nous avions conjecturé !

BLAISE PASCAL (1623-1662)

(Complément par Simone Trompler)

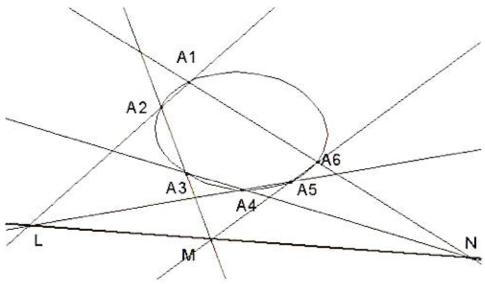


Blaise Pascal est souvent considéré comme un génie. Extraordinairement précoce, il s'intéresse aux mathématiques dès son plus jeune âge. A 12 ans, sans aide ni explication, il retrouve des propriétés des éléments d'Euclide. A 19 ans, il construit une machine à calculer, appelée la Pascaline.

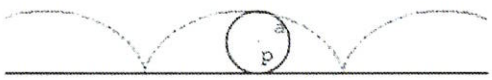
Il fréquente le cercle des mathématiciens autour du père Mersenne et y rencontre les plus grands noms de son époque. A partir de 1650 il s'intéresse aux suites de nombres entiers.

Le « triangle de Pascal » était connu avant lui, mais c'est lui qui l'a étudié systématiquement et préparé ainsi le binôme de Newton.

Par sa correspondance avec Fermat, il devient avec lui le fondateur de la théorie des probabilités. Il s'est aussi intéressé à la géométrie des coniques et l'un de ses théorèmes a revêtu une grande importance en géométrie projective : il démontre que les côtés opposés d'un hexagone inscrit à une ellipse se coupent en des points alignés. Pascal appelait cet hexagone « l'hexagone mystique » ; nous l'appelons l'hexagone de Pascal



Il étudie la cycloïde (qu'il appelle la roulette), calcule son centre de gravité, l'aire d'une arche et le volume de révolution autour de sa base.



Mais Pascal n'était pas seulement un remarquable mathématicien, il était aussi physicien et sa contribution à cette science a été fondamentale. Nous connaissons évidemment le principe de Pascal sur la pression dans les fluides. Par sa célèbre expérience faite en même temps au sommet et au pied du Puy de Dôme en 1648, il a prouvé que la pression atmosphérique diminue avec l'altitude et que le vide existe, mettant fin ainsi à la croyance selon laquelle « la nature a horreur du vide ».

En 1654 il fut victime d'un grave accident et faillit perdre la vie. Dès lors, il consacra sa vie à la religion et la philosophie. En mauvaise santé depuis longtemps, il mourut à 39 ans.

Fascinants et énigmatiques nombres premiers(1)

A. Paternottre

Dans l'ensemble des nombres naturels, s'il est un sous-ensemble qui, depuis toujours, a fasciné les mathématiciens, c'est bien celui des nombres premiers.

A leur propos, il existe bien sûr des certitudes c'est-à-dire des propriétés démontrées. Mais il existe aussi pas mal d'incertitudes constituant autant d'énigmes qu'on tente toujours de tirer au clair de nos jours. Je vous propose donc un double mini-voyage dans l'univers des nombres 1ers. Dans ce premier article nous nous intéresserons aux certitudes et dans le prochain article, aux incertitudes.

Et tout d'abord qu'est-ce qu'un nombre 1er ?

> Un nombre naturel est $1^{\text{er}} \Leftrightarrow$ il ne possède que deux diviseurs naturels distincts : lui-même et 1

Sur base de cette définition, justifie que :

1. Parmi les nombres 1^{ers}, le seul qui soit pair est 2.
2. 0 et 1 ne sont pas des nombres 1^{ers}.
3. Tout nombre 1^{er} d'au moins 2 chiffres possède 1, 3, 7 ou 9 comme chiffre des unités.

A la page 33 de ce numéro, tu trouveras la suite des 630 premiers nombres 1^{ers} : 2, 3, 5, 7, 11..., 4637

Rappelons aussi que plusieurs nombres naturels sont « premiers entre eux » si et seulement si leur seul diviseur naturel et commun est 1. Ainsi 4, 6, 15, 21 sont quatre nombres premiers entre eux. Un ensemble de n nombres 1^{ers} distincts constitue-t-il aussi un ensemble de n nombres 1^{ers}entre eux ? La réciproque de cette affirmation est-elle vraie ou fausse ?

Quelques théorèmes relatifs aux nombres premiers :

Le théorème fondamental de l'arithmétique :

> Tout nombre naturel non premier et supérieur à 1 peut s'écrire d'une seule manière sous la forme d'un produit de nombres 1^{ers}(non nécessairement distincts).

Ainsi : $231 = 3\times7\times11$; $343 = 7\times7\times7 = 7^3$; $27720 = 2\times2\times2\times3\times3\times5\times7\times11 = 2^3\times3^2\times5\times7\times11$

Peut-être as-tu utilisé ces « factorisations » lors de la recherche du $PGCD$ (plus grand commun diviseur) et/ou du $PPCM$ (plus grand commun multiple) de plusieurs nombres naturels.

A propos de factorisation, celle du produit des naturels consécutifs 714 et 715 est assez curieuse.

Observe : $714 = 2 \times 3 \times 7 \times 17$ et $715 = 5 \times 11 \times 13$

Donc $714 \times 715 = 2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11 \times 13 \times 17$ c'est-à-dire le produit des 7 premiers nombres 1^{ers}.

D'autre part $2 + 3 + 7 + 17 = 5 + 11 + 13 = 29$ (nombre 1^{er}).

Combien y a-t-il de nombres 1^{ers} ?

Il existe une infinité de nombres 1^{ers}.

C'est le célèbre mathématicien grec Euclide ($\approx$ 300 av J-C) qui, dans ses « Eléments », donne une démonstration élégante et convaincante de cette propriété. La voici :

Supposons que la suite des nombres 1^{ers} ne soit pas infinie. Cela revient à supposer, dit Euclide, qu'il existe un nombre naturel p qui soit le plus grand des nombres 1^{ers}.

Envisageons alors le produit P de tous les nombres 1^{ers}, depuis 2 au supposé plus grand p :

$$P = 2 \times 3 \times 5 \times 7 \times \cdots \times p$$

.

P est évidemment divisible par chacun des facteurs 1^{ers} qui le compose.

Intéressons-nous au nombre naturel $P+1$. De toute évidence, on a : $P+1 > p$. Mais alors $P+1$ n'est pas 1^{er} puisque p est réputé être le plus grand des nombres 1^{ers}. Dès lors $P+1$ est divisible par au moins un des facteurs 1^{ers} (notons-le q) figurant dans le produit P.

Conclusion : le nombre 1^{er} q divisant P et $P+1$ divise aussi la différence $(P+1)-P=1$, ce qui est absurde. Il n'y a donc pas un nombre premier p plus grand que tous les autres. Chapeau Euclide !

Deux théorèmes démontrés par Pierre de Fermat (Français, 1601–1665)

Si p est un nombre 1^{er}qui ne divise pas le naturel n, alors $n^{p-1}-1$ est divisible par p.

Ainsi 7 est premier et ne divise pas 4 $\Rightarrow$ $4^{7-1}-1$ ou encore 4^6-1 est divisible par 7.

Peut-on aussi affirmer que 4^7-4 , $10^{106}-10^{100}$, 14^6-1 sont aussi divisibles par 7. ?

Ce théorème, appelé « petit théorème de Fermat », trouve une application pratique intéressante dans une méthode de décryptage d'un message codé.

Si p est un nombre 1^{er} de la forme $4n+1$ alors p est d'une manière unique égal à a^2+b^2 (n , a et b sont des nombres naturels non nuls). La réciproque n'est pas vraie

Ainsi $(4\times 7)+1 = 29$ (nombre 1^{er}) $\Rightarrow 29 = 2^2+5^2$.

Par contre $10^2+11^2 = 221$ et $221 = 4\times 55+1$. Cependant $221 = 13\times 17$ n'est pas premier !

Un théorème démontré d'abord par Tchebytchev (Russe ; 1821–1894) puis par Erdös (Hongrois ; 1913–1996)

Si n est un naturel > 1, alors il existe au moins un nombre premier entre n et $2n$

Il peut sans doute paraître évident qu'entre 25 et 50 par exemple, il existe au moins un nombre 1^{er}.

Mais peut-on être certain qu'il en est de même entre 25^{70} et 2×25^{70} ? Ce théorème l'affirme.

Notons qu'en 1845, un théorème connu sous la dénomination « Postulat de Bertrand » existait déjà. Il était proche mais un peu plus restrictif que le théorème précédent.

Un théorème démontré par Dirichlet (Allemand ; 1805–1859)

Toute suite arithmétique infinie a , $a+r$, $a+2r$, $a+3r$,... dans laquelle le premier terme a et la raison r sont premiers entre eux, renferme une infinité de nombres premiers.

Ainsi parmi les termes de la progression arithmétique 9, 20, 31,... de premier terme 9 et de raison 11 (9 et 11 sont 1ers entre eux) , il y a une infinité de nombres 1ers.

Invente d'autres suites arithmétiques renfermant une infinité de nombres 1ers.

Comment obtenir tous les nombres 1ers inférieurs à nombre naturel n donné ?

Si tu te réfères à l'article de Simone Trompler du n°105 de *Math-Jeunes Junior*, tu liras comment Eratosthène (-276,-194) filtrait une suite de nombres naturels consécutifs pour qu'il n'y subsiste que des nombres 1ers. C'est une méthode simple, sûre et efficace mais qui exige pas mal d'écritures et de concentration.

On l'appelle « crible d' Eratosthène ».

Ce crible est une source d'inspiration pour découvrir un algorithme (c'est-à-dire une suite consignes à suivre) débouchant finalement sur un programme d'ordinateur capable d'écrire tous les nombres 1ers inférieurs à un nombre naturel donné.

L'article de Nadège Vandenabeele qui suit le présent article est consacré à ce sujet. Il y sera aussi question d'un algorithme permettant de reconnaître si un nombre naturel donné est ou non 1er.

Un petit clin d' oeil pour terminer :

Parmi les nombres naturels de 3 chiffres, 131 est assez sympathique. En effet 131, en plus d'être premier et palindrome (il se lit aussi bien de gauche à droite que de droite à gauche) possède aussi les qualités suivantes :

La permutation de ses chiffres donnent les naturels 113 et 311 qui sont aussi 1ers.

De plus $1 \times 3 \times 1$, $1+3+1$, $1^2+3^2+1^2$, $1^3+3^3+1^3$, $1^4+3^4+1^4$, sont tous 1ers.

Hélas cela s'arrête là !

Quant à moi, j'arrête ici ce premier article consacré aux nombres 1ers. La suite dans le numéro 113 (tiens tiens tiens... encore lui !)de *Math-Jeunes Junior*.

A bientôt.

Algo, Géo et Erathostène...

N. Vandenabeele

Comme toi, Algo et Géo viennent de recevoir leur *Math-Jeunes Junior*. L'article de A. Paternottre en pages, 11, 12 et 13 les intrigue.

Géo : Ne serait-il pas possible d'utiliser l'informatique pour déterminer si un nombre naturel n donné est premier ?

Algo : Heu... voyons et surtout réfléchissons !
Le plus simple serait de tester la divisibilité du nombre naturel n par tous les nombres naturels impairs compris entre 2 et $\sqrt{n}$

Géo : Pas trop vite ! Tester la divisibilité par les nombres impairs suffit puisque si n est divisible par un nombre pair, il l'est aussi par 2 et il n'est sûrement pas 1$^{\text{er}}$. Mais pourquoi s'arrêter à $\sqrt{n}$?

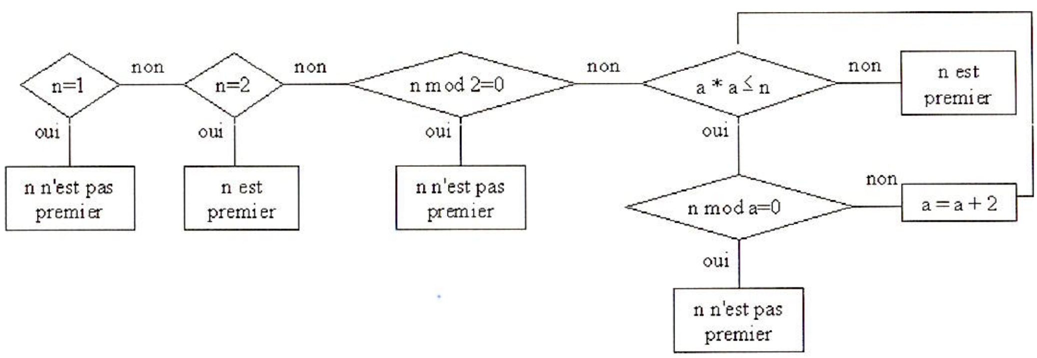
Algo : Eh bien, supposons que n soit divisible par un nombre entier a. Dans ce cas, on peut écrire que $n = a.b$ avec b entier. Si $a \geqslant \sqrt{n}$ alors $b \leqslant \sqrt{n}$ et donc un des deux nombres a ou b sera nécessairement inférieur ou égal à $\sqrt{n}$

Géo : Donc, si je choisis $n = 131$, il suffit de tester la divisibilité de n par les nombres impairs de l'intervalle $[2; \sqrt{131}]$ soit 2, 3, 5, 7, 9 et 11. Mais pour déterminer si un nombre est divisible par a, il faut et il suffit que le reste de la division de n par a soit nul. Comment peut-on le savoir ?

Algo : C'est une excellente question. Aux quatre opérations arithmétiques que sont l'addition, la soustraction, la multiplication et la division, on peut en ajouter une cinquième : « modulo ». On écrit « n mod a » qui, par définition, est égal du reste de la division de n par a.

Géo : Pas trop viiiiite ! Si je prends par exemple $n = 131$ et que je tente de le diviser par a qui vaut successivement 2 puis 3, 5, 7, 9, 11
$131 \bmod 2 = 1$ car $131 = 2 \times 65 + 1$
$131 \bmod 3 = 2$ car $131 = 3 \times 43 + 2$
$131 \bmod 5 = 1$ car $131 = 5 \times 26 + 1$
$131 \bmod 7 = 5$ car $131 = 7 \times 18 + 5$
$131 \bmod 9 = 5$ car $131 = 9 \times 14 + 5$
$131 \bmod 11 = 10$ car $131 = 11 \times 11 + 10$
Et donc 131 est premier car aucun reste n'est nul.

Algo : Tu as tout compris. Voici l'Algorithme où n désigne le nombre entier donné et a le diviseur.



Math-Jeunes Junior n°112J, 14–16, 2005

Géo Si je comprends bien, on vérifie d'abord si n vaut 1, puis si n vaut 2. Ce sont les cas faciles. Sinon, on vérifie si $n \bmod 2 = 0$ pour éliminer le cas où n serait pair. Et sinon, on effectue les divisions successives de n par $a = 3$ puis 5 tant que $a * a \leqslant n$ ce qui revient à dire que $a \leqslant \sqrt{n}$.

Algo : Pour $n = 131$, il faudra passer cinq fois dans la boucle (à droite de l'organigramme). Mais lorsque n sera très grand comme par exemple 1000000121, il faudra tester les divisions jusque 31622 soit près de 15800 opérations ! Ce sera long.

Géo : Oui mais si $n \bmod 3 \neq 0$ alors $n \bmod 9 \neq 0$.
Je veux dire qu'un nombre qui n'est pas divisible par 3 ne le sera sûrement pas par 9 .
Ainsi, on peut éviter les divisions par les nombres a multiples de 3. Et on peut refaire le même raisonnement avec 5, puis 7, ...

Algo : C'est une remarque judicieuse ! Il suffit en effet d'effectuer les divisions par les nombres a 1ers et inférieurs à $\sqrt{n}$.

Géo : Mais pour le moment, on ne connaît pas la liste des nombres premiers.

Algo : Ce n'est pas difficile. Notons les nombres de 1 à 100 dans un tableau.

1. Barrons le 1 (pas premier)
2. Eliminons tous les multiples de 2 sauf 2 (barré simple)
3. L'entier 3 n'a pas été supprimé et il ne peut être multiple des entiers précédents, sinon on l'aurait supprimé ; il est donc premier et supprimons tous multiples de 3. (hachuré)
4. Puis, le 5 n'est pas barré (4 est barré car il est multiple de 2) donc 5 est premier. De même, éliminons les multiples de 5. (pas réalisé dans le tableau)

~~1~~	**2**	**3**	4	**5**	~~6~~	**7**	~~8~~	~~9~~	~~10~~
11	~~12~~	**13**	~~14~~	~~15~~	~~16~~	**17**	~~18~~	**19**	~~20~~
~~21~~	~~22~~	**23**	~~24~~	25	~~26~~	~~27~~	~~28~~	**29**	~~30~~
31	~~32~~	~~33~~	~~34~~	35	~~36~~	**37**	~~38~~	~~39~~	~~40~~
41	~~42~~	**43**	44	~~45~~	~~46~~	**47**	~~48~~	49	~~50~~
~~51~~	~~52~~	**53**	~~54~~	55	~~56~~	~~57~~	~~58~~	**59**	~~60~~
61	~~62~~	~~63~~	~~64~~	65	~~66~~	**67**	~~68~~	~~69~~	~~70~~
71	~~72~~	**73**	~~74~~	~~75~~	~~76~~	77	~~78~~	**79**	~~80~~
~~81~~	~~82~~	**83**	~~84~~	85	~~86~~	~~87~~	~~88~~	**89**	~~90~~
91	~~92~~	~~93~~	~~94~~	95	~~96~~	**97**	~~98~~	~~99~~	~~100~~

5. On continue de la même manière pour le multiple de 7 non encore barré (91). Il ne reste alors que les nombres premiers en gras dans le tableau.

Cette méthode pour déterminer les nombres premiers inférieurs ou égaux à un nombre donné n est mieux connue sous le nom de « Crible d'Eratosthène » du nom de son inventeur ! Erathostène est un des mathématiciens grecs renommés(–256, –196) et était contemporain d'Archimède.

Géo : C'est une méthode simple et élégante. Ah ! C'est beau les math !

Algo : Essayons d'aller un peu plus loin en écrivant l'algorithme de ce procédé.

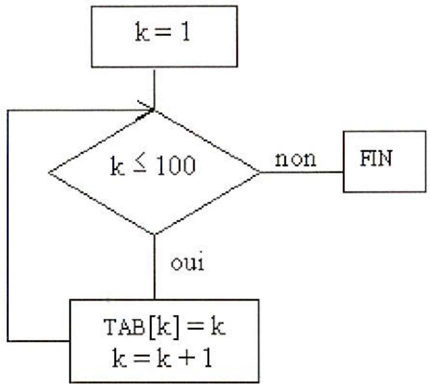
Géo : Je suis prêt. Tout d'abord, il faut compléter le tableau. Comment désigne-t-on un tableau en informatique ?

Algo : On lui donne le nom que l'on veut. Prenons par exemple TAB. Le numéro de la case est indiqué par un indice que l'on appellera k. Ainsi, $TAB[k]$ désigne le k^e nombre du tableau, le nombre qui se trouve dans la k^e case du tableau.

Géo : Donc ici, $TAB[10] = 10 \cdots TAB[75] = 75$.
Par conséquent, on aura $\text{tab}[k] = k (k \leqslant 100)$

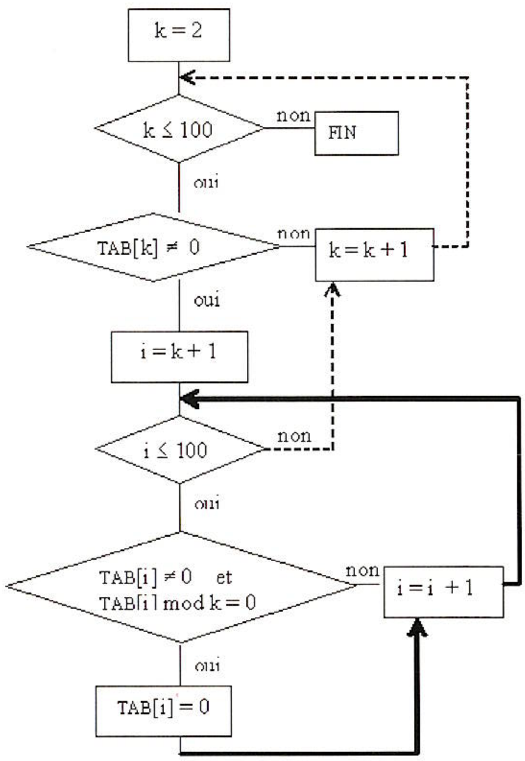
Algo : Cette dernière égalité nous permettra de compléter le tableau initial. Ci-contre, j'ai écrit l'organigramme

Géo : Maintenant nous devons parcourir le tableau une première fois en éliminant les multiples de 2 (c'est-à-dire les nombres pairs), puis recommencer en effaçant les multiples de 3, puis ceux de 5, et ainsi de suite.



Algo : Exactement, dès qu'un nombre est multiple d'un autre, on écrira 0 dans le tableau. On commencera donc avec $k = 2$ (puisque 1 est un cas particulier). Voici l'organigramme que l'on va essayer de comprendre ensemble.

Nous distinguons deux boucles principales.
La première, représentée en pointillés, incrémente l'indice k, et nous fait donc avancer dans le tableau afin de déterminer le prochain nombre premier du tableau.
La seconde, en trait gras, parcourt dans chaque cas, toutes les cases du tableau et écrit 0 lorsque le nombre est un multiple de k.
L'indice i parcourt donc le tableau à partir de la k^{e} case ($i = k + 1$) jusqu'à la fin du tableau ($i \leqslant 100$).
On vérifie si le nombre n'est pas déjà égal à 0 (sinon il n'y a plus rien à faire) et si ce nombre est divisible par k (tab $[i]$ mod $k = 0$) alors c'est un multiple et on indique 0 dans le tableau (tab $[i] = 0$).
Lorsque i atteint 100, on remonte tout en haut de l'algorithme en passant par la première boucle pour incrémenter $k(k = k + 1)$ afin de rechercher le prochain nombre premier.



Géo Pour vérifier si j'ai bien compris, je vais écrire le tableau tel qu'il apparaît au moment où k passe de 2 à 3. (fig. 1). Tous les nombres pairs ont été remplacés par un 0. Ensuite k vaut 3 et tous les multiples de 3 seront à leur tour remplacés par 0. Le tableau devient alors (fig. 2)

(Fig. 1) : tableau avant $k = 3$
Les nombres pairs ont été éliminés

1	2	3	0	5	0	7	0	9	0
11	0	13	0	15	0	17	0	19	0
21	0	23	0	25	0	27	0	29	0
31	0	33	0	35	0	37	0	39	0
41	0	43	0	45	0	47	0	49	0
51	0	53	0	55	0	57	0	59	0
61	0	63	0	65	0	67	0	69	0
71	0	73	0	75	0	77	0	79	0
81	0	83	0	85	0	87	0	89	0
91	0	93	0	95	0	97	0	99	0

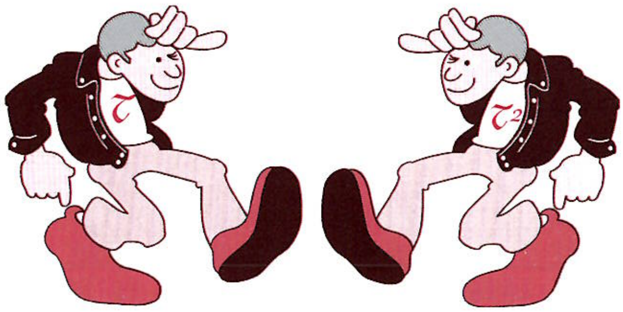
(Fig. 2) : tableau avant $k = 4$
Les multiples de 3 ont été éliminés

1	2	3	0	5	0	7	0	0	0
11	0	13	0	0	0	17	0	19	0
0	0	23	0	25	0	0	0	29	0
31	0	0	0	35	0	37	0	0	0
41	0	43	0	0	0	47	0	49	0
0	0	53	0	55	0	0	0	59	0
61	0	0	0	65	0	67	0	0	0
71	0	73	0	0	0	77	0	79	0
0	0	83	0	85	0	0	0	89	0
91	0	0	0	95	0	97	0	0	0

Les frères Hick 15

B. Honclaire

Agence de détectives privés
Les frères Hick
Recherches en tous genres

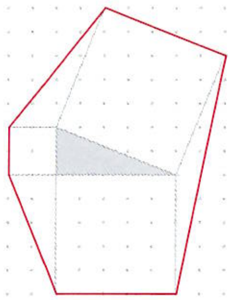


Ami lecteur,

Les frères Hick, Mat ($\mathcal{T}$) et Matt ($\mathcal{T}^2$), vont résoudre le problème de l'hexagone et ensuite ($\mathcal{T}$) tentera de clarifier les idées de son frère sur le calcul des aires de figures élémentaires.

Bon courage et bon amusement.

Bernard Honclaire



(pour rappel : Calculer l'aire de l'hexagone rouge, sachant que les côtés de l'angle droit du triangle rectangle gris mesurent 2 et 5cm.)
Généraliser et examiner ce qui se passe si le triangle gris de départ n'est pas rectangle !

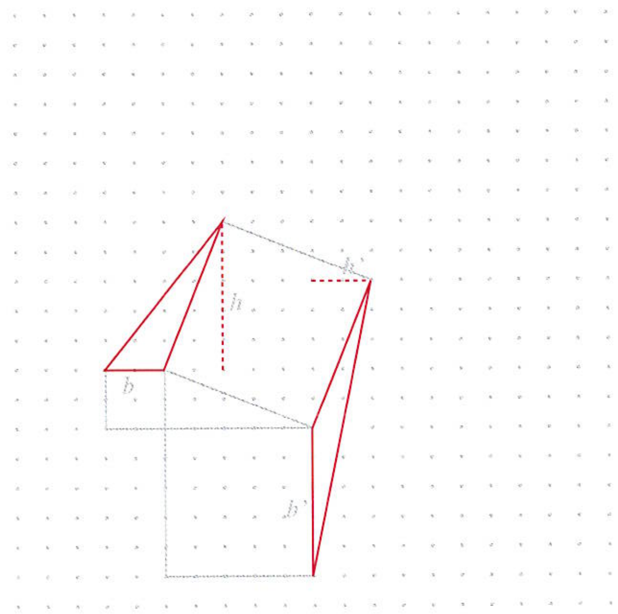
$\mathcal{T}^2$ (sérieux)- « ***J'ai pensé calculer les aires des trois carrés et des quatre triangles ! ...Pour les petits carrés, c'est sans problème*** (en lui même) - ***côté fois côté*** - (reprenant) $4cm^2$ ***et*** $25cm^2$ ***... pour le grand carré ... le côté n'est pas commode ...*** (malicieusement) - ***mais, les vacances n'ont pas tué Pythagore - il suffit de les ajouter; nous dirons donc*** $29cm^2$***...*** »

$\mathcal{T}$ (satisfait) - « ***C'est parfait ! Moi, je suis encore en vacances !*** (en lui-même)***Mais je parie que cela ne va plus durer très longtemps !*** »

$\mathcal{T}^2$ (reprenant fièrement) - « ***Les triangles rectangles étant des demi-rectangles ... à eux deux, ils font donc*** $10cm^2$ ***! ... Pour les deux derniers triangles, je sais qu'il y a une formule, - base fois hauteur - avec peut-être - divisé par 2*** - (jetant un regard inquiet vers son frère) ***mais sincèrement ... je mélange un peu toutes ces formules !*** »

$\mathcal{T}$ (amusé) - « ***Terminons ce problème et plus tard, je te proposerai quelques puzzles qui devraient réactiver tes connaissances sur les aires de figures élémentaires !*** »

$\mathcal{T}^2$ (fièrement) - « ***Par contre, j'ai utilisé le programme Cabri que tu m'as installé et je lui ai demandé de calculer les aires des autres triangles ! C'est génial et inquiétant à*** *la fois ! Il donne la même aire que pour les triangles rectangles , $5cm^2$! L'hexagone a donc une aire de $78cm^2$ et ... Cabri le confirme !* »



$\mathcal{T}$ (l'air hautain) - « *C'est comme si tu utilisais un bazooka pour tuer une mouche ! Il suffisait de considérer comme bases le côté horizontal pour l'un et le côté vertical pour l'autre; les hauteurs correspondantes se trouvaient aisément ! (plus bas) ... Il fallait évidemment encore savoir qu'on divisait par deux ... ! Regarde !* »

$\mathcal{T}^2$ (en lui-même) -« *C'était pas sorcier ... triangle rectangle ... demi-rectangle ... divisé par deux ... tout se tient ... mais, alors ... triangle quelconque ... demi de ... quoi ?* »

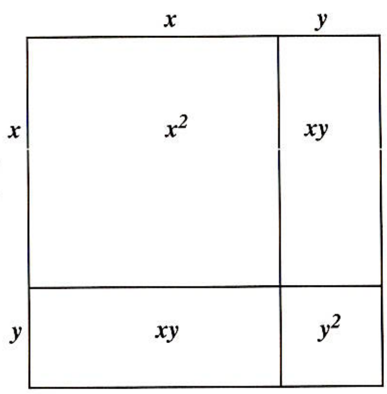
$\mathcal{T}$ (ramenant son frère sur terre) - « *Nous allons généraliser !* »

$\mathcal{T}^2$ (l'air absent) - « *Euh ! ...* »

$\mathcal{T}$ (magistral) - « *Nous allons dire que les dimensions du triangle rectangle de départ sont x et y . Les aires des carrés sont donc $x^2, y^2 et x^2 + y^2$; l'aire d'un triangle est $\frac{1}{2}xy$, donc $2xy$ pour les quatre triangles ! Concluons pour l'hexagone rouge : $x^2 + y^2 + (x^2 + y^2) + 2xy$! Autrement dit : $x^2 + y^2 + (x + y)^2$!* »

$\mathcal{T}^2$ (abasourdi) - « *Pas si vite ! ... Tu peux me donner quelques explications ! ... Surtout pour ta dernière formule !* »

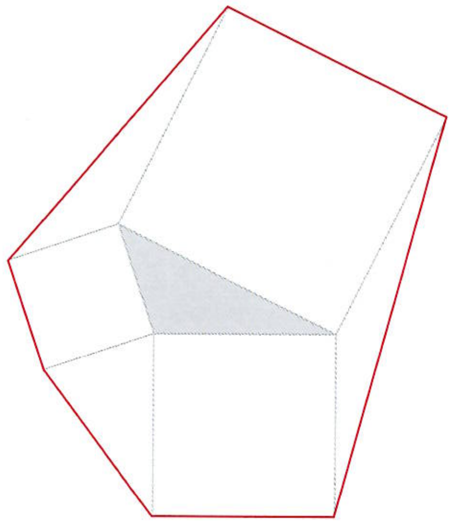
$\mathcal{T}$ (légèrement agacé) - « *Tu ne vas pas me dire que tu as oublié ce grand classique ! Regarde cette figure et médite !* »



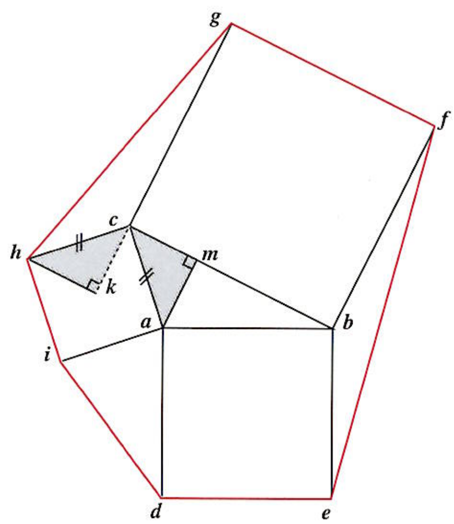
$\mathcal{T}^2$ (l'air faussement honteux) - « *Evidemment ! ... L'aire du grand carré peut s'écrire de plusieurs façons : ...* $(x+y)^2 \cdots\ x^2+y^2+xy+xy \cdots\ x^2+y^2+2xy$. *Tu vois, quand tu me laisses le temps de respirer, je peux comprendre...* »

$\mathcal{T}$ (poursuivant) - « *Il nous reste à regarder ce qui se passe si le triangle de départ n'est pas rectangle !* »

$\mathcal{T}^2$ (soupirant) - « *Pauvre Pythagore ! Il a perdu son beau théorème ! ... Restons sérieux ! ... J'ai fait la construction avec Cabri ... j'ai demandé les aires ... et ... surprise ... il me signale que les quatre triangles ont toujours la même aire !* (ajoutant ironiquement) *Je suppose que tu auras encore une bonne explication à me donner ! Mais avant, admire mon beau dessin !* »



$\mathcal{T}$ - « *Ton dessin est parfait ! Je vais juste ajouter des noms aux points, quelques segments et ...! Je te laisse commenter !* »



$\mathcal{T}^2$ (très concentré) - « *Pour les triangles* hcg *et* abc, *je pense que tu as construis les hauteurs relatives aux bases* $[cg]$ *et* $[cb]$ *! ... C'est bien vu ! Les deux bases sont les côtés d'un carré ! ... Il suffirait que les hauteurs correspondantes soient de même longueur ! ... On pourrait demander à Cabri ...* »

$\mathcal{T}$ (le coupant net) - « *Stop ! Il suffit de constater que les deux segments* $[hk]$ *et* $[am]$ *sont images par rotation de 90° autour de* c *! Comme les triangles* ckh *et* cma *, d'ailleurs ! Il te reste à faire les figures qui montrent les bonnes bases et hauteurs pour les triangles* abc *et* ebf *et pour les triangles* abc *et* adi *!* »

$\mathcal{T}^2$ (à peine perceptible) - « *Le temps des travaux forcés est revenu !* »

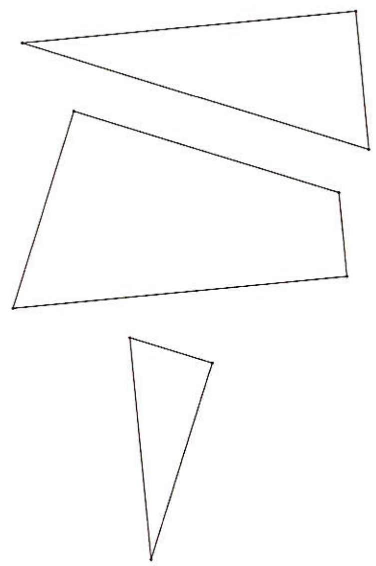
$\mathcal{T}$ (continuant) - « *Il est temps de te mettre au travail concernant les calculs d'aires !* »

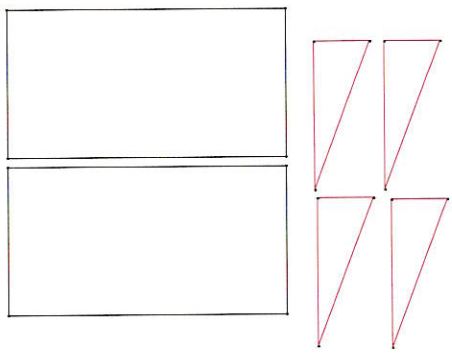
$\mathcal{T}^2$ (tout bas) - « *Il n'oublie jamais rien ! Quelle mémoire !* »

$\mathcal{T}$ (moqueur) - « *Je suppose que tu te rappelles encore comment on calcule l'aire d'un carré et celle d'un rectangle !* »

$\mathcal{T}^2$ (en lui-même et très vexé) - « ***Il me prend pour qui ?*** »

$\mathcal{T}$ (reprenant) - « ***En utilisant les trois pièces suivantes, construis un parallélogramme, puis un rectangle et ensuite un rectangle dont les dimensions sont différentes du précédent***





Un autre exercice : tu disposes de deux rectangles noirs isométriques et de quatre triangles rectangles isométriques . Dispose deux triangles dans chacun de ces rectangles de façon à faire apparaître un rectangle dans l'un et un parallélogramme dans l'autre.
De ces deux exercices tu dois pouvoir m'expliquer comment calculer l'aire d'un parallélogramme ! »

Ami lecteur, peux-tu aider $\mathcal{T}^2$ à terminer le problème des quatre triangles et à résoudre les deux puzzles proposés ?

Tu peux télécharger gratuitement, sur le site `http://www.enseignement.be/geometre/`, un programme de géométrie (Apprenti Géomètre), qui te sera d'une grande aide pour ce type d'exercice. De même les fichiers .xml (Apprenti Géomètre) correspondants aux deux puzzles et le fichier .fig (Cabri) dont il est question dans le texte sont disponibles sur le site `http://www.sbpm.be/` à la rubrique Hick15. (Voir aussi dans l'article de Ph. Skilbecq en pages 20, 21, 22 et 23 de ce *Math-Jeunes Junior*)

Bon courage, bon amusement et à bientôt !

à suivre

Un nouveau logiciel de math ?

Ph. Skilbecq

Apprenti Géomètre est un logiciel de mathématiques, mis au point par le Centre de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques (CREM) en 2002, avec lequel tu peux réaliser des dessins, travailler les fractions, étudier les figures géométriques et les transformations dans le plan. Il est gratuit et peut être téléchargé librement, ainsi qu'une documentation, sur le site :

`http://www.enseignement.be/geometre`

Il fonctionne aussi bien sur Mac (à partir de MacOS9) que sous environnement Windows (à partir de Windows 95). De l'avis des élèves qui l'ont déjà utilisé, il est facile de comprendre comment l'employer.

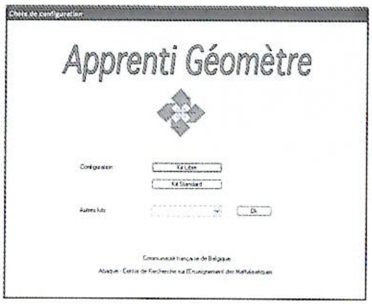
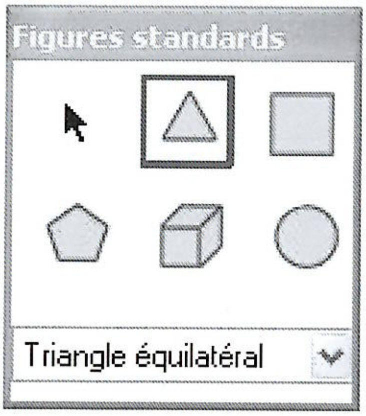


Figure 1

Lorsque tu lances le logiciel en cliquant sur l'icône étoilée, après quelques secondes, tu vois apparaître l'écran ci-contre qui te propose le choix entre deux kits de travail : le kit standard et le kit libre. Le choix s'effectue par un simple clic de souris sur le kit souhaité. Ces deux parties du logiciel permettent chacune de faire apparaître des figures à l'écran et d'agir sur elles.

Le kit standard contient peu de figures qui apparaissent toujours dans la même orientation et avec les mêmes dimensions.

Dès l'ouverture de ce kit, tu vois apparaître le pavé des figures sur la droite de l'écran. C'est à cet endroit que tu sélectionnes une figure par un clic de souris. Puis, par un second clic ailleurs sur l'écran, tu la fais apparaître. Si tu cliques à plusieurs endroits successivement, tu fais apparaître autant de figures que de clics de souris, comme le montre la figure 2.



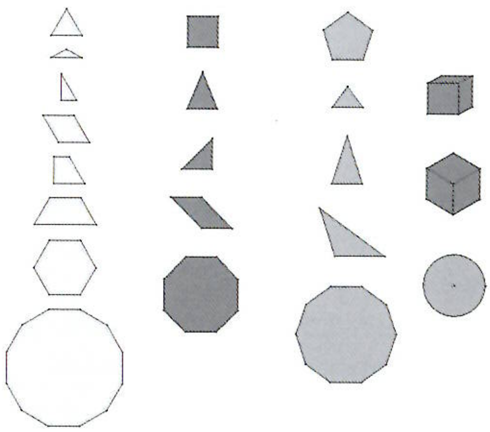


Figure 1

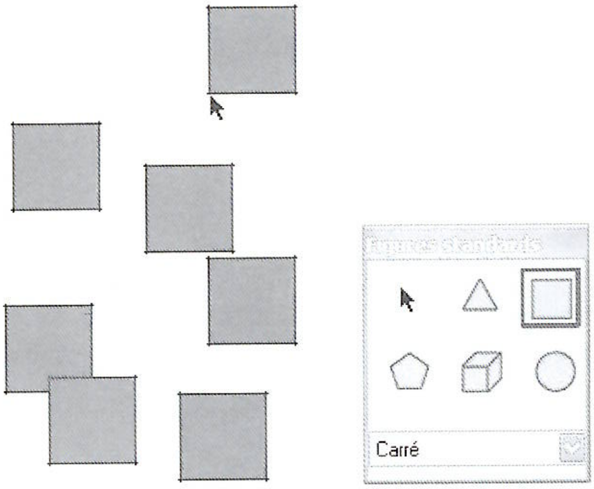
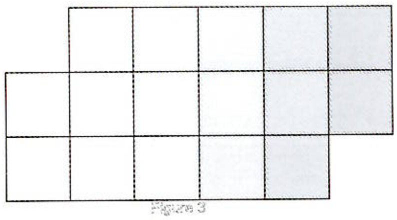


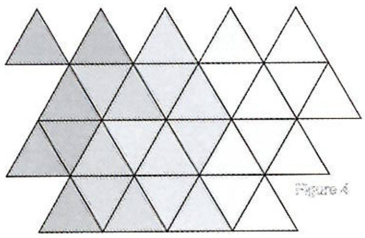
Figure 2

Dans cet exemple, après avoir placé aussi sauvagement ces carrés, tu peux les ranger comme tu le souhaites en cliquant sur la flèche dans le pavé de figures.
Ensuite, en cliquant sur un carré, et en gardant cliqué, tu peux le déplacer à ta guise.

Tu peux, par exemple, ranger ces carrés pour commencer un pavage du plan, comme le montre la figure 3. Rappelle-toi, les pavages faisaient l'objet d'un article de Claude Villers dans le *Math-Jeunes Junior* 110.



Après avoir rangé ces carrés, tu peux les colorer pour réaliser un dégradé de couleurs – ici, de gris –.
Pour colorer les figures, clique sur le menu Outils, sélectionne les options Couleur puis Intérieur, choisis une couleur sur la palette proposée et clique sur Ok.
Ensuite clique sur la ou les figures à colorer.
Répète l'opération chaque fois que tu veux changer de couleur.
Pour dessiner le pavage des triangles équilatéraux présenté par la figure 4, tu dois sélectionner le triangle équilatéral dans le pavé. Ensuite, tu procèdes comme pour le pavage de carrés.
Tu remarqueras très vite que ton pavage comporte des « trous »... Ce sont des triangles équilatéraux tournés de 60 degrés.



En cliquant sur le menu Mouvements, tu devrais trouver les opérations nécessaires pour réaliser complètement ce pavage. Ce menu comprend quatre opérations possibles dont trois mouvements géométriques – Déplacer, Tourner, Retourner – et un mouvement pour faciliter les assemblages – Ajuster –.

Pour tourner une figure, tu dois d'abord sélectionner le mouvement Tourner dans le menu correspondant, ensuite saisir la figure par un clic et maintenir cliqué. Enfin, faire tourner ta souris pour que la figure tourne.

Tu décides toi-même, à l'aide de la souris, de l'angle de rotation. Tu ne dois pas entrer de nombre pour déterminer l'angle de rotation.

Par ailleurs, dans Apprenti Géomètre, il n'y a aucune mesure chiffrée de longueur, d'aire ou d'angle.

Nous venons de te montrer comment réaliser deux des trois pavages réguliers du plan. Pour mieux prendre en main ce logiciel, tu peux essayer de trouver le troisième pavage régulier.

En effet, il n'existe que trois figures – polygones réguliers – qui permettent de dessiner un pavage régulier. Pour rappel, dans un pavage, les pièces se juxtaposent sans recouvrement ni trou, comme dans un puzzle. Et un pavage régulier est constitué de figures régulières toutes les mêmes.

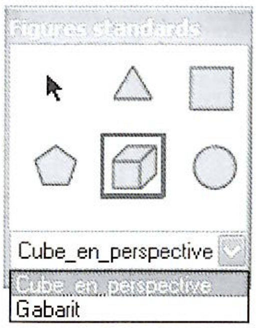
Pour les plus habiles, ou les plus curieux ou... en utilisant d'autres polygones réguliers, il est possible de dessiner d'autres pavages du plan, non réguliers ceux-là. L'article de Claude Villers donne déjà beaucoup de pistes et d'explications.

Tu peux envoyer tes recherches et tes résultats sous la forme d'un récit, de dessins, de copies d'écran... au secrétariat de la SBPMef, rue de la Halle 15 à 7000 Mons, nous publierons les résultats dans un prochain *Math-Jeunes Junior*.

Le logiciel Apprenti Géomètre comprend bien d'autres opérations possibles réparties dans la barre des menus. Les voici succinctement décrites.

Le menu Fichier est assez classique et tu y retrouves des opérations courantes qui te permettent d'enregistrer ou d'ouvrir un fichier de dessin.
Mais aussi de commencer un nouveau fichier ou d'imprimer en couleur le dessin que tu viens de réaliser.

Le menu Outils comporte la fonction Couleur que nous avons décrite ci-dessus. Tu y trouves aussi l'opération Effacer, très utile pour faire disparaître une figure indésirable. L'opération Cacher permet simplement de rendre invisible une figure. En cliquant sur Montrer tout, toutes les figures cachées réapparaissent. Les opérations Avant-plan et Arrière-plan sont surtout employées pour travailler avec les cubes. Elles sont très utiles pour réaliser le montage 3D ci-dessous – utilise les cubes en gabarit –



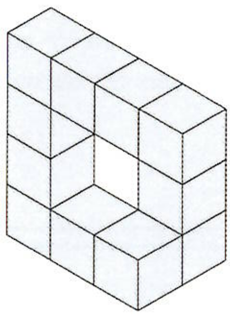
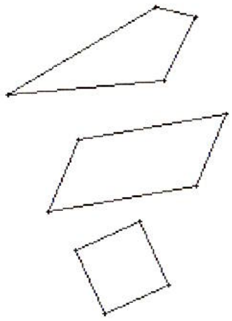
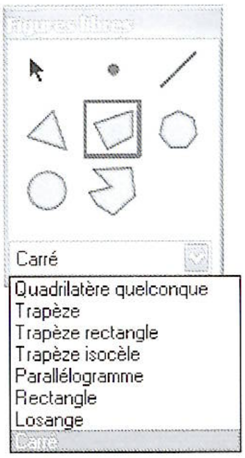


Figure 5

Le menu Opérations comprend des actions permettant de diviser, de découper ou de fusionner des figures.
La phrase qui apparaît à l'extrémité du curseur de la flèche t'aide à réaliser ces opérations.
La dernière opération disponible, Dupliquer, permet de multiplier autant de fois que de clics de souris une figure que tu choisis. Cette opération est surtout intéressante quand la figure n'est pas directement présente dans le pavé de figures.

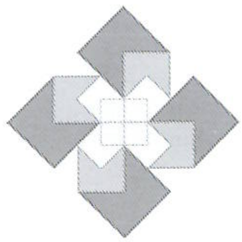
C'est notamment le cas dans le pavage de triangles équilatéraux – le triangle tourné de 60 degrés n'apparaît pas dans le pavé de figures –, ou pour reproduire des figures fusionnées ou découpées.

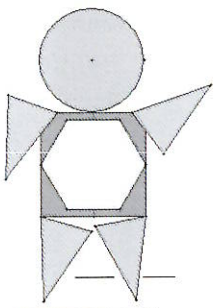




Nous parlerons plus en détails du second kit dans un prochain article, mais d'ici là tu peux l'explorer sans problème. Il possède la même barre des menus que le kit standard à quelques exceptions près. La différence la plus significative se trouve au niveau de la création des figures. Tu décides toi-même de leur grandeur et de leur orientation. Elles n'apparaissent plus toutes faites à l'écran. Tu peux aussi découvrir le menu Transformations qui contient trois transformations du plan : translation, rotation et symétrie miroir ...

C'est avec des carrés du kit libre que nous avons réalisé l'icône d'Apprenti Géomètre. Tu peux toi aussi essayer de le réaliser.
Et d' essayer également de découvrir le rapport entre les aires de deux carrés successifs ?... Mais ceci est une autre histoire.





En synthèse, ce qu'il faut comprendre dans le fonctionnement de ce logiciel, c'est que dans la majorité des cas, après avoir fait apparaître des figures à l'écran, tu dois d'abord sélectionner une opération dans la barre des menus et ensuite l'appliquer sur une figure.
Nous espérons que tu pourras trouver du plaisir à utiliser ce logiciel, et nous te donnons rendez-vous dans un prochain *Math-Jeunes Junior* pour la solution des pavages et de nouvelles constructions géométriques.

À bientôt...

Tu peux aussi contacter le secrétariat du CREM pour commander – au prix coûtant, cédérom et envoi – une copie gravée sur cédérom d'Apprenti Géomètre et de quelques fichiers. CREM 5 rue É. Vandervelde 1400 Nivelles 067 21 25 27

JEUX

Y. Noël-Roch

1. Sudoku

Ce nom bizarre provient du japonais « *Suji wa dokushin ni kagaru* » phrase qui peut à peu près se traduire par « les nombres doivent apparaître une seule fois ». Le jeu, parti de New York dans les années septante, est occupé à faire le tour du monde. Tu peux trouver plus d'informations à ce sujet sur internet.

Les règles du jeu.

Un « grand carré » 9×9 est partagé en neuf « petits carrés » 3×3. Quelques chiffres sont donnés et le jeu consiste à compléter les cases de manière à ce que les chiffres de 1 à 9 apparaissent chacun une et une seule fois dans
- chaque ligne du grand carré,
- chaque colonne du grand carré,
- chacun des neuf petits carrés.

Voici un exemple :

partant de

	6		1		4		5	
		8	3		5	6		
2								1
8			4		7			6
		6				3		
7			9		1			4
5								2
		7	2		6	9		
	4		5		8		7	

tu peux obtenir

9	6	3	1	7	4	2	5	8
1	7	8	3	2	5	6	4	9
2	5	4	6	8	9	7	3	1
8	2	1	4	3	7	5	9	6
4	9	6	8	5	2	3	1	7
7	3	5	9	6	1	8	2	4
5	8	9	7	1	3	4	6	2
3	1	7	2	4	6	9	8	5
6	4	2	5	9	8	1	7	3

Nous avons choisi de te présenter deux versions simplifiées :
- le grand carré est un carré 4×4 et il est partagé en quatre carrés 2×2 (les nombres à placer vont de 1 à 4)
- le grand carré est un carré 6×6 et il est partagé en six rectangles 2×3 (les nombres à placer vont de 1 à 6).

Les deux premiers exemples ont une solution unique, le troisième en admet deux !

1			2
		4	
			3
2			

1			
		2	
	3		
			4

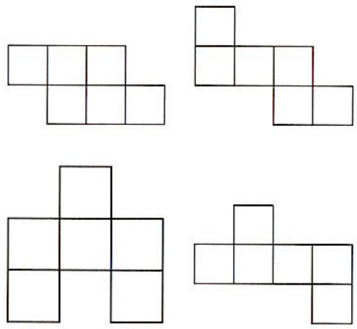
1			
	2		
		3	
			4

Voici une grille 6×6 :

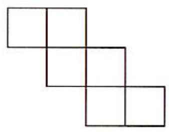
1	3		2		
				6	
2			3		6
4	6		5		
		2			

2. Développements du cube et nombres premiers

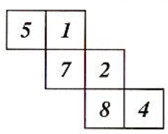
1. Parmi les figures suivantes, deux sont des développements du cube, deux n'en sont pas. Peux-tu les reconnaître ?



2. Voici un troisième développement du cube.

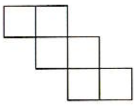


Nous pouvons, en plaçant **un chiffre par face**, inscrire sur ce développement **cinq nombres de deux chiffres**. Par exemple les nombres 51, 17, 72, 28 et 84.

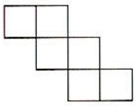


De cette manière, est-il possible d'écrire, **sur ce développement**,

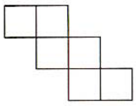
1. Cinq nombres premiers (pas nécessairement tous différents) ?



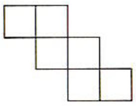
2. Le même nombre premier reproduit cinq fois ?



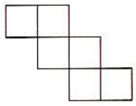
3. Cinq nombres premiers différents ?



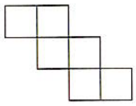
4. Cinq nombres premiers tels que le cube reconstitué présente un nombre premier sur ses six faces ?



5. Cinq nombres carrés parfaits ?

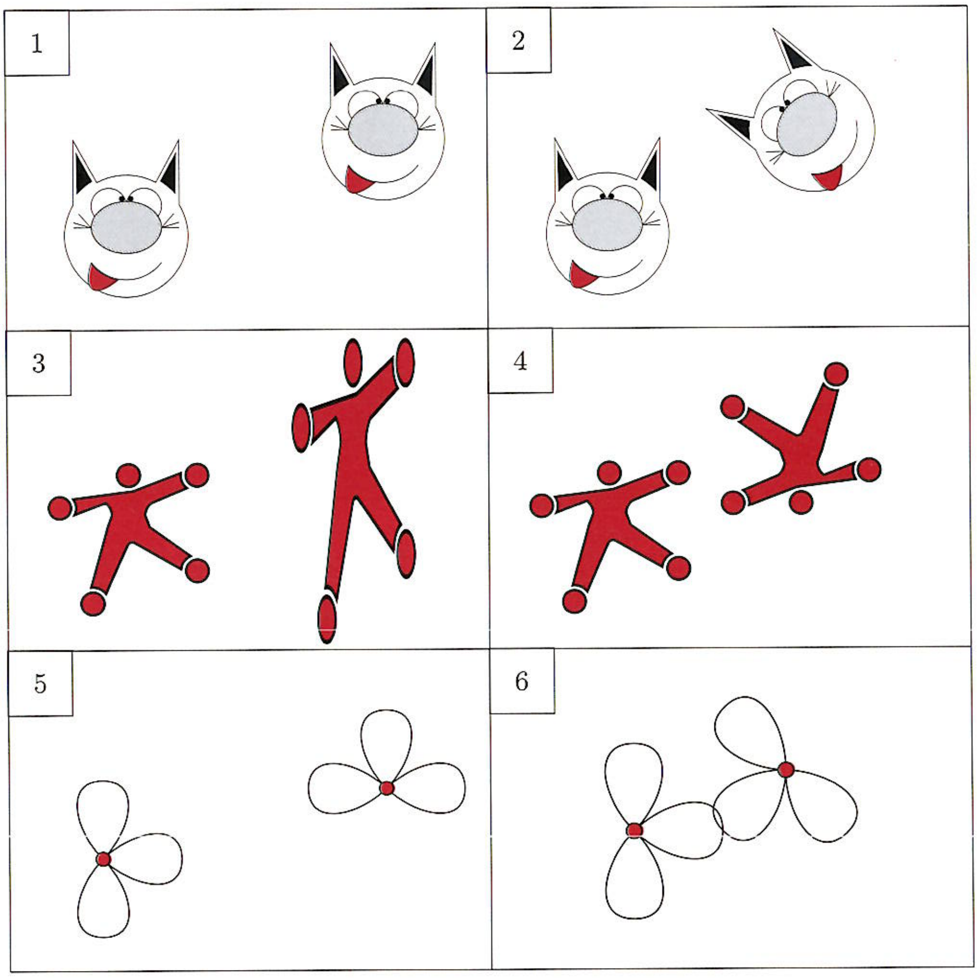


6. Successivement un carré parfait, un nombre premier, un carré parfait, . . .



3. Des transformations

Dans chacune des cases numérotées de 1 à 6, tu reconnaîtras un motif et son image. Chacune des lettres de A à E désigne une transformation. Relie le numéro de chaque case à une des lettres de A à F.



A. Translation
B. Symétrie axiale
C. Symétrie centrale ou rotation d'un demi-tour
D. Rotation d'un quart de tour
E. Rotation de 50°
F. Aucune des transformations ci-dessus

1	A
2	B
3	C
4	D
5	E
6	F

Solutions : page 30

Olympiades

C. Festraets

Participer !

Durant cette année scolaire, aura lieu la trente et unième édition de l'Olympiade Mathématique Belge (OMB).
Comme *presque* tout le monde le sait, l'OMB est une épreuve mathématique ouverte à tous les élèves de l'enseignement secondaire, de la première à la sixième. Depuis six ans déjà, cette épreuve est divisée en trois concours. Ceux-ci se déroulent en parallèle. La « Mini-Olympiade » accueille les élèves de première et de deuxième années ; la « Midi-Olympiade » est réservée aux élèves de troisième et de quatrième années ; enfin, la « Maxi-Olympiade » est destinée aux élèves de cinquième et de sixième années.
Voici en quelques mots le principe commun à tous ces concours. Pour chacun d'entre eux, il y a trois étapes : une éliminatoire qui a lieu dans les locaux mêmes de ton école, une demi-finale organisée dans des centres régionaux et une finale qui se tient à Namur. Le calendrier de la trentième Olympiade Mathématique Belge est le suivant :

éliminatoire : le 18 janvier 2006
demi-finale : le 8 mars 2006
finale : le 26 avril 2006
proclamation : le 13 mai 2006

Evidemment, ton professeur reçoit toutes les informations utiles sur cette Olympiade. Alors si tu désires en savoir plus, il te suffira de lui poser les questions auxquelles cet article n'apporte pas de réponse. Il se fera certainement un plaisir de mieux t'informer.

Se préparer !

Si tu souhaites te préparer à cette épreuve, tu trouveras plus loin quelques problèmes posés dans le passé. Ils vont non seulement éveiller ta curiosité mais encore te permettre de te familiariser avec la forme du questionnaire.
Comme tu vas bientôt le constater, il y a, pour toutes les questions, cinq réponses proposées. Une seule d'entre elles est correcte. Par contre, certaines questions n'ont pas reçu de réponse « pré formulée ». Dans ce cas, ce que tu dois trouver est un nombre entier appartenant à l'intervalle [0, 999], autrement dit un nombre entier positif, éventuellement nul, strictement inférieur à 1000. Ne réponds que si tu es sûr de ta réponse. En effet, la manière de calculer ton score lors du concours est la suivante : 5 points pour une bonne réponse, 0 pour une mauvaise réponse. Tout à fait normal, diras-tu ! Mais, si tu t'abstiens de répondre à une question, tu reçois 2 points. Là tu te demandes peut-être quel est le but de ce procédé ? Mais précisément de te faire prendre conscience qu'il vaut mieux ne rien répondre plutôt que de répondre n'importe quoi. Enfin tu dois savoir qu'il est nécessaire de répondre à un minimum de 5 questions pour être classé. Les problèmes que tu vas résoudre ci-dessous ont été choisis dans le tome 3 des OMB reprenant toutes les questions posées de 1988 à 1993. Malheureusement, ce tome n'est plus en vente, il est épuisé. Par contre, si tu désire peaufiner ta préparation et évaluer ton potentiel olympique, tu peux acquérir le tome 5 des OMB (1999-2002) Voici tous les renseignements nécessaires pour cela :
OMB- T5 : 7.80€ (frais de port compris).

Les commandes sont à adresser à :
SBPMef, rue de la Halle, 15, 7000 Mons
Compte : 000-0728014-29
Fax et téléphone : 065 37 37 29

S'exercer !

1. Diviseurs (éliminatoire - 1988)

Sans réponse préformulée - Le nombre de diviseurs de 1512, en comptant 1 et 1512, est ?

2. Nombre décimal (éliminatoire - 1991)

Quel est le nombre dont la division par $\frac{1}{3}$ donne $0,018$?

Ⓐ 0.054 Ⓑ 0,0054 Ⓒ 0,006
Ⓓ 0.06 Ⓔ un autre

3. Multiples (éliminatoire - 1 993)

Si n est un multiple non nul de 3 et si m est un multiple non nul de 2, alors n^m

Ⓐ est toujours pair ;
Ⓑ vaut 1 pour certaines valeurs de n et m ;
Ⓒ est nécessairement divisible par 6 ;
Ⓓ est nécessairement divisible par 9 ;
Ⓔ n'est pas nécessairement un carré parfait.

4. Fractions (demi-finale - 1 992)

Si $\frac{1}{N} = \frac{N}{1+3+5+\cdots+99}$, alors N vaut

Ⓐ 50 Ⓑ 70 Ⓒ 700 Ⓓ $2,450$ Ⓔ 3 500

5. Plus grand entier (demi-finale - 1 992)

Sans réponse préformulée - Quel est le plus grand entier n tel que 2^n divise $1 \times 2 \times 3 \times 4 \times \cdots \times 40$?

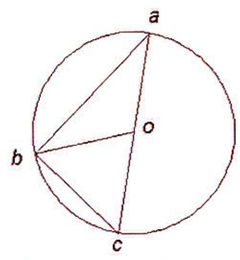
6. Parallélogramme (éliminatoire - 1 988)

Si deux angles opposés d'un parallélogramme ont la même bissectrice, alors ce parallélogramme est nécessairement

Ⓐ un rectangle Ⓑ un losange Ⓒ un carré ;
Ⓓ un quadrilatère qui a un seul axe de symétrie
Ⓔ aucune de ces quatre figures.

7. Mesures d'angles (éliminatoire - 1 993)

Dans la figure, o est le centre du cercle, b en est un point et $[ac]$ un diamètre. L'angle $\widehat{boc}$ mesure 70°. Que vaut la différence des mesures de $\widehat{ocb}$ et $\widehat{oab}$?



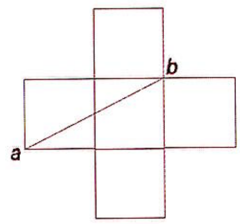
Ⓐ 10° Ⓑ 17°30' Ⓒ 20° Ⓓ 27°30' Ⓔ 35°

8. Triangle rectangle (demi-finale 1 993)

Sans réponse prèformulée - Dans un triangle abc rectangle en a, si $|ab| = 15$ et $|ac| = 20$, quelle est la mesure de la hauteur issue de a ?

9. Aire de la croix (éliminatoire - 1 993)

Une croix est formée de cinq carrés (voir figure). Que vaut l'aire de cette croix si $[ab]$ mesure 10 ?



Ⓐ $50\frac{\sqrt{3}}{3}$ Ⓑ $50\sqrt{2}$ Ⓒ $50\frac{\sqrt{2}}{2}$ Ⓓ 120 Ⓔ 100

10. Cylindres (éliminatoire - 1 988)

Le tableau ci-dessous donne la hauteur H et le rayon R de cinq cylindres X, Y, Z, T, U. Lequel de ces cylindres a le plus grand volume ?

	X	Y	Z	T	U
H	3	1	5	2	4
R	4	7	2	8	3

Ⓐ X Ⓑ Y Ⓒ Z Ⓓ T Ⓔ U

11. Dépenses (éliminatoire - 1 990)

Sans réponse préformulée - Un voyageur dépense chaque jour 100 francs plus la moitié de ce qu'il possède le matin. Après deux jours, il a dépensé exactement son avoir du premier matin ; quel était cet avoir en francs ?

12. Sac de boules (demi-finale 1 988)

Un sac renferme 3 boules noires, 5 blanches et 7 rouges. Quel est le plus petit nombre de boules qu'il faut en extraire pour être sûr d'avoir au moins deux boules blanches ?

Ⓐ 2 Ⓑ 5 Ⓒ 10 Ⓓ 12 Ⓔ 15

Solutions

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
E	A	D	A	38	B	C	12	E	D	600	D

Courrier des lecteurs

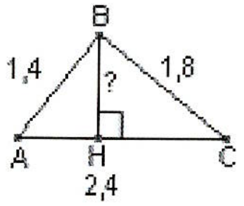
La rédaction

Dans le dernier numéro de *Math-Jeunes Junior* 111, un problème relatif à l'actualité de cette année 2005 était proposé et nos lecteurs étaient invités à nous faire parvenir leur solution. Rappelons l' énoncé :

En cette année 2005, les 9 sphères de notre Atomium national ont été complètement « dépiautées » de leurs plaques d'aluminium triangulaires qui ont souffert de l'usure du temps depuis l' Exposition Universelle de Bruxelles en 1958. Plutôt que d'envoyer ces plaques à la mitraille, il a été décidé de les vendre à raison de 1000€ le triangle dont les côtés mesurent 2.4m, 1.8m et 1.4m . Chacune des 9 sphères possède un diamètre de 18m et est recouverte d'aluminium à raison de 85% de sa surface .
Dans ces conditions, si toutes les plaques sont vendues, peux-tu calculer combien d'euros rapportera cette vente insolite ?

Deux élèves de l'Athénée Royal de Waimes (près de Malmédy), Geoffrey Mélotte (3Ga) et Noël Michel (2Aa) nous ont aimablement envoyé leur solution.

Voici celle de Geoffrey Mélotte :



1) Aire d'une sphère : $1m^2 \times 4 \times \pi \times 9^2 = 1017,88m^2$
2) Calcul de la hauteur issue de B du triangle ABC.
Appliquons le théorème de Pythagore généralisé :
$1,8^2 = 2,4^2 + 1,4^2 - 2 \times 2,4 \times 1,4 \times \cos \widehat{A}$

d'où $\cos \widehat{A} = \dfrac{2,4^2 + 1,4^2 - 1,8^2}{2 \times 2,4 \times 1,4} = \dfrac{2}{3}$ et dès lors $\widehat{A} \cong 48,19°$

Dans le triangle ABH rectangle en H, on a :
$\sin \widehat{A} = \dfrac{|BH|}{|AB|} \Rightarrow \sin 48,19° = \dfrac{|BH|}{1,4} \Rightarrow |BH| \cong 1,043m.$

3) Aire d'un triangle d'aluminium $= \dfrac{1m^2 \times 2,4 \times 1,043}{2} \cong 1,25m^2$.

4) Aire d'aluminium sur une sphère $=1017,88 \times 85\% = 865,2m^2$.

5) Nombre de triangles d'aluminium sur une sphère $= 865,2 : 1,25 = 692$(Ndlr :quotient entier).

6) Nombre de triangles d'aluminium pour les 9 sphères $= 692 \times 9 = 6228$.

7) Si tous ces triangles sont vendus, cette vente rapporte donc 6228× 1000€= 6 228 000€.

Noël Michel, élève de 2[e], ne peut connaître le théorème de Pythagore généralisé ni la trigonométrie du triangle rectangle. Il contourne néanmoins la difficulté en s'aidant du logiciel Cabri-géomètre : après avoir dessiné avec précision le triangle ABC, il en trace la hauteur $|BH|$ puis, toujours à l'aide de Cabri calcule la distance des points B et H. Bravo d'y avoir pensé.

La solution de Geoffrey ne faisait usage que de la seule calculatrice et c'est pourquoi nous l'avons choisie.

Pour en terminer avec cette vente insolite, sachez qu'en réalité la vente a été limitée à 1000 plaques.

Chacune était estampillée « Atomium 1958–2005 » et numérotée de 1 à 1000. L'ingénieur belge André Waterkein, concepteur de l'Atomium, a reçu le triangle numéroté 58.

La vente n'a donc rapporté que… un million d'euros. Le problème avait été imaginé … pour le simple plaisir de le résoudre ! Dommage car la fiction était nettement plus avantageuse que la réalité !

Solutions des jeux des pages 25 et 26

1. Sudoku

1	4	3	2
3	2	4	1
4	1	2	3
2	3	1	4

1	2	4	3
3	4	2	1
4	3	1	2
2	1	3	4

1	4	2	3
3	2	4	1
4	1	3	2
2	3	1	4

1	3	4	2
4	2	1	3
2	4	3	1
3	1	2	4

1	3	6	2	5	4
5	2	4	1	6	3
2	4	5	3	1	6
6	1	3	4	2	5
4	6	1	5	3	2
3	5	2	6	4	1

2. Développements de cube et nombres premiers

Les deux développements de cube sont les assemblages de six carrés donnés à droite.

Dans les cas $\boxed{1}$, $\boxed{3}$, $\boxed{4}$ et $\boxed{6}$, plusieurs solutions existent. Nous en donnons chaque fois une à titre indicatif :

$\boxed{1.}$

3	*1*		
	3	*1*	
		3	*1*

$\boxed{3.}$

4	*1*		
	3	*7*	
		9	*7*

$\boxed{5.}$ **Il est impossible d'écrire cinq carrés parfaits dans ce développement.**

$\boxed{2.}$

1	*1*		
	1	*1*	
		1	*1*

$\boxed{4.}$

2	*3*		
	7	*3*	
		7	*3*

$\boxed{6.}$

2	*5*		
	3	*6*	
		1	*6*

3. Des transformations

1 → A, 2 → E, 3 → F, 4 → C, 5 → D, 6 → B.

Math-quiz

Voici donc la troisième édition de notre modeste concours qui n'est, en fin de compte, qu'un prétexte à vous donner des occasions de résoudre quelques problèmes pas bien difficiles en dehors du cadre scolaire proprement dit.

La plupart des questions font surtout appel au bon sens et ne nécessitent que de l'attention, un peu de recherche et de la débrouillardise. Ce sont donc vos facultés d'investigations qui vont être sollicitées. A vous de faire la preuve de votre esprit de participation et de vos capacités à vous organiser. Comme ce fut déjà le cas lors des deux années scolaires précédentes, nous vous proposons de relever un « défi ». Celui de trouver le maximum de réponses correctes aux questions qui vous sont proposées dans cette rubrique.

(Défi = provocation à un effort de dépassement). Ce « challenge », ne requiert aucun droit d'inscription. Il se déroulera à nouveau en deux étapes publiées dans les deux premiers numéros de l'année scolaire 2005–2006, qui feront l'objet de classements séparés. Il vous est donc, à la limite, loisible de ne participer seulement qu'à l'une ou l'autre de ces étapes (mais ce n'est évidemment pas conseillé). En outre, un classement général sera établi à l'issue de la deuxième étape. Chaque étape ainsi que le classement général nous permettront d'établir un tableau d'honneur et d'attribuer des récompenses aux meilleurs envois.

Cette année nous avons reçu l'appui appréciable de la firme DEXXON Belgium, distributrice notamment des calculatrices scientifiques et graphiques CASIO. Dexxon Belgium récompensera les meilleurs participants de ce concours en leur offrant des calculatrices scientifiques FX-Junior et FX-92 Collège 2D

CASIO

Le principe :

Il reste inchangé. A chaque étape, 10 questions vous sont proposées. Chacune d'elles possède un coefficient de difficulté indiqué sous la forme d'étoiles. Chaque étoile vous permet de gagner des points... si votre réponse est correcte, bien entendu. Vous répondez à autant de questions, parmi les dix, que vous le souhaitez. Math-Quiz est donc un concours individuel. Mais rien ne vous interdit de travailler en groupe ou même en classes, ! ! ! Chacun devra cependant nous faire parvenir sa carte-réponse personnelle. Participez à ce jeu-concours et invitez vos condisciples à y prendre part. Comment répondre ? Vous nous envoyez vos réponses rédigées sur une carte (bristol) de format 10cm x 15cm, éventuellement groupées par votre professeur de mathématiques, dans une enveloppe affranchie et à l'adresse suivante : SBPMef - Math-Quiz 2005-2006 Rue de la Halle 15 B-7000 Mons.

Attention, respectez bien la procédure ci-après. Sur une même face, indiquez lisiblement (en caractères d'imprimerie SVP), vos nom et prénom, votre adresse complète, le nom de votre école et son adresse, le niveau de votre classe en 2005–2006, ainsi que vos réponses aux questions de l'étape sous la forme d'un tableau comme ci-après.

Question	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Réponse										

Attention : vos réponses à cette première étabe doivent nous être impérativement parvenues avant le samedi 10/12/2005.

L'autre face de la carte est destinée à recevoir votre participation éventuelle au concours annexe. Car nous vous invitons en outre à être imaginatif et créatif et à réaliser un dessin à caractère mathématique sur l'autre face de la carte. A vous de faire preuve d'originalité. Les meilleures propositions seront également récompensées. Voici maintenant les questions de la première étape. Notez que chaque étoile y aura cette fois une valeur de 3 points. 78 points sont donc en jeu. (Il restera 130 points en jeu lors de la deuxième étape).

1	*	Si NOEL = 5243 et si LEON = 3425 alors à quoi est égal LONE ?
2	*	Toutes les vaches de la prairie possèdent bien 4 pattes mais certaines d'entre elles n'ont pas de cornes alors que les autres en possèdent une paire. Le fermier vous dit qu'il y a en tout 108 pattes et 24 cornes. Combien y a-t-il de vaches sans cornes ?
3	**	Ce boucher vend la blanquette de veau désossée à 10€ le kilo et la blanquette de veau avec os à 6€ le kg. Quelle est, en grammes, la masse moyenne d'os dans ce cas. (on considère que les os sont gratuits).
4	**	Une taque de cuisson comporte 3 rangées de 3 alvéoles permettant de cuire une crêpe chacune. Vous ne voulez cuire que 2 crêpes en même temps. De combien de manières, différant par la situation d'au moins une crêpe, pouvez-vous réaliser cette cuisson ? 
5	**	Si vous roulez à la vitesse moyenne de 15 km/h sur un trajet de 30 km puis à la vitesse moyenne de 30 km/h sur un trajet de 15 km, quelle sera, en km/h, votre vitesse moyenne sur l'ensemble du trajet parcouru ?
6	***	On pèse les quadruplés deux par deux de toutes les 6 façons possibles ce qui donne 13kg, 14 kg, 15 kg, 15 kg, 16 kg et 17 kg. Combien de kg aurait-on obtenu en les pesant tous ensemble ?
7	***	Au commencement du cours la classe compte deux fois plus d'élèves garçons que d'élèves filles. 2 filles et 2 garçons sont amenés à quitter le local et il reste alors 4 fois plus d'élèves garçons que d'élèves filles. Combien y avait-il d'élèves en début de cours ?
8	***	La moyenne de vos points obtenus aux quatre premiers contrôles est m. Malheureusement vous obtenez 2 au cinquième contrôle et cela fait chuter votre moyenne à 6. Que vaut m ?
9	***	Une bougie A se consume totalement en 3heures et trente minutes. Une bougie B se consume totalement en 5 heures. Lorsqu'on les allume en même temps, elles sont à la même hauteur après 2 heures. On sait que la taille de la bougie A est de 14 cm. Quelle est, en cm, la taille de la bougie B ?
10	*****	Quatre amis, André, Béatrice, Charles et Diane, que nous désignerons par A, B,C et D, possèdent ensemble 128€. Ils décident de se faire plaisir et c'est ainsi que A double l'avoir de B, puis B double l'avoir de C, puis C double l'avoir de D et enfin D double l'avoir de A . Après cela, ils possèdent tous la même somme. Quel était, en Euros, l'avoir initial du plus riche ?

N'hésitez pas à convier vos condisciples à relever le défi de participer à ce concours.

Math-Jeunes Junior vous offre la liste des 630 premiers nombres premiers.

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89,
97, 101, 103, 107, 109, 113, 127, 131, 137, 139, 149, 151, 157, 163, 167, 173, 179, 181,
191, 193, 197, 199, 211, 223, 227, 229, 233, 239, 241, 251, 257, 263, 269, 271, 277, 281,
283, 293, 307, 311, 313, 317, 331, 337, 347, 349, 353, 359, 367, 373, 379, 383, 389, 397,
401, 409, 419, 421, 431, 433, 439, 443, 449, 457, 461, 463, 467, 479, 487, 491, 499, 503,
509, 521, 523, 541, 547, 557, 563, 569, 571, 577, 587, 593, 599, 601, 607, 613, 617, 619,
631, 641, 643, 647, 653, 659, 661, 673, 677, 683, 691, 701, 709, 719, 727, 733, 739, 743,
751, 757, 761, 769, 773, 787, 797, 809, 811, 821, 823, 827, 829, 839, 853, 857, 859, 863,
877, 881, 883, 887, 907, 911, 919, 929, 937, 941, 947, 953, 967, 971, 977, 983, 991, 997,
1009, 1013, 1019, 1021, 1031, 1033, 1039, 1049, 1051, 1061, 1063, 1069, 1087, 1091,
1093, 1097, 1103, 1109, 1117, 1123, 1129, 1151, 1153, 1163, 1171, 1181, 1187, 1193,
1201, 1213, 1217, 1223, 1229, 1231, 1237, 1249, 1259, 1277, 1279, 1283, 1289, 1291,
1297, 1301, 1303, 1307, 1319, 1321, 1327, 1361, 1367, 1373, 1381, 1399, 1409, 1423,
1427, 1429, 1433, 1439, 1447, 1451, 1453, 1459, 1471, 1481, 1483, 1487, 1489, 1493,
1499, 1511, 1523, 1531, 1543, 1549, 1553, 1559, 1567, 1571, 1579, 1583, 1597, 1601,
1607, 1609, 1613, 1619, 1621, 1627, 1637, 1657, 1663, 1667, 1669, 1693, 1697, 1699,
1709, 1721, 1723, 1733, 1741, 1747, 1753, 1759, 1777, 1783, 1787, 1789, 1801, 1811,
1823, 1831, 1847, 1861, 1867, 1871, 1873, 1877, 1879, 1889, 1901, 1907, 1913, 1931,
1933, 1949, 1951, 1973, 1979, 1987, 1993, 1997, 1999, 2003, 2011, 2017, 2027, 2029,
2039, 2053, 2063, 2069, 2081, 2083, 2087, 2089, 2099, 2111, 2113, 2129, 2131, 2137,
2141, 2143, 2153, 2161, 2179, 2203, 2207, 2213, 2221, 2237, 2239, 2243, 2251, 2267,
2269, 2273, 2281, 2287, 2293, 2297, 2309, 2311, 2333, 2339, 2341, 2347, 2351, 2357,
2371, 2377, 2381, 2383, 2389, 2393, 2399, 2411, 2417, 2423, 2437, 2441, 2447, 2459,
2467, 2473, 2477, 2503, 2521, 2531, 2539, 2543, 2549, 2551, 2557, 2579, 2591, 2593,
2609, 2617, 2621, 2633, 2647, 2657, 2659, 2663, 2671, 2677, 2683, 2687, 2689, 2693,
2699, 2707, 2711, 2713, 2719, 2729, 2731, 2741, 2749, 2753, 2767, 2777, 2789, 2791,
2797, 2801, 2803, 2819, 2833, 2837, 2843, 2851, 2857, 2861, 2879, 2887, 2897, 2903,
2909, 2917, 2927, 2939, 2953, 2957, 2963, 2969, 2971, 2999, 3001, 3011, 3019, 3023,
3037, 3041, 3049, 3061, 3067, 3079, 3083, 3089, 3109, 3119, 3121, 3137, 3163, 3167,
3169, 3181, 3187, 3191, 3203, 3209, 3217, 3221, 3229, 3251, 3253, 3257, 3259, 3271,
3299, 3301, 3307, 3313, 3319, 3323, 3329, 3331, 3343, 3347, 3359, 3361, 3371, 3373,
3389, 3391, 3407, 3413, 3433, 3449, 3457, 3461, 3463, 3467, 3469, 3491, 3499, 3511,
3517, 3527, 3529, 3533, 3539, 3541, 3547, 3557, 3559, 3571, 3581, 3583, 3593, 3607,
3613, 3617, 3623, 3631, 3637, 3643, 3659, 3671, 3673, 3677, 3691, 3697, 3701, 3709,
3719, 3727, 3733, 3739, 3761, 3767, 3769, 3779, 3793, 3797, 3803, 3821, 3823, 3833,
3847, 3851, 3853, 3863, 3877, 3881, 3889, 3907, 3911, 3917, 3919, 3923, 3929, 3931,
3943, 3947, 3967, 3989, 4001, 4003, 4007, 4013, 4019, 4021, 4027, 4049, 4051, 4057,
4073, 4079, 4091, 4093, 4099, 4111, 4127, 4129, 4133, 4139, 4153, 4157, 4159, 4177,
4201, 4211, 4217, 4219, 4229, 4231, 4241, 4243, 4253, 4259, 4261, 4271, 4273, 4283,
4289, 4297, 4327, 4337, 4339, 4349, 4357, 4363, 4373, 4391, 4397, 4409, 4421, 4423,
4441, 4447, 4451, 4457, 4463, 4481, 4483, 4493, 4507, 4513, 4517, 4519, 4523, 4547,
4549, 4561, 4567, 4583, 4591, 4597, 4603, 4621, 4637, 4639, 4643, 4649, 4651, 4657.

Math-Jeunes Junior
Périodique trimestriel
15, rue de la Halle – 7000 Mons
Bureau de dépôt 7000 Mons 1

Responsable de l'édition: A. PATERNOTTRE
Rue du Moulin, 78 – 7300 Boussu
Bureau de dépôt: Mons 1

Autorisation de fermeture
Sluitings toelating
7000 Mons 1
5/156

Belgique - België
P.P.
7000 Mons 1
5/124

Périodique - Peut être ouvert pour contrôle postal

Réservé à la poste

Inconnu
Refusé
Décédé
Adresse insuffisante
N'habite plus à l'adresse indiquée