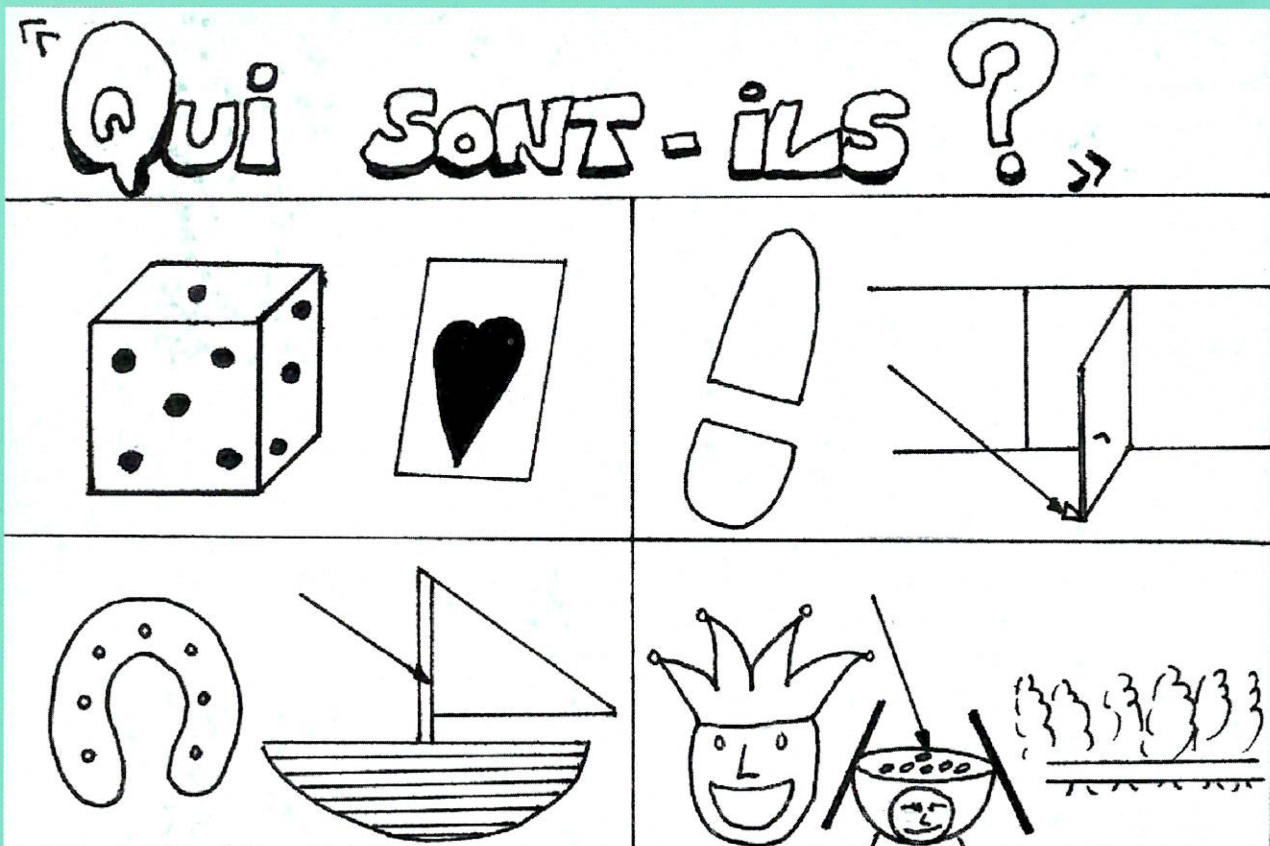
MJ Junior !



Radelet Charline-Walcourt

28e année - N° 116J
Février 2007

Math-Jeunes et Math-Jeunes Junior

Revues trimestrielles publiées par la Société Belge des Professeurs de Mathématique d'expression française

Secrétariat : M-C Carruana, SBPMef, 24, rue du Onze Novembre, 7000 Mons.
Tél/fax : 065.31.91.80
GSM : 0473973808 e-mail : sbpm@sbpm.be, URL : http://www.sbpm.be.

Tarifs

Abonnements groupés (au moins 5)		
	Une des deux revues	Les **deux** revues
Belgique	4 €	8 €

Abonnements individuels				
	Une des deux revues		Les **deux** revues	
Belgique	6 €		12 €	
France (abonnement(s) pris par l'intermédiaire de l'APMEP)	8€		16€	
	✉	✉⚡	✉	✉⚡
Europe	18 €	20 €	24 €	26 €
Autres pays	19 €	22 €	25 €	28 €

Légende : « prior »=✉⚡, « non prior »=✉.

Trois numéros de chaque revue sont publiés annuellement. Pour connaître la liste des anciens numéros encore disponibles et leur prix selon votre localisation, adressez-vous au secrétariat.
Les abonnements destinés aux élèves de l'enseignement secondaire sont de préférence pris par l'intermédiaire d'un professeur. Effectuez vos paiements :

- ☞ pour la Belgique : par virement au Compte n°000-0728014-29 de *S.B.P.M.e.f.*, rue du Onze Novembre, 24, 7000 Mons
- ☞ pour la France : par virement au Compte CCP Lille 10 036 48 S
- ☞ pour l'étranger (sauf la France) : par virement international au Compte n°IBAN: BE 26 0000 7280 1429 BIC: BPOTBEB1 au nom de la *SBPMef*, rue du Onze Novembre, 24, B 7000 Mons, Belgique. Les personnes résidant à l'étranger qui ne peuvent faire un virement à ce compte sont invitées à envoyer un mandat postal international. Tout chèque bancaire non encaissable en Belgique devra être majoré de 12,50 € pour frais d'encaissement.

Éditeurs responsables et rédacteurs en chef :

– pour *Math-Jeunes* : G. Noël, Rue de la Culée 86, 6927 Resteigne

– pour *Math-Jeunes Junior* : A. Paternottre, Rue du Moulin 78, 7300 Boussu

N°116J Vingt-huitième année 2007

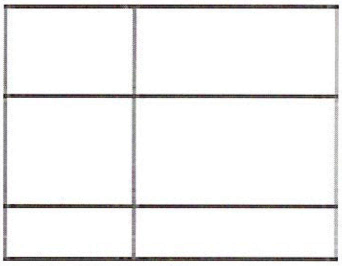
Math-Jeunes *junior*

Sommaire

Combien de rectangles ?

A. Paternotte et E. Debaisieux

Si tu es un fidèle de l'Olympiade Mathématique Belge, tu as peut-être été confronté à un problème tel que celui-ci :



« *Combien de rectangles peut-on dénombrer dans la figure ci-contre ?* »
Le premier réflexe est de répondre 6 parce qu'on voit d'abord les 6 rectangles intérieurs au grand rectangle. Peut-être répondra-t-on 7 si on n'oublie pas le grand rectangle. Mais en regardant de plus près, on découvre qu'il y en a bien plus.

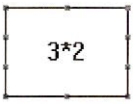
Comment procéder pour les découvrir tous et n'en oublier aucun ? Tente de répondre à cette question avant de poursuivre la lecture de cet article.

Tout d'abord entendons-nous sur quelques termes :

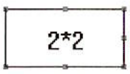
- La figure ci-dessus est une grille de genre 3×2 car elle comporte 3 lignes (horizontales) et 2 colonnes (verticales). Nous l'appellerons plus simplement « grille 3×2 ».
- Cette grille 3×2 inclut pas mal de *sous-grilles* ou *cellules*. Celles-ci sont de genres 3×2, 2×2, 1×2, 3×1, 2×1, 1×1.

Remarque qu'une grille 3×2 comporte 6 genres de cellules. Une grille 5×7, comportant 5 lignes et 7 colonnes, compterait 35 genres de cellules. Notre problème est donc de compter combien de cellules de chaque genre renferme une grille donnée et, bien sûr, d'en faire le total que nous noterons $R_{3\times2}$. Ce total sera la réponse à la question posée ci-dessus.

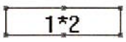
Effectuons ce calcul pour la grille 3×2. Pour cela décomposons-la en ses 6 genres de cellules :



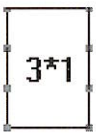
Le nombre de cellules de genre 3×2 dans la grille 3×2 est 1



Le nombre de cellules de genre 2×2 dans la grille 3×2 est 2

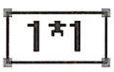


Le nombre de cellules de genre 1×2 dans la grille 3×2 est 3



Le nombre de cellules de genre 3×1 dans la grille 3×2 est 2

Le nombre de cellules de genre 2×1 dans la grille 3×2 est 4



Le nombre de cellules de genre 1×1 dans la grille 3×2 est 6

Total : 18

Que constates-tu ?

Les six résultats du comptage lus de bas en haut (6 , 4 , 2 , 3 , 2 , 1) sont les produits des dimensions de chacune des six sous-grilles lus de haut en bas (3×2, 2×2, 1×2, 3×1, 2×1, 1×1).

Dès lors

$$\begin{aligned}
R_{3\times 2} &= \underbrace{(3\times 2)+(2\times 2)+(1\times 2)}_{\downarrow} + \underbrace{(3\times 1)+(2\times 1)+(1\times 1)}_{\downarrow} \\
&= \qquad 2(3+2+1) \qquad + \qquad 1(3+2+1) \\
&= (1+2+3)(1+2) \\
&= \text{(somme des 3 premiers nombres naturels)} \times \text{(somme des deux premiers naturels)} \\
&= 18
\end{aligned}$$

Ainsi on obtiendrait également :

$R_{4\times 5} = (1+2+3+4) \times (1+2+3+4+5) = 150$

$R_{1\times 2} = 1 \times (1+2) = 3$

Et si on généralisait à une grille $p \times q$? (p et q sont deux nombres naturels non nuls)

$R_{p\times q} = [1+2+3+\cdots+(p-1)+p] \times [1+2+3+\cdots+(q-1)+q]$

Mais nous connaissons la formule donnant la somme des n premiers nombres naturels (voir une démonstration rapide à la fin de cet article) :

$$1+2+3+\cdots+(n-1)+n = \frac{1}{2}n(n+1)$$

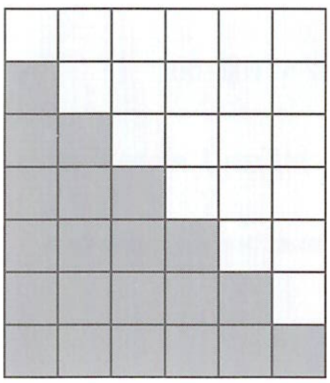
Dès lors $R_{p\times q} = \frac{1}{2}p(p+1) \times \frac{1}{2}q(q+1)$ ou encore finalement :

$$\boxed{R_{p\times q} = \frac{1}{4}pq(p+1)(q+1)}$$

Ainsi$R_{3\times 2} = \frac{1}{4} \times 3 \times 2 \times 4 \times 3 = 18$ et $R_{4\times 5} = \frac{1}{4} \times 4 \times 5 \times 5 \times 6 = 150$

Remarquons encore que, quels que soient les nombres naturels p et q, le produit $pq(p+1)(q+1)$ est toujours divisible par 4. Pourquoi ?

Observe le quadrillage coloré suivant et découvres-y que $1+2+3+4+5+6 = \dfrac{6\times 7}{2}$



A partir de ce cas particulier, tu peux aisément passer au cas général de la formule encadrée ci- dessus. Fastoche, ne trouves-tu pas ?

- En complément et en conformité avec ce qu'on vient de faire, on te propose la situation suivante :

* Observe :

$$1 + 2 + 1 = 4 = 2^2$$
$$1 + 2 + 3 + 2 + 1 = 9 = 3^2$$
$$1 + 2 + 3 + 4 + 3 + 2 + 1 = 16 = 4^2$$

* Continue à écrire des égalités analogues aux 3 précédentes et constituant leur suite logique.

* Démontre une de ces égalités en t'inspirant de la démonstration « sans parole » réalisée ci-avant et utilisant judicieusement des empilements de carrés.

* Démontre algébriquement que d'une façon générale, on a :

$$1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1) + n + (n-1) + \cdots + 3 + 2 + 1 = n^2$$

Rends-toi à la page 19 si tu ne parviens pas à t'en sortir, ce dont je doute !

* Si les démonstrations sans parole te plaisent, tu peux encore tenter d'établir que :

$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 5^2$$

c'est-à-dire que la somme des 5 premiers nombres impairs vaut le carré de 5 et en généralisant :

La somme des n premiers nombres impairs vaut n^2.

En formule : $$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) = n^2$$

Nous te souhaitons de fructueuses et amusantes (!) recherches.

Bienvenue 2007 !

Dire de 2007 qu'il est un millésime multiple de 1,3,9,223,669 et 2007 c'est un peu court. Voici une variation sur le thème de 2007 un peu plus insolite :

Un nombre naturel composé d'une enfilade de 2007 chiffres tous identiques est toujours multiple de 37.

Remarque d'abord que $\underbrace{aaaa\cdots aa}_{2007 \text{chiffres} a} = a \times \underbrace{1111\cdots 1111}_{2007 \text{chiffres} 1}$

Ensuite observe : $111 = 3 \times 37$

$111111 = 111 \times 10^3 + 111 = 111 \times (10^3 + 1) = 3 \times 37 \times 1001$

$111111111 = 111 \times 10^6 + 111 \times 10^3 + 111 = 111 \times (10^6 + 10^3 + 1) = 3 \times 37 \times 1001001$

etc...

On voit que si $1111\cdots 11$ est un nombre naturel comportant $3k (k \in N_0)$ chiffres 1 alors il est multiple de 37.

Il en va de même pour le nombre naturel $aaaa\cdots aa$ à condition que son nombre de chiffres a soit multiple de 3.

Comme 2007 est multiple de $3 \cdots$ conclus toi-même.

Bonne année 2007 !

Petits problèmes plaisants...

R. Gerardy

Une histoire de singes

Extrait du Traité d'arithmétique de Bhâskara, auteur indien du XII^e siècle, surnommé Atcharya (le savant) :

Des singes s'amusaient.
De la troupe bruyante,
Un huitième au carré gambadait dans les bois,
Douze criaient tous à la fois
Au haut de la colline verdoyante.
Combien d'êtres comptait la caste remuante ?

Eléments de réponse :

Tu peux traduire cet énoncé par une équation du deuxième degré.

Tu t'apercevras que deux solutions sont possibles :

Les nombres 48 et 16 répondent aux conditions.

A toi de développer complètement la solution.

Un autre problème du même auteur :

L'essaim d'abeilles

Vois cet essaim de mouches à miel.
De la moitié prends la racine ;
Dans un champ de jasmins, cette troupe butine,
Huit neuvièmes du tout voltigent dans le ciel.
Une abeille solitaire
Entend dans un lotus un frelon bourdonner :
Attiré par l'odeur pendant la nuit dernière,
Il s'était fait prisonnier.
Dis-moi : quel nombre atteint la troupe buissonnière ?

Ici, également, l'équation du deuxième degré te sera bien utile. Tu verras que parmi les deux réponses trouvées, une seule est acceptable : le nombre 72 répond aux conditions, tandis que la deuxième solution est évidemment à rejeter ! Développe complètement la solution (un peu plus difficile...).

Un problème bien différent, dû au mathématicien français Jacques Ozanam (1640 – 1717).

Trouver un nombre entier tel qu'en lui ajoutant 12 et 25 successivement, les deux sommes respectives soient des carrés parfaits.

Elément de réponse :

- si x est le nombre cherché, nous aurons donc :

$\triangleright x + 12 = y^2$ (1)
$\triangleright x + 25 = z^2$ (2)

Développe la solution afin d'obtenir la réponse.

Cela peut paraître compliqué, puisque tu as deux équations et trois inconnues ! En réalité, tout est fort simple.

Que faire avec les équations (1) et (2) ?

Pense ensuite aux produits remarquables et aux diviseurs d'un nombre premier. N'oublie pas que y et z sont également des nombres entiers.

Pourrais-tu résoudre les problèmes suivants ?

a. **Trouver un nombre entier qui soit égal à 9 fois le chiffre de ses unités.**

Ce nombre ne comprendra que 2 chiffres !

* * * * * * *

b. **Trouver un nombre de 2 chiffres qui soit égal à 7 fois la somme de ses chiffres.**

Ce problème a-t-il plusieurs solutions ?

Si oui, lesquelles ?

Le meuble de la SBPM

Claude Villers

La SBPMef, éditrice de votre revue préférée, a déménagé. Elle a quitté le n° 15 de la rue de la Halle à Mons, qu'elle occupait depuis de nombreuses années, pour aller s'installer au n° 24 de la rue du Onze Novembre toujours à Mons.
Au moment où vous lisez ce texte, le déménagement est terminé et tout est certainement rentré dans l'ordre.
Des bénévoles ont donc préparé et réalisé le transfert des documents et du mobilier dont notamment celui du meuble illustré sur la photographie.
Comme il s'agit d'un meuble « en kit » qui ne nécessite aucune fixation (tout tient ensemble par emboîtements), il a bien fallu le démonter totalement pour pouvoir le transporter.

Où est donc le problème ?

Personne n'avait noté la configuration de ce meuble avant sa mise en pièces. Et impossible, à l'époque, de trouver une éventuelle photo qui pouvait la révéler.

La loi des vexations fait qu'une telle photo fut retrouvée par après (cfr l'image).

D'après les éléments détachés, il était certain que ce meuble comportait 7 étages dont deux plus hauts que les cinq autres.

De plus, les étages d'une même sorte n'étaient pas discernables les uns des autres.

On a donc remonté le meuble selon l'inspiration du moment.

Quelle sont donc des questions que l'on peut se poser ?

▷ La nouvelle configuration générale du meuble est-elle nécessairement la même qu'avant le démontage ?
▷ Quelle est donc la probabilité qu'il en soit ainsi ?
▷ Etc...

Recherche !

Il est assez évident que la réponse à la première question est négative.

La notion de probabilité ne vous a certainement pas encore été enseignée.

Aussi nous la rencontrerons de manière fort intuitive. La rigueur viendra plus tard.

La probabilité demandée ici est le rapport entre le nombre de cas qui fournissent la même structure du meuble après remontage qu'avant le démontage et le nombre total de manières de remonter le meuble.

Il faut donc déterminer le nombre total de façons différentes de reconstituer le meuble.

Bien entendu, nous pouvons essayer de les écrire toutes en utilisant un codage qui peut simplifier le travail.

Utilisons la convention suivante : b représente un étage bas et h représente un étage haut.

On doit donc écrire tous les mots de 7 lettres comportant obligatoirement deux fois la lettre h et cinq fois la lettre b.

De cette manière, par exemple, $b\ b\ b\ b\ b\ h\ h$ représente clairement le meuble dont les deux étages hauts sont soit tout au dessus soit tout en bas du meuble selon la convention adoptée (et tout le temps respectée ensuite).

Allez-y. Essayez donc d'écrire toutes les manières différentes de coder les configurations possibles du meuble.

Bon travail !

Ceci apparaît vite assez fastidieux et présente en outre le risque d'un oubli ou d'une répétition de configuration.

Alors, que peut-on dire qui faciliterait le décompte ?

D'abord, qu'il est évident que lorsque les deux étages hauts (h) ont reçu une affectation alors les cinq étages bas (b) se situent automatiquement dans les emplacements vides.

Ainsi $* \ * \ h \ * \ * \ h \ *$ fournit la configuration $b \ b \ h \ b \ b \ h \ b$.

Il suffit donc de trouver de combien de façons différentes il est possible d'écrire deux fois le caractère h lorsqu'on dispose de 7 emplacements.

Pour l'emplacement du premier caractère h il y a 7 positions libres possibles.

Mais pour l'emplacement du deuxième caractère h il ne reste plus alors que 6 positions libres possibles.

Il semble donc que le nombre total de configurations ainsi construites soit 7×6 ou 42.

Il y a cependant un « détail » dont il faut absolument tenir compte.

C'est que les étages d'un même type ne sont pas discernables entre eux.

Par exemple, placer $h1$ tout en bas et $h2$ tout en haut ou placer $h2$ tout en bas et $h1$ tout en haut, cela donne la même configuration.

Il faut donc diviser 42 par 2.

Il y a donc 21 façons différentes de reconstituer le meuble, dans les conditions fixées bien entendu.

Une seule de celles-ci caractérise la configuration initiale.

La probabilité de retrouver la même configuration après remontage qu'avant démontage est de $\dfrac{1}{21}$ (certains disent « une chance sur 21 »)

Remarquons pour terminer que le résultat serait différent si des étages devenaient discernables (par la couleur de leurs portes par exemple).

Ainsi, si seuls les deux étages hauts étaient discernables entre eux alors le nombre de possibilités de les placer serait bien 42 et la probabilité demandée serait alors $\dfrac{1}{42}$.

Le même raisonnement que celui qui concerne les deux étages hauts peut être utilisé par ceux qui préfèrent s'intéresser aux étages bas.

Il suffit alors de calculer le nombre de manières différentes d'écrire cinq fois le caractère b lorsqu'on dispose de 7 emplacements.

Pour l'emplacement du premier caractère b il y a 7 positions libres possibles.

Pour l'emplacement du deuxième caractère b il ne reste plus alors que 6 positions libres possibles.

Pour l'emplacement du troisième caractère b, il reste ... etc ...

Il y a donc, semble-t-il, $7 \times 6 \times \times 5 \times 4 \times 3$ manières de placer les 5 étages bas.

Et comme précédemment, il faut tenir compte que ces étages bas ne sont pas discernables entre eux et donc, le fait de les permuter donne toujours la même structure.

Pour le premier il y a 5 places possibles, pour le deuxième, il reste 4 places possibles, etc...

Cela fait donc chaque fois $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$ permutations.

Le nombre de façons de reconstituer le meuble est donc :

$$\frac{7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3}{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = \frac{7 \times 6}{1 \times 2} = 21.$$

La probabilité cherchée est donc $\dfrac{1}{21}$.

On obtient bien le même résultat (heureusement) que précédemment.

Bien d'autres questions peuvent surgir. Discutez-en entre-vous ou avec votre professeur.

Note : *Vous rencontrerez peut-être un jour les deux genres de dénombrements rencontrés.*
Ils sont alors traités par une théorie mathématique appelée « analyse combinatoire »
Mais cela c'est pour plus tard.

Si vous êtes curieux

Le nombre de permutations des deux étages hauts est donné par 1×2.

Le nombre de permutations des cinq étages bas est donné par $1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5$.

Sachez déjà que ceci peut se généraliser.

Le nombre de **permutations** de n éléments est égal à $1 \times 2 \times 3 \times 4 \times \cdots \times (n-1) \times n$.

Cela se représente par le symbole $n!$ qui se lit « factorielle n ».

Le nombre total de manières de reconstituer le meuble de 7 étages dont 2 sont des étages hauts est donné par $\dfrac{7 \times 6}{1 \times 2}$.

Le nombre total de manières à reconstituer le meuble de 7 étages dont 5 sont des étages bas est donné par $\dfrac{7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5}$.

Sachez qu'il s'agit du nombre de façons de choisir 2 objets parmi 7 (ou de choisir 5 objets parmi 7).

Ces façons s'appellent des combinaisons.

Sudomath 1

Les 9 lettres différentes qui figurent dans les grilles permettent, lorsqu' elles sont replacées dans le bon ordre, de former un mot connu ayant trait aux mathématiques.

Le mot-mystère du jour répond à la définition « *Ils sont indéformables* ».

Règle du jeu :

Vous devez compléter les grilles de manière que chaque ligne horizontale, chaque colonne verticale et chaque carré 3×3 doublement encadrés comportent toutes les lettres du mot mystère.

Niveau de difficulté : 1

N		A				S		T
	R	T		A		N	G	
	E			S			I	
R								G
		E	G		N	T		
L								S
	N			R			L	
	L	R		T		A	S	
E		G				I		R

Niveau de difficulté : 3

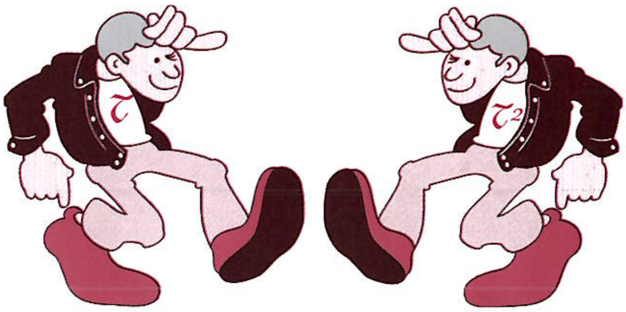
		R		L	T			A
	T					R	L	
		L		E	N		I	
G		S	A					
R								S
					S	A		R
	R		T	G		E		
	E	G					A	
L			E	N		S		

Vous trouverez les solutions de ces deux sudomath à la page 19 de ce Math-Jeunes Junior *116*

Les frères Hick 19

Bernard Honclaire

Agence de détectives privés Les frères Hick Recherches en tous genres



Ami lecteur,

$\mathcal{T}^2$ nous fera part de ses réflexions sur les fiches 18 et 32 des jeux trouvés sur le site `conifere(http://www.conifere.be/)`.

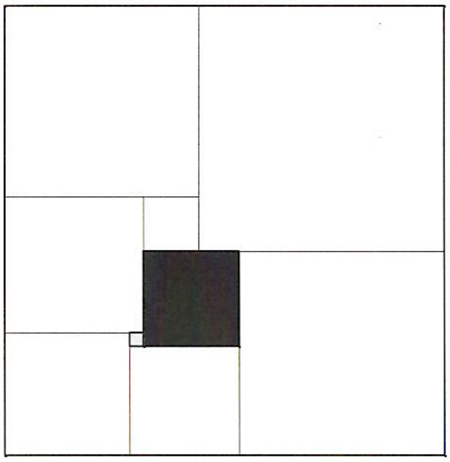
$\mathcal{T}$ y ajoutera, comme d'habitude, des compléments qu'il juge indispensables !

Bon courage et bon amusement.

Bernard Honclaire

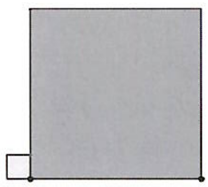
Pour rappel le contenu de la fiche 18

Le trait noir est le bord d'un rectangle formé de neuf carrés assemblés.
On te donne les mesures des côtés de deux carrés :
Pour le carré noir : 7cm.
Pour le carré gris : 1cm.
Quels sont le périmètre et l'aire du grand rectangle noir ?
Sur papier quadrillé, représente le puzzle qui t'est donné (neuf carrés assemblés en un rectangle).
Essaie ensuite de construire une situation analogue en conservant le petit carré gris et en modifiant la dimension du carré noir.
Que se passe-t-il ?

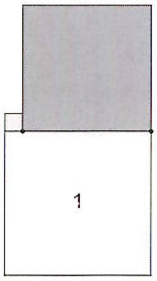


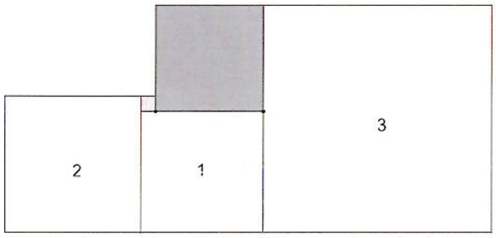
$\mathcal{T}^2$ (enthousiaste) - « ***Je me suis tout d'abord posé la question de savoir comment construire cette figure et pour cela j'ai utilisé Cabri*** *(hick1901.fig fichier Cabri)*. ***Je te détaille par la suite l'ordre dans lequel j'ai tracé les différents carrés*** »

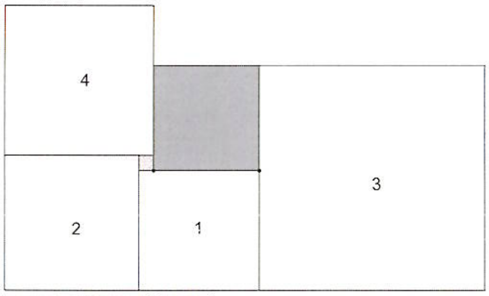
J'ai évidemment commencé par les deux carrés dont on donne les mesures ... (il jette un regard vers son frère) ... ***Comme je pensais que ces dimensions étaient données au hasard, je me suis contenté d'en faire un petit et un grand ...*** (autre regard) ... ***Attention, je me suis arrangé pour que l'on puisse modifier les côtes des deux carrés de départ !....***



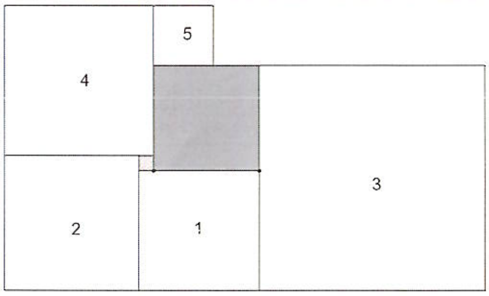
Je trace ensuite le carré 1
...
puis ...
j'ai le choix entre le 2 et le 3
...



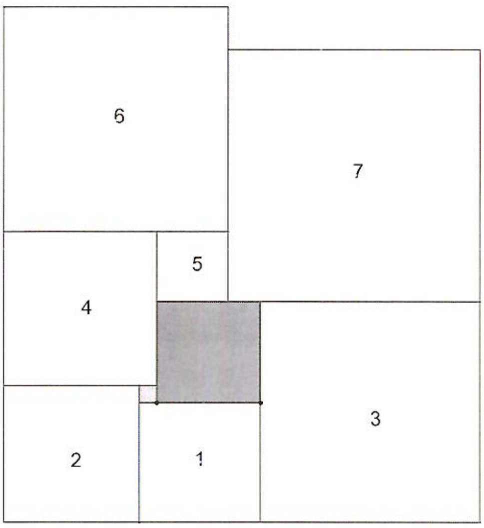


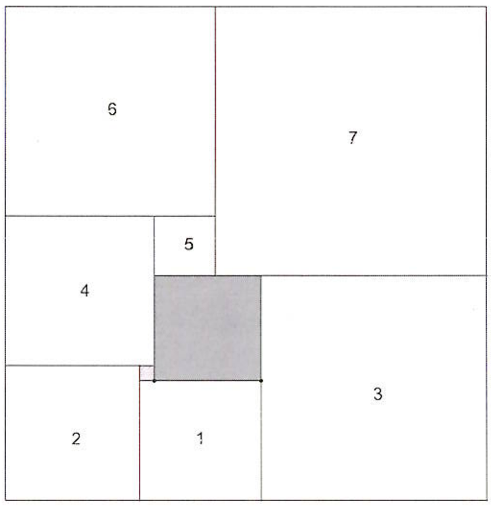


je construis ensuite le carré 4 ...
... puis le 5



... et je termine indifféremment par le 6 ou le 7 ...
et comme tu peux voir le grand rectangle ne se forme pas ... je dois modifier les dimensions des carrés de départ





J'en conclus que les dimensions 1cm et 7cm sont sans doute importantes ... (en lui-même) « et je suis sûr qu'il va ajouter ... »

$\mathcal{T}$ (jubilant) - « ... évidemment ! ... Je suis toutefois satisfait de la façon dont tu as abordé ce problème ! Si tu avais réfléchi sur les dimensions des différents carrés avant de te lancer dans la construction, tu aurais compris l'importance des données du problème ! Regarde ce tableau

Petit carré	1cm
Grand carré	7cm
Carré 1	8cm
Carré 2	9cm
Carré 3	15cm
Carré 4	10cm
Carré 5	4cm
Carré 6	14cm
Carré 7	18cm
Segment 2- 4 -6	33cm
Segment 3 -7	33cm

Tu constates en calculant que le grand rectangle se forme bien avec les dimensions données ! »

$\mathcal{T}^2$ (intéressé) - « ***Et pourquoi pas avec d'autres dimensions ? ...*** »

$\mathcal{T}$ (ajoutant, l'air distrait) - « ***Tu peux très bien répondre à cette question !*** »

$\mathcal{T}^2$ (à peine surpris) - « ***... Je pense qu'on pourrait essayer de garder un écart de 6cm entre les deux dimensions ...! Voyons ce que cela donne ...!***

Petit carré	3cm
Grand carré	9cm
Carré 1	12cm
Carré 2	15cm
Carré 3	21cm
Carré 4	18cm
Carré 5	12cm
Carré 6	30cm
Carré 7	18cm
Segment 2- 4 -6	63cm
Segment 3 -7	39cm

Manifestement, le grand rectangle ne se formera pas ...! »

$\mathcal{T}$ (impatient) - « ***Et si tu calculais la dimension du grand carré sachant que tu choisis 3cm pour le petit !*** »

$\mathcal{T}^2$ (souriant)- « ***Ai-je le droit de côtoyer des inconnues ?***

Petit carré	3	
Grand carré	x	
Carré 1	$x+3$	
Carré 2	$x+6$	$(x+3)+3$
Carré 3	$2x+3$	$(x+3)+x$
Carré 4	$x+9$	$(x+6)+3$
Carré 5	12	$(x+6)+(x+9)-(2x+3)$
Carré 6	$x+21$	$(x+9)+12$
Carré 7	$3x-9$	$(x+6)+(x+3)+(2x+3)-(x+21)$
Segment 2- 4 -6	$3x+36$	$(x+6)+(x+9)+(x+21)$
Segment 3 -7	$5x-6$	$(2x+3)+(3x-9)$

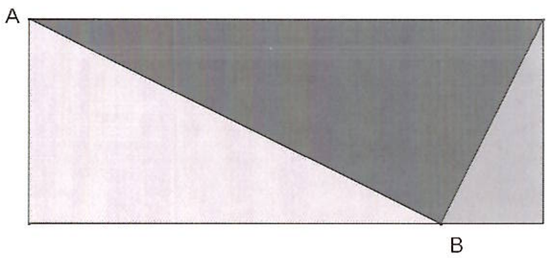
... Il faut donc que $3x+36=5x-6$ ... je ne connais plus très bien la technique ... mais si je réfléchis ... c'est aussi ... $3x+36=3x+2x-6$ ... et donc il faut ... $36=2x-6$ ... et c'est facile, $2x$ doit valoir 42 et $x\cdots$ 21 ...! C'est 7 fois la dimension du petit carré ...! »

$\mathcal{T}$ (magistral) - « *Pas mal! Généralisons!* »

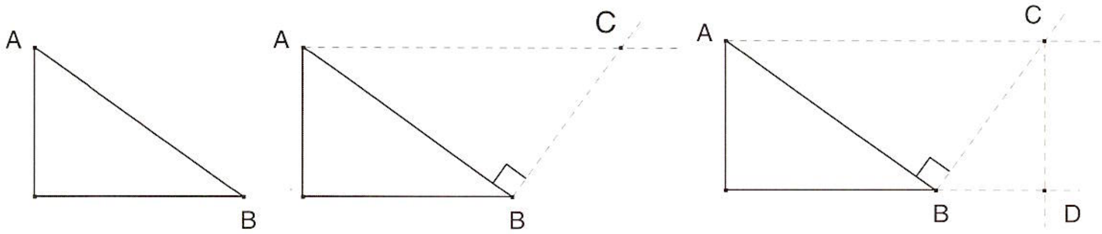
Petit carré	a	
Grand carré	b	
Carré 1	$a+b$	
Carré 2	$2a+b$	
Carré 3	$a+2b$	
Carré 4	$3a+b$	
Carré 5	$4a$	$5a+2b-(a+2b)$
Carré 6	$7a+b$	
Carré 7	$3b-3a$	$4a+4b-(7a+b)$
Segment 2- 4 -6	$12a+3b$	
Segment 3 -7	$5b-2a$	

$\mathcal{T}^2$ - « *Laisse-moi continuer ... il faut donc que $12a+3b=5b-2a$ ... c'est aussi ... $12a+3b=3b+2b-2a$... et donc il faut ... $12a=2b-2a$ et par conséquent... $2b$ doit valoir $14a$ ... plus simplement ... b doit valoir $7a$! ... Pour la fiche 32, je dois t' avouer que j'ai peu de choses à dire! ...*

Pour rappel, le contenu de la **fiche 32** :
Un rectangle de 10 cm sur 4 cm a été obtenu en assemblant trois triangles rectangles.
Quelles sont les aires des trois triangles ?



J'ai, comme d'habitude, voulu refaire la figure avec Cabri! J'ai voulu commencer par le rectangle ... mais je ne voyais pas très bien comment construire le point B! ... Alors je suis parti du premier triangle en laissant les points A et B mobiles ... et là ... surprise ... je n'ai plus eu d'autre choix ...! La figure est fixée dès le choix du premier triangle! ... Regarde ... » (hick1902.fig fichier Cabri)



$\mathcal{T}$ (satisfait) - « *Cette suite de constructions se passe de commentaire!* »

$\mathcal{T}^2$ - « *Mais pour la suite ... même si j'ai l'impression que les trois triangles se ressemblent, je ne suis pas capable de calculer les aires ...* »

$\mathcal{T}$ (interrompant son frère) - « *Il te sera très facile, la prochaine fois, de m'expliquer pourquoi ces trois triangles ont les mêmes angles. Et ensuite, tu prendras deux des triangles semblables et tu te poseras la question suivante : comment passer des longueurs de l'un aux longueurs de l'autre? Ton essai de partir du rectangle était très logique! Tu te replongeras sur le sujet ... Pour t'aider, je te demande de réfléchir aux triangles inscrits dans un demi-cercle!* »

$\mathcal{T}^2$ (agacé)- « *Tu ne m'as pas laissé le temps d'achever! ... Depuis que tu m'as parlé de Pythagore (voir Hick 14), quand je vois des triangles rectangles, je pense à lui! Mais encore une fois, je bloque ... dans chacun des trois triangles rectangles, je ne connais jamais qu'une seule longueur ... il en manque chaque fois une ...* (soudain frappé par l'inspiration, il ajoute) *... mais ... si j'utilise une lettre pour un deuxième côté ... Qu'est-ce que cela va me donner ...?* »

$\mathcal{T}$ (amusé) - « *D'habitude, c'est moi qui pose les questions!* »

$\mathcal{T}^2$ (déjà plongé dans ses réflexions)- « *Attends ...! Je calcule...* »

Ami lecteur, peux-tu aider $\mathcal{T}^2$ à répondre à ces questions?

Les fichiers Cabri correspondants aux activités de cet article sont disponibles sur le site `http://www.sbpm.be/`

Bon courage, bon amusement et à bientôt!

à suivre

Humour

Convenons que : $connaissance = puissance$ et $temps = argent$

Au cours de physique, on t'enseigne(ra) que : $puissance = \dfrac{travail}{temps}$

Dès lors, si tu tiens compte des deux conventions précédentes, tu as aussi :

$connaissance = \dfrac{travail}{argent}$ et finalement $argent = \dfrac{travail}{connaissance}$

Ainsi donc pour un travail donné, moins tu en connais et plus tu gagnes d'argent!!!

(*) Extrait de la très sérieuse revue « Mathématique et Pédagogie » éditée par la SBPMef (n°131-2001). Eh oui, les maths peuvent être drôles ... surtout quand on leur fait dire n'importe quoi!

Avancer, tourner (2)

Y. Noël-Roch

1. Rappel

Dans *Math-Jeunes Junior* 115, nous t'invitions à dessiner des chemins sur papier quadrillé. En calculant les déplacements effectués horizontalement et verticalement par applications successives du processus

(Av a ; Dr ; Av b ; Dr ; Av c ; Dr) donné en abrégé par le triplet $(a; b; c)$

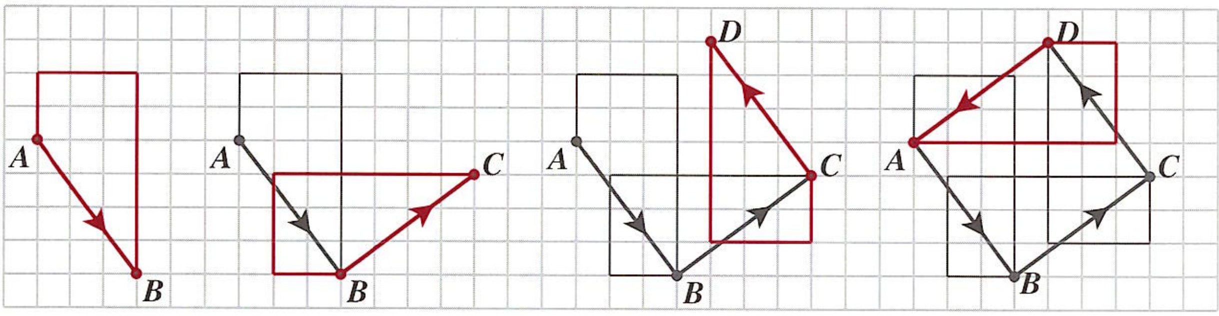
nous avons démontré que **tous les triplets de nombres** ramènent la tortue au point de départ au bout de quatre exécutions d'un même triplet. Nous allons maintenant analyser ce phénomène sous un angle géométrique, suivant la piste suggérée par les figures du paragraphe 4.2 de l'article précédent. Nous ne nous intéresserons pas seulement aux **positions** de la tortue mais aussi aux **caps** qu'elle prend.

2. Les triplets

2.1. Répétition du triplet $(2; 3; 6)$

L'idée essentielle est « d'oublier les détails du triplet » appliqué pour fixer l'attention sur

- le déplacement et le changement de cap de la tortue résultant de **l'exécution d'un triplet** (symbolisé par une flèche dans les dessins suivants).
- le déplacement global et le changement de cap global résultant de **l'exécution d'un enchaînement de triplets**.



Première image : départ de A, cap au Nord, arrivée en B et cap à l'Ouest
Deuxième image : enchaînement avec départ de B, cap à l'Ouest, arrivée en C et cap au Sud.
Troisième image : enchaînement avec départ en C, cap au Sud, arrivée en D et cap à l'Est.
Quatrième image : enchaînement avec départ en D, cap à l'Est, arrivée en A et cap au Nord.

En fin de quatrième exécution de $(2; 3; 6)$, la tortue occupe **la position initiale, avec le cap initial**. Nous avons donc retrouvé géométriquement le fait que la tortue revient au point de départ et de plus, nous savons que si elle continue à se promener éternellement en exécutant toujours le même triplet, elle parcourt continuellement le même circuit !

2.2. Répétition d'un triplet $(a; b; c)$

Cette fois, a, b et c sont des naturels non nuls inconnus. Comme dans le cas particulier précédent

- l'exécution complète d'un triplet peut se « résumer » en le parcours d'une certaine distance dans une certaine direction.
- comme l'exécution complète d'un triplet provoque successivement trois quarts de tour à droite (ce qui équivaut à un quart de tour à gauche !), le cap de la tortue après tout triplet est perpendiculaire au cap qu'elle avait au départ du triplet.
- lorsqu'on enchaîne deux triplets tout se passe donc comme si on parcourait un segment $[AB]$, qu'on tournait d'un quart de tour à gauche et qu'on parcourait alors un segment $[BC]$ de même longueur que $[AB]$.
- En enchaînant quatre triplets, on obtient nécessairement les sommets d'un carré. De plus, à son retour en A, la tortue a tourné de 12 quarts de tours à droite (3 quarts de tour dans chacune des 4 exécutions du triplet. Elle a donc repris son cap initial.

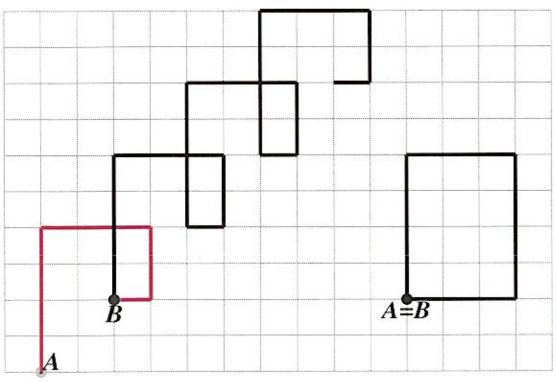
> Une tortue distraite (mais attentive à exécuter continuellement le même triplet !) se promenera donc éternellement sans sortir du premier circuit qu'elle a tracé en exécutant le triplet les quatre premières fois.

3. Les quadruplets.

Sur papier quadrillé, exécute

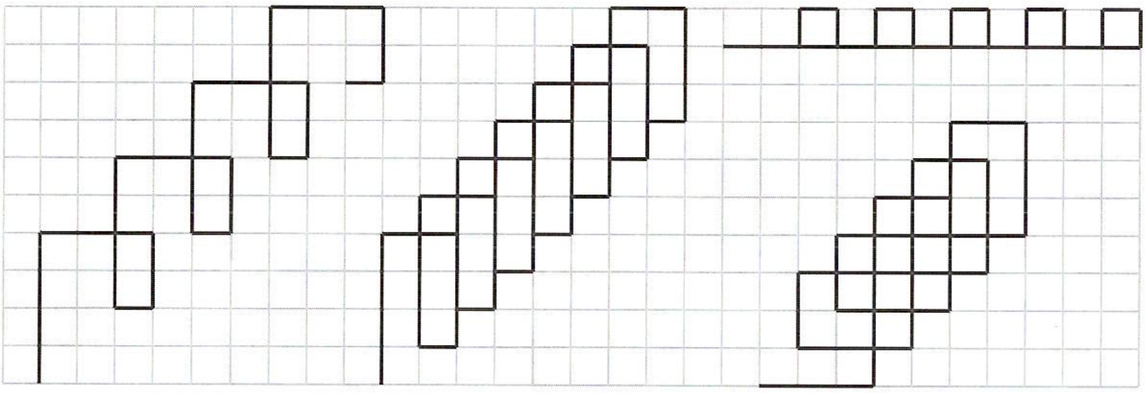
- le quadruplet $(4; 3; 2; 1)$ plusieurs fois successivement ;
- le quadruplet $(4; 3; 4; 3)$ plusieurs fois cuccessivement.

Tu constates que les situations sont très différentes :



Dans les deux cas, la tortue laisse une trace de couleur lors de la première exécution du quadruplet qui l'amène de A en B ; sa trace est ensuite noire pour toutes les exécutions suivantes ... Il ne reste aucune trace de couleur dans le dessin de droite : la trace de couleur résultant de la première exécution de $(4; 3; 4; 3)$ a été surchargée en noir lors de la deuxième exécution ! À gauche, la tortue a exécuté quatre fois le quadruplet $(4; 3; 2; 1)$. À droite, elle a exécuté au moins deux fois le quadruplet $(4; 3; 4; 3)$.

Page suivante, tu trouveras cinq figures définies par des quadruplets de naturels non nuls. À toi de les identidier. Au départ la tortue est toujours orientée cap au Nord. Elle a toujours exécuté des quarts de tour à droite. En fonction de la place disponible, nous avons fait varier le nombre de répétitions. La trace de la tortue est coloriée à la première exécution du quadruplet ... mais n'oublie pas que ce premier tracé peut avoir été surchargé lors d'autre(s) exécution(s).



Dans les dessins obtenus jusqu'ici, la tortue parcourt parfois **un circuit très simple** connu dès la première exécution. Par contre, elle peut aussi s'éloigner de plus en plus de son point de départ en dessinant **une frise**. Existe-t-il des quadruplets qui donnent des situations différentes ?

Pour analyser la situation, appliquons les mêmes notations que précédemment.

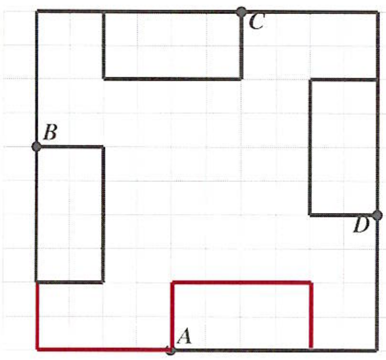
Quel que soit le quadruplet $(a; b; c; d)$, appelons A le point de départ et B le point d'arrivée lors de la première exécution du quadruplet.

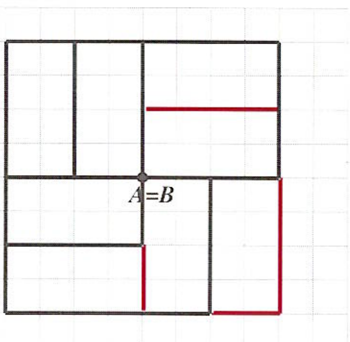
- Si $B = A$, la tortue se retrouve en A en ayant exécuté le quadruplet, donc en ayant tourné quatre fois d'un quart de tour à droite : elle a fait un tour complet et retrouve son cap initial. Lors d'une deuxième exécution du quadruplet, elle ne peut donc faire autre chose qu'effectuer exactement la même promenade, sur le même tracé. En répétant éternellement le quadruplet, la tortue « tourne en rond » sur un circuit rectangulaire !
- Si $B \neq A$, la tortue se trouve en B en ayant, comme ci-dessus, tourné d'un tour complet. Elle a donc retrouvé son cap initial et, à la deuxième exécution du quadruplet, elle dessine, avec la même orientation, le même chemin. On obtient donc deux traces analogues, la deuxième étant translatée de la première. En répétant éternellement le quadruplet, la tortue s'éloigne de plus en plus de son point de départ en redessinant toujours le même motif.

Une tortue qui exécute continuellement le même quadruplet peut soit parcourir un rectangle, soit s'éloigner à l'infini le long d'une frise.

4. Les quintuplets

Sans parole, les gros points et la couleur peuvent t'aider à décrypter les aventures des quintuplets $(2; 4; 2; 8; 6)$ et $(1; 2; 3; 2; 2)$. Teste d'autres cas particuliers. Essaie de généraliser.





Maths et magie

C. Cambier

Les mathématiques peuvent être très amusantes !

Au Moyen-Age, la nature était un grand mystère pour l'homme.

Beaucoup de phénomènes naturels tels que la pluie, le vent, le soleil restaient inexplicables. Enfin, presque ...

La seule explication donnée à ces manifestations naturelles était « la magie » !

C'est alors qu'apparurent les premiers sorciers, ancêtres des magiciens actuels. Ils connaissaient « les trucs » pour rivaliser ou lutter contre la nature.

Les premières traces écrites de récits relatant des tours réalisés par des magiciens datent de l'époque de l'Egypte ancienne, époque à laquelle les tours de cartes ou de passe-passe avec des billes, les tours de dés ou de pièces ont été inventés.

Prédiction : le nombre retourné

* Demande à une personne de choisir un nombre naturel de trois chiffres en respectant la consigne suivante :
  la différence entre le chiffre de gauche et celui de droite doit être, en valeur absolue, au moins égale à 2. Par exemple 436 convient car $|4-6| \geqslant 2$.
  Par contre 435 ne convient pas car est $|4-5|$ est < 2.
* Prenons 436 au départ. Retourne ce nombre : tu obtiens 634.
* Soustrais le plus petit du plus grand des deux nombres naturels précédents : $634 - 436 = 198$.
* Retourne ce dernier nombre : 891.
* Additionne les deux derniers nombres obtenus : $198 + 891 = 1089$.

Recommence avec un autre nombre de trois chiffres qui respecte la consigne et effectue la même séquence de calcul : le résultat final sera toujours 1089 !

En fait, tu peux t'en douter, la magie n'a rien à voir ici. Pourquoi ? Prenons un nombre de trois chiffres quelconques : $\overline{cdu}$ et supposons que $c > u+1$. La consigne est ainsi respectée.

♣ Opérons comme si on faisait « à la main » la soustraction écrite : $\overline{cdu} - \overline{udc}$:

$$\begin{array}{ccccl}
 & c & \overset{10}{d} & \overset{10}{u} & (u < c \text{ par hypothèse}) \\
- & \overset{1}{u} & \overset{1}{d} & c & (c > u+1 \text{ par hypothèse}) \\
\hline
 & c-u-1 & 10+d-(1+d)=9 & 10+u-c &
\end{array}$$

♣ Additionnons le résultat de la différence précédente à ce même résultat inversé :

$$\begin{array}{rccr} & {}^{1} & & \\ & c-u-1 & 9 & 10+u-c \\ + & 10+u-c & 9 & c-u-1 \\ \hline & 10 & 8 & 9 \end{array}$$

J'espère que cette manipulation magique t'aura intéressé. Sache que le même processus peut s'appliquer à un nombre de deux chiffres $\overline{du}(d \neq u)$. La somme obtenue est alors toujours 99.

Encore une petite remarque : partons du nombre naturel 21.

Appliquons le processus :

$21 - 12 = 9$. Il faut lire 09 de sorte que $09 + 90 = 99$.

Si ce genre de « calcul magique » t'intéresse, voici quelques sites internet que j'ai sélectionnés pour toi :

→ `http://perso.orange.fr/therese.eveilleau/`

Ce site est très amusant et très attractif. Tu y trouveras des tours de magie, des jeux (sudokus, puzzles magiques...), un peu d'histoire, des illusions, un peu de théorie et des trucs pour résoudre certains exercices.

Ce site t'explique toujours les tours, les illusions...

→ `http://www.jlsigrist.com/`

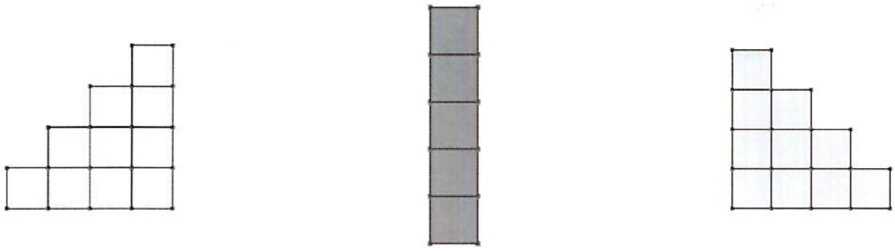
Ce site contient également des tours de magie mais ne les explique pas tous. Je te conseille quand même d'aller y jeter un oeil surtout si tu t'intéresses aux mystères de la vie quotidienne, la météo par exemple.

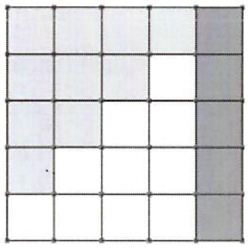
→ `http//xavier.hubaut.info/coursmath/vie/magie.htm`

Ce site ne présente que des tours de magie. Tu pourras les reproduire devant tes amis, ta famille, à l'école. Ils sont toujours expliqués et prouvés.

Suite de l'article « Combien de rectanges ? »

$$1+2+3+4 \qquad + \qquad 5 \qquad + \qquad 4+3+2+1$$





Les 3 empilements ci-dessus peuvent être réunis en un seul

Démontrons la formule générale : $1+2+3+\cdots+(n-1)+n+(n-1)+\cdots+3+2+1$

$$= \frac{(n-1)n}{2} + n + \frac{(n-1)n}{2} = (n-1)n + n = n^2 - n + n = n^2$$

Solutions du Sudomath n°1

Le mot mystère est : TRIANGLES

Niveau de difficulté : 1

N	I	A	R	G	L	S	E	T
S	R	T	I	A	E	N	G	L
G	E	L	N	S	T	R	I	A
R	T	I	S	E	A	L	N	G
A	S	E	G	L	N	T	R	I
L	G	N	T	I	R	E	A	S
T	N	S	A	R	I	G	L	E
I	L	R	E	T	G	A	S	N
E	A	G	L	N	S	I	T	R

Niveau de difficulté : 3

E	G	R	I	L	T	N	S	A
I	T	N	S	A	G	R	L	E
A	S	L	R	E	N	G	I	T
G	I	S	A	R	E	L	T	N
R	N	A	G	T	L	I	E	S
T	L	E	N	I	S	A	G	R
S	R	I	T	G	A	E	N	L
N	E	G	L	S	R	T	A	I
L	A	T	E	N	I	S	R	G

Jeux

Y. Noël-Roch

1. Polyglotte sans peine

Chaque lettre cache un chiffre. Deux lettres différentes cachent deux chiffres différents. La même lettre cache toujours le même chiffre. Le premier chiffre à gauche n'est pas 0.

Découvre les chiffres cachés sachant que les additions sont correctes
Les quatre situations sont indépendantes l'une de l'autre !

T W O	D E U X	D U E	T W E E
T W O	D E U X	D U E	T W E E
T W O	D E U X	D U E	T W E E
T W O	D E U X	D U E	T W E E
E I G H T	H U I T	O T T O	A C H T

Le nombre de solutions est le même dans deux langues. Lesquelles ? Quelle est la langue qui donne le plus grand nombre de solutions ?

2. Menteurs, Nonmenteurs et Imprévisibles

Plongeons-nous dans un monde simplifié partagé en trois familles :

- les Menteurs (qui ne disent **jamais** la vérité)
- les Nonmenteurs (qui disent **toujours** la vérité)
- les Imprévisibles (qui peuvent aussi bien mentir que dire le vérité)

Tu rencontres Clara, Léa et Manon et tu sais qu'elles représentent les trois familles.

Bien qu'elles essaient de te tromper, tu peux découvrir la famille de chacun des trois personnages.

3. Des quotients entiers.

- Choisis un naturel non nul.
- Calcule son cube et retires-en 1. J'appelle a ton résultat.
- Reprends ton nombre initial, ajoutes-y son carré, puis 1. J'appelle b ce nouveau résultat.
- Divise a par b.

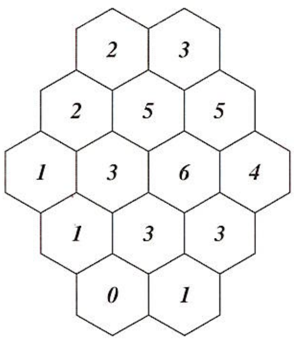
Je parie que tu obtiens comme quotient un nombre entier !

Tu peux recommencer en changeant le nombre initial. Voilà une nouvelle manière de jouer au magicien ayant avalé une calculatrice !

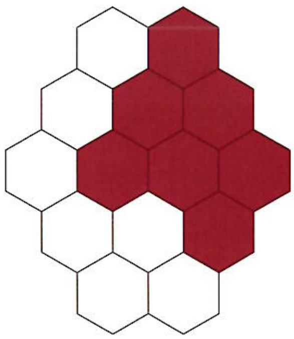
4. Des hexagones

Dans les trois jeux qui te sont proposés, colorie certains des hexagones de façon que tout hexagone ait autant de voisins coloriés que le nombre indiqué en son centre. Attention : *tout hexagone est considéré comme voisin de lui-même !*

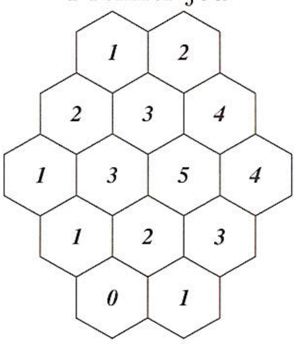
Exemple



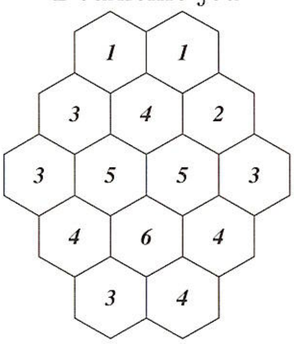
Solution



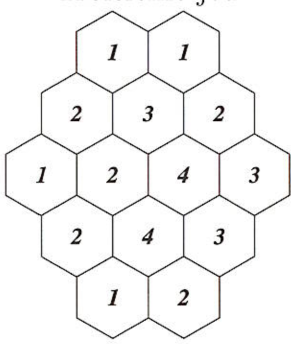
Premier jeu



Deuxième jeu



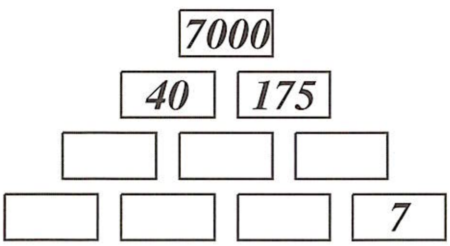
Troisième jeu

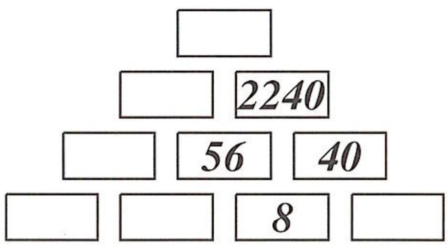


5. Des murs multiplicatifs

Dans un mur multiplicatif, chaque brique contient le produit des nombres qui occupent les deux briques qui la supportent. Cette règle est illustrée dans le premier mur ci-dessous, dans les deux étages supérieurs.

Complète les deux murs.





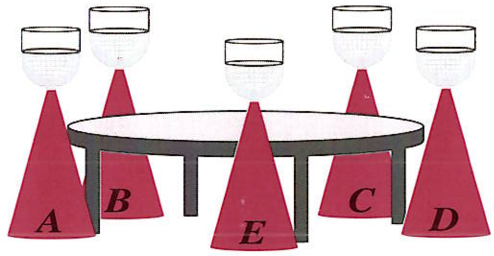
Tu peux trouver d'autres « Murs Multiplicatifs », d'autres « Hexagones » et aussi d'autres jeux sur le site `www.conifere.be` qui te propose un logiciel JEUX.

6. Porter le chapeau

Cinq plaisantins Albert, Bob, Caïm, Damien et Edgard sont réunis autour d'une table ronde et chacun porte un chapeau, soit rouge, soit vert. Chacun voit les chapeaux **des autres** mais pas le sien.

Toute personne qui porte un chapeau rouge dit la vérité.
Toute personne qui porte un chapeau vert ment.

En exploitant leurs déclarations, colorie le chapeau de chacun.
Voici leurs déclarations :



A. Je vois trois chapeaux rouges et un vert.

B. Je vois quatre chapeaux verts.

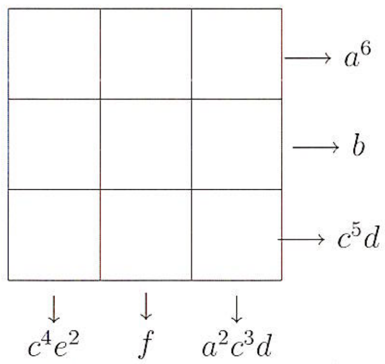
C. Je vois un chapeau rouge et trois chapeaux verts.

D. Je vois quatre chapeaux rouges.

E. Je suis d'accord avec un de mes amis.

7. Les nombres de 1 à 9

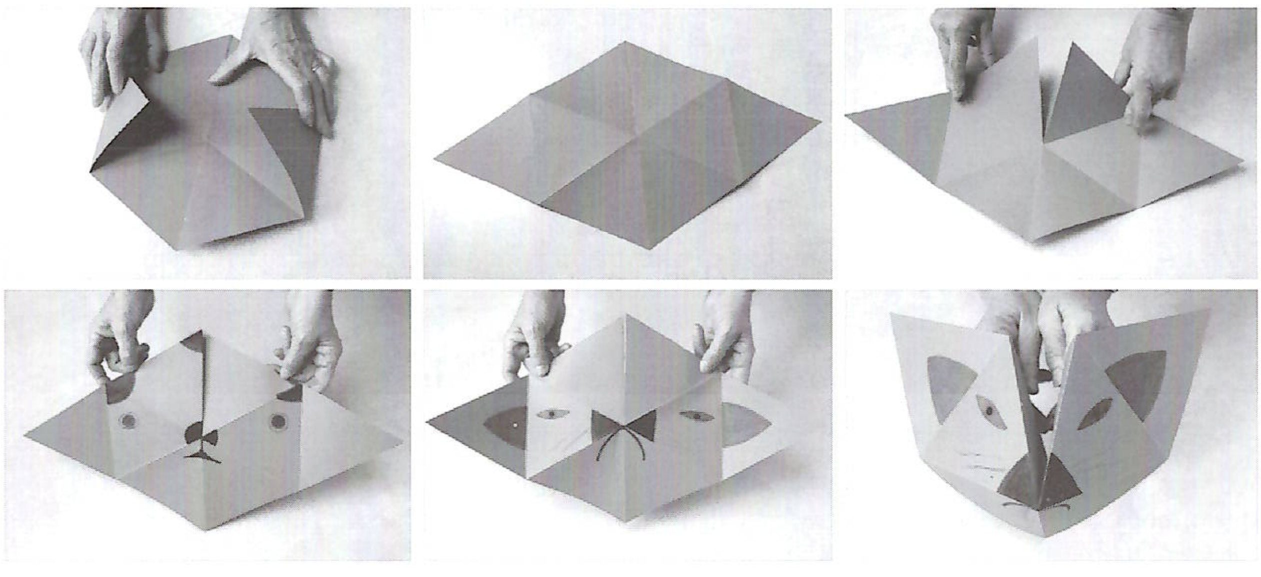
Place les chiffres de 1 à 9 dans les neuf cases de manière à ce que le nombre de trois chiffres écrit en ligne ou en colonne possède les propriétés indiquées. Les nombres a, b, c, d, e et f sont tous premiers et différents.



8. Construire un masque

(d'après *Des triangles, encore des triangles* par Mitsumasa Anno, Ed. Flammarion, 1994.)

Découpe un losange et en suivant le modèle des photos, marque les plis et découpe la fente. En collant l'un sur l'autre les deux triangles symétriques par rapport à la fente, tu obtiens un masque plus ou moins pointu selon que tu laisses un triangle apparent ou que tu les caches tous les deux.
Tes dons artistiques feront le reste !

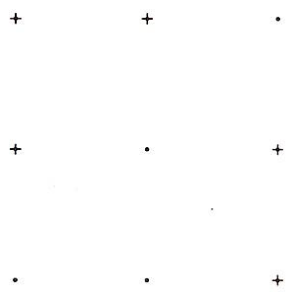


Le jeu de HIP

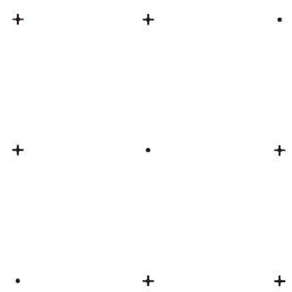
François Drouin

Voici un petit jeu tout simple nécessitant peu de matériel : un réseau de points disposés en carré semblable à celui ci-dessous, un crayon, une gomme.
La règle du jeu est également très simple :

Il s'agit de placer le plus de croix possibles sur les points du réseau de telle sorte que quatre croix placées ne soient jamais les sommets d'un rectangle



Correct



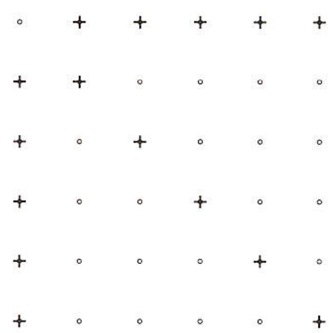
Incorrect (pourquoi ?)

La version originale du jeu repérée dans « Ludi Maths n°2 » (APMEP Poitiers 1979) évoquait les quatre sommets d'un carré. Faut-il te rappeler qu'un carré est toujours un rectangle ? J'ai donc adopé la règle ci-dessus.

Combien de croix as-tu réussi à placer dans le réseau 6×6 ?

As-tu un peu retravaillé sur les conditions de parallélisme et d'orthogonalité de segments reliant des points du réseau ? Tu peux en rediscuter avec ton professeur de mathématiques. Je suis sûr qu'il en sera ravi. Pour les égalités de longueur, le théorème de Pythagore viendra à ton aide. Avant d'annoncer ton record, contrôle bien ta proposition, ou mieux, fais la vérifier par un camarade ou un adulte de ton entourage.

En classe , et entre professeurs de mathématiques , nous avions commencé une collection de solutions avec 15 croix . Au vu du nombre de solutions trouvées, nous avions conjecturé que 15 était le maximum.



Un élève m'avait même fourni cette belle solution symétrique. J'étais ravi, mais je n'oubliais pas que cette conjecture devait être démontrée. . .

Lors d'une formation d'enseignants de mathématiques, le record a été battu avec 16 croix. Voici cette solution :

·	·	·	·	+	+
+	·	·	+	+	·
·	+	·	+	·	·
·	·	+	+	·	+
·	+	+	·	+	·
+	+	·	·	·	+

Il restait à savoir si ce record pouvait être lui aussi battu. Boris Sargos, un des jeunes collègues avec lequel j'ai travaillé l'an passé a programmé ce jeu sur son ordinateur et m'a affirmé que 16 était le maximum. Acceptez vous ce type de démonstration ? Il m'a également dit que son ordinateur pouvait lui fournir d'autres solutions : voici un extrait de son message qui vous en fournira deux supplémentaires.

En numérotant les cases de 0 à 36 de gauche à droite et de haut en bas (comme si on lisait un livre) :

- solution 1 : 0-1-3-6-11-12-14-16-20-21-23-25-26-31-34-35

- solution 2 : 0-1-3-6-10-11-12-14-20-21-23-25-26-28-31-35

Si vous en voulez d'autres, pas de problème. Ça prendra juste quelques heures, le temps que mon ordinateur les recalcule...

Je vous laisse explorer la recherche dans le cas où quatre points ne peuvent pas être les sommets d'un rectangle. J'attends vos records.

Les auteurs de « Ludi Maths n°2 » présentaient également une version intéressante pour deux joueurs. Le même réseau pointé 6×6 est utilisé. Chaque joueur utilise un stylo de couleur différente et à tour de rôle place une croix sur le réseau. Celui qui a gagné est celui qui dénonce un rectangle parmi les croix placées par son adversaire.

Existe-t-il une stratégie gagnante (ou non perdante) pour un des deux joueurs ?

Avant de poursuivre la lecture de cet article, joue avec tes camarades ou les adultes de ton entourage. Ne panique pas, si par mégarde, tu as formé un carré avec quatre de tes croix, tu n'as pas perdu, il faut que ton adversaire soit attentif et repère ce carré parmi tes croix. Tu as compris que ce jeu à deux nécessite une grande concentration de la part des deux joueurs. Puisque seize croix placées sont le maximum pour que quatre quelconques d'entre elles ne soient pas les sommets d'un rectangle, le match nul n'est pas possible.

Reste donc à trouver une stratégie gagnante pour un des deux joueurs...

J'espère un peu que tu en as trouvé une avant la lecture des lignes qui suivent.

Pour ceux qui n'auraient pas eu le temps de chercher, je fournis une piste. Le premier joueur pose sa première croix. Le second joueur place une croix symétrique de celle du premier joueur (je laisse le choix : symétrie centrale par rapport au centre du réseau de points, ou symétrie orthogonale par rapport aux médianes ou aux diagonales du carré formant le réseau de départ). Il est important que le deuxième joueur utilise toujours la même symétrie pendant la partie. S'il est très attentif aux croix placées par son adversaire et sachant que seize est le maximum de croix à placer pour ne pas obtenir de sommets de rectangles, la situation sera perdante pour le premier joueur...

Dans la version « quatre sommets d'un carré », le maximum de croix pouvant être placées dans le « jeu en solitaire » est supérieur à 18 (la moitié des 36 points du réseau). Je vous laisse chercher ce maximum... Dans ce cas, dans la version à deux, le match nul est possible et nous parlerons de stratégie non perdante pour le second joueur.

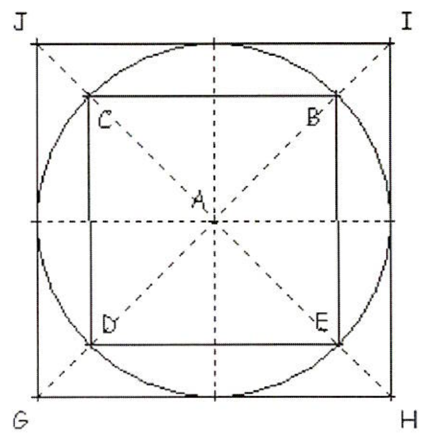
Jouez bien. Je vous souhaite autant de plaisir qu'à mes élèves et qu'aux enseignants à qui j'ai présenté ce jeu.

Courrier des lecteurs

La géométrie du cloître

Dans le *Math-Jeunes Junior* 115 du mois de novembre 2006, Gérard Laloux a présenté un intéressant article sur une tout aussi intéressante propriété d'un cloître, celui annexé à la cathédrale de Cahors (ville située entre Limoges et Toulouse).

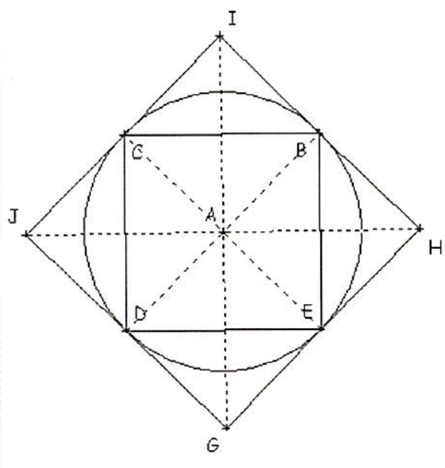
Cette propriété est engendrée par le fait que la cour carrée intérieure peut être inscrite dans un cercle qui est alors lui-même inscrit dans le carré formé par le pourtour du couloir entourant cette cour. (cfr figure)
Gérald Laloux démontre que, dans ce cas, *la superficie de la cour intérieure est égale à celle du couloir qui l'entoure.*



Pour réaliser sa démonstration, l'auteur se base sur des calculs en utilisant de belle manière des relations métriques bien connues de la géométrie.

Je propose, ci-après une autre manière de réaliser la démonstration en question en n'exploitant que la géométrie des transformations et plus particulièrement la notion de rotation.

La rotation de centre A et d'amplitude 45° amène le carré I JGH de la première figure dans la position qu'il occupe dans la deuxième figure.
$IJGH$ reste tangent au cercle puisque ses côtés restent à la même distance (égale au rayon du cercle) du centre A.
Il est alors immédiat que le carré extérieur (formé de 16 triangles rectangles isocèles isométriques) est de superficie double du carré intérieur (formé de 8 de ces triangles rectangles isocèles) donc (en revenant à la première figure) du couloir qui l'entoure.



Claude Villers

Solution de Michel Saussez

Aire du carré extérieur $= 2r \times 2r = 4r^2$

Aire du carré intérieur (losange) $= \dfrac{2r \times 2r}{2} = 2r^2$

Aire de la galerie $= 4r^2 - 2r^2 = 2r^2$

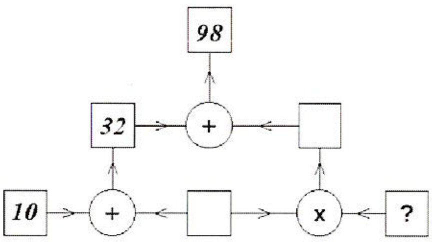
Claudine Festraets

C. Festraets

L'éliminatoire de l'Olympiade Mathématique Belge a eu lieu le 17 janvier. Tu y as sans doute participé et voici les solutions de quelques uns des exercices proposés. Tu pourras ainsi te préparer soit pour la demi-finale si tu as eu la chance d'y être admis, soit pour ta prochaine participation dans un an.

Mini 3

Dans le schéma ci-dessous, le nombre situé dans la case marquée d'un point d'interrogation vaut



(A) 3 (B) 6 (C) 14 (D) 18 (E) 22

Solution

On détermine facilement les nombres figurant dans les carrés : en deuxième ligne, on a $98 - 32 = 66$ et en troisième ligne, on a $32 - 10 = 22$.
Pour obtenir 66, il faut multiplier 22 par 3. la solution est donc A.

Mini 8

Sur le plan d'une ville, 15 cm correspondent à 1,5 km. Quelle est l'échelle de ce plan ?

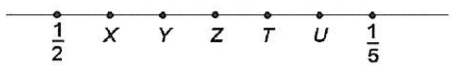
(A) $\frac{1}{1\,000}$ (B) $\frac{15}{10\,000}$ (C) $\frac{1}{10\,000}$ (D) $\frac{1}{15\,000}$ (E) $\frac{1}{100\,000}$

Solution

1,5km = 150 000 cm.
Il faut diviser 150 000 par 10 000 pour obtenir 15. L'échelle est donc C.

Mini 12 - Midi 5

Entre les graduations $_2$ et $_5$, quel est le point de graduation $\frac{1}{4}$



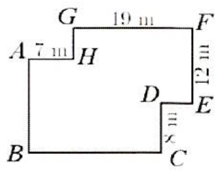
(A) X (B) Y (C) Z (D) T (E) U

Solution

Le segment compris entre les graduations $\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{5}$ mesure $\frac{1}{2} - \frac{1}{5} = \frac{3}{10}$; il est divisé en 6, donc chaque petit segment mesure $\frac{1}{6} \times \frac{3}{10} = \frac{1}{20}$. Or $\frac{1}{4} = \frac{1}{2} - 5 \times \frac{1}{20}$, donc le point de graduation $\frac{1}{4}$ se trouve 5 graduations après $\frac{1}{2}$ et c'est le point U.

Mini 13

La figure ci-dessous montre le plan d'un jardin où les côtés sont deux à deux perpendiculaires. Quel est, en mètres, le périmètre de ce jardin ?



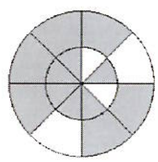
(A) 82 (B) 92 (C) 104 (D) 118 (E) Il manque des données.

Solution

$|GH| + |AB| = |FE| + |DC| = 8 + 12 = 20$
$|AH| + |GF| = |BC| + |DE| = 7 + 19 = 26$
Le périmètre du jardin vaut donc $2(20 + 26) = 92$, soit la réponse B.

Mini 15 - Midi 8

Le disque dessiné ci-dessous est divisé en secteurs tous de même amplitude. L'aire du grand disque vaut 100. Que vaut l'aire totale des parties non grisées ?



(A) 10 (B) 12,5 (C) 18 (D) 25 (E) 28

Math-Jeunes Junior n°116J, 26–28, 2007

Solution

Si, mentalement, on regroupe les parties non grisées, on s'aperçoit qu'elles recouvrent le quart du disque. L'aire totale de ces parties vaut donc $\frac{100}{4} = 25$, soit la réponse D.

Mini 18 - Midi 11

Pascal pense à trois nombres entiers. En additionnant ces nombres deux à deux, il obtient les sommes 38, 44 et 52. Le plus petit des trois nombres est

(A) 13 (B) 15 (C) 21 (D) 23 (E) 29

Solution

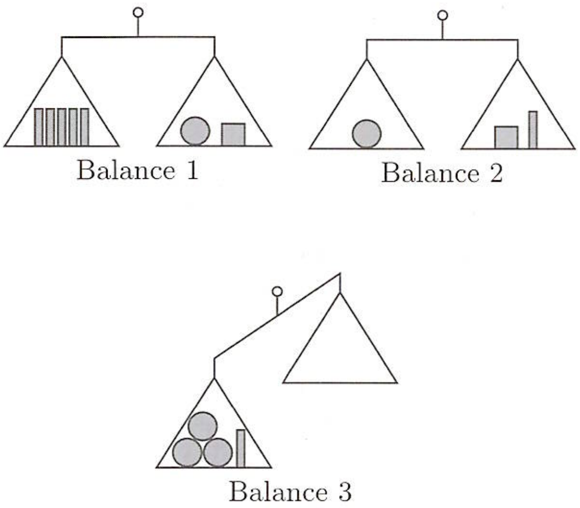
Désignons les trois nombres par a, b, c et supposons que $a \leqslant b \leqslant c$. On a $a+b \leqslant a+c \leqslant b+c$, d'où

$$\begin{cases} a+b=38 \\ b+c=52 \\ c+a=44 \end{cases}$$

De là, $2a+2b+2c = 134$, $a+b+c = 67$ et $a = (a+b+c)-(b+c) = 67-52 = 15$.

Mini 19 - Midi 12

Les balances 1 et 2 sont en équilibre. Combien faut-il placer de ■ sur le plateau de droite de la balance 3 pour équilibrer celle-ci ?



(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

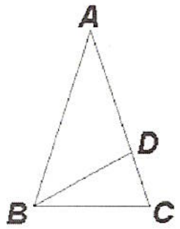
Solution

Désignons le cercle par a, le rectangle par b et le carré par c.

La balance 1 nous donne $5b = a+c$ et la balance 2 nous donne $a = c+b$ (1). En additionnant ces deux égalités, on obtient $5b+a = a+2c+b$, d'où $4b = 2c$, $b = \frac{c}{2}$. Remplaçons b par cette valeur dans (1) : $a = c + \frac{c}{2} = \frac{3c}{2}$, d'où $3a+b = \frac{9c}{2} + \frac{c}{2} = 5c$. La réponse est E.

Midi 14

Les triangles BAC et CBD sont isocèles et tels que $|AB| = |AC|$, $|BC| = |BD|$ et $|AB| = 2|BC|$. Quel est le rapport des aires des triangles ABC et BCD ?



(A) 2 (B) 3 (C) $2\sqrt{3}$ (D) 4 (E) $3\sqrt{2}$

Solution

Les triangles ABC et CBD sont isocèles, donc $\widehat{ABC} = \widehat{BCA} = \widehat{BCD} = \widehat{BDC}$. Les deux triangles sont semblables puisqu'ils ont les mêmes angles. On sait que les aires de deux triangles semblables sont entre elles comme les carrés des côtés proportionnels, or $\frac{|AB|}{|BC|} = 2$, le rapport demandé est donc 4.

Mini 28 - Midi 18

Sans réponse préformulée - Le nombre naturel 2007 est la somme de trois nombres naturels impairs consécutifs. Quel est le plus grand de ces trois nombres ?

Solution

Un nombre impair s'écrit sous la forme $2n+1$ où n est un nombre entier. Donc trois nombres impairs consécutifs sont $2n+1$, $2n+3$ et $2n+5$. Leur somme vaut 2 007, d'où $2n+1+2n+3+2n+5 = 6n+9 = 2\,007$. De là, $6n = 1\,998$, $2n = 666$ et $2n+5 = 671$.

Midi 20

Une suite de 15 nombres est telle que la somme de trois nombres consécutifs de cette suite vaut toujours 2007. Le quatrième nombre de la suite est 500 et le quinzième est 200. Que vaut le septième nombre ?

(A) 200 (B) 427 (C) 500 (D) 837 (E) 1 307

Solution

Soit $(a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l, m, n, p)$ la suite des 15 nombres, avec $d = 500$ et $p = 200$. Par hypothèse, $m+n+p = 2007$ et $l+m+n = 2007$, donc $l = p = 200$ et par le même procédé, de proche en proche, on obtient $i = f = c = 200$. De là, $d+e+f = 500+e+200 = 2007$, d'où $e = 1307$. Et enfin, $e+f+g = 1307+200+g = 2007$, d'où $g = 500$.

Solutions des jeux des pages 20,21 et 22

1. Polyglotte sans peine

En anglais et en néerlandais, il n'existe aucune solution. En français, l'énigme admet 9 solutions (2176 est la seule avec $D = 2$, 1324, 1507,1824, 1492 sont quatre solutions (parmi huit) avec $D = 1$. Nous te laissons le plaisir de découvrir les quatre solutions non fournies. En italien, il en existe trois : 638, 693 et 748.

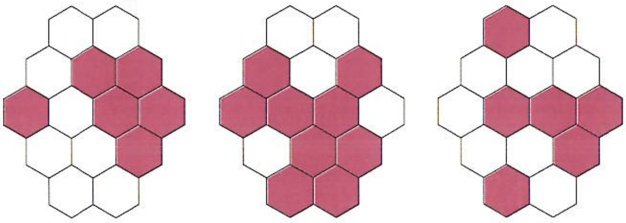
2. Menteurs, Nonmenteurs et Imprévisibles

Léa est une Nonmenteuse, Clara une Imprévisible et Manon une Menteuse.

3. Des quotients entiers

Quel que soit le nombre n, $n^3 - 1 = (n^2 + n + 1)(n - 1)$. En désignant par n le naturel choisi, on a $a = n^3 - 1$ et $b = n^2 + n + 1$. On sait que a est multiple de b et on connaît même le quotient sans devoir effectuer la division.

4. Hexagones



5. Des murs multiplicatifs

Les nombres cherchés étant tous naturels, le premier mur peut être complété d'une seule manière :

$$\boxed{7000}$$
$$\boxed{40}\ \boxed{175}$$
$$\boxed{8}\ \boxed{5}\ \boxed{35}$$
$$\boxed{8}\ \boxed{1}\ \boxed{5}\ \boxed{7}$$

Le deuxième mur peut être complété d'une infinité de manières. En voici une (spécialement économique !) :

$$\boxed{0}$$
$$\boxed{0}\ \boxed{2240}$$
$$\boxed{0}\ \boxed{56}\ \boxed{40}$$
$$\boxed{0}\ \boxed{7}\ \boxed{8}\ \boxed{5}$$

6. Porter le chapeau

- (Le chapeau de) D n'est pas rouge parce qu'ils devraient alors l'être tous et A par exemple ne pourrait pas déclarer voir un chapeau vert. Donc **D est vert**.
- Si A est rouge, B, C et E le sont aussi. Alors B ne peut pas déclarer voir 4 chapeaux verts. Donc **A est vert**.
- Si B est rouge, A, C, D et E sont verts. Mais alors la déclaration de C est vraie, et il devrait porter un chapeau rouge ! Donc **B est vert**.
- C voit les chapeaux verts de A, B et D. Si C ment, alors E a aussi un chapeau vert. Mais B aurait alors dit la vérité ... tout en ayant un chapeau vert ! La contradiction prouve que **les chapeaux de C et de E sont rouges**. Et voici la solution :

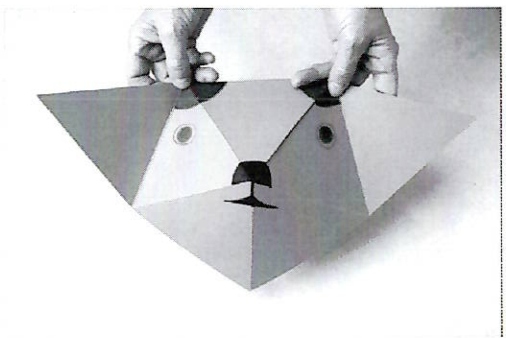
A vert, B vert, C rouge, D vert et E rouge

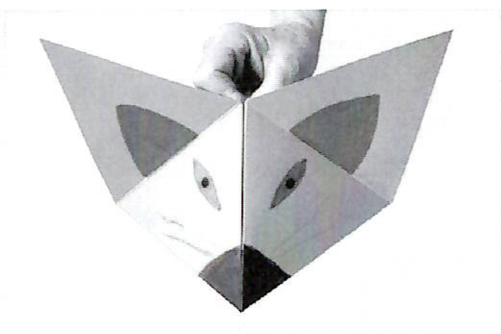
7. Les nombres de 1 à 9

7	2	9
8	5	3
4	1	6

$a = 3$ $\quad d = 13$
$b = 853$ $\quad e = 7$
$c = 2$ $\quad f = 251.$

8. Construire un masque





Coloriage pour l'an 2007

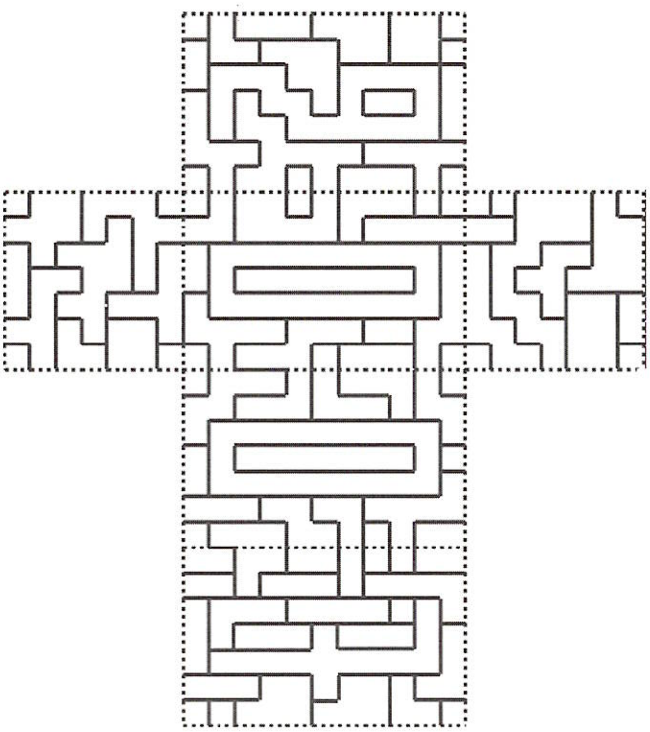
F.Drouin

Avec le minimum de couleurs possibles, colorie chacune des zones tracées sur les 6 faces du parallélépipède rectangle dont voici le développement.

Contraintes :

1. Deux zones voisines (c'est à dire ayant au moins un côté commun) ne peuvent pas être de même couleur.
2. Les pointillés ne sont pas des limites de zones.
3. Une zone peut se prolonger d'une face à une face adjacente. Réfléchis donc avant de colorier toutes les zones situées sur le contour du développement.

Lorsque tu auras terminé ton coloriage, tu verras appaaître sur 4 faces les 4 chiffres formant le millésime 2007.



Sache que tu peux effectuer ton coloriage avec 4 couleurs **seulement** . (le blanc, le rouge, le vert et le jaune, par exemple). Il existe en effet un théorème appelé « *Théorème des quatre couleurs* » qui affirme qu'au plus quatre couleurs sont nécessaires pour colorier n'importe quelle carte de géograhie, de pays réels ou imaginaires, de telle sorte que deux pays voisins soient de couleur différente.

Ce théorème a été démontré en 1976 par deux mathématiciens américains. Kenneth Appel et Wolfgang Haken de l'université de l'Illinois.

Plus de mille heures de calculs réalisés sur trois puissants ordinateurs furent nécessaires pour établir définitivement ce théorème.

Essaie donc de l'appliquer au coloriage du développement ci-dessus.

Math-quiz

Claude Villers

Un très grand merci et toutes nos félicitations à tous ceux qui ont répondu, que ce soit totalement ou que ce soit partiellement, aux questions de la première étape de notre Math-quiz 2006–2007. Nous savons fort bien que les élèves des premières années n'ont pas nécessairement autant de connaissances mathématiques que ceux des années supérieures. Mais cela ne doit pas les empêcher de participer. En fin d'année, des classements séparés seront d'ailleurs effectués.

Le tableau « d'honneur » de cette première étape s'établit comme suit (ordre alphabétique) :

Nom	Commune	classe	Nom	Commune	classe
Bauwin Jennifer	Helecine	1	Monin Mathilde	Momignies	1
Boulonne Alysé	Boutersem	?	Monin Thomas	Momignies	3
Chawin Sébastien	Huppaye	1	Mottoulle Quintin	Emines	1
Delhalle Sophie	Ramillies	?	Nounzu Thibaut	Jodoigne	?
Demany Martial	Lobbes	3	Pâque Frédérique	Esneux	?
Dimitry Alexandre	Incourt	?	Poussart Cindy	Seloignes	1
Djessam Makki	Jodoigne	2	Prufer Vincent	Incourt	?
Frolov Egor	Jodoigne	?	Radelet Charline	Walcourt	3
Gaspard Frédéric	Autre-Eglise	1	Ransquin Ignace	Olloy sur Viroin	2
Geerts Dorian	Jodoigne	1	Renoirt Lionel	St Jean-Geest	2
Hardy Baptiste	Seloignes	1	Serron Tiffany	Tienen	1
Hauquert Benedicte	Bailleux	2	Snyers Charles	Chimay	3
Henquet Nicolas	Pietrain	1	Styles Jasmine	Bruxelles	2
Lapôtre Guillaume	Nismes	2	Van Geel Alicia	Schaerbeek	2
Mertens Clémenceau	Incourt	1	Voss Laura	Momignies	?
Moers Clémence	Opprebais	1	Wilmet Elodie	Braine l'Alleud	?

Tous ces participants ont remporté une très belle et méritée récompense qui aura la forme, cette fois, d'un très beau livre sur le monde sous-marin exploré par le Commandant Cousteau. Cet album leur a été envoyé directement à leur domicile.

N.B. : Des participants n'ont pas indiqué le niveau de leur classe en 2006-2007. Nous leur demandons de le faire à l'occasion de la deuxième étape afin de pouvoir établir des classements séparés par année scolaire.

Voici maintenant les réponses aux questions de la première étape. C'est le moment d'en discuter entre vous ou de traiter ces questions dans la classe.

Question n°	Réponse	Question n°	Réponse
1	E	6	0.5
2	9	7	21
3	7	8	0
4	25%	9	576
5	46	10	6

Math-Jeunes Junior n°116J, 30–32, 2007

Remarque : C'est volontairement que nous ne donnons pas de modèles de résolutions des questions proposées car nous pensons avec conviction que, comme toujours, un doute, un désaccord, une interrogation au sujet de l'une d'elles constituent autant de belles occasions d'en parler et d'en débattre en classe ou avec vos condisciples et/ou votre professeur . . . et même à la maison ! !

Nous invitons maintenant tous les lecteurs à participer **à la deuxième étape** de notre challenge dont nous rappelons la teneur : fournir le maximum de réponses correctes aux questions qui sont proposées dans cette rubrique.

Comme ce fut le cas lors de la première étape, 10 questions vous sont soumises. Chacune d'elles possède un coefficient de difficulté indiqué sous la forme d'étoiles.

Chaque étoile d'une question dont la réponse est correcte vous fait gagner 6 points cette fois. Vous répondez à autant de questions que vous le souhaitez. 78 points ont été mis en jeu lors de la première étape et 150 points le sont maintenant.

Comment répondre ? Vous nous envoyez vos réponses sur carte postale simple ou illustrée (voir ci-après le concours annexe) à l'adresse :

- SBPMef - Math-Quiz Rue du Onze Novembre 24 , 7000 Mons -

en indiquant bien vos nom et prénom, votre adresse complète, le nom exact et la localisation de votre école ainsi que le niveau de votre classe en 2006-2007.

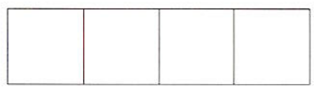
Nous rappelons qu'il est possible de grouper plusieurs réponses dans une même enveloppe.

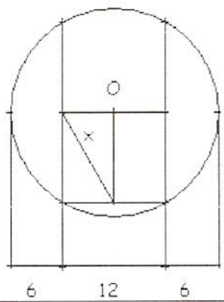
Vos réponses à cette deuxième étape doivent nous être parvenues dès que possible et avant le vendredi 23 mars 2007. (Ce sont les délais d'impression et d'expédition du dernier numéro de l'année scolaire qui nous obligent à fixer ce délai).

Exemple de tableau-réponse

Question n°	Ma réponse	Question n°	Ma réponse
11		16	
12		17	
13		18	
14		19	
15		20	

Question de la deuxième étape

11	*	Cet assemblage de quatre carrés comporte 10 sommets. Combien de sommet comporterait-il s'il était composé de 2007 carrés élémentaires ? 
12	*	Dans la classe, il y a 15 filles et leur âge moyen est 15 ans. Dans cette classe, il y a également 10 garçons et leur âge moyen est 17 ans et demi. Quel est l'âge moyen de la population de cette classe ?
13	*	Une population de bactéries double toutes les heures. Dans ces conditions, par quel nombre sera-t-elle multipliée au bout de 10 heures ?

<table>
<tr><td>14</td><td>**</td><td>De combien de façons pouvez-vous lire « MATH » en suivant des cases consécutives de ce tableau ?
<table>
<tr><td>M</td><td>A</td><td>T</td><td>A</td><td>M</td></tr>
<tr><td>A</td><td>T</td><td>H</td><td>T</td><td>A</td></tr>
<tr><td>T</td><td>H</td><td>M</td><td>H</td><td>T</td></tr>
<tr><td>A</td><td>T</td><td>H</td><td>T</td><td>A</td></tr>
<tr><td>M</td><td>A</td><td>T</td><td>A</td><td>M</td></tr>
</table></td></tr>
<tr><td>15</td><td>**</td><td>Mathieu est assis dans un train qui roule à la vitesse de 50 km/h. Il voit passer en 4 secondes un train de 90m de long qui croise le sien. A quelle vitesse, en km/h, ce second train roule-t-il ?</td></tr>
<tr><td>16</td><td>***</td><td>Que vaut x dans la figure ci-contre ?

</td></tr>
<tr><td>17</td><td>***</td><td>Un barre métallique de 20 m de longueur dont la section est un carré de 42mm de côté est passée dans un laminoir qui la transforme en une barre dont la section carrée a 35mm de côté. Quelle est alors, en m, sa nouvelle longueur ?</td></tr>
<tr><td>18</td><td>***</td><td>Quel est le nombre de diviseurs naturels de 1296 ?</td></tr>
<tr><td>19</td><td>****</td><td>Un sac contient 50 boules qui ne diffèrent que par leur couleur. Chaque boule est soit rouge soit verte. On sait que toute paire de boules extraite du sac comporte au moins une boule verte. Combien y a-t-il de boules rouges dans le sac ?</td></tr>
<tr><td>20</td><td>*****</td><td>Lors de la réunion du comité des Schnuls, chaque membre offre un bonbon à chacun des autres membres. Aujourd'hui de nouveaux membres se sont ajoutés au comité. On a alors distribué 24 bonbons de plus que d'habitude. Quel est donc le nombre de nouveaux membres du comité ?</td></tr>
</table>

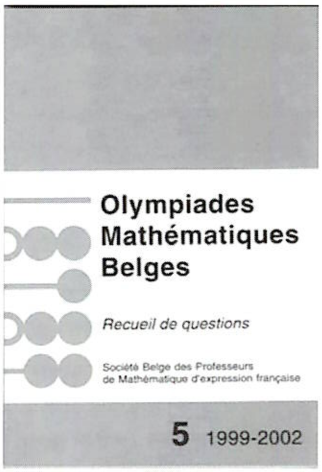
Le concours annexe (facultatif) se poursuit aussi :

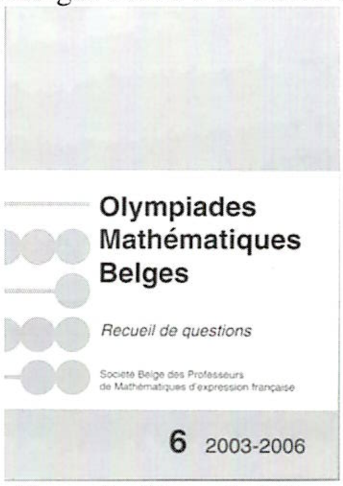
Nous vous invitons en outre à être imaginatif et/ou créatif en réalisant une illustration mathématique du verso de votre carte-réponse. Le choix du sujet mathématique est laissé à votre appréciation. Cela doit vous permettre de la transformer en un sujet touchant aux mathématiques.

A vous de faire preuve d'originalité. Les meilleures propositions seront également primées. Elles auront peut-être l'honneur de figurer en première de couverture d'une de nos revues à paraître !

Vous ne manquez pas d'idées ! Alors, n'hésitez pas à nous envoyer vos dessins.

Olympiades Mathématiques Belges Tome 5 et Tome 6





Recueil n°5 seul: 6 € Recueil n°6 seul: 6 €

Frais d'expédition pour un exemplaire
en Belgique : 1.80€ --- en Europe : 4.50€

Toute commande de plus de 10 exemplaires bénéficiera d'une réduction de 10%

PROMOTION

Recueils 5 et 6 ensemble: 10€

Frais d'expédition - en Belgique : 3.50€- - en Europe : 8.50€

Pour les payements en Belgique : virement au compte 000-0728014-29 de SBPMef à Mons.
Pour l'étranger : IBAN BE26 0000 7280 1429 BIC BPOTBEB1

Math-Jeunes Junior
Périodique trimestriel
24, rue du Onze Novembre - 7000 Mons
Bureau de dépôt 7000 Mons 1

Responsable de l'édition : A. PATERNOTTRE
Rue du Moulin, 78 - 7300 Boussu
Bureau de dépôt : Mons 1

Autorisation de fermeture
Sluitings toelating

7000 Mons 1
5/156

Belgique - België
P.P.
7000 Mons 1
5/124

Périodique - Peut être ouvert pour contrôle postal

Réservé à la poste

Inconnu
Refusé
Décédé
Adresse insuffisante
N'habite plus à l'adresse indiquée