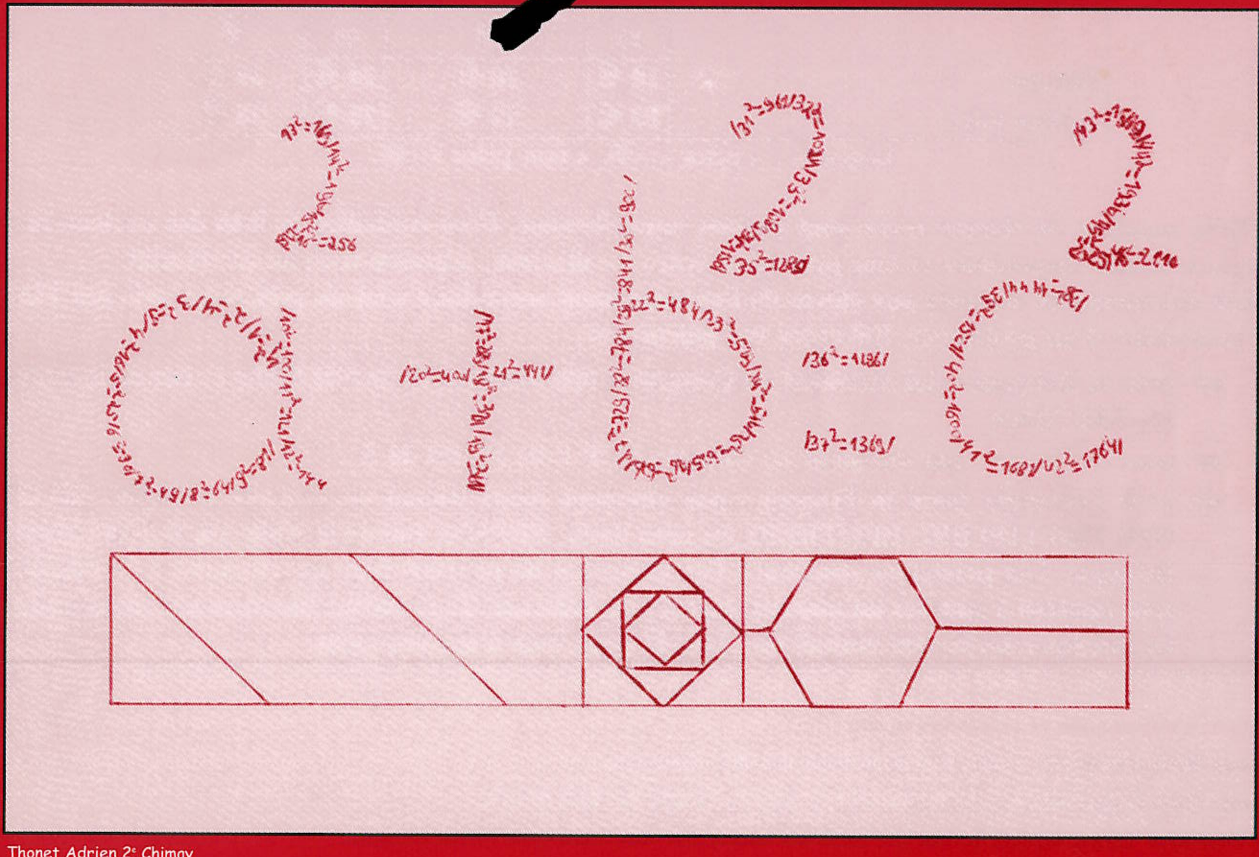
MJ Junior



Thonet Adrien 2e Chimay

27e année - N° 113j
Janvier 2006

Math-Jeunes et Math-Jeunes Junior

Revues trimestrielles publiées par la Société Belge des Professeurs de Mathématique d'expression française

Secrétariat : M.-C. Carruana, SBPMef, rue de la Halle 15, 7000 Mons, ☎-FAX 32-(0)65-373729, GSM : 0473973808 e-mail : sbpm@sbpm.be, URL : http://www.sbpm.be.

Tarifs

Abonnements groupés (au moins 5)		
	Une des deux revues	Les **deux** revues
Belgique	4 €	8 €

Abonnements individuels				
	Une des deux revues		Les **deux** revues	
Belgique	6 €		12 €	
France (abonnement(s) pris par l'intermédiaire de l'APMEP)	8€		16€	
	🖂	🖃	🖂	🖃
Europe	18 €	20 €	24 €	26 €
Autres pays	19 €	22 €	25 €	28 €

Légende : « prior »=🖃, « non prior »=🖂.

Trois numéros de chaque revue sont publiés annuellement. Pour connaître la liste des anciens numéros encore disponibles et leur prix selon votre localisation, adressez-vous au secrétariat.

Les abonnements destinés aux élèves de l'enseignement secondaire sont de préférence pris par l'intermédiaire d'un professeur. Effectuez vos paiements :

- ☞ pour la Belgique : par virement au Compte n°000-0728014-29 de *S.B.P.M.e.f.*, rue de la Halle 15, 7000 Mons
- ☞ pour la France : par virement au Compte CCP Lille 10 036 48 S
- ☞ pour l'étranger (sauf la France) : par virement international au Compte n°IBAN: BE 26 0000 7280 1429 BIC: BPOTBEB1 au nom de la *SBPMef*, rue de la Halle 15, B 7000 Mons, Belgique. Les personnes résidant à l'étranger qui ne peuvent faire un virement à ce compte sont invitées à envoyer un mandat postal international. Tout chèque bancaire non encaissable en Belgique devra être majoré de 12,50 € pour frais d'encaissement.

Éditeurs responsables et rédacteurs en chef :

– pour *Math-Jeunes* : G. Noël, Rue de la Culée 86, 6927 Resteigne

– pour *Math-Jeunes Junior* : A. Paternottre, Rue du Moulin 78, 7300 Boussu

N°113J Vingt-septième année 2006

MATH-JEUNES JUNIOR

Sommaire

Fascinants et énigmatiques nombres premiers(2)

A. Paternottre

Dans un premier article, nous avons examiné quelques propriétés connues et démontrées des nombres premiers. Il faut cependant savoir que pas mal de zones d'ombre subsistent en ce qui les concerne. Si les mathématiciens soupçonnent certaines propositions d'être vraies, ils n'en sont pas moins réduits, faute de pouvoir les démontrer, à se contenter de les énoncer, de les vérifier sur de nombreux exemples et de tenter de les prendre en défaut. Tant qu'une propriété n'est ni démontrée ni invalidée, on dit qu'elle est au stade de la conjecture.

Voici quelques conjectures et incertitudes, toujours actuelles, qui concernent les nombres premiers :

Y a-t-il une expression capable d'engendrer tous les nombres premiers ?

A ce jour, la réponse est clairement « non ».Pourtant plusieurs grands noms des mathématiques ont bien tenté de découvrir une telle expression :

- **Euler** (Suisse ; 1707-1783) proposa l'expression $n^2 + n + 41$ qui, pour $n = 0, 1, 2, 3 \cdots, 39$ n'engendre que des nombres premiers . Hélas pour $n = 40$ cette expression vaut $40^2+40+41 = 40(40+1)+41 = 41^2$ qui n'est évidemment pas un nombre premier . Cependant, en continuant à donner à n les valeurs 42,43,44. . ., un puissant ordinateur a calculé que l'expression d'Euler engendrait des nombres premiers inférieurs à 10^7 dans 47,5% des cas, ce qui est quand même assez remarquable.
- **Mersenne** (Français ; 1588-1648) pensait que l'expression $2^n - 1$ engendrait un nombre premier lorsque n est aussi un nombre premier . Il avait raison pour $n =$ 2,3,5,7. Mais il dut déjà déchanter pour $n = 11$. En effet $2^{11} - 1 = 2047 = 23 \times 89$.
  Il prouva cependant qu'il avait raison pour $n =$ 13,17 et 19.
  Il est donc incorrect d'affirmer que si n est premier alors $2^n - 1$ l'est aussi. Par contre il est correct d'affirmer que si $2^n - 1$ est premier alors n l'est aussi. En effet si n n'est pas premier, on peut poser $n = pq$ et on sait que $2^{pq} - 1$ est divisible par $2^p - 1$ et par $2^q - 1$.
  Ainsi $2^n - 1 = 8191$ (nombre premier - vérifie-le) $\Rightarrow n$ est premier. Que vaut n ?

La chasse aux nombres premiers de Mersenne pour des valeurs de n de plus en plus grandes débuta dès le 17e siècle : En 1640, Fermat prouve que $2^{23} - 1$ n'est pas premier car divisible par 47 (vérifie-le sur une calculatrice).

En 1738, Euler montre que $2^{29} - 1$ n'est pas non plus premier car divisible par 233. Le même Euler, dans la foulée, montre par contre que $2^{31} - 1$ est un nombre premier. Pendant une longue période, $2^{31} - 1$ restera le plus grand nombre premier de Mersenne connu. En 1951, $2^{127} - 1$, un nombre de 39 chiffres, constituait le dernier record obtenu « à la main ». De nos jours, les ordinateurs ont sensiblement accéléré la course aux grands nombres premiers. En 2000, le plus grand nombre premier connu était $2^{6.972.593} - 1$, soit un nombre de 2.098.960 chiffres ! Il a fallu 12 600 ordinateurs reliés entre eux par internet pour pouvoir obtenir ce dernier résultat !

« C'est de la folie ! A quoi cela peut-il bien servir ? », me direz-vous . J'ai trouvé un début de réponse à cette question dans le n°110 de *Math-Jeunes* (janvier 2005). Voici ce qu'il y est dit : « l'utilisation du système de codage de messages secrets appelé cryptosystème RSA nécessite le choix par le destinataire du message de deux grands nombres premiers distincts ». Et l'auteur de l'article (Françoise Valette) d'ajouter : « c'est-à-dire d'au moins 150 chiffres » ! Pourquoi de si grands nombres premiers ? Parce que le codage des messages secrets doit être très fiable si on veut que la sécurité soit maximale dans une opération telle que le paiement d'une facture via une carte de crédit ou via internet. Alors ?... pas si fous qu'on ne pense ces matheux !

La conjecture de Goldbach (Allemand ; 1690 - 1764)

La somme de deux nombres premiers strictement supérieurs à 2 est évidemment toujours un nombre pair. Pourquoi ? Goldbach s'est posé la question de savoir si la réciproque était vraie. Faute de pouvoir la démontrer, (et elle n'est toujours pas démontrée aujourd'hui), il a proposé la conjecture suivante :

> Tout naturel pair (> 2) est la somme de deux nombres premiers .

Ainsi $4 = 2 + 2$; $6 = 3 + 3$; $8 = 3 + 5$; $10 = 3 + 7 = 5 + 5$; $12 = 5 + 7$; $34 = 3 + 31 = 5 + 29 = 11 + 23 = 17 + 17$; $60 = \cdots$; $96 = \cdots$

Certains nombres pairs ont donc plus de 2 décompositions en une somme de deux nombres premiers .

Un ordinateur peut vérifier que si p est un nombre pair et d le nombre de ses décompositions en une somme de deux nombres premiers alors :

$14 \leqslant p \leqslant 32 \Rightarrow d \geqslant 2$ $34 \leqslant p \leqslant 74 \Rightarrow d \geqslant 3$ (sauf 68) $76 \leqslant p \leqslant 200 \Rightarrow d \geqslant 4$ (sauf 98)
$200 \leqslant p \leqslant 500 \Rightarrow d \geqslant 6$ $500 \leqslant p \leqslant 1000 \Rightarrow d \geqslant 10$ $1000 \leqslant p \leqslant 2000 \Rightarrow d \geqslant 16 \cdots$ etc...

Pour les nombres impairs, il existe aussi une conjecture analogue à celle de Goldbach :

> Tout naturel impair (>1) est la somme d'au plus trois nombres premiers .

Ainsi : $3 = 3$; $5 = 3 + 2$;$\cdots$; $25 = 23 + 2 = 19 + 3 + 3 = 17 + 5 + 3 = 13 + 7 + 5 = 11 + 7 + 7$. Recherche d'autres décompositions.

Des recherches récentes (1989) ont démontré que cette conjecture est vraie lorsque le nombre impair est $> 10^{43000}$. Hélas cela ne suffit pas pour affirmer qu'elle est vraie quel que soit le nombre impair $< 10^{43000}$!

Répartition des nombres premiers dans l'ensemble des nombres naturels.

Si tu examines la suite des 630 premiers nombres premiers (page 33 du *Math-Jeunes Junior* 112), tu peux en conclure qu'ils appartiennent tous à l'intervalle$[1, 4657]$. Avec de la patience, tu peux observer dans cette même suite que :

l'intervalle $[1, 100]$ comprend exactement 25 nombres premiers
l'intervalle $[100, 200]$ comprend exactement 21 nombres premiers
l'intervalle $[200, 300]$ comprend exactement 16 nombres premiers
l'intervalle $[300, 400]$ comprend exactement 16 nombres premiers
l'intervalle $[400, 500]$ comprend exactement 17 nombres premiers

Tu l'auras compris, dans des intervalles de même « longueur », le nombre de nombres premiers est loin d'être le même. La répartition des nombres premiers dans l'ensemble des nombres naturels est donc assez chaotique. A ce jour, il n'existe pas de règle permettant de calculer la « distance » qui sépare un nombre premier de son suivant.

A la fin du 18^e^siècle, le grand mathématicien allemand C-F Gauss (1777-1855) avait pressenti que les nombres premiers se raréfient au fur et à mesure qu'on progresse vers les très grands naturels. Il a même conjecturé le « Théorème des nombres premiers » qui ne sera démontré qu'un siècle plus tard et séparément par J. Hadamard (Français ; 1865-1963) et C. de la Vallée-Poussin (Belge ; 1866-1962). En 1949, P. Erdös (Hongrois ; 1913-1996) et A. Salberg (Norvégien ; 1917-) en donnèrent une preuve élémentaire. Pour appliquer ce théorème, il faut connaître la notion de « logarithme népérien d'un nombre $x(x > 0)$ qu'on note $ln\ x$ ». Tu n'aborderas cette notion qu'en 6^e^année. Sache seulement que ta calculatrice, grâce à sa touche « ln » donne directement la valeur de $ln\ x$. Par exemple $ln\ 254 = 5,537$.

Voici l'énoncé du « *Théorème des nombres premiers* » :

> Une valeur approximative du nombre de nombres premiers inférieurs à x est $\frac{x}{ln\ x}$
> et l'approximation est d'autant meilleure que x est grand

Ainsi une valeur approximative du nombre de nombres premiers inférieurs à 4657 vaut $\dfrac{4657}{ln\ 4657} \approx \dfrac{4657}{8,44} \approx 551$. Or on lit dans la liste des nombres premiers (page 33) que 4657 est le 630^e^ nombre premier . Le pourcentage d'erreur est donc de $\dfrac{100 \times (630 - 551)}{551} = 14,3\%$.

De même une valeur approchée du nombre de nombres premiers inférieurs à 10^6 vaut $\dfrac{10^6}{ln\ 10^6} \approx$ 72382. Or on sait (grâce aux ordinateurs) que le nombre exact de nombres premiers inférieurs à 10^6 est 78498. Cette fois le pourcentage d'erreur n'est plus que 8,4%.

- Un 2^e^ préalable avant d'aller plus loin : la notion (facile) de « factorielle »

Par définition : $n! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times \cdots \times n.$ = produit des n premiers nombres naturels.

La notation $n!$ se lit « factorielle (de) n ».

Ainsi $5! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 = 120$. Calcule la valeur de 10! .

$n!$ est donc divisible par 1, 2, 3 , 4 ,5, $\cdots (n-1)$, n ainsi que par tout produit de 2, 3,$\cdots n$ facteurs choisis parmi les précédents. Cela étant, il est possible de créer des intervalles de naturels arbitrairement longs et ne comprenant aucun nombre premier . Observe l'intervalle suivant :

$$[100! + 2\ ,\ 100! + 3\ ,\ 100! + 4, \cdots\ ,\ 100! + 100].$$

Cet intervalle comprend exactement 99 naturels consécutifs. Aucun d'eux n'est premier. En effet :

2 divise 2 ainsi que 100! . Donc 2 divise $100! + 2$ et dès lors $100! + 2$ n'est pas premier.

3 divise 3 ainsi que 100! . Donc 3 divise $100! + 3$ et dès lors $100! + 3$ n'est pas premier.

...etc.

100 divise 100 ainsi que 100! . Donc 100 divise $100!+100$ et dès lors $100!+100$ n'est pas premier.

Conclusion : l'intervalle écrit ci-dessus comprend 99 naturels consécutifs dont aucun n'est premier. Si on avait pris $n = 5000$, on aurait obtenu un intervalle de 4999 naturels consécutifs et non premiers. Il est donc possible, en prenant n assez grand, de créer de très longs intervalles de naturels consécutifs ne comprenant aucun nombre premier.

Une dernière incertitude

Deux nombres premiers sont dits « jumeaux » si leur différence vaut 2 . Ainsi 3 et 5, 5 et 7, 11 et 13 , 4517 et 4519 sont des paires de nombres premiers jumeaux. On pense qu'il existe une infinité de telles paires mais on ne l'a jamais démontré !

Au royaume des nombres premiers, tout est donc loin d'être connu. C'est sans doute pour cela que, depuis l'Antiquité, les nombres premiers ont toujours fasciné les mathématiciens. Si, d'une part, leurs recherches ont été souvent fructueuses, ils sont conscients, d'autre part, qu'ils ont encore un long chemin à parcourir. Croisons donc les doigts ! Que les nombres premiers ne t'empêchent quand même pas de dormir !

Complément biographique par **Simone Trompler**

ATLE SELBERG(1917-) Mathématicien norvégien. Son intérêt pour les mathématiques se révèle dès le début de sa scolarité. Il devient professeur à l'université d'Oslo et y reste jusqu'à son départ aux U S A, en 1947. Il fait carrière à Princeton. En 1950 il reçoit la médaille Fields (analogue au prix Nobel qui n'existe pas pour les mathématiques). Il est bien connu pour sa preuve élémentaire du théorème des nombres premiers Il n'est pas le premier à le prouver (voir article) mais, avec Erdös, il en donne une démonstration sans faire appel à des mathématiques compliquées.

Paul Erdös (1913-1996) Mathématicien juif hongrois. Ses deux parents étaient professeurs de mathématiques. Son adolescence est marquée par les mesures anti-juives en vigueur en Hongrie et il doit à sa victoire à un examen national de pouvoir entrer à l'université. Il décide de fuir son pays après son doctorat, voyage en Angleterre et aboutit aux U S A lorsque la situation devient désespérée pour les Juifs aux abords de la guerre. Il reste aux U S A jusque dans les années 50, puis passe les 10 années suivantes en Israël. Ensuite, il voyage beaucoup. Erdös aimait surtout résoudre des problèmes plutôt que d'établir des théories : il cherchait des solutions élégantes et simples. Parmi ses contributions aux mathématiques, il faut citer ses travaux avec Selberg sur les nombres premiers. Il a gagné de nombreux prix et a été grandement apprécié par ses contemporains.

Jacques Salomon HADAMARD (1865-1963) Mathématicien français. Au début de sa scolarité, il était bon dans toutes les branches. . .excepté en mathématiques. Mais, au moment du baccalauréat, il arrivait premier en algèbre et en mécanique. Ses études universitaires se suivent avec tous les succès. Entre 1896 et 1900, il publie 29 articles. Le résultat le plus important qu'il prouve est probablement le théorème sur les nombres premiers . Une autre œuvre primordiale est « leçons de géométrie élémentaire » en 2 volumes : le premier traite de géométrie à 2 dimensions, le deuxième à 3 dimensions. Son influence dans l'enseignement français a été très importante et durable. Hadamard a laissé une abondante contribution aux mathématiques, avec plus de 300 articles dans de nombreux domaines. C'était un homme engagé contre l'injustice (affaire Dreyfus) et la guerre. Il a été très admiré comme savant et comme personnalité par ceux qui l'ont connu.

Christian GOLDBACH (1690-1764) Mathématicien allemand. En 1725 il devient professeur de mathématiques et historien à Saint-Pétersbourg. Puis il part à Moscou comme précepteur du Tsar Pierre II. Il voyage partout en Europe où il rencontre de grands mathématiciens. Son œuvre est surtout importante dans la théorie des nombres, en particulier dans sa correspondance avec Euler. Il étudie aussi les séries, la théorie des courbes et la théorie des équations.

Marin MERSENNE (1588-1648) Philosophe, mathématicien, physicien français. Il a joué un rôle de premier plan par ses réunions auxquelles assistaient les mathématiciens renommés de France , comme Pascal, Fermat, Roberval, Descartes mais aussi des étrangers comme Huygens. A sa mort on a retrouvé des lettres de 78 correspondants scientifiques différents. A une époque où les journaux scientifiques n'existaient pas, il les a remplacés en communiquant des informations de l'un à l'autre à travers toute l'Europe. Il s'est beaucoup intéressé aux nombres premiers, cherchant une formule qui les représente tous. Il n'y est pas arrivé, mais ses travaux ont contribué à une meilleure connaissance des grands nombres premiers. Il était entré dans l'ordre des Minimes en 1611 et est devenu prêtre en 1612. Il défendit Descartes et Galilée contre les critiques théologiques.

Charles Jean Gustave Nicolas Baron de LA VALLEE POUSSIN (1866-1962) Mathématicien belge. Après avoir pensé devenir jésuite, il se tourne petit à petit vers les mathématiques et étudie à l'université de Louvain, de Paris et de Berlin. Il devient professeur à l'université de Louvain et le reste pendant plus de 50 ans. Il commence par faire ses recherches sur l'analyse : intégrales et équations différentielles. Mais son résultat le plus connu est sa démonstration du théorème des nombres premiers. Il a aussi travaillé sur l'approximation de fonctions. Son « cours d'analyse » a eu un très grand impact sur les étudiants pendant de longues années depuis 1903. Il a été élu à l'Académie de Belgique en 1909, mais aussi à l'Académie des Sciences de Madrid, la société des Sciences de Naples l'Institut de France et l'Académie américaine nationale de Scisnces, entre autres! Le Roi l'a fait baron en 1928. De La Vallée Poussin est une de nos gloires nationales

Leonhard EULER(1707-1783) Mathématicien suisse, de famille protestante. Elève dans une école de Bâle, de qualité médiocre, il lit des textes de mathématiques par lui - même.Il entre à l'université à 14 ans, y étudie la philosophie et commence la théologie, mais renonce à être pasteur : ses goûts le portent vers les mathématiques. Il accumule des prix avant l'âge de 20 ans. Après avoir voyagé, il se fixe à Saint-Petersbourg et devient professeur de mathématique à l'Académie, succédant à son ami Daniel Bernoulli. Sa réputation est immense vers 1740 ; il accepte une situation élevée à l'Académie de Berlin, tout en gardant des contacts étroits avec Saint-Petersbourg. Il y retourne d'ailleurs. Malheureusement il devient aveugle en 1771. Il continue à publier, aidé par ses fils. Son oeuvre est incroyablement vaste et sa contribution en analyse, géométrie et théorie des nombres est de premier plan.

Johann Carl Friedrich GAUSS(1777-1855) Mathématicien allemand. Ses dispositions pour les mathématiques sont découvertes très tôt. Il étudie à l'université de Göttingen, puis professe à l'université de Brunswick. Il découvre comment construire un 17-gone avec une règle et un compas. Il publie « disquisitiones Arithmeticae », consacré à la théorie des nombres. En 1807 il devient directeur de l'Observatoire de Göttingen et continue ses observations astronomiques jusqu'à l'âge de 70 ans. Il s'investit aussi dans de nombreuses branches de mathématique et de physique et publie beaucoup d'articles de grand intérêt. Dès 1800, il se préoccupe de géométrie non euclidienne. Avec Weber, il étudie le magnétisme. Il est impossible de détailler ici ses nombreuses contributions aux mathématiques de son époque : elles font généralement appel à des notions trop complexes pour de jeunes élèves

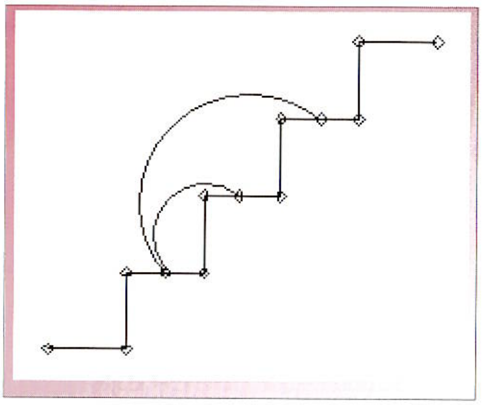
La stratégie de l'escalier !

Claude Villers

Dénombrements/2

Mathieu (on écrira simplement $M.$ par la suite) a l'habitude de franchir l'escalier qui mène à son bureau en grimpant une marche ou deux marches à la fois et en combinant cela selon son humeur du moment.

Cela signifie donc qu'au départ d'une marche il peut monter sur la suivante ou passer par dessus comme l'illustre le dessin ci-contre.



Mais voilà qu'il décide d'adopter, chaque jour, une façon de monter les 13 marches de l'escalier qui soit différente de celles qu'il a déjà utilisées.

Combien de temps lui faudra-t-il donc pour épuiser, à ce rythme quotidien, toutes les possibilités ? ? Un an ? Plus qu'un an ? Moins qu'un an ?

Cherchez ! Quel est votre avis ?

Une première idée serait d'établir la liste de toutes les façons de monter cet escalier.

Encore faut-il convenir de la manière de coder chaque façon.

Convenons donc que le fait d'écrire 1 signifie que $M.$ passe d'une marche directement à la suivante tandis qu'écrire 2 signifie qu'il saute par dessus une marche.

De cette manière, écrire 1111111111111 signifie que $M.$ a monté tout l'escalier une marche à la fois tandis que 1221112111 traduit le fait que $M.$ a effectué, dans l'ordre, 1 montée d'une marche, 2 montées de 2 marches, 3 montées d'une marche, 1 montée de 2 marches et 3 montées de 1 marche.

Dans chaque codage, il est donc nécessaire que la somme totale des valeurs des chiffres soit 13, pour l'escalier en question bien entendu.

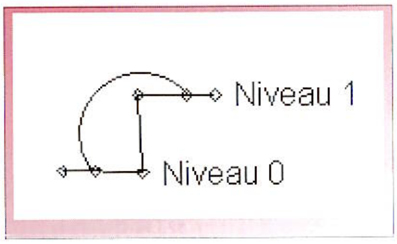
Il faut donc écrire toutes les suites de 1 ou de 2 dont la somme est 13.

Cela ne paraît pas bien compliqué mais c'est certainement un travail fastidieux et comportant des risques d'oublis ou de répétitions.

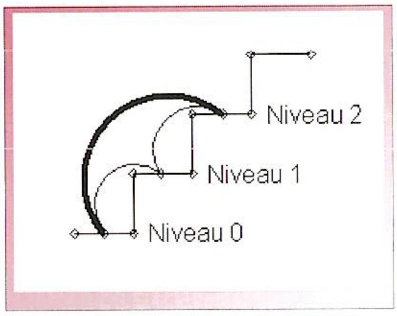
Vous pouvez cependant essayer de vous y risquer.

Une autre idée pour traiter le problème est de calculer le nombre de façons d'atteindre le haut de l'escalier en partant du bas si cet escalier ne possède que 1 marche, puis 2 marches, puis 3 marches, etc… jusqu'à 13 marches (ou plus si vous le voulez).

- L'escalier possède 1 seule marche .
  Il n'y a qu'une façon de passer du niveau 0 au niveau 1.
  On peut la coder par 1.



- L'escalier possède 2 marches.
  Il y a 2 façons de passer du niveau 0 au niveau 2. On peut les coder par 11 ou par 2.
  11 est illustré par les arcs en traits fins et 2 est illustré par l'arc en trait gras.



- L'escalier possède 3 marches.
  Vous avez certainement trouvé que les codes sont 111, 12, 21 ce qui montre qu'il y a 3 façons de monter cet escalier de 3 marches. Illustrez-les par des croquis.

- L'escalier possède 4 marches.
  Les codes sont 1111, 121, 112, 211 et 22.
  Il y a donc 5 façons de monter cet escalier.

- L'escalier comporte 5 marches. Les codes sont alors 11111, 1211, 1121, 1112, 2111, 221, 212, 122.
  Il y a 8 façons de monter l'escalier.

- L'escalier comporte 6 marches.
  Ecrivez les codes sans en omettre ni en répéter.
  Les voici : 111111, 12111, 11211, 11121, 11112, 21111, 2211, 2121, 2112, 1221,1212,1122 et 222.
  Il y a donc 13 façons de monter cet escalier de 6 marches.

Comme vous pouvez le constater, en observant ces codes, ils ont été classés selon le nombre de signes 2 utilisés.

Il existe certainement d'autres stratégies de classement.

En fait, cette méthode est la même que celle suggérée en premier lieu.

Donnons-nous une idée de l'évolution des nombres de façons obtenus en dressant un tableau de synthèse.

Nombre de marches	1	2	3	4	5	6
Nombre de façons	1	2	3	5	8	13

N'avez-vous pas maintenant une idée de la manière de remplir les cases de la 2^{e} ligne ? ?

La conjecture est que chaque case, à partir de la troisième, contient la somme des nombres des deux cases qui la précèdent.

Si cette conjecture est correcte alors on obtiendra le tableau suivant qui répond à la question des 13 marches.

Nombre de marches	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Nombre de façons	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233	377

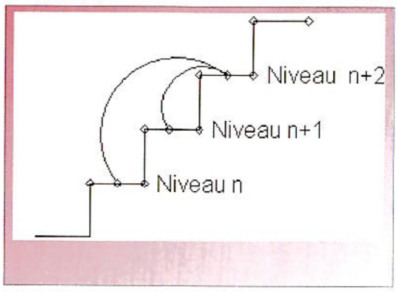
Il faudrait donc 377 jours à Mathieu pour épuiser toutes les possibilités soit donc plus d'une année.

Mais encore faut-il prouver que la conjecture utilisée est correcte.

Voici, pour ceux qui souhaitent en savoir un peu plus, une justification de la validité de la conjecture.

L'idée est la suivante : plutôt que de se focaliser sur ce qui se passe au départ d'une marche nous allons observer comment il est possible d'arriver sur une marche.

Juste avant d'atteindre le niveau $n+2$, il faut nécessairement se trouver soit au niveau $n+1$ soit au niveau n. Dès lors, le nombre de façons d'atteindre le niveau $n+2$ est égal à la somme des nombres de façons d'atteindre les niveaux $n+1$ et n c'est à dire les deux niveaux qui le précèdent.



Il suffit alors de dresser le tableau précédent en commençant par les valeurs initiales qui sont connues par expérience.

Remarquez que ce tableau pourrait commencer par une case relative à un escalier de 0 marche car il n'existe qu'une façon d'aller du niveau 0 au niveau 0 : c'est de rester en place.

Remarque

Voici un tableau donnant les nombres de façons pour des escaliers jusqu'à 20 marches.

Nombre de marches	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Nombre de façons	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233	377	610	987	1597	2584	4181	6765	10946

Les deux premières valeurs de la deuxième ligne sont 1 et 1. Chacune des autres valeurs est obtenue en additionnant les deux valeurs qui la précèdent.

Cette 2[e] ligne constitue une suite de nombres appelée Suite de Fibonacci.

Peut-être en avez-vous déjà entendu parler ?

La suite de Fibonacci possède de très nombreuses propriétés. Mais nous n'en envisagerons qu'une seule dans le cadre de ce texte.

Divisez chaque terme de la suite de Fibonacci par son précédent, en commençant par 1/1 (contentez-vous éventuellement des quotients approchés par défaut, à 4 chiffres après la virgule).

Observez bien ce que vous obtenez ?

Les quotients successifs sont :

1, 2, 1,5, 1,6666..., 1,6, 1,625, 1,6153..., 1,6190..., 1,6176..., 1,6181..., 1,6179..., 1,6180..., 1,6180..., 1,6180..., 1,6180..., 1,6180..., 1,6180..., 1,6180..., 1,6180..., 1,6180....

Les chiffres cachés varient mais il est clair que ces quotients tendent à devenir le même nombre
Ce nombre est bien connu : c'est le fameux nombre d'or

Euclide fait mention du Nombre d'Or dans son traité de géométrie (3[e] siècle avant Jésus Christ). Pythagore (4[e] siècle avant J.C.) et ses disciples, connaissaient les propriétés de ce nombre qui représentait, pour eux, l'harmonie entre les nombres et donc aussi dans certaines formes géométriques. Plus tard, Le Titien, Léonard de Vinci, Raphaël furent des utilisateurs du Nombre d'Or. Le fameux tableau « La Joconde » de Léonard de Vinci serait composé, parait-il, selon cette « divine proportion ».

Ce qui est surprenant, c'est de recommencer ces calculs en utilisant une suite de Fibonacci dont les deux premiers termes sont choisis au hasard. Ces suites sont aussi appelées « Suites de Lucas ».

Réalisons cela en prenant, par exemple, 3 et -1 comme deux premiers termes. La suite est :

3, -1, 2, 1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, 47, 76, 123....

Les quotients successifs de chaque terme (en commençant par le deuxième) par le précédent sont :

-2 ; 0,5 ; 3 ; 1,333... ; 1,75 ; 1,5714... ; 1,636... ; 1,611... ; 1,620... ; 1,617... ; 1,618... ; etc...

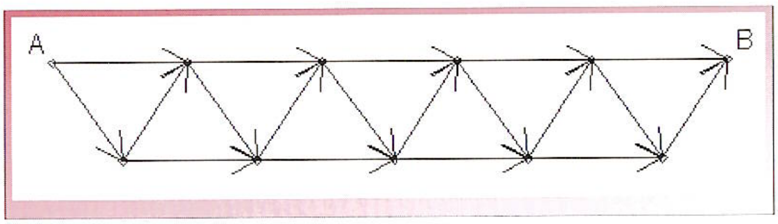
Tous ces quotients semblent donc se diriger (on dit que leur suite converge) à nouveau vers le nombre d'or.

Cela peut se démontrer avec des moyens simples. C'est un autre sujet.

Mais peut-être que cela constitue un thème de recherche individuel ou collectif !

Application

Si vous avez bien compris ce qui précède alors vous ne serez pas en peine de trouver le nombre de chemins différents permettant de se rendre de A à B en suivant les poutres métalliques de la structure représentée ci-dessous tout en ne se déplaçant que dans le sens indiqué par les flèches.



FIBONACCI (Complément de Simone Trompler)

Leonardo de Pise, dit Fibonacci, (c. à d. fils de Bonacci) est né entre 1170 et 1175 et mort entre 1240 et 1250.

Il est né et mort à Pise , mais a été élevé en Algérie où son père représentait les commerçants de la République de Pise. Il y a étudié les mathématiques et a beaucoup voyagé avec son père, l'aidant dans son commerce, notamment en Syrie, en Grèce et en Egypte.

C'est ainsi qu'il fait la connaissance des chiffres indo-arabes et apprend la numération de position. Il est vite convaincu du progrès que cette numération apporte au calcul et contribue fortement à son introduction dans nos pays.

Vers 1200, il retourne à Pise et y écrit de nombreux ouvrages de mathématiques. Le plus connu est le « Liber abaci », puis la « Practica geometriae », « Flos », « Liber quadratorum » et bien d'autres.

Mais Fibonacci écrivait avant l'invention de l'imprimerie et la seule façon d'obtenir ses livres était de les copier, ce qui explique la perte des autres livres. Il a été très célèbre de son temps. En 1225, l'empereur Frédéric II, (du Saint Empire Romain) organise un tournoi à Pise. Léonard résout tous les problèmes, alors que les autres participants n'en résolvent aucun ! Léonard prouve aussi des résultats intéressants dans la théorie des nombres ; par exemple qu'il n'y a pas de x , y (entiers non nuls) tels que $x^2 + y^2$ et $x^2 - y^2$ soient des carrés en même temps et que dès lors $x^4 - y^4$ ne peut pas être un carré.

La suite de Fibonacci ci-dessous est bien connue, mais ses autres contributions au progrès des mathématiques ont eu moins d'influence durant le Moyen-Age qu'on aurait pu l'espérer.

$$1 , 1 , 2 , 3 , 5 , \ 8 , 13 , 21 \ldots$$

Peux-tu compléter cette suite par quelques termes supplémentaires ?

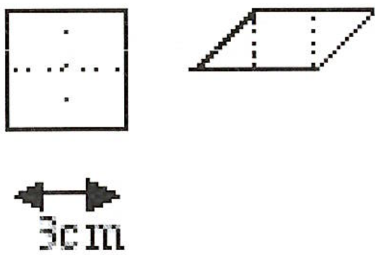
Sache qu'il existe une formule permettant de calculer le terme de rang n (n = nombre naturel quelconque).Mais ceci est une autre affaire !

Des cubes accolés

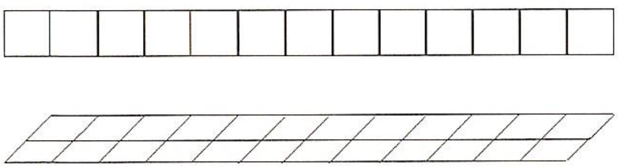
F. Drouin

Un premier bricolage

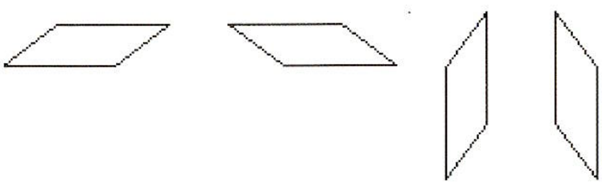
Sur du carton, dessine puis découpe de nombreuses pièces semblables à celles dessinées ci-dessous.



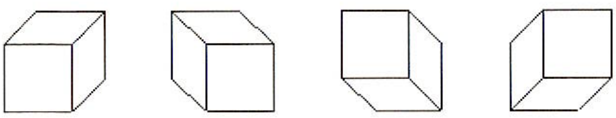
Tu peux en dessiner de grandes bandes. Cela facilitera le découpage :



Les parallélogrammes, peuvent être retournés et prendre diverses positions.



En utilisant un carré et deux parallélogrammes des visualisations d'un cube apparaissent.

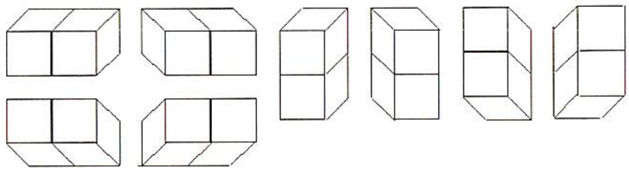


Pour bien comprendre ce que représentent ces dessins, prends un cube dans ta main (construis-le ou emprunte-le dans ton ancienne caisse à jouets) .

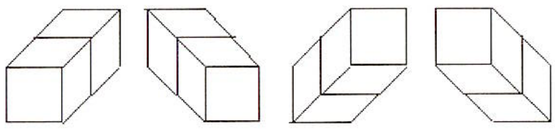
Positionne-le pour que ton oeil voie ce qui est dessiné ci-dessus. Le cube sera au-dessous, à droite ou à gauche de la direction de ton regard.

En utilisant de nouveau les carrés et les parallélogrammes, imaginons les visualisations de deux cubes accolés par une face entière.

Tu as sans nul doute trouvé les huit dessins ci-dessous :



Mais avais-tu pensé à ces quatre-ci ?



Nous avions trouvé quatre visualisations différentes pour un cube. Notre monde est un espace à trois dimensions. Trois directions sont possibles pour cet assemblage, il existe donc 12 dessins différents pour ces assemblages de deux cubes.

Que penses-tu de ces dessins ?

Tu vas vite rejeter le premier car notre oeil ne réussit pas à voir en même temps le dessus et le dessous d'un parallélépipède.

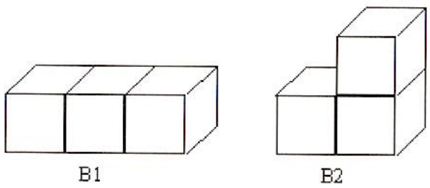
Le second est difficile à analyser : un cube vu du dessus et un cube vu du dessous semblent être accolés. Bizarre... Tu viens de faire un tour dans le monde des figures impossibles et de certaines oeuvres de Vasarelly.

Continuons notre recherche avec les visualisations d'assemblages de trois ou quatre cubes. Je ne te les dessinerai pas toutes. D'ailleurs, penses-tu qu'ici aussi 12 soit le nombre de dessins possibles pour chaque assemblage ?

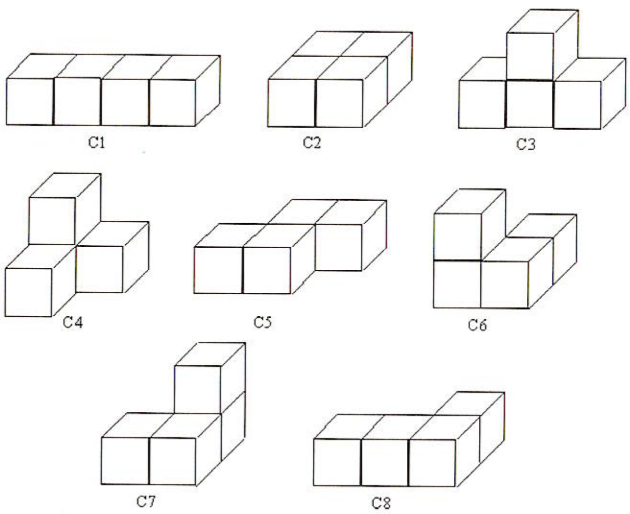
Fais tes recherches et présente tes résultats à ton professeur de mathématiques.

Pour chaque assemblage, voici une visualisation privilégiant les carrés et les parallélogrammes présentés en début d'article.

Il existe deux « tricubes » :



Il existe sept « tétracubes » :



La pièce C_3 est la seule qui ne peut pas être représentée en utilisant des parallélogrammes entiers.

Un nouveau bricolage :

Des tasseaux de bois peuvent être découpés par un parent bricoleur et tu peux obtenir ainsi une collection de cubes.

Tu peux aussi fouiller dans la caisse à jouets de ton enfance. Avec un peu de colle, tu peux réaliser les « tricubes » et les « tétracubes » proposés.

Certaines de ces pièces vont te permettre la construction d'un cube $3 \times 3 \times 3$.

La pièce C1 est clairement inutilisable. Il te reste à choisir un « tricube » parmi $B1$ et $B2$ et six « tétracubes » parmi $C2$, $C3$, $C4$, $C5$, $C6$, $C7$ et $C8$ $(27 = 3 + 6 \times 4)$.

Quatorze regroupements sont a priori envisageables. Cependant, les pièces $B1$, $C2$, $C4$, $C5$, $C6$, $C7$ et $C8$ ne permettent pas la construction du cube attendu.

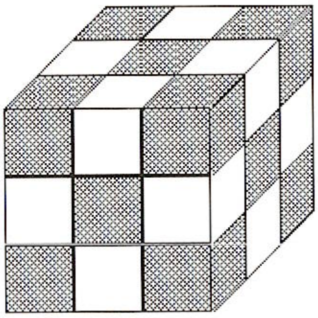
J'ai trouvé une justification de cette impossibilité dans le livre : « Der verzauberte Raum-Spiele in drei Dimensionen » (R.Thiele K.Haase) URANIA 1991 , je vais te l'expliquer.

Lors de la réalisation du cube $3 \times 3 \times 3$, les pièces $B1$ et $C8$ peuvent apporter au maximum chacune deux coins et les pièces $C2$, $C4$, $C5$, $C6$ et $C7$ au maximum chacune un coin.

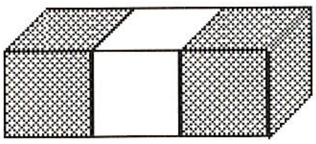
Ceci nous fait un maximum de neuf coins possibles, mais seuls huit seront utilisés. Je suppose que la pièce $B1$ ne fournit pas de coin au cube $3 \times 3 \times 3$.

Dans ce cas, les autres pièces ne pouvant fournir qu'un maximum de sept coins, la construction serait alors impossible.

J'en conclus que la pièce $B1$ doit fournir deux coins au cube cherché. Imagine le cube $3 \times 3 \times 3$ formé de 27 cubes alternativement blancs et noirs, les huit coins étant formés de cubes noirs.



Le cube est formé de 14 cubes noirs et 13 cubes blancs. La pièce $B1$ fournit deux coins au cube $3 \times 3 \times 3$. Elle est donc formée de deux cubes noirs et d'un cube blanc.



B1

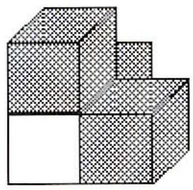
Les pièces $C2$, $C5$,$C6$, $C7$ et $C8$ seront toutes formées de deux cubes noirs et de deux cubes blancs.

Pour ces six pièces $B1$, $C2$, $C5$, $C6$, $C7$ et $C8$ douze cubes noirs et onze cubes blancs sont alors utilisés.

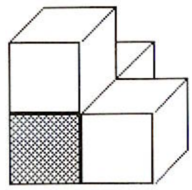
Il resterait deux cubes noirs et deux cubes blancs pour la pièce $C4$.

Ce qui est impossible car cette pièce $C4$ ne peut être formée que de trois cubes noirs et un cube blanc ou trois cubes blancs et un cube noir.

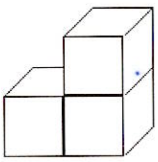
C4



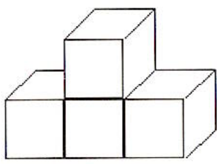
ou



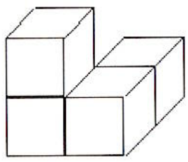
Un de ces assemblages a acquis une certaine célébrité. En 1936, le danois Piet Hein réfléchit à l'assemblage des « tricubes » et « tétracubes » qui ne sont pas des parallélépipèdes.



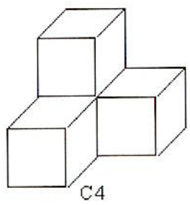
B2



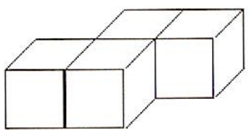
C3



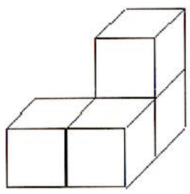
C6



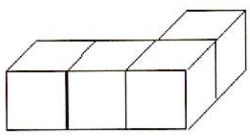
C4



C5



C7



C8

Les sept pièces restantes forment ce qu'il a nommé « le cube SOMA », en référence au roman « Le meilleur des mondes » d'Aldous Huxley . Je te le laisse manipuler.

Les sept pièces permettent la réalisation d'un cube, mais aussi de nombreux autres solides.

Je te propose un thème de recherche : la pièce $B2$ est formée de 3 cubes.

Si j'imagine cette pièce à l'échelle 2, elle sera réalisée avec 24 cubes (si je multiplie les longueurs par 2, le volume sera multiplié par 2^3.

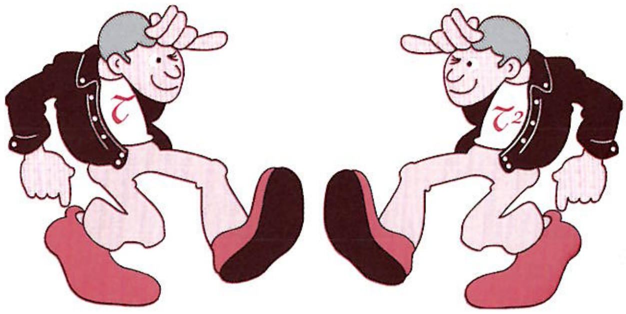
La pièce $B2$ à l'échelle 2 est-elle réalisable avec les 24 cubes formant les six pièces restantes ?

Les frères Hick 16

B. Honclaire

Agence de détectives privés
Les frères Hick

Recherches en tous genres



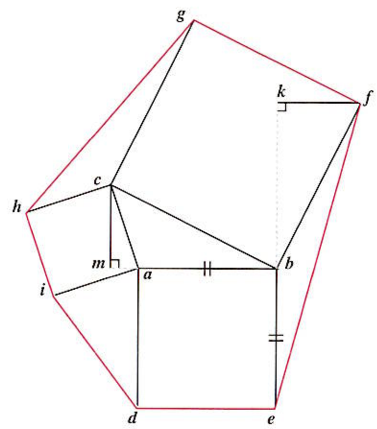
Ami lecteur,

$\mathcal{T}^2$ Va terminer le problème des quatre triangles et nous faire part de ses réflexions sur les puzzles proposés par son frère. $\mathcal{T}$ fera la synthèse sur le calcul de l'aire d'un parallélogramme et proposera d'autres assemblages ou puzzles pour calculer les aires des triangles. Bon courage et bon amusement.

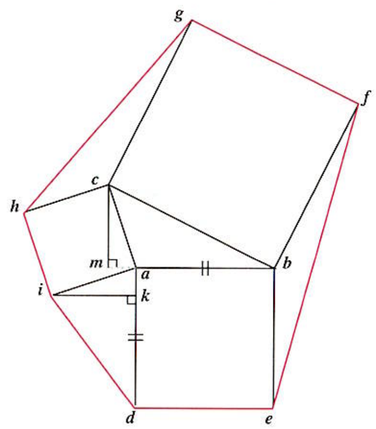
Bernard Honclaire

$\mathcal{T}^2$ (très concentré) - « **Je pense avoir trouvé les bases et hauteurs correspondantes pour les triangles restants !**

Regarde pour les triangles abc et ebf, j'ai choisi $[ab]$ et $[be]$ comme bases; $[cm]$ et $[kf]$ sont les hauteurs correspondantes.
Ces hauteurs, comme les triangles kfb et cmb sont images par rotation de 90° autour de b
...(il continue cherchant un regard d'approbation chez son frère)...



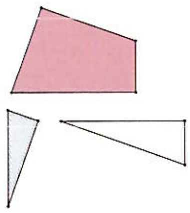
Regarde pour les triangles abc et adi, j'ai choisi $[ab]$ et $[ad]$ comme bases; $[cm]$ et $[ki]$ sont les hauteurs correspondantes.
Ces hauteurs, comme les triangles kia et cma sont images par rotation de 90° autour de a .



$\mathcal{T}$ (laissant paraître une pointe d'ironie)- « *Je constate que tes progrès sont impressionnants !* »

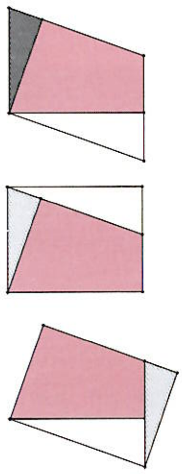
$\mathcal{T}^{\in}$ (imperturbable)- « *Et ce n'est qu'un début... Regarde ce que je t'ai préparé avec ton premier puzzle !* »

Pour rappel : En utilisant les trois pièces suivantes, construis un parallélogramme, puis un rectangle et ensuite un rectangle dont les dimensions sont différentes du précédent.



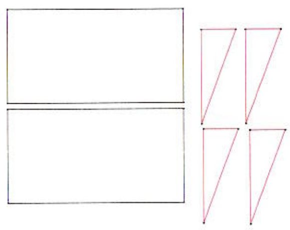
Je me suis également posé la question de savoir si, en partant de n'importe quel parallélogramme, je pouvais réaliser un tel puzzle ! Je dois choisir un sommet à partir duquel je peux mener des perpendiculaires aux deux côtés opposés. Et tout cela intérieurement au parallélogramme !

Le fichier puzzle01.fig que j'ai fait avec Cabri te prouvera que j'avais raison de me méfier ! »



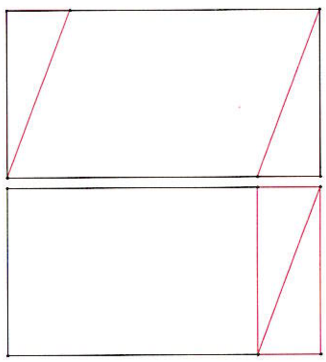
$\mathcal{T}$ (satisfait) - « *C'est parfait ! Et pour le deuxième...* »

Pour rappel : tu disposes de deux rectangles noirs isométriques et de quatre triangles rectangles isométriques .
Dispose deux triangles dans chacun de ces rectangles de façon à faire apparaître un rectangle dans l'un et un parallélogramme dans l'autre

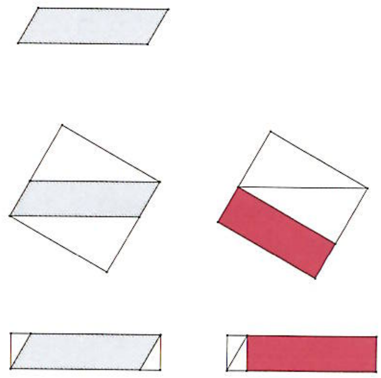


$\mathcal{T}^2$ (l'interrompant sèchement) - « *Si tu permets, je n'avais pas terminé...*

Le deuxième puzzle était plus simple et... de plus il peut se réaliser avec tous les parallélogrammes ! Tu le vérifieras avec mon fichier puzzle02.fig ! Je sais que tu vas me dire qu'il faut toujours les pencher vers la droite ! ... Mais, j'y ai pensé !... Mon fichier puzzle03.fig mettra tout le monde d'accord ! Fini la polémique gauche-droite !



« Plus sérieusement ! Partant du parallélogramme, je dois l'encadrer de deux triangles pour former un grand rectangle ! Pour ce faire, des extrémités de la grande diagonale, je trace des perpendiculaires aux côtés opposés ! Et comme tu peux le constater, cela peut toujours s'effectuer de deux façons ! Regarde et admire également mon fichier puzzle04.fig ! »



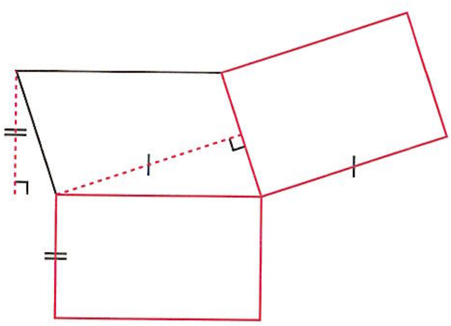
$\mathcal{T}$ (étonné, toute trace d'ironie a disparu) - « *Quelle conclusion tires-tu de ces constructions ?* »

$\mathcal{T}^2$ (simulant une grande fatigue) - « *Je pense que c'est à ton tour de travailler !* »

$\mathcal{T}$ (magistralement) - « *En fait, tu viens de me prouver que l'on peut toujours remplacer un parallélogramme par deux rectangles de même aire ! Pour calculer l'aire d'un parallélogramme, il suffit donc de faire le produit des deux dimensions d'un de ces rectangles !* »

$\mathcal{T}^2$ (soucieux) - « *... Je me souviens d'une formule ... base fois hauteur ... je crois ! ... Mais en fait ... il y en avait deux ... une pour chaque rectangle ! ... Une dimension d'un rectangle est la longueur d'un côté du parallélogramme ... bien sûr, les côtés parallèles ont la même longueur ... et l'autre dimension est la distance entre ces côtés parallèles ...* »

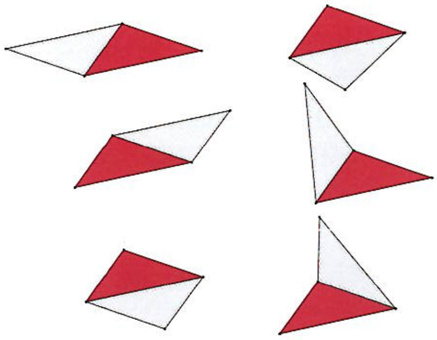
$\mathcal{T}$- « *Regarde ce beau dessin ! Il vaut mieux qu'une formule !* »



$\mathcal{T}^2$ (souriant) - « *Je dirais même plus ! Il vaut deux formules !* »

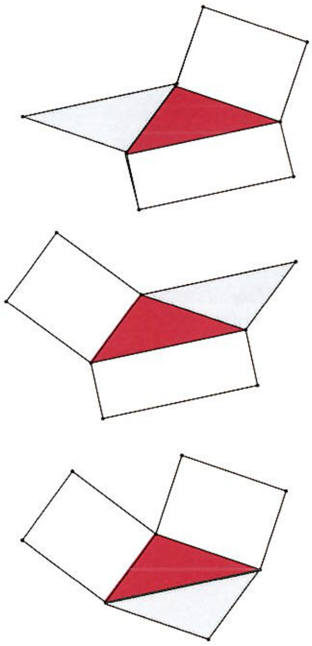
$\mathcal{T}$ - « *Pour répondre à ta question (voir Hick15) - de quelle figure un triangle est-il la moitié ? - je te propose d'assembler deux triangles identiques dans le but de former une figure dont tu sais déjà calculer l'aire. Tu peux utiliser le logiciel AG (Apprenti Géomètre) ; je sais que tu aimes cela !* »

$\mathcal{T}^2$ (satisfait de pouvoir utiliser son ordinateur) - « *Je duplique ... je tourne d'un demi-tour ... j'ajuste ... et même de plusieurs façons! ... Tiens, tiens! J'ai fabriqué des parallélogrammes! ... Et si je retourne avant d'ajuster? ... On dirait des cerfs-volants! ...* »

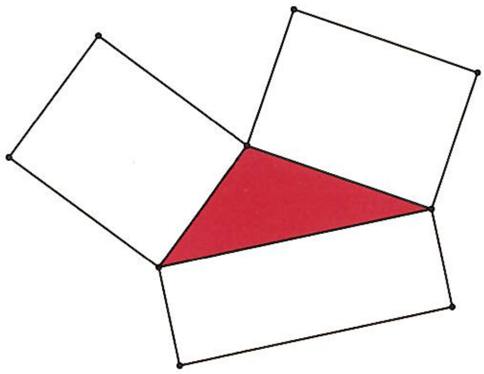


$\mathcal{T}$ (admirant la dextérité de son frère) - « *Maintenant, tu peux facilement me dire comment calculer l'aire d'un triangle!* »

$\mathcal{T}^2$ (extrêmement concentré) - « *... Evidemment! ... Un parallélogramme ... deux rectangles ... Trois parallélogrammes ... six rectangles ... Mais il y a plusieurs fois les mêmes! ...*



Je peux résumer ... et dire qu'un triangle peut être remplacé par trois rectangles ... il faut encore en prendre la moitié!



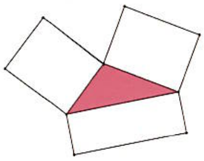
$\mathcal{T}^2$ (soupirant) -*Je comprends pourquoi on m'avait dit - base fois hauteur divisé par deux - mais en réalité c'était plutôt - côté fois hauteur correspondante divisé par deux!* »

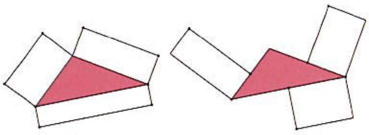
$\mathcal{T}$ (magistralement) - « *Si j'appelle les trois côtés $c1$, $c2$ et $c3$ et les hauteurs correspondantes $h1$, $h2$ et $h3$, l'aire d'un triangle vaut donc .*

$$\frac{c1 \times h1}{2} \text{ ou } \frac{c2 \times h2}{2} \text{ ou } \frac{c3 \times h3}{2}.$$

Tu pourrais aussi vraiment couper les rectangles en deux! »

$\mathcal{T}^2$ - « *Je vois deux façons de construire des rectangles moitiés!*





Je peux même essayer d'écrire les formules ... dans le dessin de gauche, j'ai coupé les hauteurs en deux
$c1 \times \dfrac{h1}{2}$ ou $c2 \times \dfrac{h2}{2}$ ou $c3 \times \dfrac{h3}{2}$
et dans l'autre, j'ai coupé les côtés en deux
$\dfrac{c1}{2} \times h1$ ou $\dfrac{c2}{2} \times h2$ ou $\dfrac{c3}{2} \times h3$. »

$\mathcal{T}$ (admiratif) - « *Il est temps de mettre à profit tes redécouvertes pour explorer quelques situations !*
Imagine des découpages de triangles pour fabriquer un parallélogramme, un rectangle.

Par un point intérieur d'un parallélogramme, on joint les sommets. Explore le comportement des aires des quatre triangles ainsi formés selon la position du point.

Par un point intérieur d'un parallélogramme, on trace des parallèles aux côtés.

Explore le comportement des aires des quatre parallélogrammes ainsi formés selon la position du point.

Imagine aussi un travail analogue à celui que nous avons effectué avec les triangles, pour retrouver le calcul de l'aire d'un trapèze. »

$\mathcal{T}^2$ (tout bas) - « *Fini la semaine des 35 heures !* »

Ami lecteur, peux-tu aider $\mathcal{T}^2$ à résoudre ces problèmes ?

Des fichiers correspondants à des activités de cet article sont disponibles sur le site http ://www.sbpm.be/ sur la page Hick16.

Bon courage, bon amusement et à bientôt !

à suivre

Jeux

Y. Noël-Roch

Un pliage

Une paire de ciseaux, un cutter et du papier collant te permettront de réaliser ce jeu.

1. Détache soigneusement la page suivante (Photo 1). Marque soigneusement trois plis parallèles de manière à avoir quatre colonnes de trois dessins. Assouplis les plis en les marquant dans les deux sens (Photo 2).
2. Déplie la feuille, découpe les bords du rectangle, puis dépose la feuille à plat sur un carton en laissant visible la face qui contient des chats. Au cutter, dégage trois côtés du rectangle 2×1 central (Photo 3).
3. Rabats vers la droite le rectangle dégagé et replie sous la feuille le carré qui déborde (Photo 4).
4. En pliant deux fois la partie de gauche suivant les plis marqués plus tôt, tu couvres le trou. Apparaissent ainsi six abeilles d'un côté (Photo 6) et six étoiles de l'autre.
5. À l'aide de papier collant, fixe l'étoile rabattue à sa voisine (Photo 7).
6. Retourne le montage du côté des abeilles. Tu peux maintenant l'ouvrir (du centre vers l'extérieur) pour ne montrer que des bonshommes (Photo 8).
7. Tu peux à nouveau ouvrir le montage (toujours du centre vers l'extérieur) et ne montrer que des chats (Photo 9).
8. En retournant une fois de plus le montage, tu retrouves les bonshommes (Photo 10), et en ouvrant tu reviens aux abeilles, puis aux étoiles. Tu peux poursuivre aussi longtemps que tu veux !

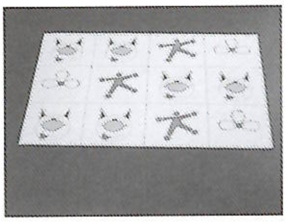


Photo 1

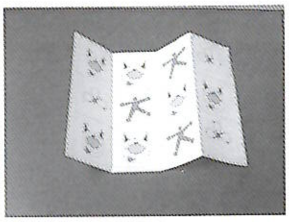


Photo 2

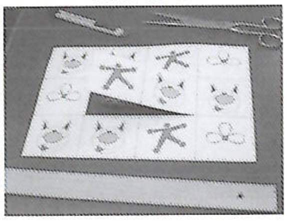


Photo 3

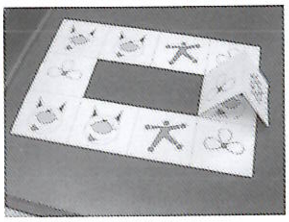


Photo 4

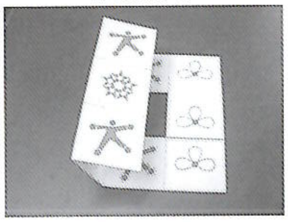


Photo 5

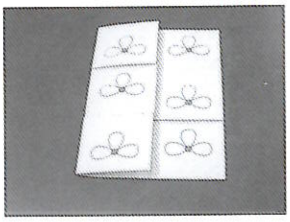


Photo 6

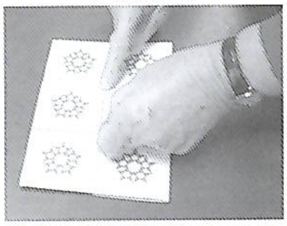


Photo 7

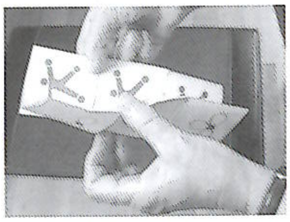


Photo 8

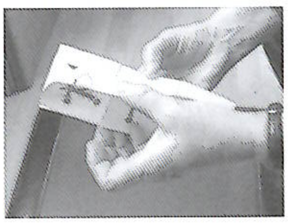


Photo 9

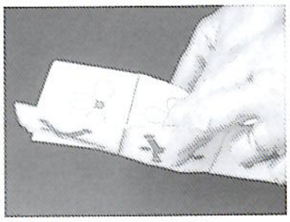
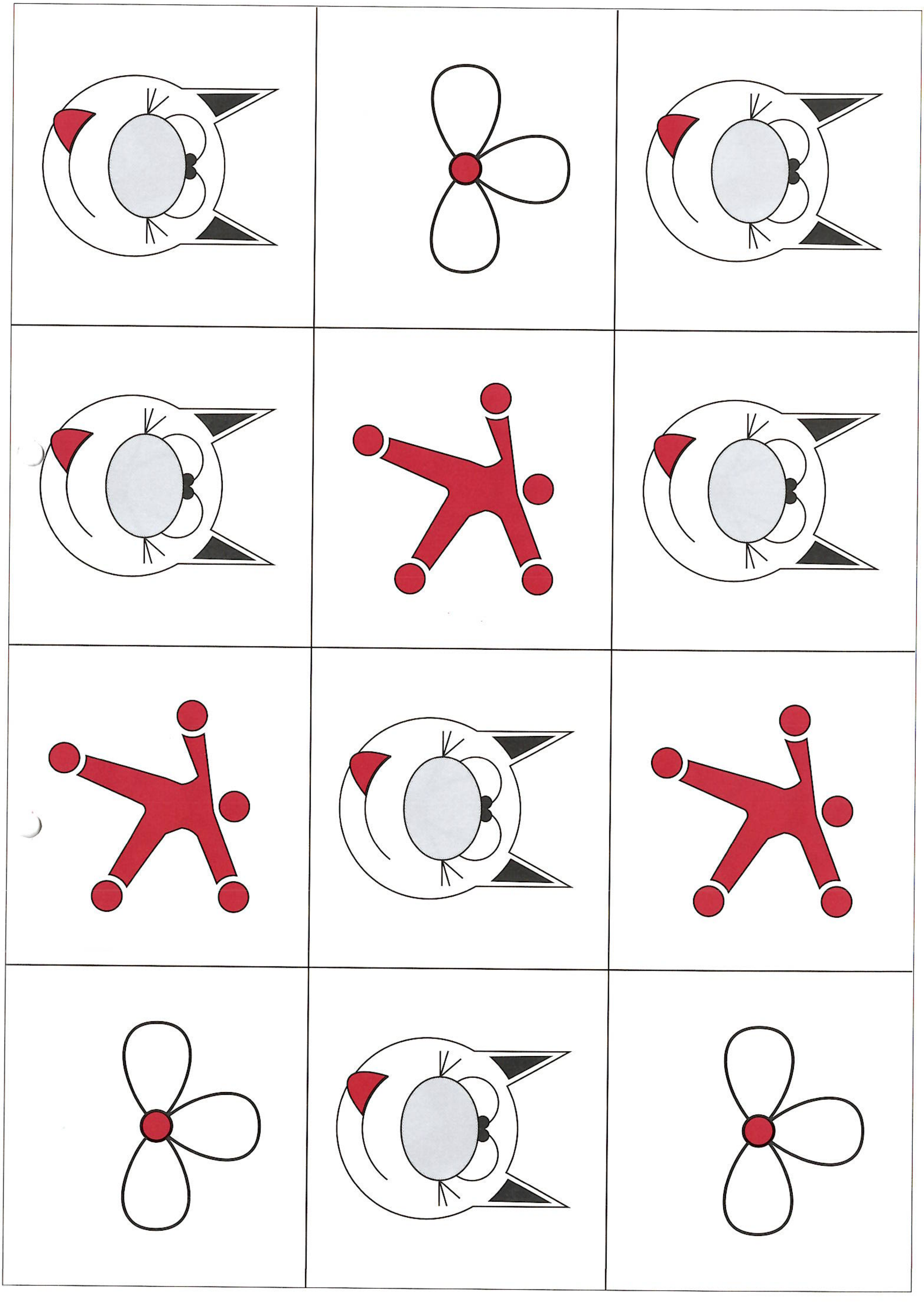
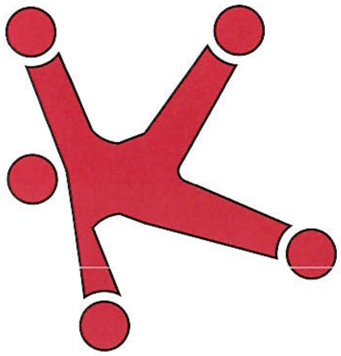
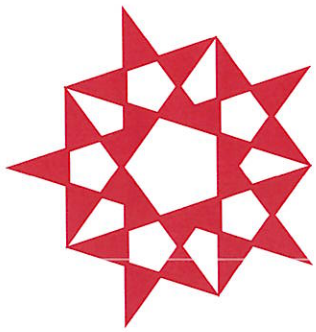
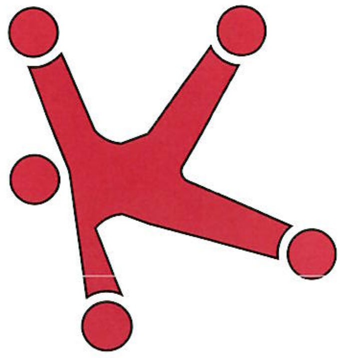
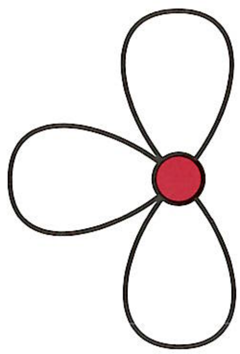
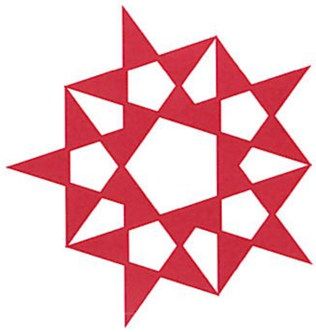
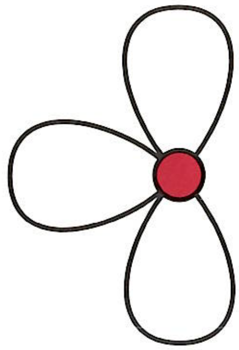
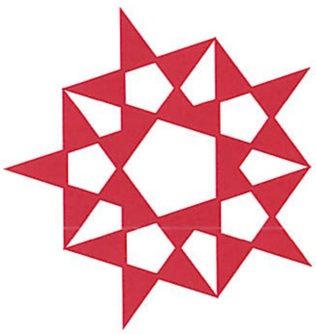
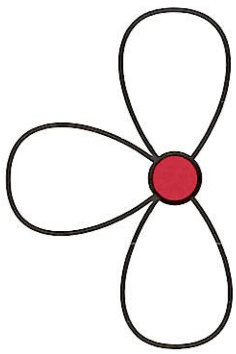
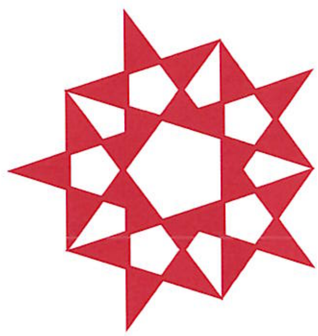
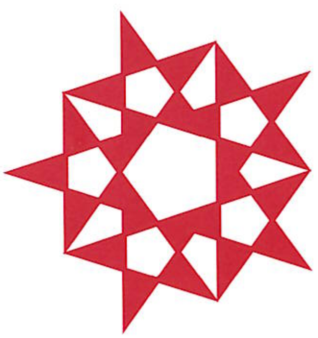
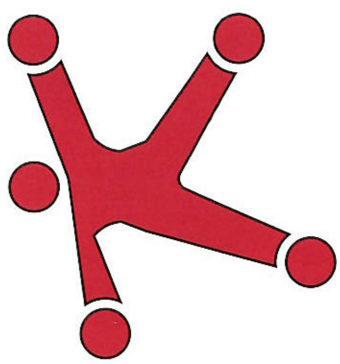
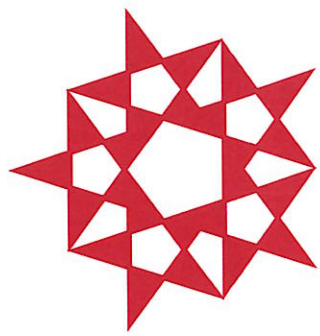


Photo 10

(D'après *Pythagoras, Vol. 44, n°6, juin 2005.*)



Euclide. . . encore lui !

G. Laloux

Cet article propose de créer un organigramme de calcul du $PGCD$ et du $PPCM$ ([1]) de deux nombres naturels. Pour le réaliser, on se base sur une propriété des nombres naturels énoncée il y a 23 siècles environ par le célèbre mathématicien Euclide (sa biographie paraîtra dans le prochain MJJ). Cette propriété est communément appelée « Algorithme d'Euclide ».

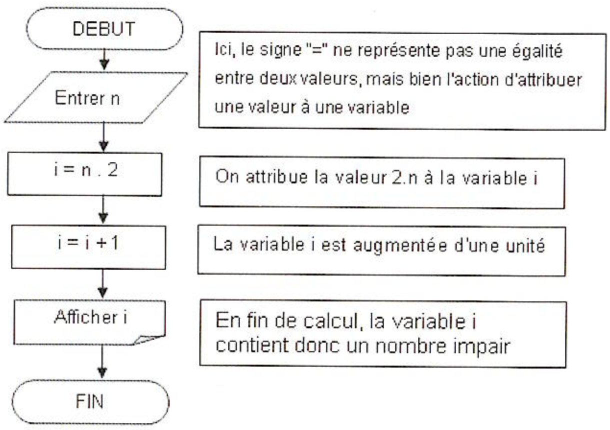
Avant tout, il est peut-être bon de rappeler ce que l'on entend par algorithme. En voici une définition :

> Ensemble des règles opératoires qui permettent la résolution d'un problème par l'application d'un nombre fini d'opérations de calcul à exécuter en séquence.

Un exemple :

1. Choisir un nombre entier naturel
2. Multiplier ce nombre par 2
3. Ajouter 1 au produit obtenu

Ceci est l'algorithme permettant d'obtenir un nombre impair à partir de n'importe quel nombre entier naturel.
On notera l'orthographe de « algorithme » qui s'écrit avec un « i » et pas un « y ». L'éthymologie du mot n'est pas liée au mot « rythme » mais bien à la forme latine du nom propre arabe « Al Kharizmi », mathématicien arabe de la fin du VIII^e siècle, également à l'origine du mot « algèbre ».



Ce même algorithme peut se présenter sous la forme :
- d'une expression : $2n + 1$ où n représente le nombre naturel choisi au départ
- d'un organigramme (forme graphique de l'algorithme).

Que dit l'algorithme d'Euclide ?

> Le $PGCD$ de deux nombres naturels est égal au $PGCD$ du plus petit de ces nombres et du reste de la division du plus grand par le plus petit.

On sait que si q et r sont respectivement le quotient entier et le reste de la division du nombre naturel a par le nombre naturel b alors $a = bq + r$ avec $0 \leqslant r < b$

L'algorithme d'Euclide affirme donc que $\boxed{PGCD(a, b) = PGCD(b, r)}$

Pour trouver le $PGCD$ de deux nombres, on commence par diviser le plus grand par le plus petit. Ensuite :

([1]) « Plus grand commun diviseur » et « plus petit commun multiple ».

- Si le reste est nul, alors le plus petit des deux nombres est leur *pgcd*.
- Si le reste n'est pas nul, alors on divise le plus petit nombre par ce reste, puis ce reste par le nouveau reste et ainsi de suite jusqu'à obtenir un reste nul.

Le *pgcd* est alors le dernier diviseur employé (ou l'avant-dernier reste).

Illustration dans le tableau ci-dessous où l'on calcule le $PGCD$ de 315 et 225

	1	2	2	Quotients
315	225	90	45	Diviseurs
90	45	0		Restes

$315 = 225 \times 1 + 90 \Rightarrow pgcd\ (315, 225) = pgcd(225.90)$

$225 = 90 \times 2 + 45 \Rightarrow pgcd\ (225.90) = pgcd(90.45)$

$90 = 45 \times 2 + 0 \Rightarrow pgcd\ (90.45) = 45$

En « remontant la filière », on en conclut que $pgcd\ (315, 225) = 45$

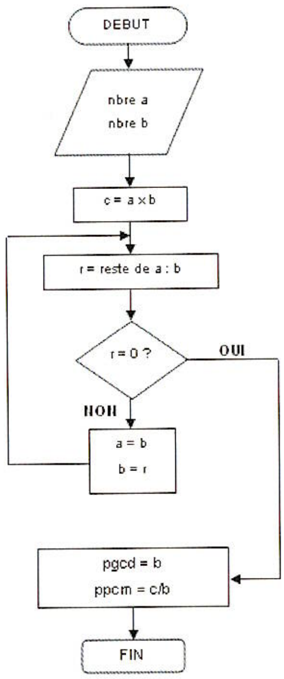
Une fois que l'on connaît le $PGCD$, on peut calculer facilement le $PPCM$ comme suit :

$$ppcm(a, b) = \frac{a \times b}{pgcd(a, b)}$$

donc $ppcm(315, 225) = \dfrac{315 \times 225}{45} = 7 \times 225 = 1575$

Voici l'organigramme de calcul du $PGCD$ et du $PPCM$ de deux entiers a et b

Illustrons cet organigramme par un nouvel exemple : $PGCD$ et du $PPCM$ de 288 et 396



$a = 396$

$b = 288$

$c = a \times b = 396 \times 288$

$r =$ reste de $(396 : 288) = 108$

$r \neq 0 \Rightarrow a = 288$ (1^re^ boucle)

$b = 108$

$r =$ reste de$(288 : 108) = 72$

$r \neq 0 \Rightarrow a = 108$ (2^e^ boucle)

$b = 72$

$r =$ reste de $(108 : 72) = 36$

$r \neq 0 \Rightarrow a = 72$ (3^e^ boucle)

$b = 36$

$r =$ reste de $(72 : 36) = 0$ (sortie de boucle)

$r = 0 \Rightarrow PGCD = 36$ (le dernier diviseur)

$PPCM = \dfrac{396 \times 288}{36} = 11 \times 288 = 3168$

Il est possible de traduire cet organigrmme en « javascript » et de présenter un calculateur de *pgcd* et *ppcm* sous forme de page web. Toutes les explications sont accessibles sur le site `www.ismreves.be`(dans le menu « Math » de la page d'accueil, cliquer sur « Animations »)

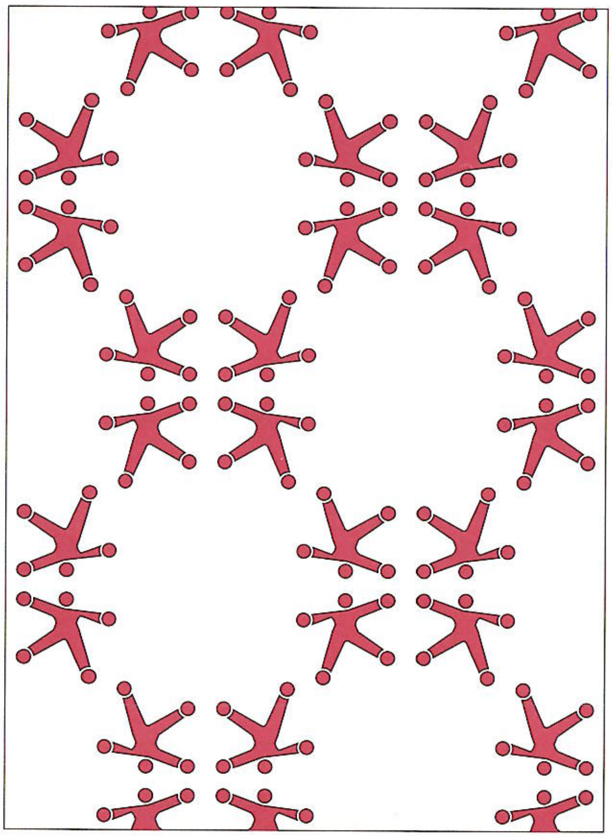
Tapisseries et frises (2)

Y. Noël-Roch

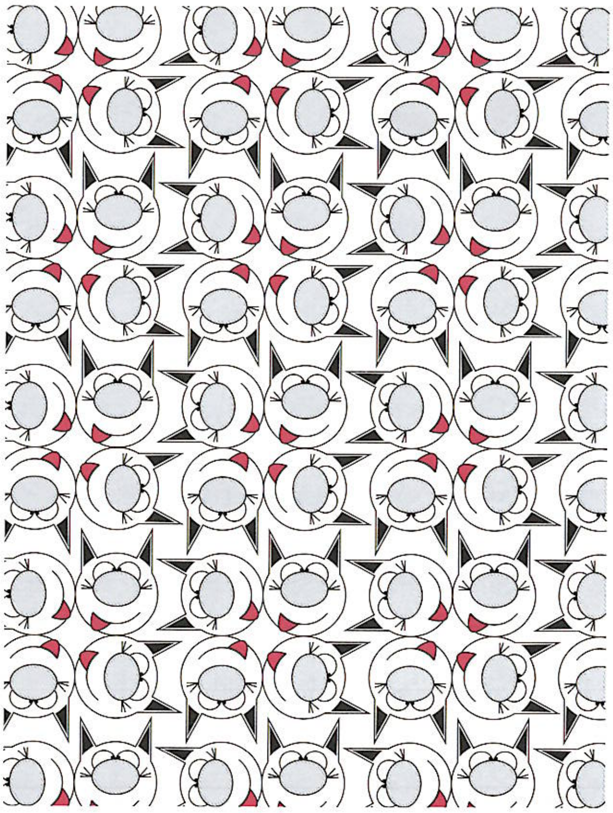
Les tapisseries *Vitruve 2* et *Lechat 1*

Dans *Math-Jeunes Junior* n°112, nous proposions de comparer ces deux tapisseries :

- en quoi sont-elles pareilles ?
- en quoi sont-elles différentes ?



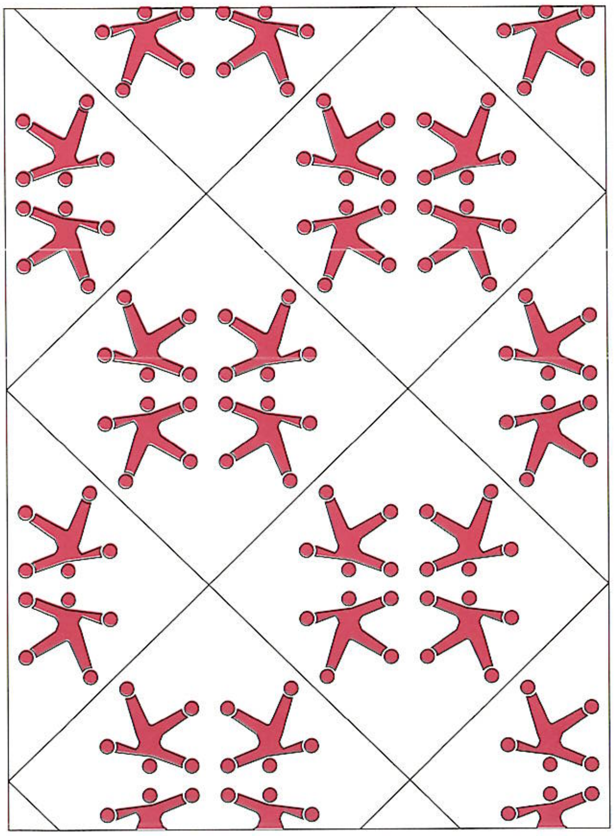
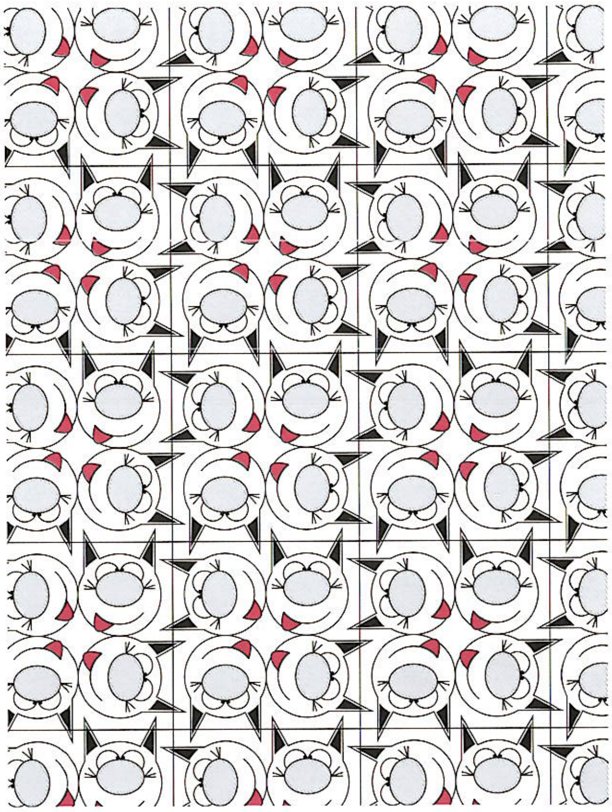
Vitruve 2



Lechat 1

Une maille carrée pave le plan.

Pour t'aider à visualiser un processus commun à la construction des deux tapisseries, un pavage du plan avait été superposé à *Vitruve 2* tandis qu'un carré entourait quatre têtes dans *Lechat 1*. Ce carré induit un pavage du plan que nous faisons apparaître sur les deux tapisseries :

Dans les deux tapisseries, le plan est pavé par un carré. En « oubliant » les décorations intérieures aux carrés, les mathématiciens diraient que les deux pavages du plan sont les mêmes. Ce pavage nous est très familier : nous l'avons sous les yeux chaque fois que nous travaillons sur une feuille quadrillée !

La seule différence est l'orientation du carré de base. L'extension par translations est ensuite la même :

- les translations ont comme directions celles des côtés du carré initial,
- les longueurs des translations sont des multiples entiers des longueurs des côtés de ce carré.

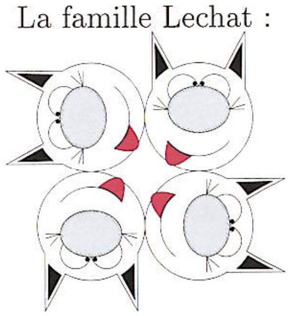
Ainsi, le point de vue du mathématicien est très abstrait : il concentre son attention sur *le type de transformation* qui intervient (ici des translations).

Mais revenons maintenant à plus de « détails » sur les tapisseries *Vitruve 2* et *Lechat 1* !

Contenus respectifs d'un carré.

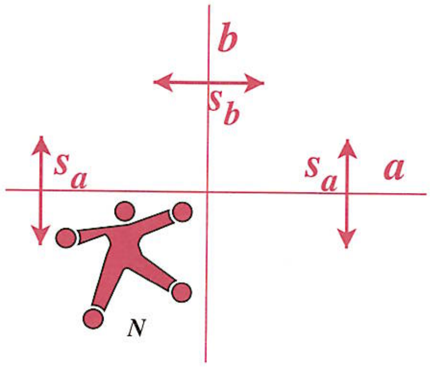
La famille Vitruve :

La famille Lechat :



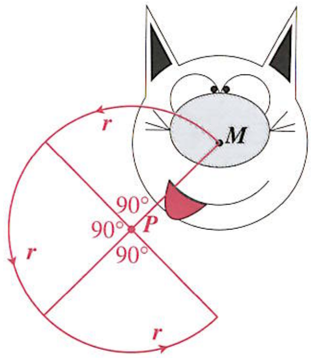
Analysons les constructions de ces deux familles.

Deux symétries axiales.



Partant de l'élément de base N (Narcisse) et de deux droites perpendiculaires a et b, nous construisons
- l'image de N par s_a
- l'image de cette image par s_b,
- l'image de cette nouvelle image par s_a.

Une rotation.



Partant de l'élément de base M (Mistigrou) et de la rotation r(un quart de tour à gauche autour de P), nous construisons
- l'image de M par r
- l'image de cette image par r
- l'image de cette nouvelle image, toujours par r.

(*Si cela te semble nécessaire, utilise du papier transparent sur lequel tu auras décalqué Narcisse et Mistigrou.*)

Cette fois, les constructions sont différentes.
- Les sosies de Narcisse Vitruve sont obtenus par une succession de symétries axiales

$$\text{Narcisse} \xrightarrow{s_a} \text{première image} \xrightarrow{s_b} \text{deuxième image} \xrightarrow{s_a} \text{troisième image}$$

- Les sosies de Mistigrou Lechat sont obtenus par applications successives d'une même rotation.

$$\text{Mistigrou} \xrightarrow{r} \text{première image} \xrightarrow{r} \text{deuxième image} \xrightarrow{r} \text{troisième image}$$

En résumé, les deux tapisseries *Vitruve 2* et *Lechat 1* présentent à la fois des ressemblances (pavages du plan par un carré) et des différences dans leur construction (symétries axiales d'une part, rotation d'autre part)

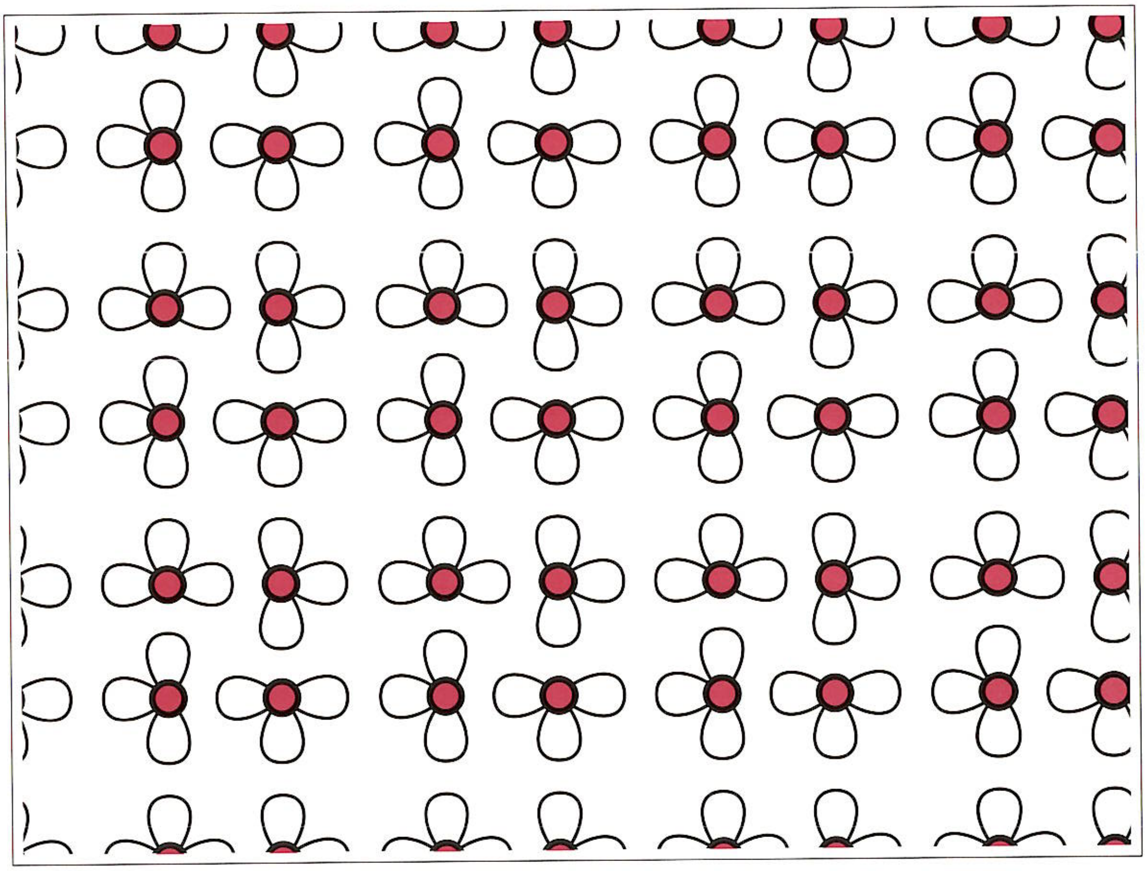
Deux nouvelles tapisseries

Page suivante, tu trouveras les tapisseries : *Abeille 1* et *Abeille 2*

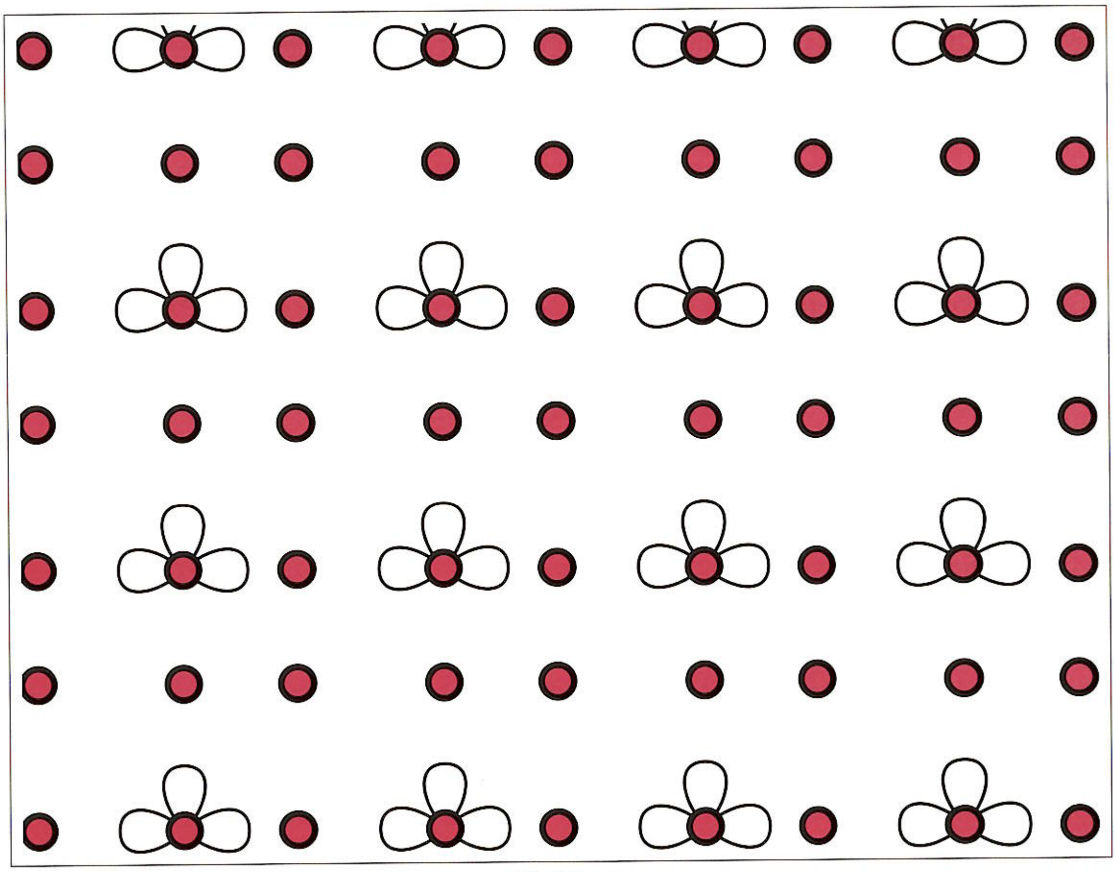
Sont-elles construites comme *Vitruve 1* ou comme *Vitruve 2* ou comme *Lechat 1* ou ne sont-elles semblables à aucune des trois ?

Pour répondre à cette question, choisis un « élément de base » compare les transformations qui interviennent pour réaliser les tapisseries, (*utilise du papier transparent et du décalquage si tu le juges utile*).

C'est sur ces analyses que nous reviendrons dans *Math-Jeunes Junior* n°114.



Abeille 1



Abeille 2

Olympiades

C. Festraets

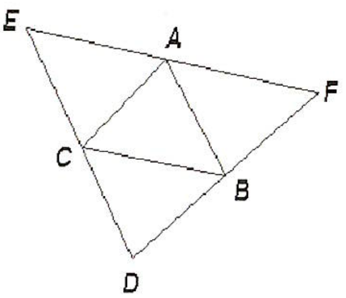
L'éliminatoire de l'Olympiade Mathématique Belge a eu lieu le 18 janvier. Tu y as sans doute participé et voici les solutions de quelques uns des exercices proposés. Tu pourras ainsi te préparer soit pour la demi-finale si tu as eu la chance d'y être admis, soit pour ta prochaine participation dans un an.

Mini 6

Sans réponse préformulée - Dans le plan, on considère trois points non alignés. Combien existe-t-il de parallélogrammes dont ces trois points sont trois sommets ?

Solution

La figure ci-dessous fournit la réponse. Il existe trois parallélogrammes $ABDC$, $BAEC$ et $CAFB$ dont les sommets sont les trois points A, B et C.



Mini 13

Parmi les nombres suivants, quel est le plus grand ?

(A) $3^2 - 2^3$ (B) $4^2 - 2^4$ (C) $4^3 - 3^4$ (D) $5^2 - 2^5$ (E) $5^3 - 3^5$

Solution

La réponse A est correcte, en effet :
$3^2 - 2^3 = 9 - 8 = 1$;
$4^2 - 2^4 = 16 - 16 = 0$;
$4^3 - 3^4 = 64 - 81 = -17$;
$5^2 - 2^5 = 25 - 32 = -7$;
$5^3 - 3^5 = 125 - 243 = -118$.

Mini 15

La base d'un parallélipipède rectangle est un carré de côté 2 cm. La hauteur de ce parallélipipède mesure x cm et sa surface totale est de 200 cm^2. Que vaut x ?

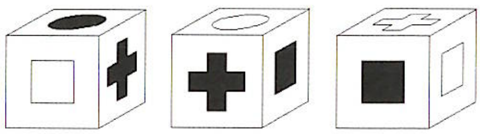
(A) 16 (B) 18 (C) 20 (D) 22 (E) 24

Solution

Aire d'une des bases : 4 cm^2. Aire des deux bases : 8 cm^2. Aire des quatre faces latérales : $200 - 8 = 192$ cm^2. Aire d'une face latérale : $\frac{192}{4} = 48 \text{ cm}^2 = (2 \times x) \text{ cm}^2$. D'où $x = \frac{48}{2} = 24$.

Mini 19 - Midi 8

Voici trois vues d'un même cube :

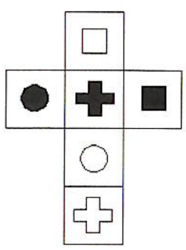


Sur les faces de ce cube se trouvent les figures suivantes : disque blanc, disque noir, carré blanc, carré noir, croix blanche, croix noire. Quelle est la figure se trouvant sur la face opposée au disque noir ?

(A) disque blanc (B) carré blanc (C) carré noir (D) croix blanche (E) croix noire

Solution

Voici le seul développement du cube qui tient compte des trois vues. Le disque noir est donc opposé au carré noir.



Midi 12

Selon le compteur placé à l'entrée, 75 personnes sont entrées hier dans ce magasin. Les relevés faits aux caisses indiquent que l'on a vendu ce jour-là 12 GSM, 18 jeux vidéo et 24 CD. Vingt des clients ont acheté exactement deux articles : six d'entre eux ont acheté un GSM et un jeu vidéo, quatre ont acheté un GSM et un CD et dix ont acheté un jeu vidéo et un CD. Un seul client a acheté trois articles différents. Les autres acheteurs n'ont pris qu'un seul article. Combien de personnes sont sorties sans achat ?

(A) 21 (B) 32 (C) 33 (D) 43
(E) Personne n'est sorti sans rien acheter.

Solution

Additionnons les achats des personnes qui ont acheté plusieurs articles :
$(6+4+1)$ GSM $= 11$ GSM
$(6+10+1)$ jeux video $= 17$ jeux video
$(4+10+1)$ CD $= 15$ CD
Nous connaissons ainsi le nombre de personnes qui ont fait un seul achat : 1 personne a acheté un GSM, 1 un jeu video et 9 un CD.
Le nombre de clients ayant fait des achats est $20+1+1+1+9=32$, donc 43 personnes n'ont rien acheté.

Mini 24 - Midi 13

Si on calcule le produit $2^{2005} \times 5^{2006}$, on obtient un très grand nombre ; quelle est la somme de tous ses chiffres ?

(A) 5 (B) 7 (C) 32 (D) 3 057 (E) 15 657

Solution

$2^{2005} \times 5^{2006} = 2^{2005} \times 5^{2005} \times 5 = 5 \times 10^{2005}$, ce qui s'écrit 5 suivi de 2005 zéros. La somme des chiffres de ce nombre est donc 5.

Mini 25 - Midi 14

Le guide d'un groupe de touristes récolte l'argent pour une excursion. S'il demande à chacun 75 euros, il manque 440 euros au total exigé ; s'il demande à chacun 80 euros, il y a un excès de 440 euros. Combien y a-t-il de personnes dans le groupe (le guide ne fait pas partie du groupe) ?

(A) 88 (B) 176 (C) 220 (D) 440 (E) 501

Solution

Soit x le nombre de touristes et y la somme totale nécessaire pour l'excursion.

$$\begin{cases} 75x = y - 440 \\ 80x = y + 440 \end{cases}$$

En soustrayant ces deux équations, on obtient $5x = 880$, d'où $x = 176$.

Midi 17

Sans réponse préformulée - Dans une classe de 21 élèves, chaque élève a au moins un ami. A la salle d'informatique, devant un ordinateur, s'assoient soit un seul élève, soit deux élèves amis. Combien faut-il prévoir d'ordinateurs au minimum pour être certain que les 21 élèves pourront s'asseoir devant un ordinateur ?

Solution

Il se peut que 20 des élèves de cette classe aient tous un seul ami : le 21e élève et qu'il n'y ait aucun autre lien d'amitié dans la classe. Le 21e élève et un de ses 20 amis s'assiéront devant un ordinateur et il faudra encore 19 ordinateurs pour les autres élèves, soit 20 ordinateurs en tout.

Midi 28

Sans réponse préformulée - Le questionnaire de l'OMB comporte 30 questions. Une bonne réponse rapporte 5 points, une abstention rapporte 2 points et une réponse fausse aucun point. Quel est le nombre de scores possibles ?

Solution

Soit a le nombre de bonnes réponses et b le nombre d'abstentions, le score est alors $5a + 2b$.
Pour $a \leqslant 30$ et $b = 0$, le score est $5a$, donc de 0 à 150, tous les multiples de 5 sont des scores possibles.
Pour $a \leqslant 29$ et $b = 1$, le score est $5a + 2$, donc de 2 à 147, tous les nombres de la forme $5a + 2$ sont des scores possibles.
Pour $a \leqslant 28$ et $b = 2$, le score est $5a + 4$, donc de 4 à 144, tous les nombres de la forme $5a + 4$ sont des scores possibles ; 149 n'est pas dans cette liste.
Pour $a \leqslant 27$ et $b = 3$, le score est $5a + 6 = 5(a+1) + 1$, donc de 6 à 141, tous les nombres de la forme $5(a+1)+1$ sont des scores possibles ; 1 et 146 ne sont pas dans cette liste.
Pour $a \leqslant 26$ et $b = 4$, le score est $5a + 8 = 5(a+1) + 3$, donc de 8 à 138, tous les nombres de la forme $5(a+1)+3$ sont des scores possibles ; 3, 143 et 148 ne sont pas dans cette liste.
Il y a donc 6 entiers entre 0 et 150 qui ne sont pas des scores, le nombre de scores possibles est 145.

Math-quiz

Claude Villers

Nous remercions très vivement tous ceux qui ont répondu, en tout ou en partie, aux questions de la première étape de notre Math-Quiz 2005-2006.

Le tableau « d'honneur » de cette première étape s'établit comme suit (ordre alphabétique) :

Nom	Commune	classe	Nom	Commune	classe
Baudouin Laura	Cerfontaine	1	Lapôtre Guillaume	Nismes	1
Baudouin Thibaut	Bourlers	1	Magotteaux Odile	Chimay	1
Dermany Martial	Lobbes	2	Monin Thomas	Momignies	2
Donfut Alrick	Havré	2	Peeren Jeremy	Waismes	3
Dorval Fabrice	Bütgenbach	3	Ransquin Ignace	Olloy sur Viroin	1
Dujardin Antoine	Sars la Buissière	2	Rousseaux Vincent	Chimay	3
Foulon Jean François	Soumagne	4	Radelet charline	Walcourt	2
Hauquiert Bénédicte	Baileux	1	Snyers Charles	Chimay	2
Jost Maxime	Amel	2	Thonet Adrien	Bourlers	3
Kaçar Serife	Bruxelles	4	Van Lancker Quentin	Waismes	2
Klein Florent	Bousval	3	Voss Nicolas	Momignies	2

Tous ces élèves remportent une récompense qui leur a déjà été envoyée.

Voici maintenant les réponses aux questions de la première étape.

Question n°	Réponse	Question n°	Réponse
1	3245	6	30
2	15	7	9
3	400	8	7
4	36	9	10
5	18	10	46

Nous ne donnons pas des justifications de ces réponses car nous pensons fermement que, comme toujours, un doute, un désaccord, une interrogation au sujet de l'une d'elles constituent autant de belles occasions d'en parler et d'en débattre en classe ou avec vos condisciples et/ou votre professeur ... et même à la maison ! !

Nous invitons maintenant tous les lecteurs à participer à la deuxième étape de notre challenge dont nous rappelons la teneur : fournir le maximum de réponses correctes aux questions qui sont proposées dans cette rubrique.

Cette deuxième étape ainsi que le classement général nous permettront de vous placer au tableau d'honneur et d'attribuer des récompenses aux meilleurs envois. Comme lors de la première étape, 10 questions vous sont soumises. Chacune d'elles possède un coefficient de difficulté indiqué sous la forme d'étoiles.

Chaque étoile d'une question dont la réponse est correcte vous fait gagner 5 points cette fois. Vous répondez à autant de questions que vous le souhaitez. 78 points ont été mis en jeu lors de la première étape et 130 points le sont maintenant.

Comment répondre ? Vous nous envoyez vos réponses sur carte postale simple ou illustrée (voir ci-après le concours annexe) à l'adresse :

SBPMef - Math-Quiz Rue de la Halle 15 , 7000 Mons.

en indiquant bien vos nom et prénom, votre adresse complète, le nom exact et la localisation de votre école ainsi que le niveau de votre classe en 2005-2006.

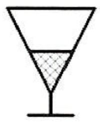
Nous rappelons qu'il est possible de grouper plusieurs réponses dans une même enveloppe.

Vos réponses à cette deuxième étape doivent nous être parvenues dès que possible et avant le vendredi 20 février 2006. (Ce sont les délais d'impression et d'expédition du dernier numéro de l'année scolaire qui nous obligent à fixer ce délai).

Exemple de tableau-réponse

Question n°	Ma réponse
11	
12	
13	
14	
15	
16	
17	
18	
19	
20	

Question de la deuxième étape

11	*	Quel est le plus petit nombre naturel de 5 chiffres tous pairs et différents ?
12	*	Vous pliez dix fois de suite une feuille de papier rectangulaire en superposant chaque fois les deux petits côtés opposés. Vous dépliez ensuite la feuille qui se trouve pavée de petits rectangles dont les côtés sont les marques des plis. Combien y a-t-il de ces rectangles ?
13	**	Les oies sauvages volent en formation triangulaire telle que la première oie est suivie de 2 oies qui sont suivies de 3 oies qui... etc. Vous voyez passer une formation de 6 oies puis une deuxième formation qui rejoint la première et fusionne avec elle pour constituer une formation complète. Combien d'oies se trouvent alors ainsi réunies ?
14	**	71 inscrits participent à un tournoi de tennis, par élimination directe. Combien, au maximum, de matchs seront nécessaires avant que le vainqueur ne soit connu ?
15	**	Lorsque A avait 12 ans, B avait 16 ans. Lorsque B avait 9 ans, C avait 3 ans. Quel était, en nombre entier d'années, l'âge de C quand A avait 10 ans ?
16	***	Dans votre étang, il y a 100 poissons. 90% d'entre eux sont blancs et les autres sont rouges. Combien de poissons blancs devez-vous enlever pour que leur pourcentage passe de 90% à 50% ?
17	***	Un polygone convexe a ses 30 sommets tous sur un même cercle. Combien possède-t-il de diagonales ?
18	***	A l'occasion de son anniversaire, Mathilde a pu boire un peu de champagne dans un verre conique dont la contenance est de 8 cl lorsqu'il est rempli complètement. Mais sa maman n'a versé du champagne qu'à mi-hauteur utile seulement. Combien de ml de champagne Mathilde a-t-elle pu boire ? 
19	****	Que vaut $\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots}}}}$ si l'écriture est infiniment poursuivie et si l'on sait que la réponse est un nombre naturel ?
20	*****	ABC est un triangle quelconque d'aire 1. A' est le symétrique de A par rapport à B. B' est le symétrique de B par rapport à C. C' est le symétrique de C par rapport à A. Quelle est alors l'aire du triangle $A'B'C'$ (dans la même unité que celle du triangle ABC) ?

Le concours annexe (facultatif) se poursuit aussi :

Nous vous invitons en outre à être imaginatif et/ou créatif en réalisant une illustration mathématique du verso de votre carte-réponse. Le choix du sujet mathématique est laissé à votre appréciation. Cela doit vous permettre de la transformer en un sujet touchant aux mathématiques.

A vous de faire preuve d'originalité. Les meilleures propositions seront également primées. Elles auront peut-être l'honneur de figurer en première de couverture d'une de nos revues à paraître ! Vous ne manquez pas d'idées ! Alors, n'hésitez pas à nous envoyer vos dessins.

Math-Jeunes Junior
Périodique trimestriel
15, rue de la Halle – 7000 Mons
Bureau de dépôt 7000 Mons 1

Responsable de l'édition: A. PATERNOTTRE
Rue du Moulin, 78 – 7300 Boussu
Bureau de dépôt: Mons 1

Autorisation de fermeture
Sluitings toelating

7000 Mons 1
5/156

Belgique - België
P.P.
7000 Mons 1
5/124

Périodique - Peut être ouvert pour contrôle postal

Réservé à la poste

Inconnu
Refusé
Décédé
Adresse insuffisante
N'habite plus à l'adresse indiquée