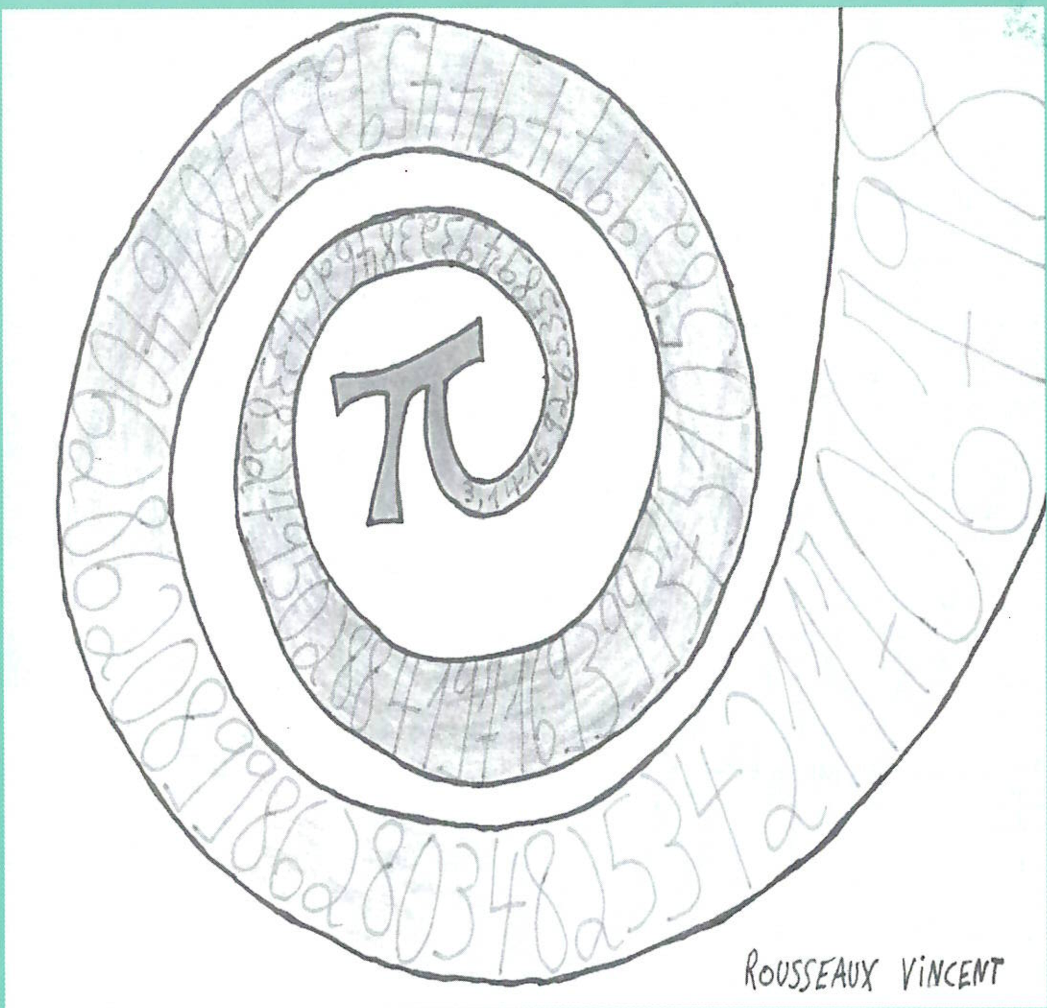
MJ Junior !



28e année - N° 115J
Novembre 2006

Math-Jeunes et Math-Jeunes Junior

Revues trimestrielles publiées par la Société Belge des Professeurs de Mathématique d'expression française

Secrétariat : M-C Carruana, SBPMef, 24, rue du Onze Novembre, 7000 Mons.
GSM : 0473973808 e-mail : sbpm@sbpm.be, URL : http://www.sbpm.be.

Tarifs

Abonnements groupés (au moins 5)		
	Une des deux revues	Les **deux** revues
Belgique	4 €	8 €

Abonnements individuels				
	Une des deux revues		Les **deux** revues	
Belgique	6 €		12 €	
France (abonnement(s) pris par l'intermédiaire de l'APMEP)	8€		16€	
	✉	~~✉~~	✉	~~✉~~
Europe	18 €	20 €	24 €	26 €
Autres pays	19 €	22 €	25 €	28 €

Légende : « prior »=~~✉~~, « non prior »=✉.

Trois numéros de chaque revue sont publiés annuellement. Pour connaître la liste des anciens numéros encore disponibles et leur prix selon votre localisation, adressez-vous au secrétariat.
Les abonnements destinés aux élèves de l'enseignement secondaire sont de préférence pris par l'intermédiaire d'un professeur. Effectuez vos paiements :

- ☞ pour la Belgique : par virement au Compte n°000-0728014-29 de *S.B.P.M.e.f.*, rue de la Halle 15, 7000 Mons
- ☞ pour la France : par virement au Compte CCP Lille 10 036 48 S
- ☞ pour l'étranger (sauf la France) : par virement international au Compte n°IBAN: BE 26 0000 7280 1429 BIC: BPOTBEB1 au nom de la *SBPMef*, rue de la Halle 15, B 7000 Mons, Belgique. Les personnes résidant à l'étranger qui ne peuvent faire un virement à ce compte sont invitées à envoyer un mandat postal international. Tout chèque bancaire non encaissable en Belgique devra être majoré de 12,50 € pour frais d'encaissement.

Éditeurs responsables et rédacteurs en chef :

– pour *Math-Jeunes* : G. Noël, Rue de la Culée 86, 6927 Resteigne

– pour *Math-Jeunes Junior* : A. Paternottre, Rue du Moulin 78, 7300 Boussu

N°115J Vingt-septième année 2006

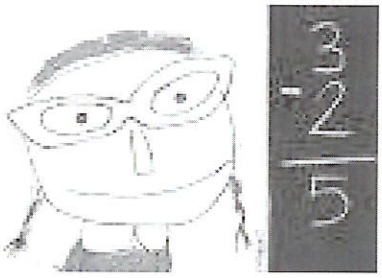
Math-Jeunes junior

Sommaire

Brèves de classe

Claude Villers

B1 - Des additions provocantes



C'est sur un ton de reproches qu'on lui avait demandé si il (elle) savait calculer.

Cette question l'avait vexé et, probablement par défi, l'élève a écrit une première égalité :

(1) $1 + 2 = 3$

Comme on lui faisait remarquer que c'était un peu court, l'élève, plus ou moins par provocation, écrivit une deuxième égalité tout aussi correcte que la première.

(2) $4 + 5 + 6 = 7 + 8$.

Du coup, la classe devint soudainement plus attentive !

Un(e) autre élève proposa alors une troisième égalité :

(3) $9 + 10 + 11 + 12 = 13 + 14 + 15$.

Dans la foulée, un(e) autre élève encore, prit le relais et écrivit une quatrième égalité :

(4) $16 + 17 + 18 + 19 + 20 = 21 + 22 + 23 + 24$.

Alors, toute la classe se mit à écrire de telles égalités en poursuivant leur numérotation.

(5) $25 + 26 + 27 + 28 + 29 + 30$

$= 31 + 32 + 33 + 34 + 35$

etc...

Ecrivez donc les égalités (6) et (7).

Et puis, une petite voix, venant du fond de la classe, demanda :

« Quelle sera la 100^e égalité ? »

« Tu n'as qu'à écrire les 99 premières ! », rétorqua quelqu'un.

« Oui mais ce sera long ! Il y a peut-être moyen de l'écrire directement ! » dit quelqu'un d'autre.

« Il faut trouver un moyen d'écrire ces sommes. D'abord, observons bien comment elles sont formées. » entendit-on.

Et vous, lecteur ! Pouvez-vous écrire directement cette 100^e égalité ou tout au moins trouver comment on peut la composer ?

Voici quelques éléments de réponse.

En observant les diverse égalités (1), (2), (3), ... un constat est assez immédiat.

(1) Commence par 1, (2) par 4, (3) par 9, (4) par 16, (5) par 25, ...

Chaque égalité commence par le carré de son numéro d'ordre.

Donc l'égalité (100) commencera par 100^2 soit par 10000.

Et ensuite ? ? ?

Toujours par observation des égalités écrites, on constate ceci :

- le premier membre de (1) comprend 2 termes alors que son second membre n'en compte que 1,
- le premier membre de (2) comprend 3 termes alors que son second membre n'en compte que 2,
- le premier membre de (3) comprend 4 termes alors que son second membre n'en compte que 3,

  etc...

Remarque : Il est normal que les seconds membres comportent moins de termes que le premier membre. Pourquoi ?

Le premier membre de (100) comportera donc 101 termes tandis que son second membre n'en comportera que 100

Bon courage pour l'écrire si l'envie vous en prend.

Mais vous devez savoir qu'un grand danger guette celui qui conjecture une loi de formation comme celle que nous proposons ci-avant.

Il se peut, en effet que la conjecture proposée fournisse des égalités correctes pour les premières égalités mais pas nécessairement pour toutes ou certaines autres.

Il est donc nécessaire de démontrer que la conjecture en question est toujours correcte.

Vous pouvez traiter cette question seul ou en classe avec votre professeur.

Voici cependant une façon de la justifier. Lisez-la attentivement.

Soit n le numéro d'ordre d'une égalité. Retenons que n est une variable dont les valeurs possibles sont ici les nombres naturels non nuls. Il faut écrire les deux membres de l'égalité supposée en fonction de n.

Nous savons que le premier membre commence par n^2.

Ce premier membre comporte $n + 1$ termes consécutifs à partir de n^2.

Le premier terme est donc n^2, le deuxième est $n^2 + 1$, le troisième est $n^2 + 2$, le quatrième est $n^2 + 3$,... le dernier qui est le $(n + 1)^e$ terme est donc $n^2 + (n + 1 - 1)$ soit donc $n^2 + n$.

(Vous pouvez vérifier qu'il en est bien ainsi sur les sommes écrites au début).

Le premier terme du second membre est alors le nombre naturel qui suit $n^2 + n$.

C'est $n^2 + n + 1$.

Le deuxième terme du second membre est $n^2 + n + 2$, le troisième terme est $n^2 + n + 3$, et ainsi de suite jusqu'à avoir écrit n termes dans le second membre.

Son dernier terme est donc $n^2 + n + n$ ou $n^2 + 2n$.

L'égalité (n) est donc :

$$n^2 + (n^2 + 1) + (n^2 + 2) + \cdots + (n^2 + n)$$
$$= (n^2 + n + 1) + (n^2 + n + 2) + (n^2 + n + 3)$$
$$+ \cdots + (n^2 + n + n)$$

Il faut maintenant prouver que cette égalité est correcte.

Pour cela il suffit d'effectuer les calculs dans chaque membre.

Le premier membre comporte $n + 1$ termes.

n^2 y apparaît donc $(n+1)$ fois donc ce membre vaut, par élimination des parenthèses

$$(n + 1)n^2 + (1 + 2 + 3 + \cdots + n).$$

Le second membre comporte n termes. n^2 y apparaît n fois, n y apparaît n fois aussi.

Ce membre vaut donc :

$$n \times n^2 + n \times n + (1 + 2 + 3 + \cdots + n)$$

soit

$$n^2(n + 1) + (1 + 2 + 3 + \cdots + n).$$

Nous obtenons la même expression pour les deux membres.

L'égalité est donc toujours vraie.

D' autres questions ou observations peuvent être formulées à partir de ces égalités.

Nous attendons vos remarques et suggestions avec beaucoup d' intérêt.

N'hésitez pas à écrire à la rédaction !

Voici le bureau actuel de la rédaction à la rue de la Halle. Sachez qu' à partir de la mi-octobre, ce bureau sera transféré au 24, rue du Onze Novembre, à 7000 Mons – Mais vous pouvez toujours nous contacter par GSM : 0473973808.

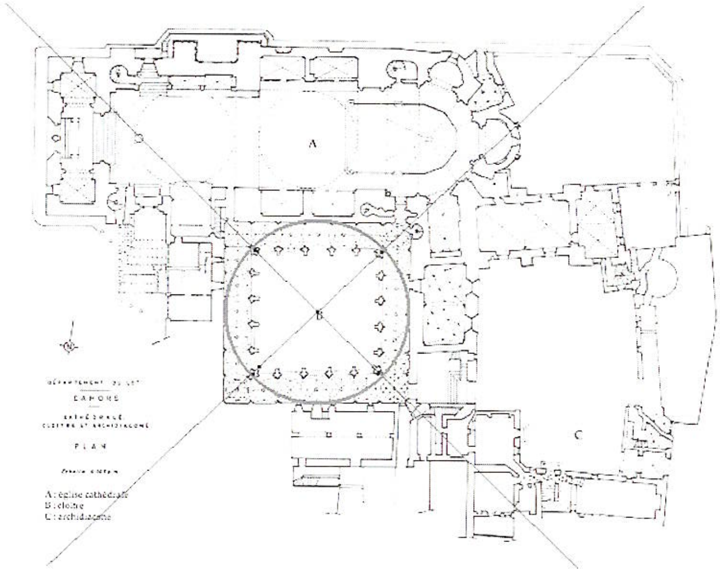
La géométrie du cloître.

G. Laloux

Un cloître est formé d' une cour, généralement carrée, entourée de murs et de galeries accolées à une église cathédrale, collégiale ou monastique.

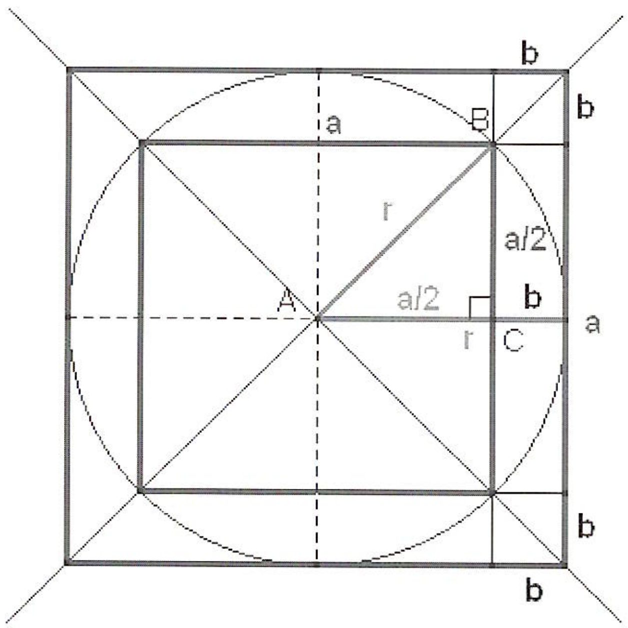
Etymologiquement, « cloître » vient du latin « claustrum » qui signifie « clôture » , « endroit fermé » On retrouve ici le terme « claustrophobie » qui désigne la crainte de se trouver dans un endroit fermé (la deuxième partie du mot, phobie, trouve son origine dans la langue grecque avec phobos qui signifie peur).

Voici le plan de la cathédrale de Cahors (Midi-Pyrénées – département du Lot. Cahors se situe entre Limoges et Toulouse).



Nous pouvons constater que le cloître a été construit suivant certaines règles géométriques : les murs extérieurs de la galerie entourant la cour carrée sont tangents au cercle circonscrit à cette cour carrée.

On pourrait dire qu'il s' agit du cloître parfait, ***car dans ce cas bien précis, la superficie de la cour intérieure est égale à celle du couloir qui l' entoure.***



La cour intérieure est un carré de côté a. Son aire est donc a^2

Le mur extérieur de la galerie est un carré de côté $a + 2b$.

L' aire de la galerie est donc $(a + 2b)^2 - a^2$ (l' aire du grand carré moins l' aire du petit carré). $(a + 2b)^2 - a^2 = a^2 + 4ab + 4b^2 - a^2 = 4ab + 4b^2$; en effet, on peut voir que la galerie est formée de 4 rectangles de dimensions a et b et de 4 carrés de côté b.

Il s' agit maintenant de montrer que $a^2 = 4ab + 4b^2$

C' est ici qu' intervient le cercle circonscrit au petit carré.

ABC est un triangle rectangle isocèle. En appliquant la relation de Pythagore, on a :

$r^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 \Rightarrow r^2 = \frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{4} \Rightarrow r^2 = \frac{2.a^2}{4} \Rightarrow r^2 = \frac{a^2}{2} \Rightarrow a^2 = 2r^2$

Dès lors : $a = \sqrt{2r^2} \Rightarrow a = r\sqrt{2}$ (1)

D' autre part, la figure montre que $r = \frac{a}{2} + b$ et donc que $b = r - \frac{a}{2}$ (2)

(1) et (2) $\Rightarrow \quad b = r - \frac{r}{2}\sqrt{2}$

a et b étant exprimés en fonction de r, on va pouvoir exprimer l'aire de la cour et celle de la galerie en fonction de r

Aire de la cour $= a^2 = \left(r\sqrt{2}\right)^2 = 2.r^2$

Aire de la galerie $= 4ab + 4b^2 =$

$4.r\sqrt{2}.\left(r - \frac{r}{2}\sqrt{2}\right) + 4.\left(r - \frac{r}{2}\sqrt{2}\right)^2 =$

$4.r^2\sqrt{2} - 8\frac{r^2}{2} + 4.\left(r^2 - r^2\sqrt{2} + 2\frac{r^2}{4}\right) =$

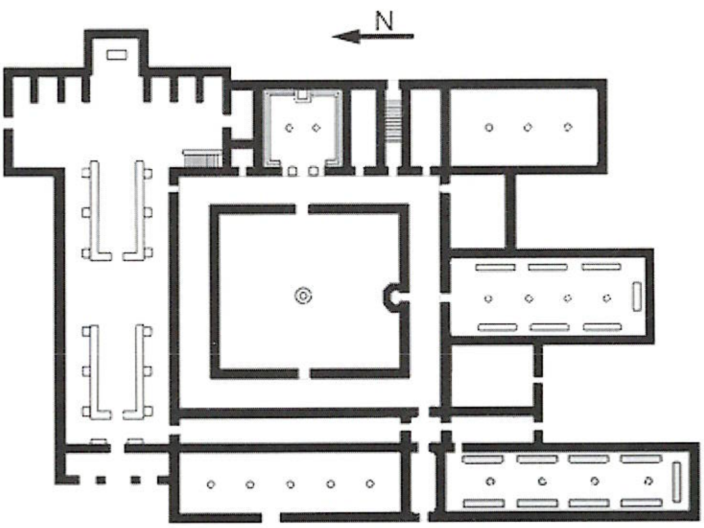
$4r^2\sqrt{2} - 4r^2 + 4r^2 - 4r^2\sqrt{2} + 2r^2 =$

$2.r^2$

Tous les cloîtres ne respectent pas scrupuleusement ce schéma de construction.

Voici par exemple le plan de l' abbaye de Villers-la-Ville.

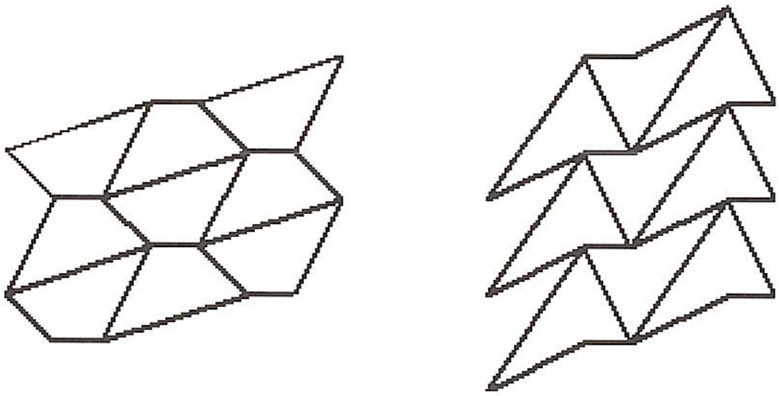
Tu peux essayer de vérifier toi-même si la cour du cloître a la même superficie que la galerie qui l' entoure.



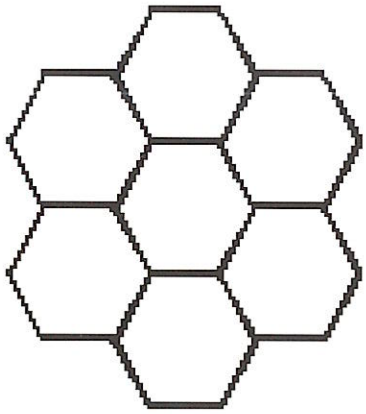
Des hexagones paveurs

F. Drouin

Tu sais certainement que les carrés, les rectangles, les parallélogrammes, les trapèzes et tous les quadrilatères pavent le plan.



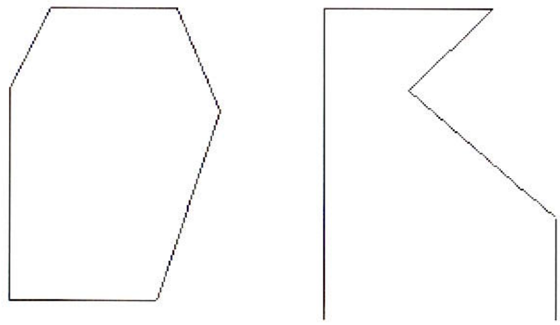
Qu'en est-il avec les hexagones ?



Je voudrais relater ici les recherches faites par mes élèves (âgés de 14–15 ans).
La vision de certains motifs de carrelage fait rapidement penser au pavage par six hexagones réguliers. Y en a-t-il d'autres ?

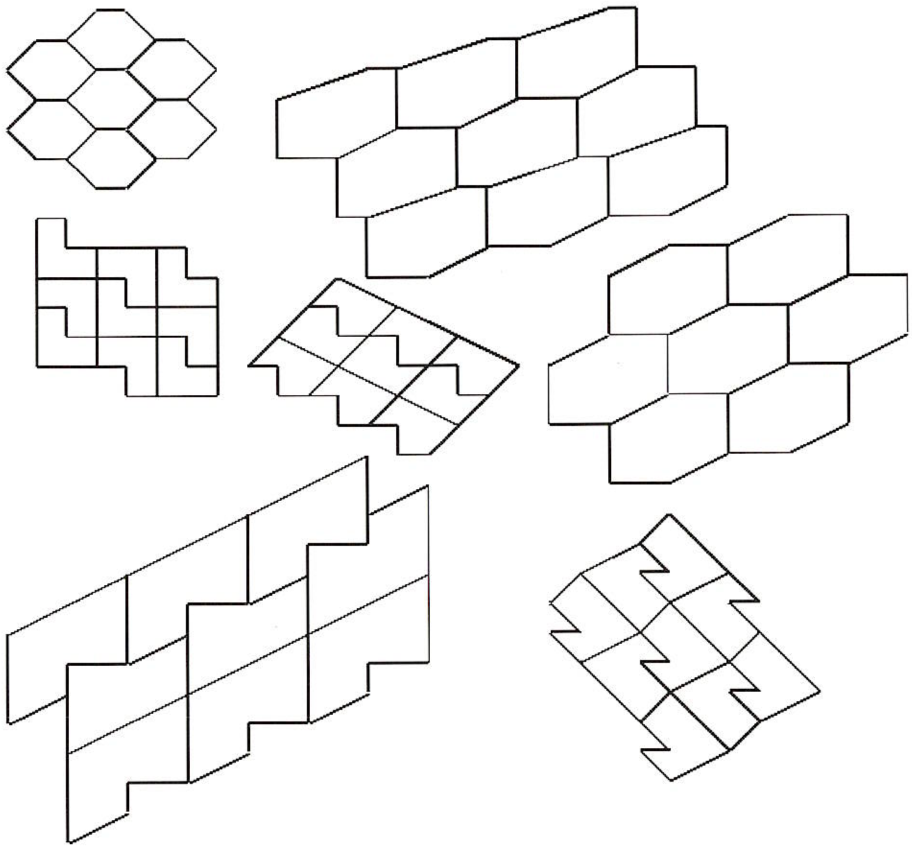
La recherche s'est poursuivie sur du papier quadrillé et du papier pointé triangulé, avec comme consigne : « Tous les hexagones peuvent-ils paver votre feuille de papier ? Si ce n'est pas le cas, comment reconnaître les hexagones paveurs ? »

Chaque élève a dessiné, découpé puis assemblé neuf hexagones superposables et a essayé de commencer un pavage. Ils ont été en échec avec certains tels ceux dessinés ci-contre. Tout hexagone ne pave donc pas le plan.

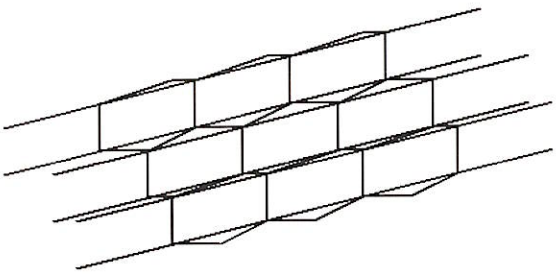


Cependant, les recherches des élèves de la classe n'ont pas été vaines :

Voici une partie de leurs découvertes utilisant le réseau quadrillé, d'autres avaient été trouvées à partir des réseaux triangulés :



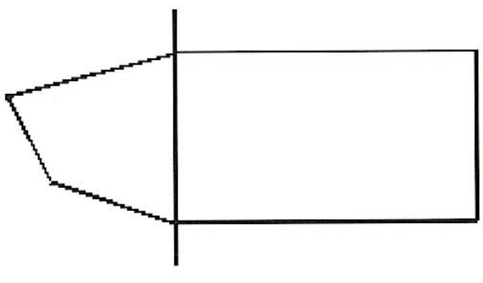
Comment reconnaître un hexagone paveur ? Aprés de longs débats dans la classe, la réponse finalement acceptée a été : « s'il a deux côtés parallèles et de même longueur, alors c'est un hexagone paveur ». Les élèves étaient persuadés de la justesse de leur proposition mais ne savaient pas la prouver…



Une preuve imaginée par un collègue leur a été présentée dans le cas d'un hexagone convexe : les deux cotés parallèles et de même longueur permettent la création de bandes formées de parallélogrammes, les autres côtés permettent la création de bandes formées de triangles.

Le résultat est-il encore vrai dans le cas d'hexagones concaves ?

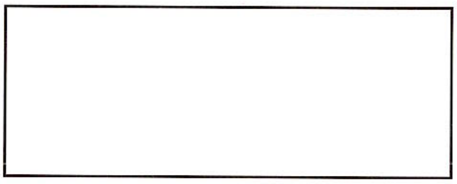
Le résultat est-il encore vrai dans le cas d'un hexagone convexe semblable à celui dessiné ci-contre ?



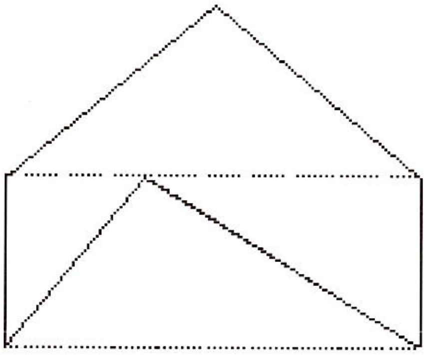
Les lecteurs de *Math-Jeunes Junior* apporteront peut être des réponses à ces questions que nous n'avons pas eu le temps d'étudier…

La question suivante nous est venue rapidement : « existe-il des hexagones paveurs n'ayant pas deux cotés égaux et parallèles ? ».

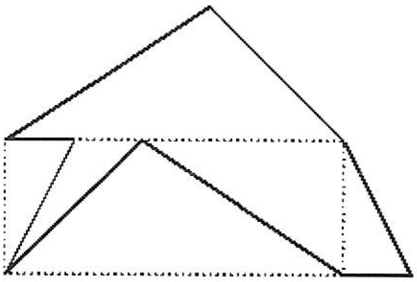
Une enseignante de l'Université de Nancy 1 et de l'IREM de Lorraine est venue à notre aide et nous a fourni une réponse :



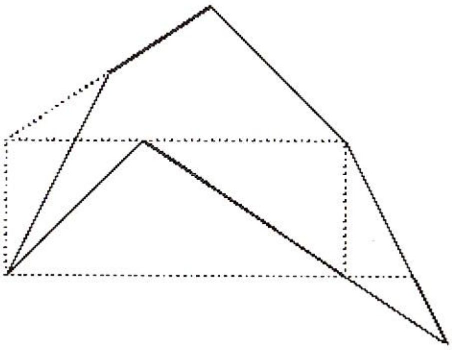
Un rectangle paveur



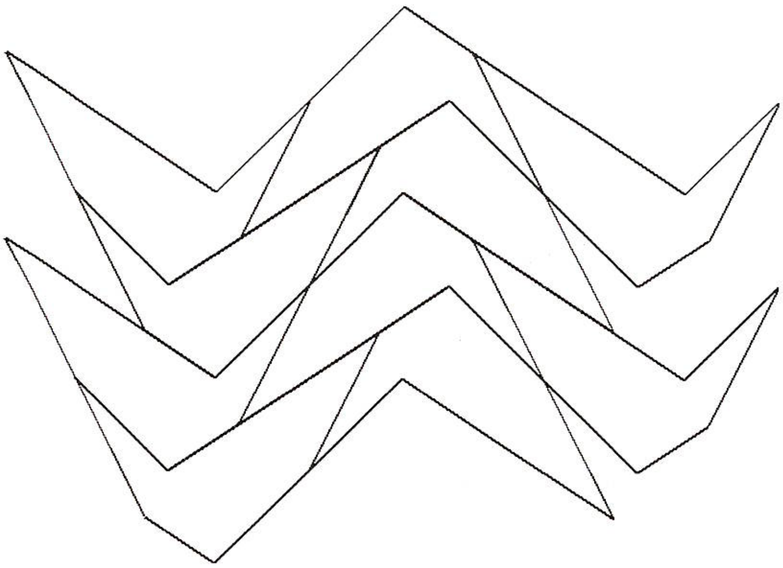
Un hexagone paveur à deux côtés parallèles et de même longueur



Un octogone paveur sans côtés parallèles et de même longueur.



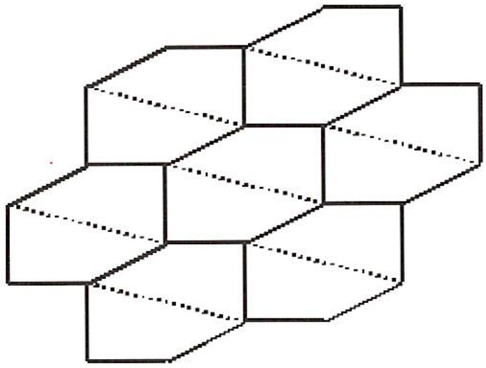
Un hexagone paveur sans côtés parallèles et de même longueur.



Un hexagone ayant deux côtés parallèles et de même longueur peut en faire un hexagone paveur. Cependant, l'exemple présenté par la collègue universitaire montre que cette condition n'est pas nécessaire...

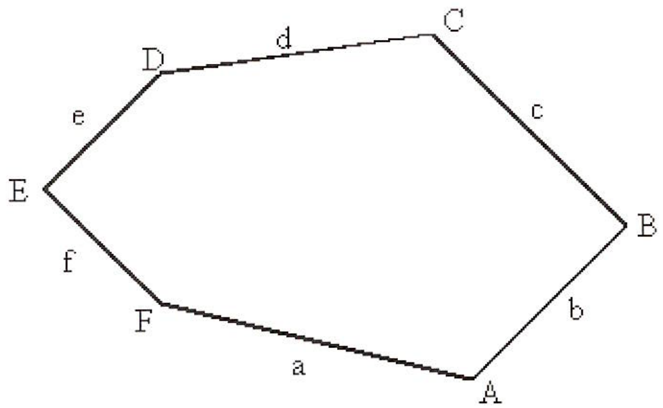
Existe-t-il une propriété possédée par tous les hexagones paveurs ?. La défunte revue « Pentaminos » de l'IREM de Grenoble ainsi que les auteurs de la brochure « Les Malices du kangourou - ACL. Les éditions du Kangourou 2005 » n'ont travaillé qu'à propos des hexagones possédant un centre de symétrie : leurs côtés sont donc tous parallèles 2 à 2.

Le tracé d'une diagonale permet de « replonger » dans le cas du pavage du plan par des quadrilatères :



Mes élèves sont donc allés un peu plus loin et l'aide d'une collègue universitaire de l'IREM de Lorraine nous a fait comprendre que le problème était bien plus difficile à résoudre que nous ne le pensions de prime abord...

Je ne pensais plus trop à notre problème non résolu lorsqu'une récente recherche sur Internet m'a permis de découvrir « Les 3 types d'hexagones qui pavent le plan » à l'adresse `http://www.jlsigrist.com/hexapave.htlm`.



Type n°1

$A + B + C = 360°$ et $a = d$

Type n°2

$A + B + D = 360°$ et $a = d$ et $c = e$

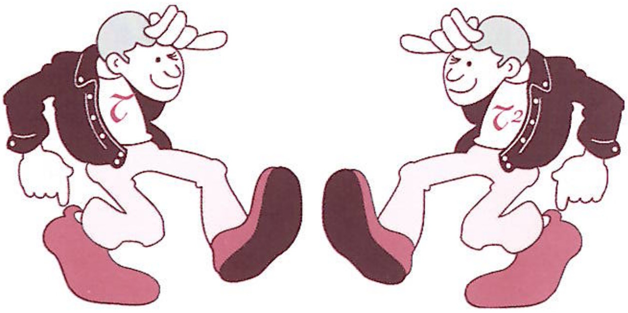
Type n°3

$A = C = E$ et $a = b$ et $c = d$ et $e = f$

Les frères Hick 18

Bernard Honclaire

Agence de détectives privés
Les frères Hick
Recherches en tous genres



Ami lecteur,

$\mathcal{T}^2$ nous fera part de ses réflexions sur le quadrilatère quelconque et $\mathcal{T}$ ajoutera ses commentaires ! $\mathcal{T}^2$ commentera ensuite son travail sur le calcul de l'aire du losange et signalera à son frère sa découverte du site conifère(`http://www.conifere.be/`).

Il parlera des jeux qu'il y a découverts. Je t'invite à les rejoindre dans cet univers qualifié de ludique par $\mathcal{T}^2$ et de mathématique par $\mathcal{T}$! Les deux sont-ils compatibles ? A toi de te faire une opinion !

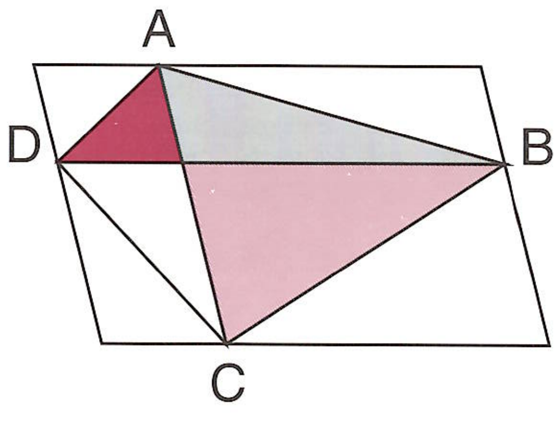
Bon courage, bon amusement et à bientôt !

Bernard Honclaire

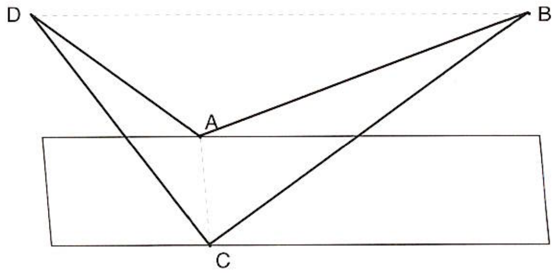
Pour rappel la question posée par $\mathcal{T}$ à son frère :

> « *Il nous reste à examiner le cas d'un quadrilatère quelconque. Je te demande de le comparer à deux figures : celle joignant les milieux de ses côtés et celle formée par les parallèles à ses diagonales menées par ses sommets.* » ($\mathcal{T}$ parlait des aires de ces figures)

$\mathcal{T}^2$ (décontracté) - « *J'ai évidemment construit un quadrilatère et j'ai tracé ses diagonales et les parallèles par les sommets... Comme tu peux le constater sur mon fichier quad01.fig (CabriPlus) , j'ai ensuite considéré les quatre triangles en tant que moitiés des quatre parallélogrammes... Et je peux t'annoncer que le grand parallélogramme vaut le double du quadrilatère ... Pour te préciser les choses, les côtés de ce grand parallélogramme sont les diagonales du quadrilatère...* (voyant le front de son frère se plisser, il ajoute, le regard pétillant) *je parle des longueurs bien sûr !* »



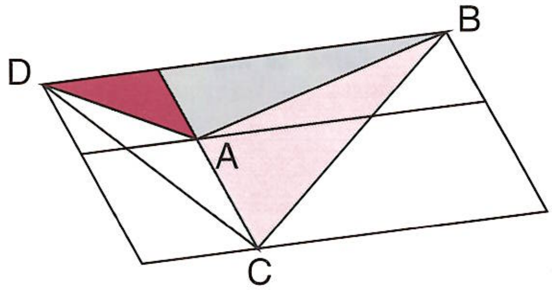
$\mathcal{T}$ (avec malice, il manipule son fichier) - « *Regarde ... tes triangles ont disparu !* »



$\mathcal{T}^2$ (jubilant) - « *Si tu crois que je ne m'étais pas aperçu de ce problème ! Je ne dormais pas pendant les exposés à Namur !... Disons que mon premier fichier est valable pour des quadrilatères normaux...* »

$\mathcal{T}$ (ajoutant, l'air distrait) - « *convexes* »

$\mathcal{T}^2$ (surpris et en lui-même) - « *Je ne vais pas me vexer pour si peu !...* (reprenant) ...*Je t'ai préparé un second fichier qui te conviendra certainement ! (quad02.fig) Evidemment si on devait considérer le grand parallélogramme comme somme des quatre petits, maintenant dans ce quadrilatère ...* (cherchant un appui chez son frère) ... »



$\mathcal{T}$ - « *... concave...* »

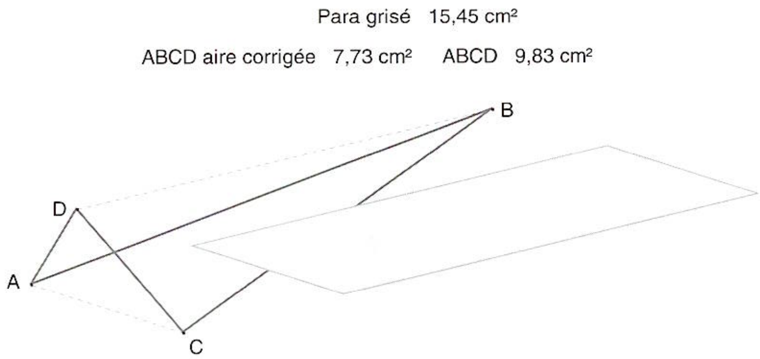
$\mathcal{T}^2$ (reprenant) - « *Il y en a deux qu'on doit soustraire des deux autres ! ... Mais pour les croisés ...!!!* »

$\mathcal{T}$ (laissant paraître une pointe d'ironie) - « *Tu m'as parlé des exposés de Namur, mais que fais-tu de la nouvelle aire pour les croisés ?* »

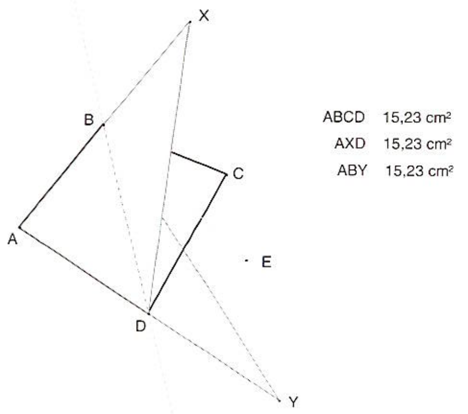
$\mathcal{T}^2$ -« *... C 'est vrai ! ... Tu devrais me ré-expliquer cette histoire...!* »

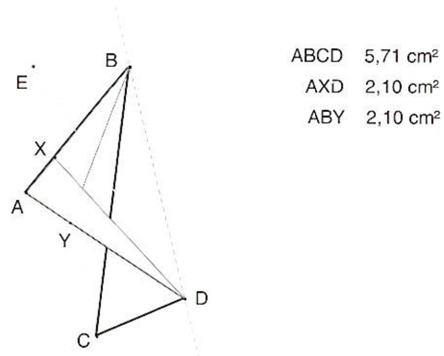
$\mathcal{T}$ (magistral) - « *Tu as remarqué avec ton fichier Cabri que l'aire du grand parallélogramme n'est pas le double de l'aire d'un quadrilatère croisé !*

Mais si tu remplaces le quadrilatère par un triangle de même aire et que tu appliques cette propriété aux croisés alors tu retrouves ton double ! Regarde ! (quad03.fig et quad04.fig) »



Voyons comment "corriger" le calcul de l'aire. L'aire du quadrilatère $ABCD$ est égale aux aires des figures suivantes : quadrilatère $ABED$ (point E mobile sur la droite XY), triangle AXD et triangle ABY sauf si le quadrilatère est croisé ! On peut donc prendre comme aire " corrigée " pour un quadrilatère croisé celle d'un des deux triangles .

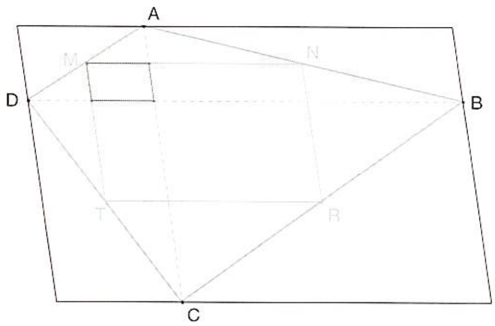


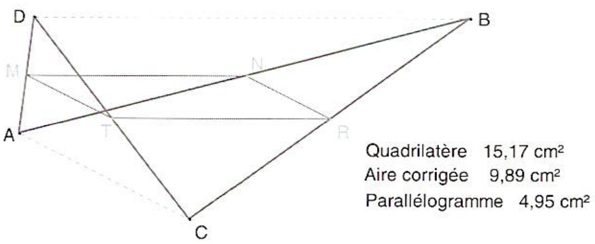


$\mathcal{T}^2$ (satisfait) - « *Tu as utilisé une parallèle à la diagonale BD, mais je suis sûr que tu pouvais faire le même travail avec la diagonale AC!...* »

$\mathcal{T}$ - « *Evidemment !* »

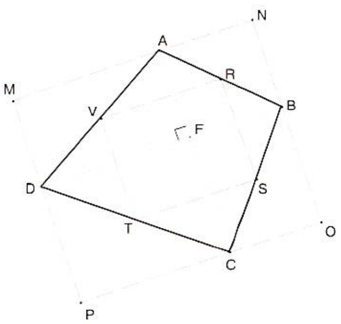
$\mathcal{T}^2$ (impatient) - « *Je continue avec le parallélogramme formé par les milieux des côtés ! ... Il vaut le quart du grand parallélogramme, puisque formé des quatre quarts des petits parallélogrammes ... Il me reste juste à vérifier que l'aire corrigée permet d'affirmer que c'est vrai pour tous les quadrilatères ! ...* » (quad05.fig)

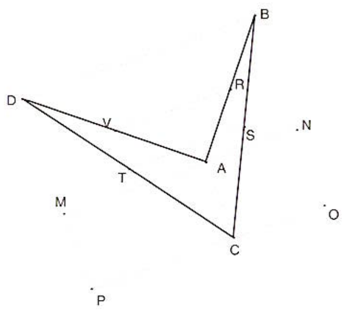


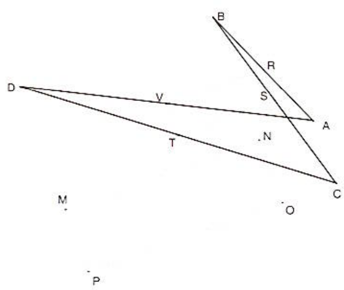


$\mathcal{T}$ (satisfait) - « *Tu ne m'as pas expliqué pourquoi la figure joignant les milieux des côtés était un parallélogramme ! ... Mais il est vrai que c'est de l'histoire ancienne ! (voir Hick4)* »

$\mathcal{T}^2$ - « *Je vais encore t'épater !... J'ai même rencontré des rectangles ! ... Il suffit que les diagonales du quadrilatère soient perpendiculaires ! ... Pour calculer l'aire d'un tel quadrilatère, c'est facile : on prend le demi-produit des diagonales ! ...* »

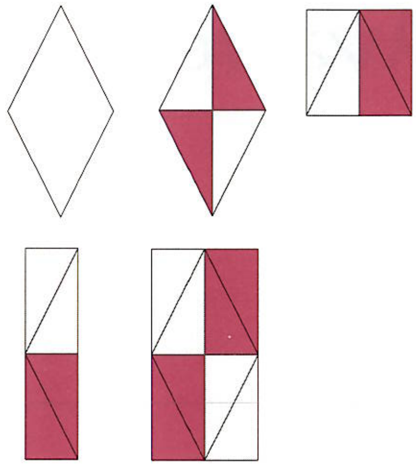






$\mathcal{T}$ (semblant impressionné) - *Je pense que par la même occasion, tu viens de régler le problème du losange* »

$\mathcal{T}^2$ (légèrement agacé) - « ***J'allais te le dire : un losange étant un cas particulier de quadrilatère à diagonales perpendiculaires, on calcule son aire de la même manière! Mais, comme d'habitude, j'ai réalisé un puzzle avec AG; uniquement pour le plaisir!*** »



$\mathcal{T}$ (satisfait, il ajoute) - « ***Ton puzzle permet d'illustrer les formules de calcul d'aire d'un losange.***

$$d_1 \times \frac{d_2}{2}, \; \frac{d_1}{2} \times d_2 \text{ et } \frac{d_1 \times d_2}{2}. \text{ »}$$

$\mathcal{T}^2$ (légèrement excité) - « ***Il est temps que je te parle maintenant du site Conifère!*** (`http://www.conifere.be/`) ***On y trouve des énigmes, des jeux et je voudrais qu'on réfléchisse ensemble sur certaines fiches!*** »

$\mathcal{T}$ (à peine surpris) - « ***J'avais bien remarqué ton intérêt pour ce site à Namur!*** »

$\mathcal{T}^2$ (consultant des notes) - « ***La fiche 18 et la fiche 32 sont les premières qui m'ont fait réfléchir, on pourrait en discuter la prochaine fois!*** »

$\mathcal{T}$ (enthousiaste) - « ***Et pourquoi pas!*** »

Ami lecteur, peux-tu réfléchir à ces deux énigmes (fiches ci-dessous) ?

Les fichiers Cabri correspondants aux activités de cet article sont disponibles sur le site `http://www.sbpm.be/`

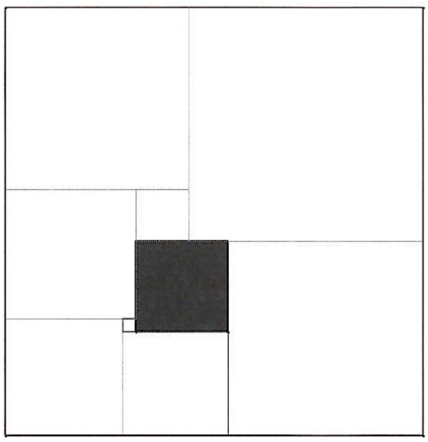
Fiche 18

Le trait noir est le bord d'un rectangle formé de neuf carrés assemblés. On te donne les mesures des côtés de deux carrés : Pour le carré noir : 7cm. Pour le carré gris : 1cm.

Quels sont le périmètre et l'aire du grand rectangle noir ?

Sur papier quadrillé, représente le puzzle qui t'est donné (neuf carrés assemblés en un rectangle). Essaie ensuite de construire une situation analogue en conservant le petit carré gris et en modifiant la dimension du carré noir.

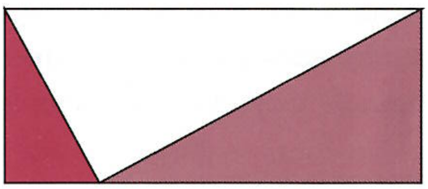
Que se passe-t-il ?



Fiche 32

Un rectangle de 10 cm sur 4 cm a été obtenu en assemblant trois triangles rectangles.

Quelles sont les aires des trois triangles ?



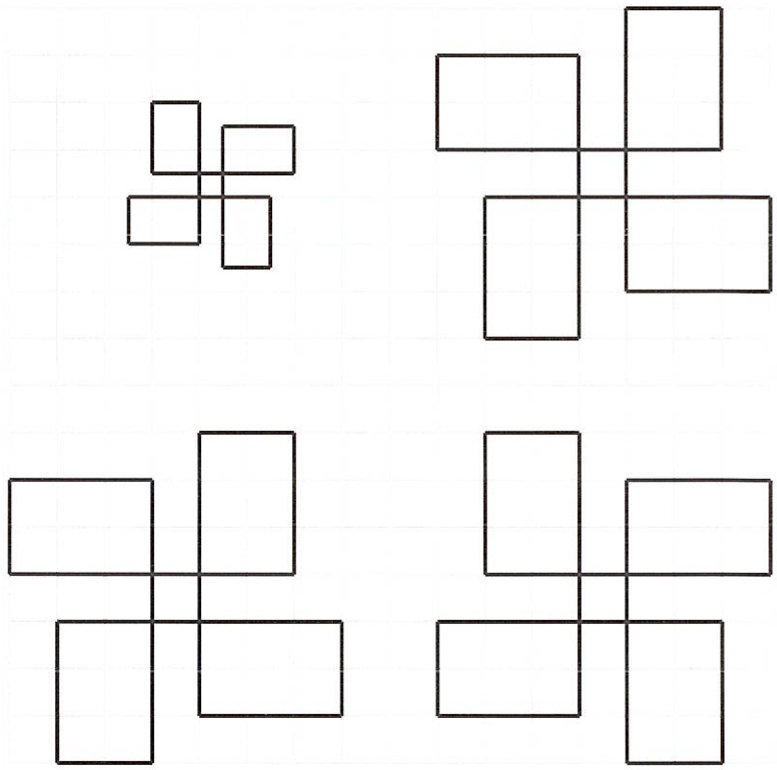
à suivre

Avancer, tourner (1)

Y. Noël-Roch

1. Que voir ? ([1])

Avant de continuer ta lecture, observe les dessins exécutés dans le quadrillage ci-contre et note les observations qu'ils te suggèrent.



. . . .

Tu as pu imaginer

- des translations appliquant une figure sur une autre
- des symétries orthogonales appliquant une figure sur une autre,
- une symétrie centrale appliquant une figure sur une autre,
- une rotation de 180° (un demi-tour) appliquant une figure sur une autre,
- des symétries centrales appliquant une figure sur elle-même,
- des rotations de 90° (un quart de tour) appliquant une figure sur elle-même,
- une représentation à l'échelle 2 (ou 0.5).

Le titre de l'article et les tortues t'ont peut-être orienté(e) vers une tout autre piste : **la découverte d'un caractère commun aux quatre figures**. Si ce n'est pas le cas, observe de nouveau les figures avec cette nouvelle idée : vois-tu

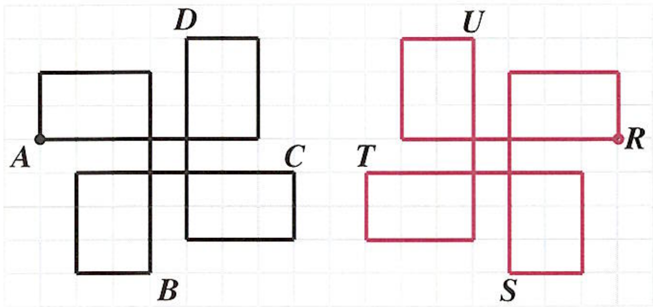
- une manière analogue de les dessiner toutes ?
- une raison de les partager en deux familles ?

. . . .

([1]) D'après l'article **Loop the Loop** de Emma Saunders paru dans la revue Equals, vol. 10, n°3 pp18–19

2. Quatre figures, deux familles ?

Reprenons deux figures parmi les précédentes :

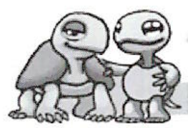


Si nous utilisons les « commandes-tortue » :

- Av n pour avancer de n pas
- Dr 90 pour tourner d'un quart de tour à droite
- Ga 90 pour tourner d'un quart de tour à gauche

les deux figures ont un air de famille.

Figure noire	Figure colorée
Départ de A, cap au Nord	Départ de R, cap au Nord
Av 2	Av 2
Dr 90	Ga 90
Av 3	Av 3
Dr 90	Ga 90
AV 6	AV 6
Dr 90	Ga 90
Av 2	Av 2
Dr 90	Ga 90
Av 3	Av 3
Dr 90	Ga 90
AV 6	AV 6
Dr 90	Ga 90
Av 2	Av 2
Dr 90	Ga 90
⋮	⋮



Les deux dessins sont donc construits avec le même triplet $(2;3;6)$ mais dans le dessin noir, on tourne toujours de 90° vers la droite tandis que dans le dessin coloré, on tourne toujours de 90° vers la gauche.
Cette modification permet d'obtenir deux figures symétriques par rapport à la médiatrice de $[AR]$.
Dans la figure noire, la suite (2 ; 3 ; 6) peut être appliquée à partir de chacun des points A, B, C et D. Dans la figure colorée, les mêmes rôles sont joués par les points R, S, T et U.

3. Une règle, des questions

Dans la suite de cet article, nous tracerons des chemins en utilisant toujours des quarts de tour à droite (notés en abrégé Dr). Un chemin sera donc entièrement défini par une suite de nombres. De plus, nous allons fusionner en une seule les « deux familles » rencontrées ci-dessus.

La règle :

⚠ Le triplet $(7;3;5)$ est une abréviation de la suite de consignes
Av 7 — Dr — Av 3 — Dr — Av 5 — Dr

Attention : l'exécution d'un triplet se termine par un quart de tour à droite.

Ainsi, le chemin noir est « le chemin (2 ; 3 ; 6) » (ou (3 ; 6 ; 2) ou (6 ; 2 ; 3)) ... et le chemin coloré est « le chemin (2 ; 6 ; 3) » (ou (6 ; 3 ; 2) ou (3 ; 2 ; 6)).
La lecture du triplet dépend du point de départ choisi !

Les questions :

- Le triplet $(2\,;3\,;6)$ ramène au point de départ au bout de quatre exécutions du processus. Est-ce lié aux valeurs particulières 2, 3 et 6 ou cette propriété est-elle vérifiée pour d'autres triplets de naturels ?
- Que se passe-t-il si on répète des suites de **quatre** naturels ?
- Que se passe-t-il si on répète des suites de plus de quatre nombres ?
- Que se passe-t-il si deux figures sont construites avec les mêmes nombres pris dans des suites différentes ?

Arme-toi de papier quadrillé et d'un crayon, trace, constate, essaie de généraliser tes observations avant de poursuivre ta lecture.

. . . .

4. Quelques réponses.

Si tu as dessiné soigneusement un grand nombre de chemins définis par des **triplets** de nombres, tu as pu te convaincre que **le circuit se ferme quel que soit le triplet, au bout de quatre exécutions du processus**. Cette propriété peut être justifiée de manières très différentes.

4.1. Une justification numérique

Dans le tableau qui suit, nous supposons la tortue orientée initialement verticalement vers le haut (Cap au Nord), nous notons positivement les déplacements verticaux vers le Nord, négativement les déplacements verticaux vers le Sud. De même, nous notons positivement les déplacements horizontaux vers l'Est, négativement les déplacements horizontaux vers l'Ouest.

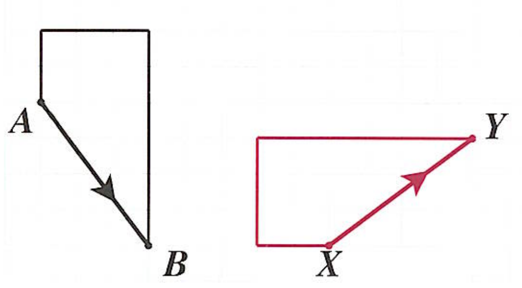
Appliquons répétitivement le triplet $(a;b;c)$:

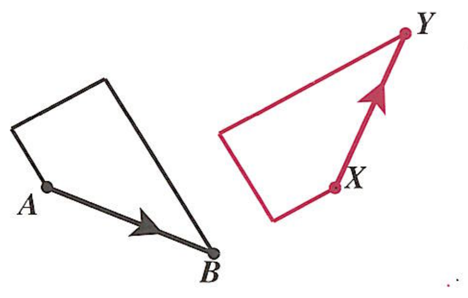
Déplacement horizontal		$+b$		$-a$		$+c$		$-b$		$+a$		$-c$
Déplacement vertical	$+a$		$-c$		$+b$		$-a$		$+c$		$-b$	

En bout de tableau, après quatre exécutions, le bilan des déplacements est nul, aussi bien horizontalement que verticalement. Nous sommes donc bien revenus au point de départ.

4.2. Une autre piste

Ci-dessous et sans parole, une idée que je t'invite à exploiter pour répondre aux questions posées plus haut. Elle sera exploitée dans le prochain numéro de *Math-Jeunes Junior*.





Actualité

A. Paternottre

Le mardi 22 août 2006 s'est ouvert à Madrid le congrès mondial des mathématiciens. Durant la séance académique qui inaugurait ce congrès, le roi d'Espagne Juan Carlos remettait à quatre lauréats la « médaille Fields », équivalent du « Nobel des mathématiques » attribué tous les quatre ans.

Si trois lauréats étaient bien présents pour recevoir leur prix, le quatrième faisait hélas défaut. Il s'agit du génial et mystérieux mathématicien russe Grigori Perelman, couronné pour avoir démontré une conjecture vieille d'une centaine d'années : « la conjecture de Poincaré ».

Ce problème faisait partie d'un ensemble de dix problèmes jamais résolus et pour chacun desquels la fondation Landon Clay (du nom d'un milliardaire américain) offrait depuis l'année 2000 une somme d'un million de dollars pour la résolution de chacun d'eux. Grigori Perelman a non seulement refusé la prestigieuse médaille mais aussi les récompenses non négligeables qui l'accompagnaient ! S'exprimant à l'Agence France-Presse, Perelman a déclaré qu'il s'expliquerait dans quelques mois sur son refus de la médaille Fields. Croisons donc les doigts.

Grigori Perelman

Né en juin 1966 dans les environs de Saint-Pétersbourg, ville où il poursuivit ses études jusqu'au doctorat en mathématiques. Il a travaillé comme chercheur à l'université californienne de Berkeley dans les années 90.
Il revint ensuite à l'Institut de Mathématiques « Steklov » à Saint-Pétersbourg.

Il y démissionna récemment et s'envola dans la nature après avoir interrompu tout contact avec le monde extérieur, aux dires de ses anciens collègues. Ceux-ci le décrivent comme un personnage mystérieux, insondable et peu communicatif. Ses rares photos le montrent portant la barbe et les sourcils en broussaille. Une vraie tête de génie quoi... mais de « génie caché ».

Henri Poincaré.

(Nancy 1854 - Paris 1912)

Né d'une famille faisant partie de l'élite intellectuelle française au XIX^{e} siècle, Henri Poincaré perpétua à coup sûr cette tradition familiale. Son père, médecin, était professeur à la Faculté de Médecine de Nancy et son cousin, Raymond Poincaré, sera Président de la République Française de 1913 à 1920. Brillant étudiant à l'Ecole Polytechnique où il eut notamment comme professeur le célèbre mathématicien Hermite, Henri Poincaré y décroche un diplôme d'ingénieur des Mines.

Il se consacra ensuite à sa thèse de doctorat en mathématiques qu'il défendit le 1er octobre 1879. Il fit de nombreuses recherches et découvertes dans le domaine de l'analyse mathématique supérieure.

En 30 ans, il publia une trentaine de volumes et près de 500 notes, articles et mémoires. Il fut également philosophe des Sciences.

Dans « La Science et l'Hypothèse », publié en 1902, il affirme le rôle essentiel du principe de récurrence.

Plus tard, il intervient dans la crise des fondements des mathématiques, s'opposant aux idées de Hilbert et Russell. Il entre à l'Académie française en juin 1909, privilège rare pour un scientifique. Il décède le 17 juillet 1912 d'un cancer de la prostate.

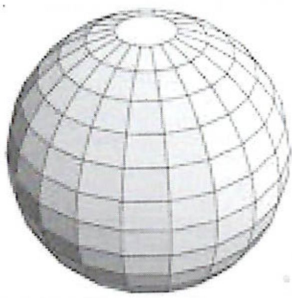
La conjecture de Poincaré

Poincaré se posa en 1904 la question suivante :

« Considérons une variété V à 3 dimensions sans bord. Est-il possible que le groupe fondamental de V soit trivial bien que V ne soit pas homéomorphe à une sphère de dimension 3 ? ».

Il avait ainsi lancé sa conjecture qu'on pourrait énoncer :

La sphère est le seul espace tridimensionnel fermé et dépourvu de trous ». A la lecture de cet énoncé, on reste perplexe et on comprend de suite que Poincaré ne jouait pas dans la cour qui nous est familière des mathématiques élémentaires.
Renonçons donc à pousser plus loin le bouchon, nous réjouissant seulement que le génie de Perelman ait enfin levé cette énigme vielle d'un siècle.



Pour plus de renseignements, je vous renvoie au site de `BibM@th` sur Internet.

Instant remarquable

Le 4 mai 2006 à 1h 2min 3sec fut un instant remarquable qui ne se reproduira pas avant cent ans. Pourquoi ?

Réponse à la page 26 de ce *Math-Jeunes Junior*

Ni miracle, ni magie, seulement des math !

Ecris un nombre naturel de 3 chiffres. A sa suite écris le même nombre naturel de 3 chiffres . Tu obtiens ainsi un nombre naturel de 6 chiffres. Divise celui-ci par 7, puis le quotient obtenu par 11, puis le nouveau quotient par 13. Que constates-tu ? Peux-tu démontrer qu'il en est toujours ainsi, quel que soit le nombre naturel choisi au départ.

Envoie-nous ta démonstration. Elle paraîtra dans le numéro 116 du *Math-Jeunes Junior*.

André Paternottre.

Jeux

Y. Noël-Roch

1. Des lettres à découvrir

Chaque lettre cache un chiffre. Deux lettres différentes cachent deux chiffres différents. La même lettre cache toujours le même chiffre.
Découvre les chiffres cachés sachant que l'addition est correcte

$$\begin{array}{rccccc} & & H & U & I & T \\ + & & H & U & I & T \\ \hline & S & E & I & Z & E \end{array}$$

2. Le magicien

Demande à un(e) ami(e) d'écrire (sans que tu puisses le voir) un nombre de trois chiffres.

Donne-lui ensuite une suite de calculs à effectuer (chaque opération s'effectue sur le dernier résultat obtenu), toujours en cachant ses résultats.

- ajouter 15
- multiplier par 20
- ajouter le nombre initial
- diviser par 3
- retirer 2
- diviser par 7
- retirer le nombre initial

Pendant que tu donnes tes consignes une à une, mélange un jeu de cartes et extrais-en un as et un quatre.

Dès que ton ami(e) a terminé les calculs, montre-lui que tes cartes dévoilent son résultat en alignant tes deux cartes de manière à former le nombre 14.

Il va de soi que tu dois inventer de nouvelles commandes ou changer de public si tu veux continuer à épater la galerie. A toi de jouer !

3. La moyenne la plus grande

Parmi les naturels strictement compris entre 1 et 101, soit

A l'ensemble des nombres pairs.

B l'ensemble des multiples de 3.

C l'ensemble des multiples de 4.

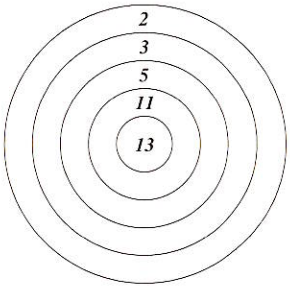
D l'ensemble des multiples de 5.

E l'ensemble des multiples de 6.

Parmi ces cinq ensembles, quel est celui dont la moyenne arithmétique est la plus grande ?

Quel est le nombre x dont l'ensemble X des multiples (compris entre 1 et 101) donne la moyenne la plus grande possible ?

4. Le plus petit nombre de fléchettes



Quel est le nombre minimum de fléchettes à lancer pour obtenir un total de 150 points en jouant sur la cible ci-contre ?

5. Menteurs et Nonmenteurs

Plongeons-nous dans un monde simplifié partagé en deux familles :

– les Menteurs (qui ne disent **jamais** la vérité)
– les Nonmenteurs (qui disent **toujours** la vérité)

Tu rencontres Xavier et Yvon.

Xavier te dit
Nous sommes tous les deux des Menteurs

Peux-tu découvrir la famille de chacun des deux personnages ?

6. Des quotients entiers.

- Calcule la quatrième puissance de 7.
- Retire 1 de ce produit.
- Divise cette différence par 120.

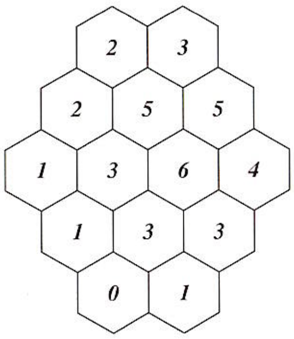
Je parie que tu obtiens comme quotient final un nombre entier !

Procède de la même manière en remplaçant 7 par un nombre premier plus grand. Voilà une nouvelle manière de jouer au magicien ayant avalé une calculatrice !

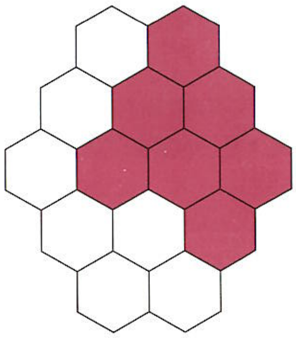
7. Des hexagones

Dans les trois jeux qui te sont proposés, colorie certains des hexagones de façon que tout hexagone ait autant de voisins coloriés que le nombre indiqué en son centre. Attention : *tout hexagone est considéré comme voisin de lui-même !*

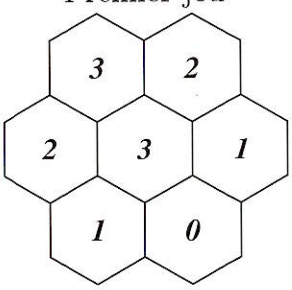
Exemple



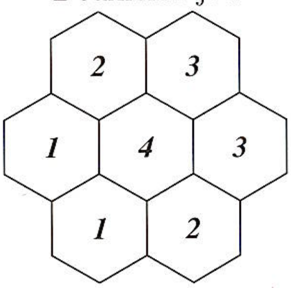
Solution



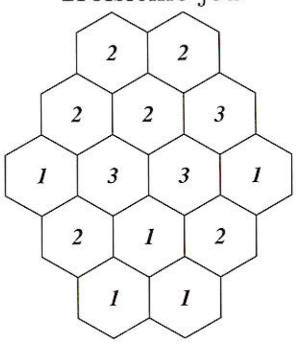
Premier jeu



Deuxième jeu

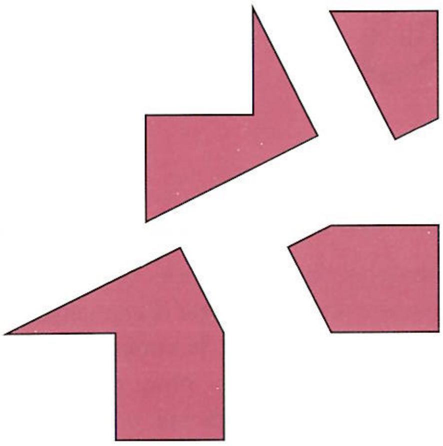


Troisième jeu



8. Puzzle

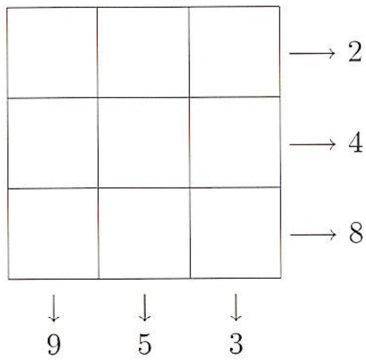
Reproduis les quatre pièces ci-dessous, une première fois à la même échelle, puis à l'échelle double.



Assemble les quatre « petites » pièces pour former un carré. Assemble les quatre « grandes » pièces pour former une croix.

9. Les nombres de 1 à 9

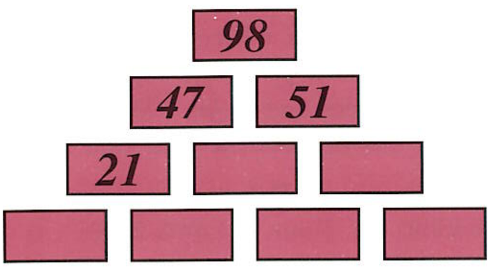
Place les nombres de 1 à 9 dans les neuf cases de manière à ce que le nombre de trois chiffres écrit en ligne ou en colonne soit un multiple du nombre noté en bout de flèche.

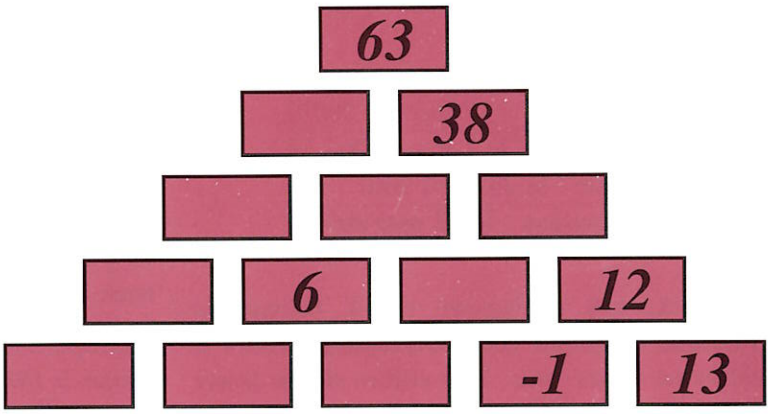


10. Mur additif

Dans un mur additif, chaque brique contient la somme des nombres qui occupent les deux briques qui la supportent. Cette règle est illustrée dans le premier mur ci-dessous.

Complète les deux murs.





Tu peux trouver d'autres « Murs Additifs », d'autres « Hexagones » et aussi d'autres jeux sur le site `www.conifere.be` qui te propose un logiciel JEUX.

Olympiades

C. Festraets

Participer !

Durant cette année scolaire, aura lieu la trente-deuxième édition de l'Olympiade Mathématique Belge (OMB).

Comme *presque* tout le monde le sait, l'OMB est une épreuve mathématique ouverte à tous les élèves de l'enseignement secondaire. Depuis sept ans déjà, cette épreuve est divisée en trois concours. Ceux-ci se déroulent en parallèle. La « Mini-Olympiade » accueille les élèves de première et de deuxième années ; la « Midi-Olympiade » ést réservée aux élèves de troisième et de quatrième années ; enfin, la « Maxi-Olympiade » est destinée aux élèves de cinquième et de sixième années.

Voici en quelques mots le principe commun à tous ces concours. Pour chacun d'entre eux, il y a trois étapes : une éliminatoire qui a lieu dans les locaux mêmes de ton école, une demi-finale organisée dans des centres régionaux et une finale qui se tient à Namur. Le calendrier de la trentième-deuxième Olympiade Mathématique Belge est le suivant :

éliminatoire : le 17 janvier 2007
demi-finale : le 7 mars 2007
finale : le 25 avril 2007
proclamation : le 12 mai 2007

Evidemment, ton professeur reçoit toutes les informations utiles sur cette Olympiade. Alors si tu désires en savoir plus, il te suffira de lui poser les questions auxquelles cet article n'apporte pas de réponse. Il se fera certainement un plaisir de mieux t'informer.

Se préparer !

Si tu souhaites te préparer à cette épreuve, tu trouveras plus loin quelques problèmes posés dans le passé. Ils vont non seulement éveiller ta curiosité mais encore te permettre de te familiariser avec la forme du questionnaire.

Comme tu vas bientôt le constater, il y a, pour la plupart des questions, cinq réponses proposées. Une seule d'entre elles est correcte. Par contre, certaines questions n'ont pas reçu de réponse « pré formulée ». Dans ce cas, tu dois trouver un nombre entier appartenant à l'intervalle [0, 999], autrement dit un nombre entier positif, éventuellement nul, strictement inférieur à 1000.

Ne réponds que si tu es sûr de ta réponse. En effet, la manière de calculer ton score lors du concours est la suivante : 5 points pour une bonne réponse, 0 pour une mauvaise réponse. Tout à fait normal, diras-tu ! Mais, si tu t'abstiens de répondre à une question, tu reçois 2 points. Là tu te demandes peut-être quel est le but de ce procédé ? Mais précisément de te faire prendre conscience qu'il vaut mieux ne rien répondre plutôt que de répondre n'importe quoi. Enfin tu dois savoir qu'il est nécessaire de répondre à un minimum de 5 questions pour être classé.

Les problèmes que tu vas résoudre ci-dessous ont été choisis dans le tome 4 des OMB reprenant toutes les questions posées de 1994 à 1998. Malheureusement, ce tome n'est plus en vente, il est épuisé. Par contre, si tu désire peaufiner ta préparation et évaluer ton potentiel olympique, tu peux acquérir les tomes 5 et 6 des OMB. Voici tous les renseignements nécessaires pour cela :

Olympiades Mathématiques Belges
Tome 5 (1999-2002) ou Tome 6 (2003-2006) : 6 euros chacun + 1,80 euros de port. Les Tome 5 et Tome 6 ensemble : 10 euros+ 3.50 euros de port. Les commandes sont à adresser à : SBPMef, rue de la Halle, 15, 7000 Mons Compte : 000-0728014-29 –Fax et téléphone : 065 37 37 29. GSM : 0473973808

S'exercer !

1. Chiffres (demi-finale - 1997)
Pour écrire tous les naturels de 1 à 1997 inclus, combien de chiffres 1 sont nécessaires ?
(A) 400 (B) 1 208 (C) 1 298 (D) 1 997
(E) Une autre réponse.

2. Equation (éliminatoire - 1997)
Que vaut y si $\frac{17}{10}y = 0{,}51$?
(A) 3 (B) 1,3 (C) 1,2 (D) 0,3 (E) 0,03

3. Triangle (demi-finale - 1994)
Dans un triangle, un angle est le double d'un autre et le troisième angle est la somme des deux premiers. Le plus petit des trois angles mesure alors
(A) 20° (B) 30° (C) 36° (D) 40° (E) 45°

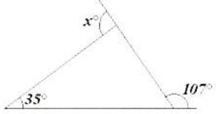
4. Timbres (demi-finale - 1996)
Une personne a acheté des timbres à 3 F et des timbres à 5 F pour un total de 100 F exactement. Parmi les suivants, quel est le nombre de timbres à 5 F qu'elle *ne* peut *pas* avoir acheté ?
(A) 5 (B) 8 (C) 9 (D) 11 (E) 17

5. Moyenne (demi-finale - 1996)
Le poids moyen des 30 élèves d'une classe est de 47 kg ; si chacun de ces élèves grossit de 3 kg, de combien augmentera le poids moyen ?
(A) 0,1 kg (B) 2 kg (C) 3 kg (D) 90 kg
(E) Une autre valeur.

6. Somme (éliminatoire - 1994)
Si $a + b = 70$, $b + c = 90$ et $a + c = 80$, que vaut $a + b + c$?
(A) 120 (B) 140 (C) 150 (D) 160 (E) 240

7. Quel âge ? (éliminatoire - 1994)
Sans réponse préformulée - Dans 5 ans, Julie sera 8 fois plus âgée qu'il y a 9 ans. Quel est l'âge actuel de Julie ?

8. Angle (éliminatoire - 1994)
Sur la figure ci-contre, que vaut x ?
(A) 72 (B) 107 (C) 108
(D) 142 (E) 145



9. Des boissons (demi-finale - 1995)
Sans réponse préformulée - Au cours d'un repas,
30 personnes ont bu notamment de l'eau et du vin rouge ;
15 personnes ont bu notamment de l'eau et du vin blanc ;
10 personnes ont bu de l'eau, du vin blanc et du vin rouge ;
7 personnes ont bu uniquement du vin blanc ;
40 personnes ont bu notamment de l'eau.
Sachant qu'il y avait 60 personnes au repas et que tout le monde a bu au moins une de ces trois boissons, combien de personnes ont bu notamment du vin rouge ?

10. Chiffre impair (demi-finale - 1994)
Pour combien de valeurs de n dans l'ensemble $\{1, 2, 3, \ldots, 100\}$, le chiffre des dizaines de n^2 est-il impair ?
(A) 10 (B) 20 (C) 30 (D) 40 (E) 50

11. Calcul (demi-finale - 1994)
$4^4 \times 9^4 \times 4^9 \times 9^9 =$
(A) 13^{13} (B) 13^{36} (C) 36^{13} (D) 36^{36}
(E) 1296^{26}

12. Losange (éliminatoire - 1995)
Un losange a une aire de 24 et un périmètre de 20. Quelle est la longueur de sa grande diagonale ?
(A) 6 (B) 8 (C) 10 (D) $3\sqrt{5}$ (E) $4\sqrt{3}$

13. Addition (demi-finale - 1995)
L'addition ci-dessous est incorrecte, mais on peut la corriger en remplaçant un chiffre c, à chacune de ses apparitions, par un autre chiffre d. Que vaut la somme de c et de d ?

$$\begin{array}{r} 7\;4\;2\;5\;8\;6 \\ +\;8\;2\;9\;4\;3\;0 \\ \hline 1\;2\;1\;2\;0\;1\;6 \end{array}$$

(A) 4 (B) 6 (C) 8 (D) 10 (E) Strictement plus que 10.

Solutions

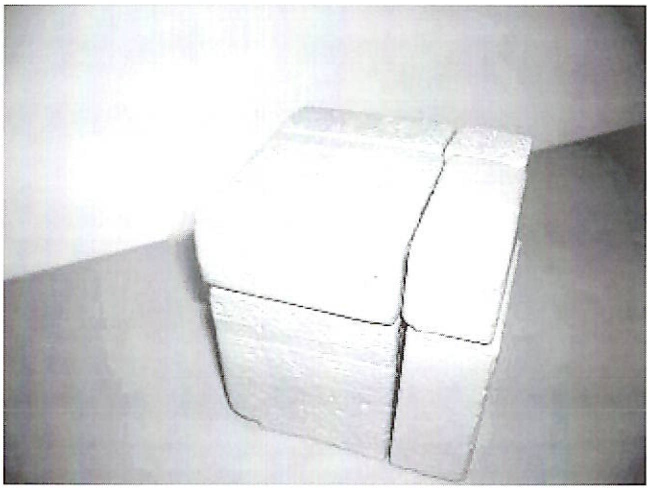
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
E	D	B	C	C	A	11	C	43	B	C	B	C

AplusBéauCube

G. Laloux

Il fut un temps... pas si lointain où l'étude de $(a+b)^3$ faisait partie du programme de troisième au chapitre des « produits remarquables ».

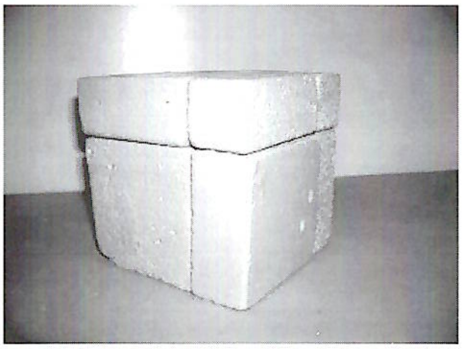
Tout comme la formule $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$, le développement de $(a+b)^3$ peut aussi s'illustrer géométriquement par le biais du calcul de volumes. L'élévation à la troisième puissance ne s'appelle pas « élever au **cube** » par hasard ! L'explication par l'image :

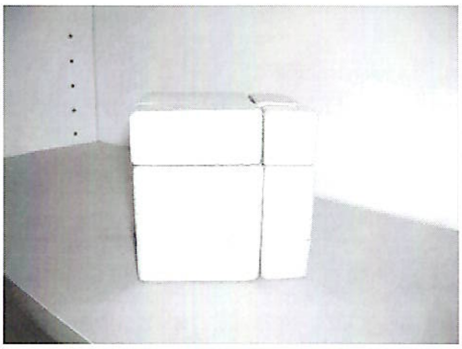


Le cube artisanal illustré ci-dessus a une arête qui mesure « $a+b$ ».

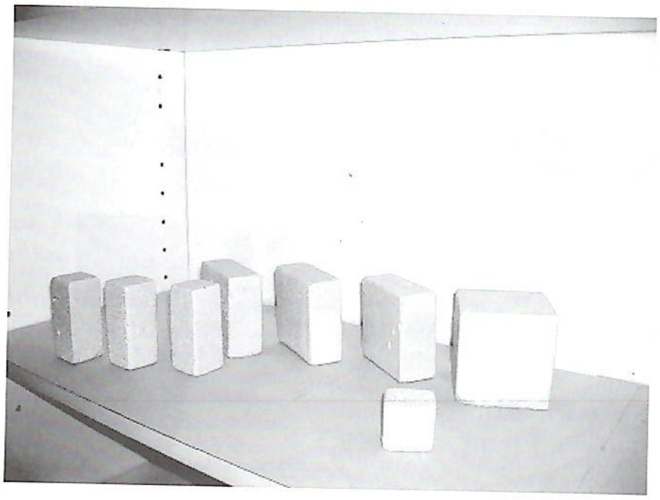
Le volume d'un cube se calcule de la façon suivante : arête $\times$ arête $\times$ arête ou encore arête^3

Pour le cube de la photo, le volume peut donc s'exprimer par $(a+b)\times(a+b)\times(a+b) = (a+b)^3$





En décomposant ce cube, nous obtenons les éléments suivants :



Nous trouvons un gros cube, un petit cube, et deux fois trois parallélépipèdes rectangles.

Le volume du cube de départ est évidemment égal à la somme des volumes de ses différents constituants, à savoir :

Vol $(C1) + 3\times$ Vol $(P1) + 3\times$ Vol $(P2)$+Vol $(C2)$.

Volume du cube $C1 = a \times a \times a = a^3$

Volume d'un parallélépipède = longueur× largeur × hauteur ou encore Aire de la base × hauteur

$P1$: Aire de la base $= a \times a = a^2$ hauteur $= b$

Volume de $P1 = a^2 \times b = a^2b$

$P2$: Aire de la base $= a \times b$ hauteur $= b$

Volume de $P2 = a \times b \times b = a \times (b \times b) = a \times b^2 = ab^2$

Volume du cube $C2 = b \times b \times b = b^3$

Le volume du cube initial peut donc s'exprimer par $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

Les expressions $(a+b)^3$ et $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ expriment bien le volume du même cube ; elles sont donc équivalentes.

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

Le membre de droite de la formule est un polynôme à deux variables : a et b . Ce polynôme est ordonné suivant les puissances décroissantes de a (et les puissances croissantes de b) c'est à dire :

- premier terme : a^3 l'exposant de a est maximum, celui de b est minimum ($b^0 = 1$ et $a^3 \times 1 = a^3$)
- Deuxième terme : l'exposant de a diminue de 1 et celui de b augmente de 1 ($b^1 = b$)
- Troisième terme : l'exposant de a diminue de 1 ($a^1 = a$) et celui de b augmente de 1
- Quatrième terme : l'exposant de a diminue de 1 ($a^0 = 1$) et celui de b augmente de 1

Si on observe le membre de droite de la formule $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, on voit que le même principe est appliqué. Ces observations peuvent se prolonger en relisant l'article « Le triangle de Pascal » de Claude Villers dans le *Math-Jeunes Junior* n°109 (novembre 2004).

Solutions des jeux

1. Des lettres à découvrir

La première énigme admet exactement deux solutions : $8253 + 8253 = 16503$ et $9254 + 9254 = 18508$.

2. Le magicien

Le nombre initial n'a aucune importance, appelons-le x.

Les résultats successifs sont $x + 15$, $20x + 300$, $21x + 300$, $7x + 100$, $7x + 98$, $x + 14$, 14.

3. La moyenne la plus grande

L'ensemble des multiples de 5 dont la moyenne est $52,5$. $x = 50$ si on veut que X ne soit pas réduit à un seul nombre. Sinon, $x = 100$.

4. Le plus petit nombre de fléchettes

Douze fléchettes suffisent ($9\times13+3\times11 = 150$)

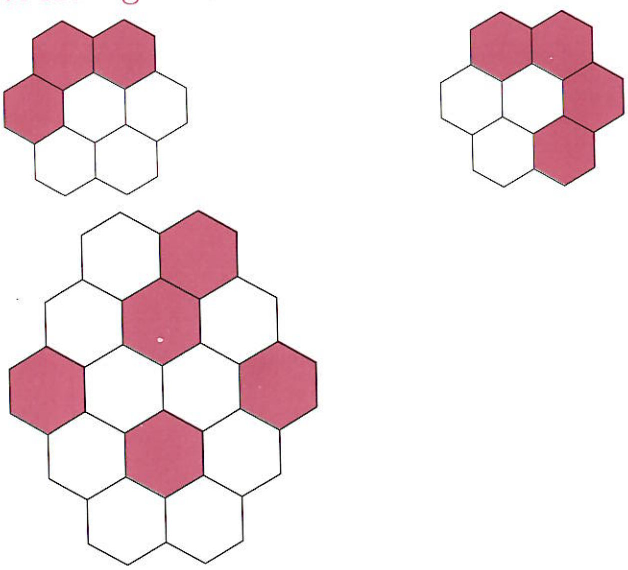
5. Menteurs et Nonmenteurs

Xavier Menteur et Yvon Nonmenteur.

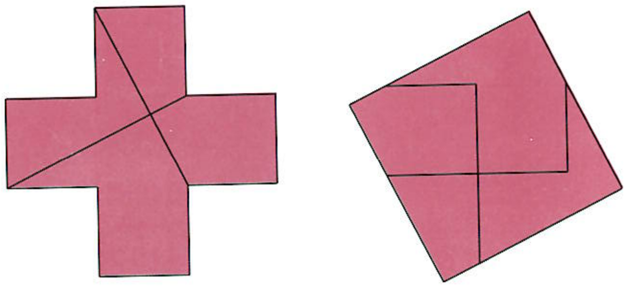
6. Des quotients entiers

Quel que soit le nombre premier $p > 5$, $p^4 - 1 = (p-1)(p+1)(p^2+1)$ est multiple de $120 = 2^3 \times 3 \times 5$.

7. Hexagones



8. Puzzle



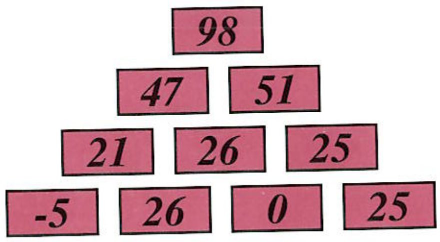
9. Les nombres de 1 à 9

Voici une solution (probablement différente de la tienne !)

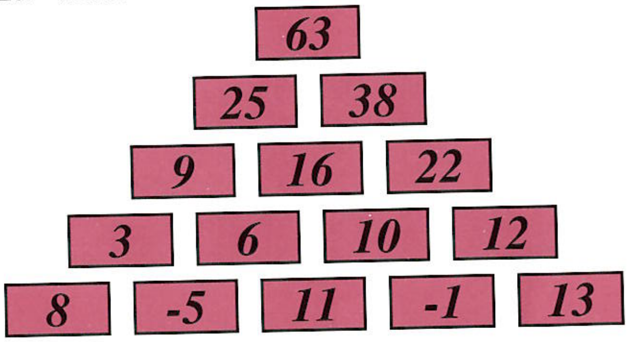
1	7	4
9	3	2
8	5	6

10. Murs additifs

Le premier mur peut être complété d'une infinité de manières. En voici une :



La solution du deuxième est unique :



Réponse à la question posée en page 18

Si on écrit d'abord l'heure puis la date, on obtient la suite remarquable :

01 02 03 04 05 06. Bof. . . !

Des radicaux à la pelle.

A. Paternottre

La question 19 du concours Math-Quiz (*Math-Jeunes Junior*113, page 33) a probablement surpris plusieurs de nos lecteurs. A première lecture, en effet, elle pouvait paraître quelque peu insolite, voire insolente ! Je vous rappelle sa formulation :

« ***Que vaut*** $\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots}}}}$ ***si cette écriture est indéfiniment poursuivie et si on sait que la réponse est un nombre naturel ?*** »

Déjà cette expression algébrique est assez alambiquée. En plus elle vaudrait un nombre naturel tout rond ? Cela rend perplexe !

Comment nos lecteurs s'y sont-ils pris pour traiter cette question ?

On peut se douter que leur première réaction - bien naturelle d'ailleurs -fut de se munir de leur calculatrice.

En se limitant par exemple à 5 radicaux superposés, cette brave calculette fournit rapidement une réponse du style $1,9975909\cdots$

Ce nombre décimal, proche de 2, suggère que 2 est probablement la réponse correcte. Et comme Math-Quiz n'exige aucune explication… allons-y pour répondre « 2 » à la question posée. Et merci à la calculette.

Ouais ! Mais… on reste sur sa faim !

Et les petits points qui figurent dans l'expression donnée… on laisse tomber ?

Et si, dans cette expression, on remplace le 2 par 3 ou 4 ou 5 ou…, la valeur de cette expression sera-t-elle respectivement 3, 4, 5… ?

Cette conclusion hâtive qui ne repose que sur l'intuition conduit le plus souvent à la catastrophe.

Analysons donc le problème de plus près et tentons d'apporter une réponse satisfaisante à la question suivante :

« Pour quels nombres naturels n l'expression $\sqrt{n+\sqrt{n+\sqrt{n+\sqrt{n+\cdots}}}}$ est-elle aussi un nombre naturel et que vaut ce naturel ? »

Désignons par x la valeur de l'expression donnée. On a alors on a successivement :

$$x=\sqrt{n+\sqrt{n+\sqrt{n+\sqrt{n\cdots}}}}\Rightarrow x^2=n+\sqrt{n+\sqrt{n+\sqrt{n+\cdots}}}\Rightarrow x^2=n+x\Rightarrow x^2-x-n=0$$

Le problème revient donc à résoudre l'équation du second degré $x^2-x-n=0$ (1) dans l'ensemble N.

On dit que l'équation (1) est une équation « paramétrique » du second degré car elle renferme « le paramètre n ».

Dans le contexte du problème que nous traitons, ce paramètre ne peut prendre que des valeurs naturelles tout comme « l'inconnue x » aussi d'ailleurs.

- Remarquons de suite que si $n = 0$ alors l'équation (1) s'écrit : $x^2 - x = 0$ ou encore $x(x-1) = 0$ dont les racines sont les naturels 0 et 1. A l'évidence, seule la racine 0 est acceptable lorsque $n = 0$ .C'est ce qu'on appelle un cas « trivial ».
- D'autre part, le cas $n = 1$ a déjà traité dans le numéro 104 (2003) de *Math-Jeunes Junior* dans l'article intitulé « Jolies égalités ».

  On y découvre que $\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\cdots}}} = \phi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \cong 1.618$ qui est le célèbre nombre d'or dont il a souvent été question dans notre revue. Bien sûr ce nombre d'or n'est pas un nombre naturel et ne répond donc pas à la question posée ci-dessus.
  Remarquons cependant que $1 < \phi < 2$.
- Dans la suite de cet article, nous imposerons à n d'être un nombre naturel au moins égal à 2. Dans cette hypothèse, x sera aussi un naturel au moins égal à 2.

Soit k un nombre naturel qui est racine de l'équation (1). Ce nombre k doit donc vérifier cette équation. Cela veut dire que si on remplace dans l'équation (1) l'inconnue x par k, le premier membre de cette équation est identiquement nul . Dès lors $k^2 - k - n = 0$ ou encore $n = k^2 - k$ ou enfin $n = (k-1)k$. Cette dernière égalité exprime que n est le produit des deux naturels consécutifs $k - 1$ et k. Puisque n doit être au minimum égal à 2, ce produit est au minimum égal à $(2-1) \times 2 = 1 \times 2$.

Reste à calculer x.

L'équation $x^2 - x - n = 0$ peut maintenant s'écrire $x(x-1) = k(k-1)$. Dans cette dernière équation, toutes les lettres représentent des nombres naturels au moins égaux à 2. Elle est donc équivalente à l'équation $x = k$.

Dès lors, lorsque n est un naturel au moins = 2, la seule solution acceptable de l'équation (1) est k.

Concluons :

Pour que l'expression algébrique $x = \sqrt{n+\sqrt{n+\sqrt{n+\cdots}}}$ $(n \in N \setminus \{0,1\})$ représente un nombre naturel, il suffit que n soit le produit de deux nombres naturels consécutifs et non nuls.

x est alors égal au plus grand de ces deux nombres naturels.

On a donc le tableau de valeurs correspondantes suivantes :

$n =$	$1 \times 2 = 2$	$2 \times 3 = 6$	$3 \times 4 = 12$	$4 \times 5 = 20$	...	$(k-1) \times k$
$x =$	2	3	4	5	...	k

Si tu as lu et compris ce qui précède alors, en procédant de la même manière, tu pourras établir toi-même la proposition suivante :

Pour que l'expression algébrique $x = \sqrt[3]{n+\sqrt[3]{n+\sqrt[3]{n+\cdots}}}$ soit un nombre naturel , il suffit que n soit le produit de 3 nombres naturels consécutifs et non nuls.

L'inconnue x est alors égale au nombre médian de ces 3 naturels rangés en ordre croissant.

On pourrait continuer avec des radicaux d'indice 4,5, ... etc. La méthode reste la même mais n n'est plus le produit de 4,5 ... nombres naturels consécutifs. Ce serait trop beau ! Arrêtons donc ici pour ne pas risquer l'indigestion pour excès de radicaux !

Jolie formule

R. Gerardy

Une bien jolie formule, toute simple...

Les nombres premiers, ces entiers naturels ayant exactement deux diviseurs, ont depuis des siècles suscité un vif intérêt chez les mathématiciens, professionnels ou amateurs.

Chacun aujourd'hui y est confronté, pas souvent en étant conscient de la chose d'ailleurs : la sécurité informatique et le secteur bancaire y ont recours en permanence.

La recherche des nombres premiers, depuis le simple crible du mathématicien grec Eratosthène (- 276 ; -194), se poursuit encore à l'heure actuelle par les tests de primalité qui permettent de dire avec certitude si tel nombre est premier ou non, d'une part, et par la décomposition en facteurs premiers, d'autre part.

Mais il est une formule toute simple, émise par un grand écrivain français, membre de l'Académie française et auteur de talent :

Marcel Pagnol (1895 - 1974)

plus connu, heureusement pour lui, par ses oeuvres littéraires : Topaze, Le Château de ma mère, La gloire de mon père, Marius, Manon des sources,... et beaucoup d'autres dont le théâtre et le cinéma ont permis, à chacun, de découvrir cet écrivain exceptionnel.

Marcel Pagnol, ancien professeur d'anglais, s'intéressait aussi à la mécanique et aux mathématiques.

Voici ce qu'il écrit à ce sujet :

« Je crois avoir trouvé une formule qui permet de fabriquer des nombres premiers : c'est la petite équation suivante :

Si x et $x+2$ sont deux nombres impairs consécutifs (comme 5 et 7 ou 15 et 17) alors $x + (x+2) + x(x+2) =$ premier.

Ainsi : $5 + 7 + 5 \times 7 = 47 =$ premier.

C'est-à-dire que la somme de deux impairs consécutifs et de leur produit est un premier.

Nous avons donc une formule qui nous permet de construire des nombres premiers, et un moyen très simple de confirmer l'exactitude de mes calculs.

$15 + 17 + 15 \times 17 = 287 =$ premier. »

Que penses-tu de cette dernière égalité ?

Tu découvriras très vite que $287 = 7 \times 41$ alors... que conclure ?

Effectue une petite recherche au départ de cette formule - trop belle pour être juste !

Voici quelques éléments de réponse, à toi de poursuivre.

Sont effectivement premiers : 7 ; 23 ; 47 ; 79 ; 167 ; 223 ;...

Par contre : 119 ; 287 ; 527 ; 623 ; ... ne le sont pas.

Et puis, il manque : 2 ; 3 ; 5 ; 11 ; 13 ; 17 ; 19 ; 29 ; 31 ;...

Quand tu liras les beaux textes de Marcel Pagnol, tu penseras à cette formule en regrettant peut-être qu'elle ne soit pas exacte.

Bibliographie

Les ouvrages traitant des nombres premiers ne sont pas de lecture facile ; pourtant tu pourras découvrir avec ravissement le beau livre suivant, même si certains chapitres te dépassent un peu : Jean-Paul Delahaye - Merveilleux nombres premiers - Editions Belin Pour la Science 2000

Math-quiz

Claude Villers

Annonce : Comme le temps passe vite!! Voici déjà la quatrième édition de notre concours Math-Quiz.

Comme ce fut le cas lors des trois premières, nous vous proposons de relever un challenge et de prouver votre sagacité.

De quoi s'agit-il ? Tout simplement de fournir le plus de réponses correctes aux questions qui vous sont proposées dans chacune des deux étapes de ce concours.

Cette « épreuve » se déroulera, en effet, en deux étapes qui feront l'objet de classements séparés. Il vous est donc tout à fait loisible de ne participer seulement qu'à l'une ou l'autre de ces étapes. Néanmoins, un classement général sera établi à l'issue de la deuxième étape. Chaque étape ainsi que le classement général nous permettront de vous placer au tableau d'honneur et d'attribuer des récompenses aux meilleurs envois.

Participez à ce jeu-concours, individuellement ou en groupe, et invitez vos condisciples à y prendre part. Parlez-en éventuellement votre professeur qui, sans vous donner les réponses, pourra vous suggérer des pistes de recherches.

Le principe : A chaque étape, 10 questions vous sont soumises. Chacune d'elles possède un coefficient de difficulté traduit par l'indication du nombre de points que vous engrangez si votre réponse est correcte. Mais rassurez-vous, la grande majorité des questions font surtout appel au bon sens et ne nécessitent qu'un peu d'attention, de recherche et de débrouillardise. Ce sont donc vos facultés d'investigations qui vont être sollicitées. A vous donc de faire la preuve de votre esprit de participation et de vos capacités à vous organiser.

Vous répondez à autant de questions que vous le souhaitez. 78 points sont mis en jeu lors de la première étape et 130 points le seront lors de la deuxième (de quoi rattraper une faiblesse éventuelle).

Comment répondre ? Vous nous envoyez vos réponses sur une fiche cartonnée de format $10cm \times 15cm$ à l'adresse (attention : nouvelle adresse du local SBPMef) SBPMef - Math-Quiz , Rue du Onze Novembre 24 à B-7000 Mons

Sur une face de cette carte vous indiquez lisiblement :

- d'une part : vos nom et prénom, votre adresse complète, le nom exact et la localisation de votre école ainsi que le niveau de votre classe en 2006-2007 ;

- d'autre part : vos réponses à cette première étape sous la forme d'une tableau comme celui qui suit :

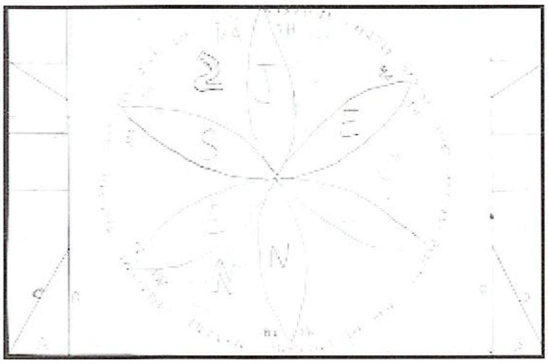
Question	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Réponse										

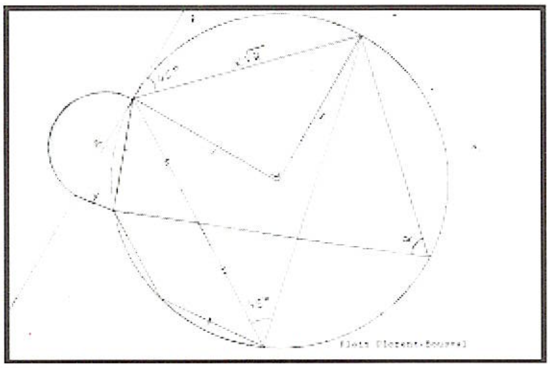
Sur l'autre face, vous proposez éventuellement votre projet pour le concours annexe.

Concours annexe (facultatif) : Nous vous invitons à faire la preuve de vos talents dans le domaine de l'illustration. Votre imagination et votre créativité sont mises au défi pour le choix du sujet. Une seule contrainte : le thème de votre dessin est quelconque mais doit cependant illustrer les mathématiques. A vous de faire preuve d'originalité. Les meilleures propositions seront mises à l'honneur en étant reproduites dans la revue et même en figurant sur la page de couverture.

NB : Evitez les dessins réalisés au crayon. Faites en sorte que les tracés soient bien contrastés.

Voici deux réalisations proposées au concours 2005-2006.





Cette année nous avons reçu l'appui appréciable de la firme DEXXON Belgium, distributrice notamment des calculatrices scientifiques et graphiques CASIO. Dexxon Belgium récompensera les meilleurs participants de ce concours en leur offrant des calculatrices scientifiques FX-Junior et FX-92 Collège 2D

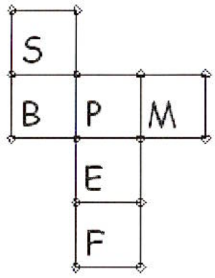
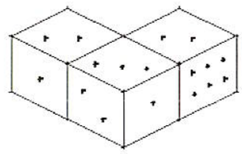
CASIO

Et maintenant les 10 questions de la première étape.

Attention : Vos réponses à cette première étape doivent nous être impérativement parvenues au plus tard le lundi 8 janvier 2007.

Vous pouvez grouper vos réponses et celles de vos condisciples dans un même enveloppe.

Notez que chaque étoile y aura cette fois une valeur de 3 points. 78 points sont donc en jeu. (Il restera 130 points en jeu lors de la deuxième étape).

1	*	Si vous reformez le cube dont voici le développement, quelle est la lettre figurant sur la face opposée à celle de S ? 
2	*	Un berger possède 17 moutons. Tous meurent sauf 9. Combien lui en reste-t-il ?
3	*	Mathieu a obtenu cinq notes dont 9 ; 6 ; 7 et 6. Sa moyenne des cinq notes est 7. Quelle est la valeur de la note manquante dans la liste ?
4	**	Pour faire un bon café il faut mélanger, paraît-il, 1 mesure de chicorée avec 3 mesures de café. Dans la mouture ainsi préparée, quel est le pourcentage de chicorée ?
5	**	Que vaut la somme des points de toutes les faces non visibles sur le dessin de ces 3 dès normaux ? 
6	***	Un petit carré a pour sommets, les milieux des côtés d'un grand carré. Vous choisissez alors, au hasard, un point du grand carré.Quel est le nombre décimal qui exprime le mieux la chance de se trouver en même temps dans le petit carré ?
7	***	La longueur et la largeur d'un terrain rectangulaire sont augmentées de 10% de leurs valeurs. De combien de pourcents, son aire est-elle augmentée ?
8	****	Si a vaut 50 000 et si $\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$ alors que vaut b ?
9	****	Les faces d'une brique ordinaire ont pour aire $48cm^2$, $72cm^2$ et $96cm^2$. . Quel est, en cm^3, le volume de cette brique ?
10	*****	Quel est le dernier chiffre de $1^{2006} + 3^{2006} + 4^{2006}$?

Olympiades Mathématiques Belges

Recueil de questions

Société Belge des Professeurs
de Mathématiques d'expression française

6 2003-2006

Vient de sortir de presse :

La brochure « Olympiades Mathématiques Belges » Tome 6

Ce 6ème recueil rassemble les questions des Olympiades Mathématiques Belges qui se sont déroulées de 2003 à 2006. Il vient de sortir de presse fin août.
L'objectif poursuivi par la SBPMef est de participer à l'apprentissage et à la formation des élèves de l'enseignement secondaire dans le domaine des mathématiques.

Nous vous invitons donc à adopter ce livre à la fois comme texte de référence pour une **préparation à l'Olympiade** elle-même et également comme **recueil d'exercices non triviaux d'application de la matière enseignée**. Il s'agit là, à l'évidence, d'une source importante de questions ainsi que de sujets de recherche et de réflexions.

Le coût de cette brochure est extrêmement modique. Malgré l'évolution à la hausse des prix dans le domaine de l'impression, le montant demandé pour cette nouvelle brochure est le même que pour la précédente. C'est là une volonté des responsables de l'association de proposer cette brochure à ce coût.

Coûts:
Recueil n°6 seul: 6€ : frais d'expédition en Belgique : 1.80€
Recueil n°5 seul: 6€ : frais d'expédition en Belgique : 1.80€
Recueils 5 et 6 ensemble: 10€ : frais d'expédition en Belgique : 3.50€
Toute commande de plus de 10 exemplaires bénéficiera d'une réduction de 10%
Paiement par virement au compte 000-0728014-29 de SBPMef à Mons.
Il n'y a aucun frais si vous enlevez la commande.
Attention: La SBPMef change de local et s'installe en novembre au rez de chaussée du bâtiment situé au n°24 de la rue du Onze Novembre à 7000 Mons.

Math-Jeunes Junior
Périodique trimestriel
15, rue de la Halle - 7000 Mons
Bureau de dépôt 7000 Mons 1

Responsable de l'édition : A. PATERNOTTRE
Rue du Moulin, 78 - 7300 Boussu
Bureau de dépôt : Mons 1

Autorisation de fermeture
Sluitings toelating

7000 Mons 1
5/156

Belgique - België
P.P.
7000 Mons 1
5/124

Périodique - Peut être ouvert pour contrôle postal

Réservé à la poste

Inconnu
Refusé
Décédé
Adresse insuffisante
N'habite plus à l'adresse indiquée