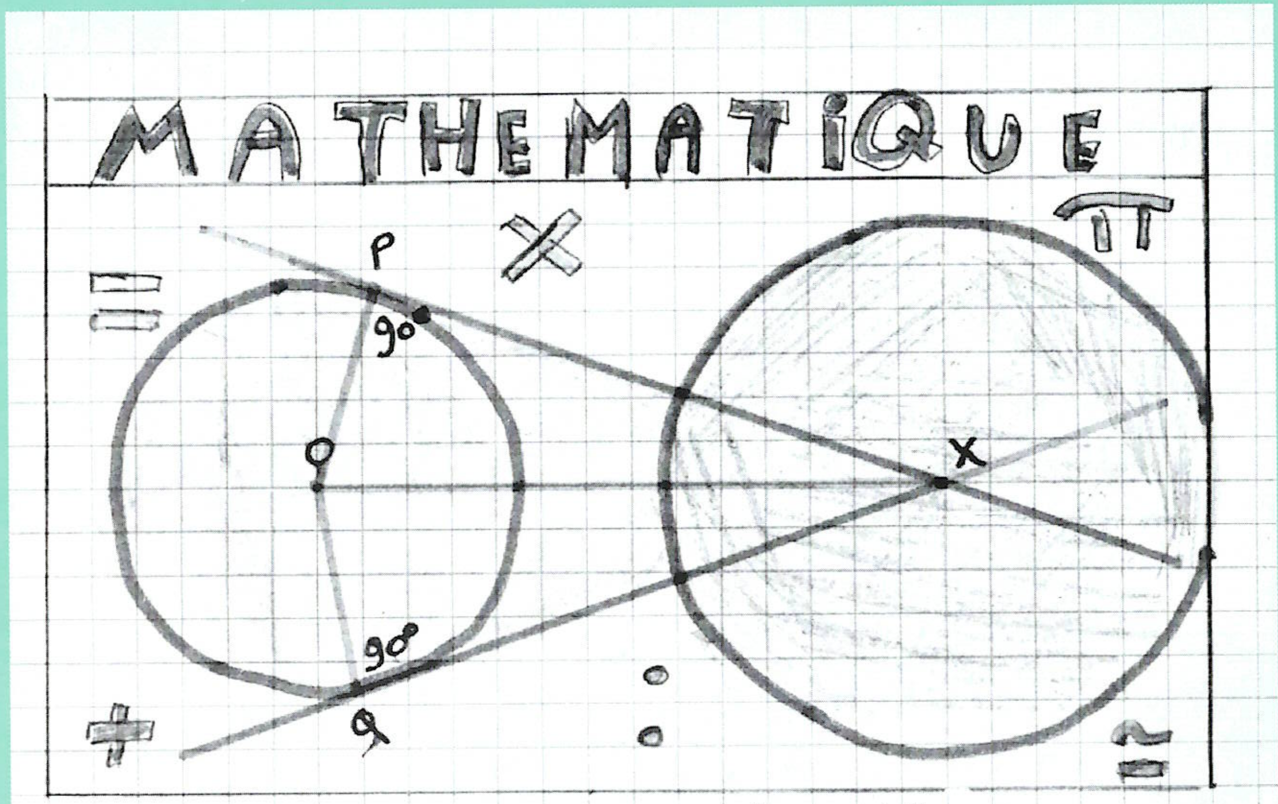
MJ Junior !



Janssens Loïc

28e année - N° 117J
Avril 2007

Math-Jeunes et Math-Jeunes Junior

Revues trimestrielles publiées par la Société Belge des Professeurs de Mathématique d'expression française

Secrétariat : M-C Carruana, SBPMef, 24, rue du Onze Novembre, 7000 Mons.
Tél/fax : 065.31.91.80
GSM : 0473973808 e-mail : sbpm@sbpm.be, URL : http://www.sbpm.be.

Tarifs

Abonnements groupés (au moins 5)		
	Une des deux revues	Les **deux** revues
Belgique	4 €	8 €

Abonnements individuels				
	Une des deux revues		Les **deux** revues	
Belgique	6 €		12 €	
France (abonnement(s) pris par l'intermédiaire de l'APMEP)	8€		16€	
	✉	✉⚡	✉	✉⚡
Europe	18 €	20 €	24 €	26 €
Autres pays	19 €	22 €	25 €	28 €

Légende : « prior »=✉⚡, « non prior »=✉.

Trois numéros de chaque revue sont publiés annuellement. Pour connaître la liste des anciens numéros encore disponibles et leur prix selon votre localisation, adressez-vous au secrétariat.
Les abonnements destinés aux élèves de l'enseignement secondaire sont de préférence pris par l'intermédiaire d'un professeur. Effectuez vos paiements :

- ☞ pour la Belgique : par virement au Compte n°000-0728014-29 de *S.B.P.M.e.f.*, rue du Onze Novembre, 24, 7000 Mons
- ☞ pour la France : par virement au Compte CCP Lille 10 036 48 S
- ☞ pour l'étranger (sauf la France) : par virement international au Compte n°IBAN: BE 26 0000 7280 1429 BIC: BPOTBEB1 au nom de la *SBPMef*, rue du Onze Novembre, 24, B 7000 Mons, Belgique. Les personnes résidant à l'étranger qui ne peuvent faire un virement à ce compte sont invitées à envoyer un mandat postal international. Tout chèque bancaire non encaissable en Belgique devra être majoré de 12,50 € pour frais d'encaissement.

Éditeurs responsables et rédacteurs en chef :

– pour *Math-Jeunes* : G. Noël, Rue de la Culée 86, 6927 Resteigne

– pour *Math-Jeunes Junior* : A. Paternottre, Rue du Moulin 78, 7300 Boussu

N°117J Vingt-huitième année 2007

Math-Jeunes junior

Sommaire

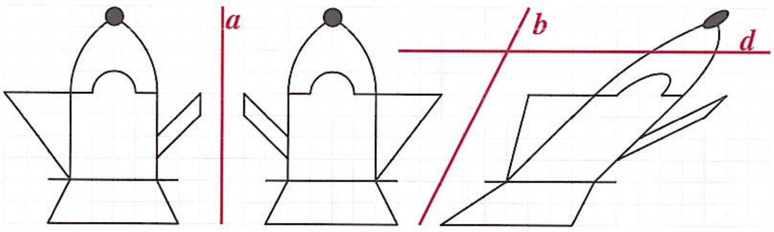
Des transformations

Y. Noël-Roch

1. Des transformations

Tu as rencontré, dans ton cours de mathématique, des translations, des symétries (centrales ou orthogonales), des rotations (parmi lesquelles les symétries centrales déjà citées). Par toutes ces transformations, la figure initiale et son image sont superposables, par simple glissement ou après avoir retourné une des deux figures : les deux figures sont **isométriques**.

Tu n'as probablement pas rencontré dans ton cours une **symétrie affine.** Observe la figure suivante : au centre, un pot qui est l'objet-origine, à gauche, son image par une symétrie orthogonale ; à droite, son image par une symétrie affine.



Dans les deux cas, pour pouvoir construire l'image, nous devons donner **l'axe de la symétrie**. Et cela suffit pour définir la **symétrie orthogonale d'axe** a : toutes les constructions d'images se font alors sur des perpendiculaires à a.
Au contraire, pour définir **la symétrie affine d'axe** B, il ne suffit pas de donner b ; il faut préciser dans quelle direction doivent être exécutées toutes les constructions d'images, une deuxième droite d indique **la direction de la symétrie**. Pour faciliter ta première rencontre avec une symétrie affine, nous avons choisi comme direction de d la direction horizontale liée au quadrillage de base. Cela te permet d'analyser plus facilement comment nous avons construit un *point-image* à partir de chaque *point-origine*.

Observe bien l'exemple, tu peux constater qu'en remplaçant « perpendiculaire à a » par « parallèle à b » les constructions d'images sont analogues dans les deux symétries : le point d'intersection avec l'axe est chaque fois le milieu du segment [*point-origine* ; *point-image*].

Tu peux aussi constater que certaines notions mathématiques sont conservées par les deux symétries, l'alignement par exemple : trois points alignés sur l'objet-origine ont comme images trois points alignés sur les objets-images. Par contre, la symétrie orthogonale conserve la longueur tandis que le symétrie affine ne la conserve pas. Ainsi, l'image d'un cercle est un cercle par la symétrie orthogonale, tu peux au contraire constater la déformation des courbes par la symétrie affine. Plus globalement, on pourrait dire que la symétrie orthogonale ne déforme pas l'objet-origine tandis que la symétrie affine le déforme.
Dans « **La géométrie du caoutchouc** », Frédéric Pourbaix te propose des transformations qui déforment encore beaucoup plus les objets !

2. Des symétries affines

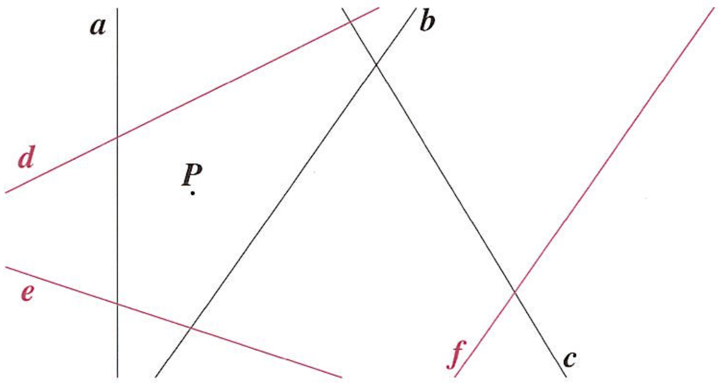
2.1. Image d'un point

La notation s_a^d désigne la symétrie affine d'axe a et dont la direction est celle de la droite d. Avec un abus de langage, nous dirons « *la symétrie d'axe a et de direction d* ».

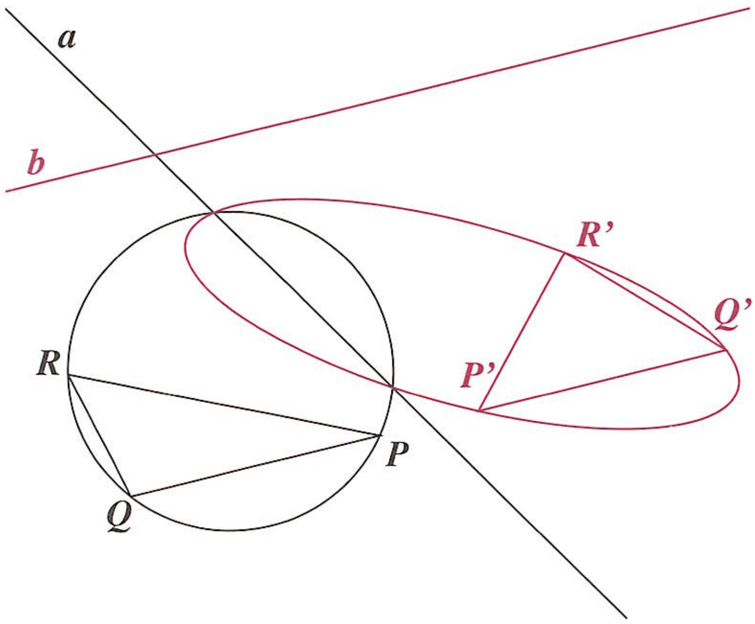
Voici, pour te familiariser avec les symétries affines, quelques constructions à exécuter. N'oublie pas que, dans chaque cas, une direction doit être respectée !

Dessine successivement

- le point Q, image du point P par s_a^d,
- le point R, image du point Q par s_b^e,
- le point S, image du point R par s_c^f.



2.2. Conserver et/ou modifier ?



Le triangle $P'Q'R'$ est l'image du triangle PQR par s_a^b.
L'ellipse est l'image du cercle par la même symétrie.
Les deux triangles ne sont pas isométriques, cela se voit mais ont-ils cependant des qualités communes ? Et qu'en est-il du cercle et de l'ellipse ?
Note tes observations avant de continuer ta lecture.
Que peux-tu dire des longueurs $|PQ|$ et $|P'Q'|$?
Que peux-tu dire des aires des deux triangles ?

Le cercle et l'ellipse ont même aire ! Mais nous ne pouvons pas le démontrer avec les moyens dont nous disposons ici. Tu peux contrôler expérimentalement l'égalité si tu disposes du logiciel *Cabri Géomètre*. Dans la suite, nous nous intéressons à l'aire des triangles.

- On dit que « **les symétries affines ne conservent pas la longueur** ». Le dessin ci-dessus montre clairement que $|PR| \neq |P'R'|$. Mais la propriété **ne signifie pas** qu'un segment et son image n'ont **jamais** même longueur. Dans la situation ci-dessus, nous avons choisi $PQ \parallel b$. Donc $[PP']$ et $[QQ']$ ont même milieu, par définition de la symétrie affine. Tu peux en déduire que $|PQ| = |P'Q'|$.

Plus généralement pour la suite :

> **Si un segment a la même direction que la symétrie**, alors sa longueur est la même que celle du segment-image.

• Nous venons de justifier que les deux triangles PQR et $P'Q'R'$ « ont même base ». *Qu'en est-il des hauteurs correspondantes ?*

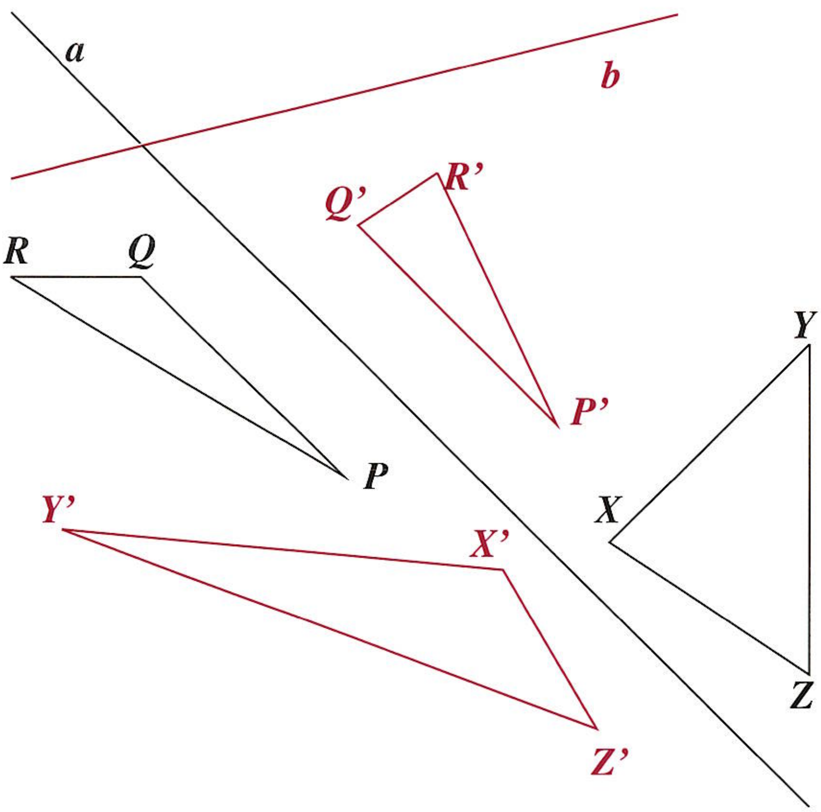
• Comme $RR' \,//\, b$, les deux triangles sont dessinés dans une bande aux bords parallèles à b. Ils ont donc « même hauteur », la largeur de la bande.

Nous avons finalement justifié que $\text{Aire}(PQR) = \text{Aire}(P'Q'R')$ et nous pouvons exprimer d'une manière générale la propriété obtenue :

> **Si un côté d'un triangle a la même direction que la symétrie**, alors l'aire de ce triangle est la même que celle du triangle-image.

Cette égalité d'aires entre figure et figure-image est-elle vraie pour d'autres triangles ? ... pour tous les triangles ? ... pour le cercle et l'ellipse ?

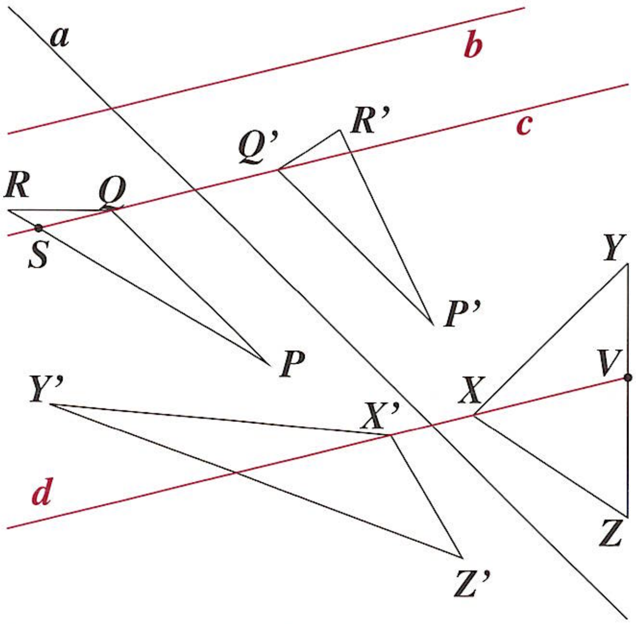
2.3. Symétries affines, triangles et aires



Les triangles PQR et $P'Q'R'$ ont, comme dans la situation précedente, les côtés $[PQ]$ et $[P'Q']$ de même longueur ... mais pour une raison différente : cette fois $PQ \,//\, a$ et $PQQ'P'$ est donc un parallélogramme. Comme dans la situation précédente, les deux triangles PQR et $P'Q'R'$ « ont même base ». Mais cette fois, les hauteurs issues respectivement de R et de R' ne sont pas immédiatement comparables.
Quant au triangle XYZ, il présente le cas général : aucun côté ne possède ni la direction de l'axe, ni celle de la symétrie.

- PQR et $P'Q'R'$ ont-ils même aire ?
- XYZ et $X'Y'Z'$ ont-ils même aire ?

Les déformations peuvent te faire penser que les réponses sont « non ». Et pourtant ... dessine les **droites** QQ' et XX' et essaie d'appliquer la dernière propriété encadrée ci-dessus. *Note tes idées avant de continuer ta lecture.*



$c = QQ'$ est la parallèle à b comprenant Q. Si S est le point commun à c et RP, alors son image S' est un point de c (par définition de la symétrie) et un point de $R'P'$ (par conservation de l'alignement).

De même, $d = XX'$ est la parallèle à b comprenant X. Si V est le point commun à d et YZ, alors son image V' est le point où d coupe $Y'Z'$.

Note les points S' et V' sur les figures et compare les triangles

- *RQS et $R'Q'S'$*
- *PQS et $P'Q'S'$*

Que peux-tu en déduire ?

Puisque le côté $[QS]$ du triangle RQS a la même direction que la symétrie, nous pouvons appliquer la propriété démontrée page précédente pour déduire Aire(RQS) = Aire ($R'Q'S'$).

De même, le côté $[QS]$ du triangle PQS a la même direction que la symétrie, donc la même propriété justifie Aire(PQS) = Aire ($P'Q'S'$).

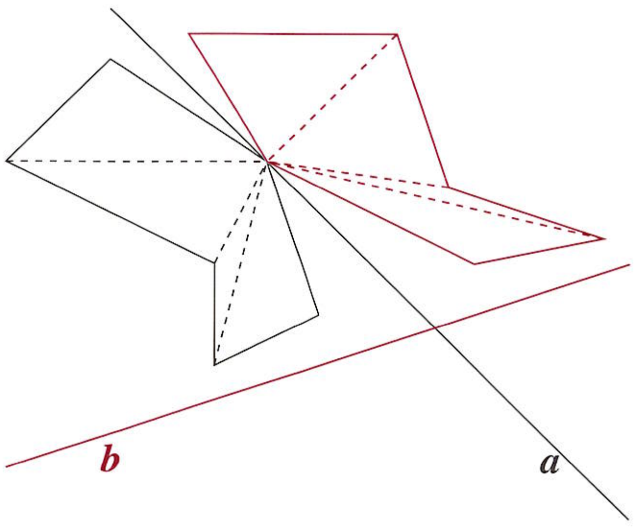
Enfin, par découpage et addition
Aire(PQR) = Aire(PQS) + Aire (RQS)= Aire($P'Q'S'$) + Aire($R'Q'S'$) = Aire($P'Q'R'$).

Un raisonnement tout à fait analogue s'applique au cas général du triangle XYZ (en utilisant le droite $XX' = d \mathbin{//} b$) et nous avons démontré la propriété suivante :

N'importe quel triangle a même aire que son image par une symétrie affine.

Que penses-tu des périmètres d'un triangle et du triangle-image ? Sont-ils égaux ?

2.4. Symétries affines, polygones et aires



Le procédé qui vient d'être appliqué pour découper un triangle en deux triangles particuliers peut également être appliqué pour « voir » un polygone comme un assemblage de triangles. Chaque pièce du puzzle ayant même aire que la pièce-image, l'égalité d'aire entre le polygone et le polygone-image est justifiée comme ci-dessus par addition de morceaux de même aire.
La figure ci-contre illustre cette idée. Tu peux rendre cette illustration encore plus claire en utilisant quatre couleurs différentes pour remplir avec chaque couleur une paire de pièces associées.

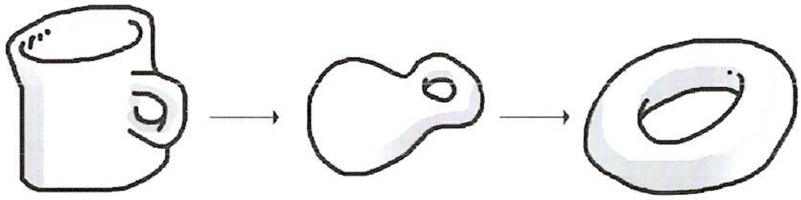
N'importe quel polygone a même aire que son image par une symétrie affine.

La géométrie du caoutchouc

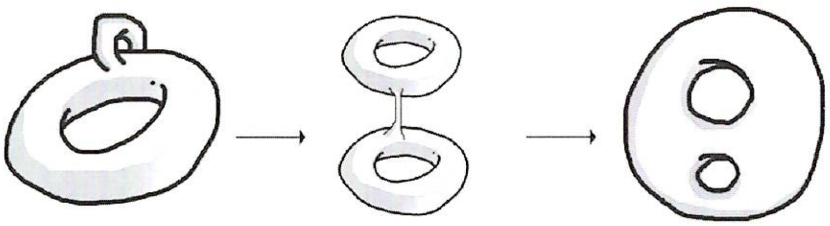
F. Pourbaix

1. De quoi s'agit-il ?

As-tu déjà confondu une tasse de thé avec un beignet ? Non ? Alors, c'est que tu n'as pas encore chaussé de lunettes topologiques ! En effet, si tu as en main une tasse faite de caoutchouc très facilement déformable, il t'est possible de la transformer en un beignet. Le trou donné par l'anse du récipient devient le centre de la pâtisserie.



Par contre, tu ne pourras pas transformer simplement ce beignet en paire de menottes ([1]), car il te faudrait y faire un second trou (ce qui revient également à lui ajouter une anse). On dira que la tasse et le beignet sont ÉLASTIQUEMENT TRANSFORMABLES l'un dans l'autre. On dira de même pour les menottes et certains types de boutons par exemple…



Peux-tu citer d'autres objets élastiquement équivalents à

- un beignet ?
- un bouton à deux trous ?
- une tranche de gruyère avec trois trous ?

Décidément, des beignets ([2]), du gruyère, tout ça donne faim… de connaissances ! Nous allons aller un peu plus loin en nous privant pourtant d'une dimension.

([1]) Nous pensons ici à des menottes en caoutchouc ! Les menottes réelles contiennent une chaîne dont chaque maille est un trou supplémentaire du point de vue topologique !
([2]) Les objets ayant la même forme que le beignet ont un nom de baptême mathématique : les TORES.

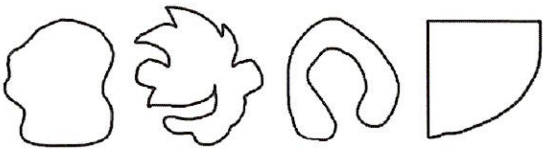
Math-Jeunes Junior n°117J, 6–8, 2007

2. Un élastique dans le plan

2.1. Ce que l'on peut faire

Il suffit de jouer avec un élastique à plat sur une feuille de papier. La règle est très simple : on peut faire tout ce qu'on veut avec l'élastique tant qu'il ne quitte pas le plan ! On peut l'étirer ou le contracter.

On peut alors obtenir des tas de formes :

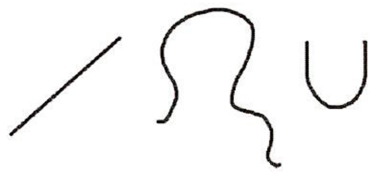


L'élastique est transformable en cercle.

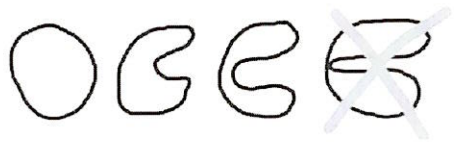
2.2. Ce que l'on ne peut pas faire

Couper l'élastique

Un élastique coupé est quant à lui transformable en segment de droite. On peut aussi le transformer de la sorte :



Souder deux points



2.3. Figures élastiquement équivalentes

De manière générale, on peut dire que deux figures sont élastiquement équivalentes si l'une peut être transformée en l'autre par étirement des traits et du support plan, par contraction des traits et du support plan sans qu'il y ait ni déchirement ni collage.

L'alphabet contient des lettres élastiquement équivalentes.

A B C D E F G H I J K L M
N O P Q R S T U V W X Y Z

Nous avons écrit le même mot de quatre façons différentes en remplaçant chaque fois certaines lettres par des lettres élastiquement équivalentes :

C Z A C T U X **J J R S E J X**
M U A I Y S X **C Z R Z I Z X**

Reconstitue le mot mystérieux !

Petit indice (in)utile : chacune des écritures bizarres contient trois lettres « correctes » bien placées ! [3]

---

[3] xnǝıɹnɔ

3. A toi de jouer !

Parmi les figures suivantes, quels sont les groupes de figures élastiquement équivalentes [4] ?

4. Quelques sites pour en savoir plus. . .

- Un site de bandes dessinées scientifiques téléchargeables gratuitement ! Va sur le site ci-dessous et choisis le TOPOLOGICON dans la liste des albums disponibles..

  http ://www.savoir-sans-frontieres.com
- Si tu ne connais pas encore WIKIPEDIA, tu découvriras une source incroyable de renseignements !

  http ://fr.wikipedia.org/wiki/Topologie

[4] Réponses : 1 et 6 – 2, 3, 4, 11 et 14 – 8 et 10 – 13 et 15 – 7 et 9. Les figures 5 et 12 sont solitaires !

Brèves de classe

C. Villers

B3-Equitable ou inéquitable ? (1)

Mercredi - 11h45

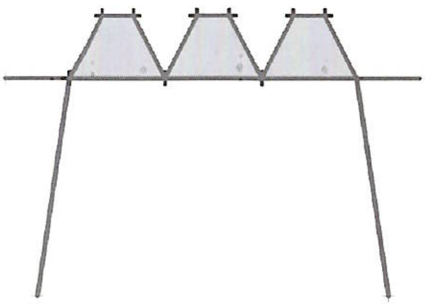
L'effervescence dans la classe est à son comble. L'équipe représentative s'est en effet qualifiée pour la finale du tournoi de volley. Tous, joueurs ou supporters, sont ravis et remplis d'espoir pour une conclusion favorable de la compétition.

Mercredi - 17h15

La finale vient de se terminer. Les trois équipes participantes se sont valeureusement et sportivement défendues. Chacune d'elles a remporté un des matchs l'opposant aux deux autres mais perdu le deuxième. En outre, les scores des trois rencontres sont strictement les mêmes. Il est devenu impossible de désigner le vainqueur du tournoi par la simple application directe de son règlement. Comme cela est cependant prévu dans le règlement du tournoi, le jury est en réunion pour déterminer un mode de classement.

Mercredi - 18h00

Le président du jury expose le processus qui permettra d'attribuer la coupe du vainqueur.



« *Sur une table, trois seaux identiques sont retournés. Sous l'un d'eux se trouve la coupe. On procède comme suit. Le capitaine d'une équipe s'avance et retourne un des seaux. Si la coupe apparaît alors son équipe est déclarée gagnante du tournoi. Sinon, cette équipe est perdante, le seau est retiré et on appelle le capitaine d'une deuxième équipe. Il retourne un des deux seaux qui restent. Si la coupe apparaît alors l'équipe est déclarée gagnante du tournoi. Sinon cette équipe est perdante, le seau est retiré et on appelle le capitaine de la dernière équipe. Il retourne le seau qui reste et dans ce cas, bien entendu, la coupe apparaît. Cette dernière équipe est la gagnante du tournoi* ».

Mercredi - 18h30

(1) Ce problème a été posé comme question du Math-Quiz proposé dans le *Math-Jeunes Junior*107

La coupe a enfin été attribuée selon le processus ci-dessus. Les commentaires vont bon train et traitent principalement du fait de savoir si cette façon de désigner l'équipe gagnante est équitable ou non.

Les « vainqueurs » estiment, bien entendu, que le procédé est tout à fait équitable.

Quant aux perdants, ils affirment qu'il ne l'est pas.

Et vous ? Pensez-vous que cette façon de procéder est équitable ? Forgez-vous une opinion avant de lire la suite.

Commentaires

Sachez tout d'abord que tous les participants au concours Math-Quiz ont estimé que le procédé utilisé n'est pas équitable.

De même, à quelques exceptions près, les personnes à qui la question a été soumise sont également de cet avis.

La plupart prennent comme argument que si le premier capitaine choisit le « bon » seau alors les deux autres n'ont plus l'occasion de tenter leur chance. Ils sont bien d'accord pour dire que le premier qui se présente au tirage a une chance sur trois de découvrir la coupe. et ensuite ils déclarent que si le deuxième doit se présenter alors il a, lui, une chance sur deux de désigner le bon seau. Ils oublient que le premier ayant utilisé une chance sur trois n'a laissé au second que deux chances sur trois de trouver la coupe. et qu'en conséquence le deuxième capitaine n'a disposé que d'une chance sur deux des deux chances sur trois restantes soit donc aussi une chance sur trois de trouver la coupe.

Mathématiquement, on peut écrire la probabilité que le premier capitaine trouve la coupe sous la forme de la fraction $\frac{1}{3}$.

La probabilité que la coupe ne soit pas découverte (c'est bien ici le cas de le dire) est donc exprimée par la fraction $\frac{2}{3}$.

Et la probabilité que le deuxième capitaine trouve la coupe si le premier ne l'a pas trouvée est de $\frac{1}{2} \times \frac{2}{3}$ soit $\frac{1}{3}$.

Dès lors la probabilité que le troisième capitaine trouve la coupe si les deux premiers ne l'ont pas fait est donc aussi de $\frac{1}{3}$.

La probabilité d'être désignée comme gagnante du tournoi par le procédé utilisé est donc de $\frac{1}{3}$ pour chacune des équipes quel que soit le moment où la coupe est découverte. Le procédé en question est donc tout à fait équitable.

Complément

La probabilité qu'un événement se produise est un nombre compris dans l'intervalle fermé $[0; 1]$. La probabilité d'un événement certain est 1.

L'étude des probabilités pour des évènements de se produire constitue une branche importante des mathématiques appelée « théorie des probabilités ».

Vous l'aborderez dans votre cours de mathématiques dans les classes « supérieures ».

A propos du binôme x²+a

A. Paternottre

Quel est le problème ?

Si a est un nombre entier, déterminer tous les nombres entiers x tels que le binôme x^2+a soit le carré parfait d'un nombre entier.

1. a est impair $\Leftrightarrow a \in \{\pm 1, \pm 3, \pm 5, \cdots\}$

Montrons que $\dfrac{a-1}{2}$ est une valeur de x qui convient. En effet si $x = \dfrac{a-1}{2}$, on a :

$$x^2 + a = \left(\frac{a-1}{2}\right)^2 + a = \frac{a^2-2a+1}{4} + a = \frac{a^2-2a+1+4a}{4} = \left(\frac{a+1}{2}\right)^2$$

Remarquons que $\dfrac{a-1}{2}$ ainsi que $\dfrac{a+1}{2}$ sont bien des nombres entiers puisqu'on a supposé que a était impair.

Ainsi :

si $a = 219$ alors pour $x = \frac{219-1}{2} = 109$ on a $x^2 + 219 = 109^2 + 219 = 12100 = 110^2 = \left(\frac{219+1}{2}\right)^2$

si $a = 1$ alors pour $x = \frac{1-1}{2} = 0$ on a $x^2+1 = 0^2+1 = 1 = 1^2 = \left(\frac{1+1}{2}\right)^2$ ce qui était prévisible !

si $a = -13$ alors pour $x = \frac{-13-1}{2} = -7$ on a $x^2 - 13 = (-7)^2 - 13 = 36 = 6^6 = \left(\frac{-13+1}{2}\right)^2$

Attention ! Reprenons le premier exemple ci-dessus : 109 n'est pas la seule valeur à donner à x pour que $x^2 + 219$ soit carré parfait.

En effet $x = 35$ convient aussi puisque $35^2 + 219 = 1444 = 38^2$.

Nous indiquerons plus loin un moyen permettant de trouver tous les entiers x et k tels que $x^2 + 219 = k^2$.

2. a est un multiple de 4 $\Leftrightarrow \in \{0, \pm 4, \pm 8, \cdots\}$

Montrons que $\dfrac{a}{4} - 1$ est une valeur de x qui convient. En effet si $x = \dfrac{a}{4} - 1$, on a :

$$x^2 + a = \left(\frac{a}{4} - 1\right)^2 + a = \frac{a^2}{16} - \frac{a}{2} + 1 + \frac{2a}{2} = \left(\frac{a}{4} + 1\right)^2$$

Remarquons que $\dfrac{a}{4} - 1$ ainsi que $\dfrac{a}{4} + 1$ sont bien des nombres entiers puisqu'on a supposé que a était multiple de 4.

Ainsi :

si $a = 64$ alors pour $x = \frac{64}{4} - 1 = 15$ on a $x^2 + 64 = 15^2 + 64 = 289 = 17^2 = \left(\frac{64}{4} + 1\right)^2$

si $a = -8$ alors pour $x = \frac{-8}{4} - 1 = -3$ on a $x^2 - 8 = (-3)^2 - 8 = 1 = 1^2 = \left(\frac{-8}{4} + 1\right)^2$

Attention ! Reprenons le premier exemple ci-dessus : 15 n'est pas la seule valeur à donner à x pour que $x^2 + 64$ soit carré parfait.

En effet on aurait pu voir de suite que 0 convient aussi puisque $0^2 + 64 = 64 = 8^2$.

De même la valeur 6 convient car $6^2 + 64 = 100 = 10^2$

Nous indiquerons ci-après un moyen permettant de trouver tous les entiers x et k tels que $x^2 + 64 = k^2$.

3. a est pair et non multiple de 4 $a \Leftrightarrow\in \{\pm 2, \pm 6, \pm 10, \cdots\} = E$

Montrons qu'il n'existe aucune valeur entière de x telle $x^2 + a$ soit le carré d'un nombre *entier*.

Montrons par exemple qu'il n'existe aucun entier x ni aucun entier k tel que $x^2 + 10 = k^2$.

En effet on a successivement :

$$x^2 + 10 = k^2 \Leftrightarrow k^2 - x^2 = 10 \iff (k-x)(k+x) = 10 = \begin{cases} 1 \times 10 = -1 \times -10 \\ 2 \times 5 = -2 \times -5 \end{cases}$$

Si on s'en tient aux seuls produits 1×10 et 2×5, comme $k - x$ et $k + x$ sont des nombres entiers par hypothèse, x et k ne peuvent être que les solutions des 4 systèmes suivants :

$$\begin{cases} k - x = 1 \\ k + x = 10 \end{cases} \quad \begin{cases} k - x = 10 \\ k + x = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} k - x = 2 \\ k + x = 5 \end{cases} \quad \begin{cases} k - x = 5 \\ k + x = 2 \end{cases}$$

$$\downarrow \qquad \downarrow \qquad \downarrow \qquad \downarrow$$

ou $$\begin{cases} x = 4,5 \\ k = 5,5 \end{cases} \quad \begin{cases} x = -4,5 \\ k = 5,5 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 1,5 \\ k = 3,5 \end{cases} \quad \begin{cases} x = -1,5 \\ k = 3,5 \end{cases}$$

Si on prend en compte les produits -1×-10 et -2×-5, on obtient encore 4 solutions qui ne sont autres que les opposées des 4 précédentes.

Aucune de ces 8 solutions n'étant entières, il n'y a donc aucun entier x et aucun entier k vérifiant l'égalité $x^2 + 10 = k^2$.

Montrons d'une façon générale qu'il en est toujours ainsi si $a \in E$.

En effet si $a \in E$ alors a est toujours (de plusieurs façons) un produit d'un nombre pair (p) et d'un nombre impair (i).

Dès lors $a = p.i$ et, en travaillant comme ci-dessus, il vient :

$$x^2 + p.i = k^2 \iff k^2 - x^2 = p.i \iff (k-x)(k+x) = p.i$$

Tous les facteurs de cette dernière équation étant entiers, on est amené à résoudre les systèmes :

$$\begin{cases} k - x = p \\ k + x = i \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} k - x = i \\ k + x = p \end{cases}$$

$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow$$

$$\text{ou} \begin{cases} x = \dfrac{i-p}{2} \\ k = \dfrac{i+p}{2} \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \dfrac{-i+p}{2} \\ k = \dfrac{i+p}{2} \end{cases}$$

Comme $i + p$, $i - p$, $-i + p$ sont tous des nombres impairs (pourquoi ?), leur quotient par 2 n'est jamais entier. Donc ni x ni k ne sont entiers.

4. Revenons aux deux cas examinés ci-dessus : a est impair ou a est multiple de 4.

Dans ces deux cas, on peut encore s'inspirer des exemples du n°3 pour trouver les entiers x et k tels que $x^2 + a$ est un carré parfait. Essaie par exemple avec les binômes $x^2 - 105$ et $x^2 + 32$.

Bonnes recherches !

Quelques curiosités numériques

R. Gerardy

Les opérations sur les nombres présentent parfois des particularités étonnantes.

A. Recherche de carrés

1)

$$1^2 = 1$$
$$11^2 = 121$$
$$111^2 = 12321$$
$$1111^2 = 1234321$$
$$11111^2 = 123454321$$
$$111111^2 = 12345654321$$
$$\ldots$$

2)

$$9^2 = 81$$
$$99^2 = 9801$$
$$999^2 = 998001$$
$$9999^2 = 99980001$$
$$99999^2 = 9999800001$$
$$999999^2 = 999998000001$$
$$\ldots$$

Questions :

a) peut-on poursuivre cette démarche aussi loin que l'on veut en constatant la même régularité ?

b) qu'en est-il si l'on forme d'autres carrés en utilisant les chiffres 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ou 8 ?

c) est-il possible de comparer les résultats obtenus en utilisant les chiffres 3 ou 6 d'une part et 9 d'autre part ?

d) si certaines régularités apparaissent avec le calcul des carrés, en est-il de même avec les cubes ?

B. Autres opérations : jusqu'où peut-on aller chaque fois ?

1)

$$(0 \times 9) + 1 = 1$$
$$(1 \times 9) + 2 = 11$$
$$(12 \times 9) + 3 = 111$$
$$(123 \times 9) + 4 = 1111$$
$$(1234 \times 9) + 5 = 11111$$
$$(12345 \times 9) + 6 = 111111$$
$$\ldots$$

2)

$$(0 \times 9) + 8 = 8$$
$$(9 \times 9) + 7 = 88$$
$$(98 \times 9) + 6 = 888$$
$$(987 \times 9) + 5 = 8888$$
$$(9876 \times 9) + 4 = 88888$$
$$(98765 \times 9) + 3 = 888888$$
$$\ldots$$

3)

$$(1 \times 8) + 1 = 9$$
$$(12 \times 8) + 2 = 98$$
$$(123 \times 8) + 3 = 987$$
$$(1234 \times 8) + 4 = 9876$$
$$(12345 \times 8) + 5 = 98765$$
$$(123456 \times 8) + 6 = 987654$$
$$\ldots$$

4)

$$9 \times 6 = 54$$
$$99 \times 66 = 6534$$
$$999 \times 666 = 665334$$
$$9999 \times 6666 = 66653334$$
$$99999 \times 66666 = 6666533334$$
$$999999 \times 666666 = 666665333334$$
$$9999999 \times 6666666 = 66666653333334$$
$$\dots$$

5)

$$(1 \times 9) - 1 = 8$$
$$(21 \times 9) - 1 = 188$$
$$(321 \times 9) - 1 = 2888$$
$$(4321 \times 9) - 1 = 38888$$
$$(54321 \times 9) - 1 = 488888$$
$$(654321 \times 9) - 1 = 5888888$$
$$(7654321 \times 9) - 1 = 68888888$$
$$\dots$$

C. En ce qui concerne les réponses obtenues à l'exercice A. 1, nous pouvons remarquer ce qui suit :

1) nous retrouvons d'autres carrés :

$$1 = 1 = 1^2$$
$$1+2+1 = 4 = 2^2$$
$$1+2+3+2+1 = 9 = 3^2$$
$$1+2+3+4+3+2+1 = 16 = 4^2$$
$$1+2+3+4+5+4+3+2+1 = 25 = 5^2$$
$$1+2+3+4+5+6+5+4+3+2+1 = 36 = 6^2$$
$$\dots$$

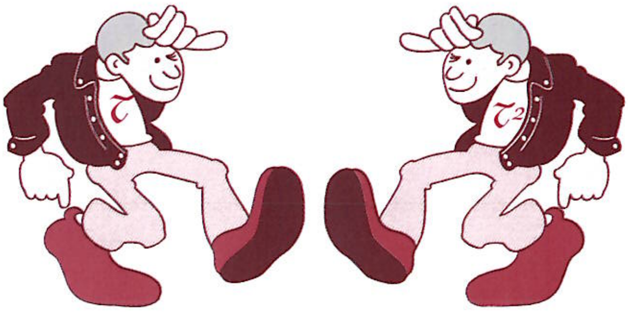
2) les résultats obtenus peuvent aussi s'écrire sous la forme des fractions suivantes :

$$121 = \frac{22 \times 22}{1+2+1} = \frac{484}{4}$$
$$12321 = \frac{333 \times 333}{1+2+3+2+1} = \frac{110889}{9}$$
$$1234321 = \frac{4444 \times 4444}{1+2+3+4+3+2+1} = \frac{19749136}{16}$$
$$123454321 = \frac{55555 \times 55555}{1+2+3+4+5+4+3+2+1} = \frac{3086358025}{25}$$
$$12345654321 = \frac{666666 \times 666666}{1+2+3+4+5+6+5+4+3+2+1} = \frac{444443555556}{36}$$
$$\dots$$

Les frères Hick 20

B. Honclaire

Agence de détectives privés
Les frères Hick
Recherches en tous genres



Ami lecteur,

$\mathcal{T}^2$ nous fera part de ses solutions pour la fiche 32.

$\mathcal{T}$ aura de nouveau l'occasion de jouer au professeur, en apportant des précisions qu'il juge indispensables !

Pour rappel, le contenu de la fiche 32 :
Un rectangle de 10 cm sur 4 cm a été obtenu en assemblant trois triangles rectangles.
Quelles sont les aires des trois triangles ?

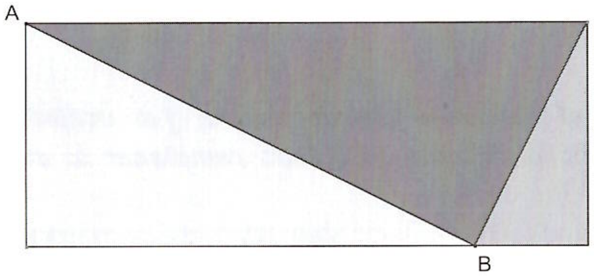


fig. 1

Autre rappel : $\mathcal{T}$ a confié à son frère les tâches suivantes :

- comparer les angles des trois triangles et calculer les longueurs des côtés d'un triangle à partir des longueurs d'un des autres triangles,
- construire la figure en commençant par le rectangle.

$\mathcal{T}^2$ s'est proposé de reparler de Pythagore au sujet des trois triangles rectangles.

Bon courage et bon amusement.

$\mathcal{T}^2$ - « *Pour les angles des trois triangles rectangles, ce n'était vraiment pas difficile : ensemble $A1$ et $A2$ font 90 , de même que $A1$ et $B2$ ...* »

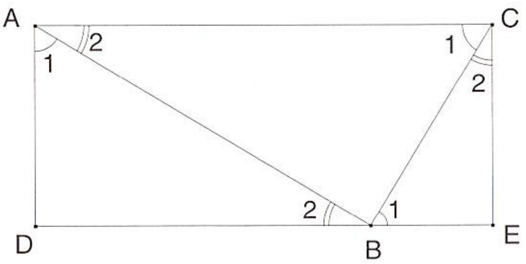


fig. 2

$\mathcal{T}$ (avec un léger sourire) - « *Ils sont complémentaires !* »

$\mathcal{T}^2$ (reprenant, semblant ignorer la remarque) - « *ce qui veut dire que $A2$ et $B2$ sont égaux ! Tu peux répéter le même raisonnement et ainsi expliquer que les angles marqués d'un trait sont égaux ! Idem pour les angles marqués de deux traits !* »

$\mathcal{T}$ (satisfait) - « *On dit que ces triangles sont semblables!* »

$\mathcal{T}^2$ (en lui-même, légèrement irrité) - « *... Précision indispensable!! ... J'avais dit qu'ils se ressemblaient!!...* (continuant) *... J'ai ensuite réalisé un tableau avec les côtés des trois triangles, j'ai utilisé des lettres pour les longueurs inconnues et... je n'ai pas indiqué les cm!*

	CBE	ABD	ABC
hypoténuse	z	t	10
petit côté angle droit	x	4	z
grand côté angle droit	4	y	t

Evidemment je connais des relations entre ces nombres : $x + y = 10$ et grâce à Pythagore, $z^2 + t^2 = 100$, $x^2 + 16 = z^2$, $16 + y^2 = t^2$. (On y reviendra plus tard!)

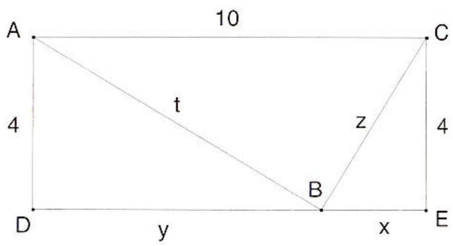


fig. 3

En ce qui concerne les longueurs, j'ai utilisé le fait que $x + y = 10$ et il n'est pas trop difficile de voir qu'il faut remplacer x et y par 2 et 8 ,

petit côté angle droit	1	2	3	4	5	4				
grand côté angle droit	4					9	8	7	6	5

ce qui permettra de passer du triangle CBE au triangle ABD en multipliant les longueurs par 2. Je peux maintenant calculer les aires des trois triangles rectangles; elles valent 20 (on le savait dès le départ), 16 et 4 »

$\mathcal{T}$ (agréablement surpris) - « *Avec les relations de Pythagore que tu me signalais auparavant, tu aurais pu trouver le même résultat!* »

$\mathcal{T}^2$(fier de lui, il insiste) - « *J'ai trouvé le même résultat!... J'ai complété la figure 3 par un carré de côté $[ED]$! Tu vois d'après les relations de Pythagore $z^2 + t^2 = 100$, $x^2 + 16 = z^2$ et $16 + y^2 = t^2$, on peut affirmer que $x^2+16+y^2+16 = 100$ et puisque la figure nous montre que $x^2+xy+y^2+xy = 100$, nous pouvons donc déduire que $xy = 16$. Il est simple de trouver deux nombres dont la somme vaut 10 et le produit 16!...* »

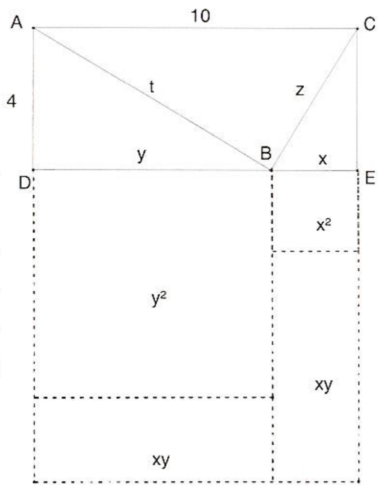


fig. 4

$\mathcal{T}$ (étonné) - « *Je n'ai rien à ajouter! C'est parfait!* - (en lui-même) - *Il a eu de la chance que les solutions étaient des nombres entiers!...* »

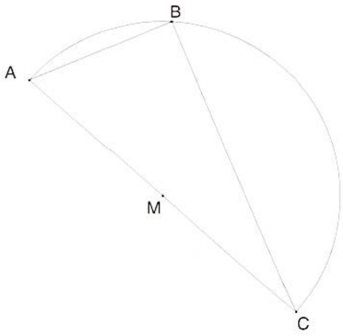


fig. 5

$\mathcal{T}^2$ (encouragé par la remarque de son frère) - « *Tu m'avais demandé de réfléchir aux triangles inscrits dans un demi-cercle! Pour me convaincre que ce sont des triangles rectangles, j'ai complété la figure pour former un rectangle. $ABCD$ est en effet un quadrilatère qui a ses diagonales de même longueur et qui ont le même milieu.* »

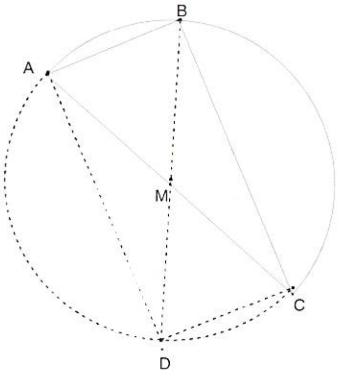


fig. 6

$\mathcal{T}$ (tout heureux de pouvoir enfin placer une remarque) - « *C'est en fait un parallélogramme qui a ses diagonales de même longueur!* »

$\mathcal{T}^2$(imperturbable) - « *Je peux maintenant reprendre la construction de la figure 1 en commençant par le rectangle! J'ai fait un fichier (hick201.fig) et j'ai laissé le choix des dimensions...* »

$\mathcal{T}$ (en lui-même) - « *Cela me donne des idées...!* »

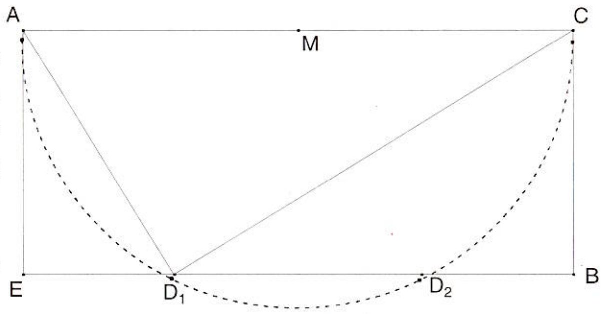


fig. 7

$\mathcal{T}^2$ - « *... Pour tracer le triangle rectangle à l'intérieur du rectangle, je dois juste construire un demi-cercle de diamètre $[AC]$. S'il coupe le côté $[EB]$, il me donne deux solutions symétriques!...* »

$\mathcal{T}$ (poursuivant son idée) - « *Attends! Nous allons préciser les choses! Tu viens de dire que les dimensions de ton rectangle sont réglables! Nous allons examiner la fiche 32 avec un rectangle de dimensions a et b!* »

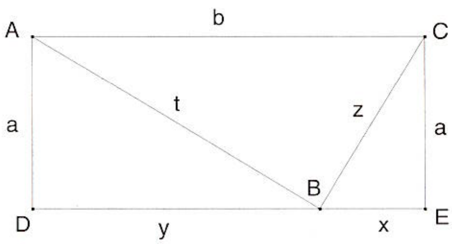


fig. 8

$\mathcal{T}^2$ - « *... C'est plus facile pour s'expliquer! Le demi-cercle coupe $[EB]$ si a est plus petit que la moitié de b ... il touche...* »

$\mathcal{T}$ (distraitement) - « *Il est tangent...!* »

$\mathcal{T}^2$(ignorant la remarque) -« *... $[EB]$ si a est la moitié de b et ne le coupe pas si a est plus grand que la moitié de b!* »

$\mathcal{T}$ (magistral) - « *Il ne nous reste plus qu'à calculer x et y dans ce cas! Tes relations deviennent $x + y = b$, $z^2 + t^2 = b^2, y^2 + a^2 = t^2$, $a^2 + x^2 = z^2$. Nous pouvons affirmer que $y^2 + a^2 + x^2 + a^2 = b^2$ et que $x^2 + xy + y^2 + xy = b^2$ (grâce à ta figure 4). Nous pouvons donc déduire que $xy = a^2$. Il suffit donc de trouver deux nombres dont* la somme vaut b et le produit a^2 ! Pourrais-tu par exemple me calculer x et y si les dimensions du rectangle sont ... 15 et... 6?»

$\mathcal{T}^2$(concentré) - « ... C'est pas compliqué!... Des produits qui font $36 \cdots\ 36 \times 1 \cdots$ la somme fait 37 ... 18×2 ... non... 12×3 ... la somme fait 15!...»

$\mathcal{T}$ (insistant) - « Ne crois pas que c'est toujours aussi simple! C'est en général une autre paire de manches...!»

$\mathcal{T}^2$(pensif) - « ... Je dois sans doute prendre cela au second degré!?... Tu m'as aussi dit que tu voulais me reparler des assemblages de carrés!...»

$\mathcal{T}$ - « Oui! Dans le numéro précédent, nous avions examiné un assemblage de carrés qui formait un grand rectangle. Figure-toi que j'ai trouvé d'autres assemblages et je ne peux m'empêcher de te les montrer! Je pense que tu pourras en construire d'autres en respectant le même principe, comparer leurs dimensions et je te demande si n'importe quel rectangle peut se décomposer en carrés par cette méthode?»

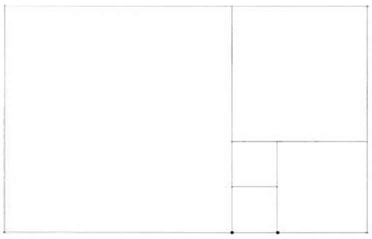


fig. 9

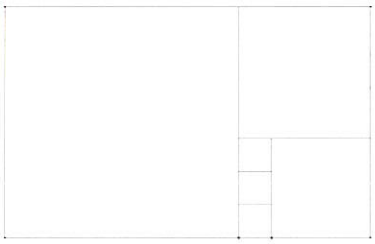


fig. 10

$\mathcal{T}^2$- « Je sens que Cabri va être sollicité! Commencer par les petits carrés me semble plus simple au départ...! Au sujet des dimensions,... j'ai envie de prendre 1 comme côté des petits carrés... et cela donne dans l'ordre des tailles des carrés ... 1 (2 petits carrés), 2 , 3 , 5 et les dimensions du rectangle sont alors 5 et 8 . Pour la deuxième figure,... 1(3), 3, 4, 7 - rectangle : 7 et 11. Pour la suivante :... 1(4), 4, 5, 9 - rectangle : 9 et 14 , et... ainsi de suite...!»

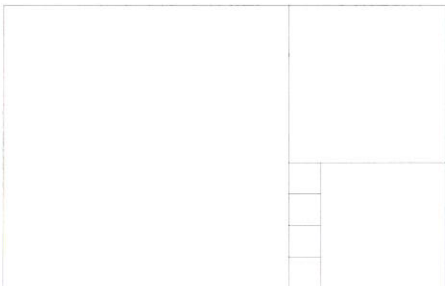


fig. 11

$\mathcal{T}$ (pouffant de rire) - « Je traduis : $1(n)$, n , $n+1$, $2n+1$ - et les dimensions du rectangle : $2n+1$ et $3n+2$!»

$\mathcal{T}^2$- « J'avais une autre idée : prendre 1 comme aire des petits carrés. Avec comme résultat : 1 (2 petits carrés), 4, 9, 25 et l'aire du rectangle : 40; 1(3), 9, 16, 49 et l'aire du rectangle : 77; 1(4), 16, 25, 81 - rectangle : 126 ... A toi, pour la suite...!»

$\mathcal{T}$ (ironique) - « $1(n)$, n^2, $(n+1)^2$, $(2n+1)^2$ - rectangle : $(2n+1)(3n+2)$ ...!»

$\mathcal{T}^2$(perplexe) - « ... J'ai le sentiment de me faire rouler!... Tu me donnes la solution ou tu me poses la question?... Tu veux sans doute que je fasse les calculs pour toi!... (en lui-même) - Il me rappelle de plus en plus mon prof de math!...- Tu as de la chance, j'ai toujours adoré effectuer ces calculs... J'ai l'habitude de faire un dessin; je sais que ce n'est pas indispensable, mais cela m'aide!... Regarde!

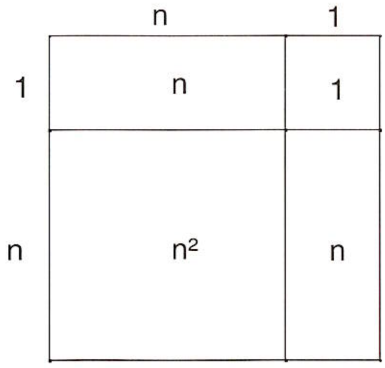


fig. 12

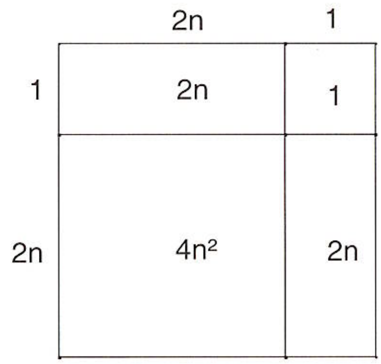


fig. 13

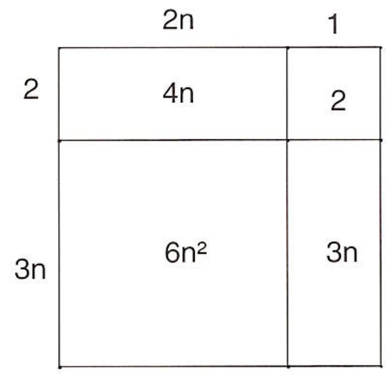


fig. 14

Les réponses sont bien visibles : $n^2 + 2n + 1$, $4n^2 + 4n + 1$ et $6n^2 + 7n + 2$! »

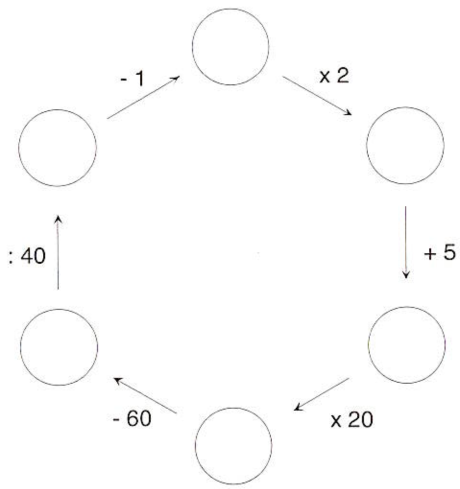
$\mathcal{T}$ - « ***Il te restera à examiner la situation à partir d'un rectangle quelconque !*** »

$\mathcal{T}^2$- « ***Pourrait-on également réfléchir au problème de la fiche 15***

(Fiches de jeux disponibles sur le site `http://www.conifere.be/`) »

Enoncé de la fiche 15
- Choisis un nombre, écris-le dans un des six disques.
- En appliquant les opérateurs imposés, calcule les contenus des disques suivants.
- Recommence en changeant de nombre initial, de disque initial.

La boucle se fermera-t-elle **toujours** ?



Ami lecteur, peux-tu aider $\mathcal{T}$ et $\mathcal{T}^2$ à répondre à ces questions ?

Le fichier Cabri utilisé dans l'article est disponible sur le site `http://www.sbpm.be/`

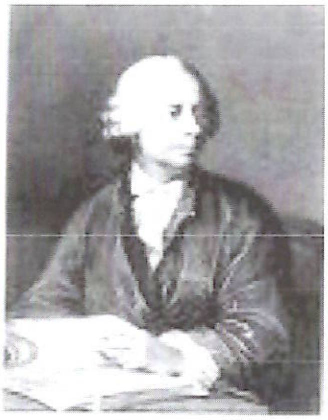
Bon courage, bon amusement et à bientôt !

Bernard Honclaire

Euler

S. Trompler

Leonhard EULER (1707–1783)



Il y a 300 ans naissait Leonhard Euler, mathématicien suisse, considéré souvent comme le plus important de la génération qui a suivi Newton et un des plus grands de tous les temps

C'est son père qui lui a appris les rudiments de mathématique et c'est probablement lui qui lui en a donné le goût. Dès lors, il lit des livres de mathématique par lui-même . A quatorze ans , il entre à l'université de Bâle ; il y fait la connaissance du célèbre mathématicien Johann Bernoulli, qui le prend sous son aile en voyant ses extraordinaires aptitudes pour les mathématiques . Son père voudrait lui voir embrasser la carrière ecclésiastique et Leonhard apprend la théologie, la médecine, l'astronomie, les langues orientales avec une même facilité, mais sans l'enthousiasme qu'il éprouve pour les mathématiques. Grâce à Johann Bernoulli, il obtient de son père de suivre sa passion. Quand ses études à l'université de Bâle sont terminées (il a dix-neuf ans), il a déjà lu beaucoup d'oeuvres, notamment de Descartes, Newton, Galilée et bien d'autres. Il a aussi une publication à l'impression.

En 1727, il concourt au Grand Prix de l'Académie de Paris sur la meilleure disposition du mât sur un navire et gagne la deuxième place. On lui offre alors un poste à l'Académie de Saint-Pétersbourg pour enseigner l'application des mathématiques et de la mécanique à la physiologie.

De 1727 à 1730, il est officier dans la marine russe.

En 1730, il est nommé professeur de physique et de mathématiques à l'Académie de Saint-Pétersbourg. Il publie une quantité phénoménale d'articles.

En 1741, il quitte Saint-Pétersbourg pour l'Académie de Berlin et il y reste 25 ans, tout en gardant des contacts étroits avec la Russie où il retourne comme directeur de l'Académie.

Malheureusement, peu après, alors qu'il avait déjà perdu l'usage d'un oeil, il perd complètement la vue. Il continue cependant à publier grâce à sa mémoire exceptionnelle, en dictant ses oeuvres à ses fils.

Il meurt en 1783. Son oeuvre complète compte près de 75 volumes ! Sa contribution aux mathématiques touche à tous ses aspects. Il est impossible de la détailler ici , mais remarquons qu'il est à la base de beaucoup de nos notations actuelles ; en voici quelques exemples :

la lettre π pour le rapport de la circonférence du cercle à son diamètre, la lettre e pour représenter la base des logarithmes naturels, le symbole i pour $\sqrt{-1}$, l'usage des lettres a , b , c pour les côtés d'un triangle et A, B, C pour les sommets .

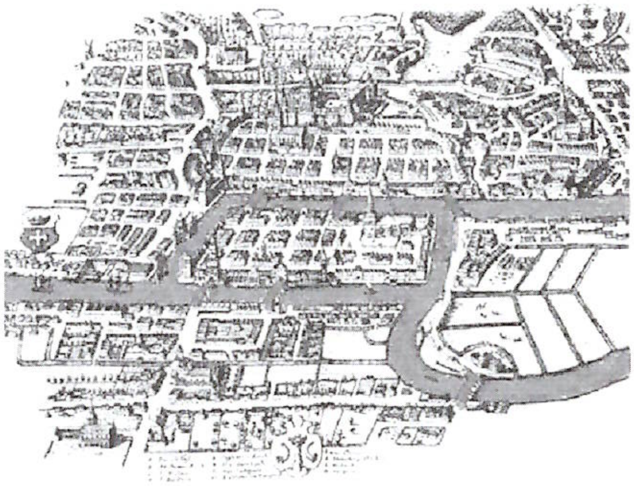
On lui doit aussi la notation $f(x)$. Il est le premier à considérer $\cos x$, $\sin x$, $\mathrm{tg}\, x$ comme des nombres, des rapports et plus comme des cordes.

Amené à s'intéresser à la théorie des réseaux, en 1716 , il résout le problème des 7 ponts de Koenigsberg : il prouve qu'il est impossible de les traverser tous à la suite sans passer 2 fois par l'un d'entre eux..

Il généralise la question et énonce des théorèmes qui peuvent être considérés comme le début de la théorie des graphes.

La célèbre formule d'Euler lie le nombre de faces, de sommets et d'arêtes d'un polyèdre :

$$f + s - a = 2$$



Math-Jeunes Junior vous propose le Sudomat n°3

Les 9 lettres différentes qui figurent dans la grille permettent, si elles sont replacées dans le bon ordre, de former un mot connu ayant trait aux mathématiques.

Le mot-mystère du jour répond à la définition « Représente la fonction ».

Règle du jeu :

Vous devez compléter la grille de manière que chaque ligne horizontale, chaque colonne verticale et chaque carré 3×3 comportent toutes les lettres du mots mystère.

Niveau de difficulté : ***1***

I		G		P		R		E
	E	Q	G		I	H	P	
	U		R		E		I	
	A						H	
	G		H		A		Q	
	Q	P	U		R	A	E	
A		E		H		Q		G

Niveau de difficulté : ***2***

		A		G				
	I							
G			Q	I	E	P		U
	U	I	A		G	H		
		Q				G		
		E	P		H	A	U	I
I		G	E	P	U			Q
							G	
				A		E		

Vous trouverez les solutions du Sudomath n° 3 et 4 à la page 28 de ce *Math-Jeunes Junior* 117

Y. Noël-Roch

1. Les « carrés bicolores » (D'après **Arnaud Gazagnes** et la brochure « **Jeux 1** » de l'APMEP n°44, 1982.)

A. Des carrés plus ou moins coloriés.

Des carrés de 2cm de côté sont partagés en quatre zones par les deux médianes.
Chacune des quatre zones est soit laissée vierge, soit coloriée, comme dans les exemples ci-dessus : Les deux carrés coloriés de gauche sont superposables ; par contre, aucun des deux n'est superposable à un des deux autres carrés coloriés.

Si nous adoptons le point de vue qui consiste à ne compter que pour 1 tous les carrés coloriés qui sont images l'un de l'autre par une isométrie, nous avons dessiné **trois carrés coloriés différents. Combien en existe-t-il ? Dessine-les.**

B. Des **pavés**, pièces d'un puzzle.

Orientons maintenant les carrés coloriés en identifiant le coin supérieur droit par un point noir.
Ci-dessus, les **quatre pavés** obtenus à partir de nos dessins précédents. Les deux pavés de gauche ne sont pas équivalents à une isométrie près et nous comptons **quatre pavés différents**.

Combien existe-t-il de pavés différents ? Dessine-les tous et découpe-les : tu disposeras alors des pièces d'un puzzle. *Contrôle les pièces de ton puzzle à celles de la page-solution avant de continuer ce jeu.*

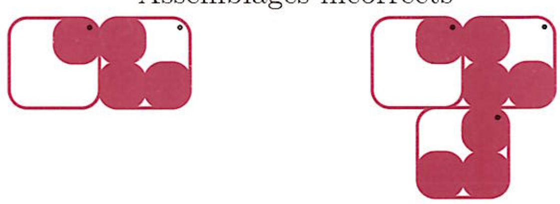
C. Des assemblages de pavés.

Deux pavés peuvent être assemblés (posés bord à bord, sans débordement ni superposition) si les zones qui se touchent ont la même couleur. Ces assemblages peuvent être réalisés de deux façons : soit en respectant l'orientation des pavés (point noir dans le coin supérieur droit), soit en ne la respectant pas.

Assemblages corrects

Les deux assemblages sont corrects. Dans le premier, l'orientation des pavés est respectée, elle ne l'est pas dans le second

Assemblages incorrects



Des assemblages non autorisés ... pour des raisons différentes : couleurs désaccordées ou alignement des bords non respecté.

D. Assemblages et puzzles.

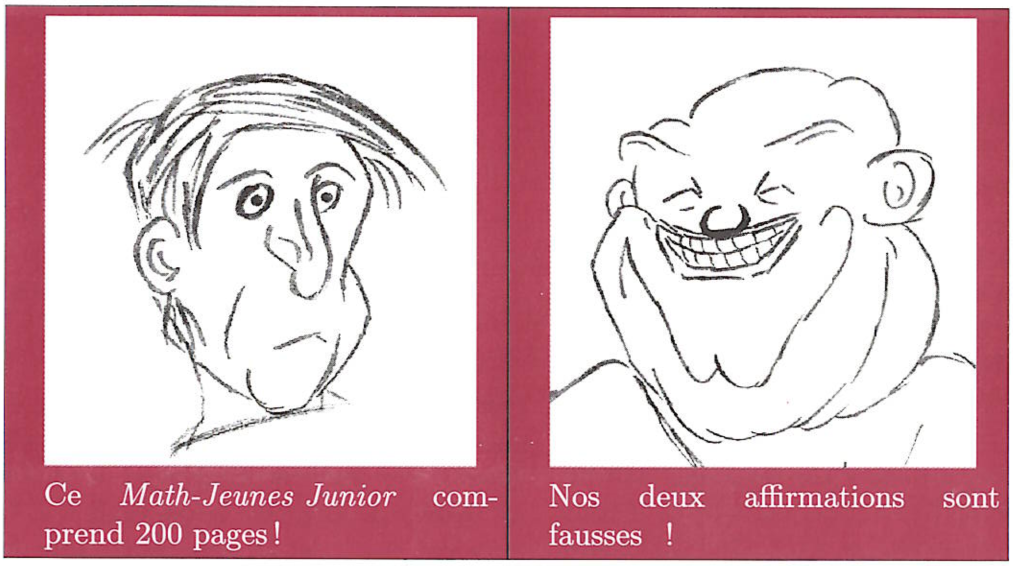
En assemblant les seize pavés, tu peux réaliser un « **grand pavé** » (de dimension 4×4)
- sans tenir compte de l'orientation des pavés
- en respectant l'orientation des pavés

Un grand pavé 4×4 peut lui-même engendrer par assemblage (en respectant les couleurs !)
- une bande horizontale **si** les deux bords verticaux de ce grand pavé sont coloriés de la même façon
- un pavage du plan **si** les deux bords horizontaux sont également coloriés de manière à pouvoir être assemblés dans les règles imposées.

À toi de réaliser des « grands pavés » en respectant progressivement de plus en plus de contraintes. Dans les solutions, tu trouveras une ébauche de bande et une ébauche de pavage du plan.

2. Un paradoxe

Les amis de Nicolas ([1]) aiment créer des paradoxes. Les voici à l'oeuvre :



3. Des nombres de quatre chiffres

Dans l'écriture d'un nombre, nous excluons que le premier chiffre à gauche soit 0, ainsi 0123 n'est pas un nombre de quatre chiffres mais un nombre de trois chiffres : 123.

Certains nombres de quatre chiffres s'écrivent avec un seul ou avec deux chiffres différents seulement. C'est le cas de 4444, 2002, 3553 par exemple.

Combien existe-t-il de nombres de quatre chiffres qui s'écrivent avec **un seul** ou avec **deux** chiffres différents ?

Tous ces nombres ont-ils un ou plusieurs **diviseurs communs** ? Quels sont ceux qui sont multiples de 11 ? Et pour les autres, peux-tu leur trouver un autre diviseur commun (autre que 1 bien sûr !) ?

Vous trouverez les solutions des jeux à la page 29 de ce Math-Jeunes Junior *117.*

([1]) Dessins de Nicolas Klein, Athénée Royal Marguerite Bervoets, Mons

Olympiades

Claudine Festraets

C. Festraets

La demi-finale de l'Olympiade est à présent terminée. Voici les solutions de quelque uns des exercices qui t'ont été proposés. Si tu es parmi les finalistes, je te félicite, sinon exerce-toi pour l'an prochain.

Mini 3

Combien de points d'un terrain de football sont à égale distance des quatre coins du terrain ?

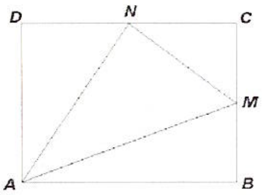
(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) 4

Solution

Le terrain de football est un rectangle, désignons-le par $ABCD$. On sait que tout point de la médiatrice d'un segment est à égale distance des extrémités du segment. Tout point situé à égale distance de A, de B, de C et de D doit être sur la médiatrice de $[AB]$, sur celle de $[BC]$, sur celle de $[CD]$ et sur celle de $[DA]$. C'est donc le point d'intersection des deux médiatrices du rectangle. La réponse est B.

Mini 5

Sans réponse préformulée - Un rectangle $ABCD$ a pour dimensions 16 et 8. Les points M et N sont les milieux des côtés $[BC]$ et $[CD]$. Que vaut l'aire du triangle AMN ?

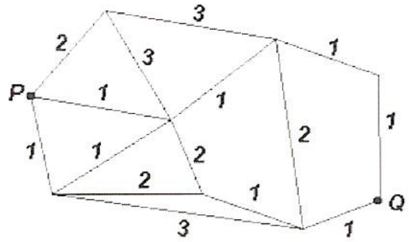


Solution

L'aire du rectangle $ABCD$ vaut $16 \cdot 8 = 128$.
L'aire du triangle ADN vaut
$\frac{1}{2}|AD| \cdot |DN| = 4 \times 8 = 32$.
L'aire du triangle ABM vaut
$\frac{1}{2}|AB| \cdot |BM| = 8 \times 4 = 32$.
L'aire du triangle MCN vaut
$\frac{1}{2}|CM| \cdot |CN| = 4 \times 4 = 16$.
Donc l'aire du triangle AMN vaut $128 - 32 - 32 - 16 = 48$.

Mini 9 - Midi 1

Sans réponse préformulée - Dans le réseau routier représenté ci-dessous, le temps de parcours en heures est indiqué à côté de chaque route. Quelle est, en heures, la durée du trajet le plus rapide pour aller de P à Q ?



Solution

Partant de P, on prend le chemin central de longueur 1, puis les trois chemins successifs de longueur 1 qui arrivent finalement à Q. On a ainsi un chemin de longueur totale égale à 4. On vérifie aisément que c'est le plus court, tous les autres chemins sont au moins de longueur 5.

Mini 11

Un rectangle de longueur 10 a le même périmètre qu'un triangle équilatéral de côté 10. Que vaut la largeur du rectangle ?

(A) 10 (B) 5 (C) $\frac{10}{3}$ (D) 6 (E) 15

Solution

Le périmètre d'un triangle équilatéral de côté 10 vaut 30, c'est aussi le périmètre du rectangle. Le demi-périmètre du rectangle, c'est-à-dire la somme de la longueur et de la largeur, vaut donc 15 et comme la longueur vaut 10, la largeur est égale à 5, réponse B.

Mini 18 - Midi 4

$$\frac{1-\frac{1}{4}}{1+\frac{1}{4}} =$$

Math-Jeunes Junior n°117J, 24–26, 2007

Ⓐ 0 Ⓑ 0,6 Ⓒ 1 Ⓓ 1,5
Ⓔ Aucune des valeurs précédentes.

Solution

$1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$ et $1+\frac{1}{4}=\frac{5}{4}$,
d'ou $\dfrac{1-\frac{1}{4}}{1+\frac{1}{4}}=\dfrac{\frac{3}{4}}{\frac{5}{4}}=\dfrac{3}{4}\times\dfrac{4}{5}=\dfrac{3}{5}=0{,}6$, réponse B.

Midi 9

Le baril de pétrole coûtait 60 dollars il y a un mois. Depuis, ce prix a augmenté de 20 % alors que la valeur du dollar a chuté de 20 % par rapport à l'euro. Pendant le mois dernier, le prix en euros du baril

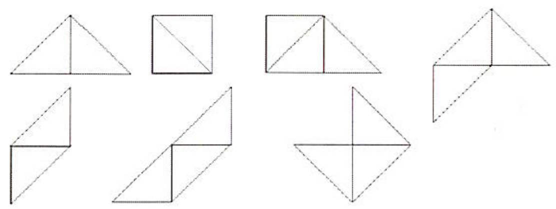
Ⓐ a baissé de 40 % ; Ⓑ a baissé de 4 % ;
Ⓒ est inchangé ; Ⓓ a augmenté de 4 % ;
Ⓔ a augmenté de 44 %.

Solution

Le prix en dollars a augmenté de 20%, il est alors de $60\times\frac{120}{100}$ dollars. Mais la valeur du dollar a diminué de 20%, donc en euros, le nouveau prix est de $60\times\frac{120}{100}\times\frac{80}{100}=60\times\frac{96}{100}$. Il a diminué de 4 %.

Mini 25 - Midi 15

Dans les figures ci-dessous, des triangles rectangles isocèles, tous isométriques, ont été assemblés en faisant coïncider un de leurs côtés.

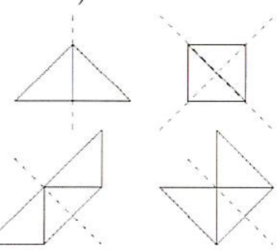


Combien parmi ces figures ont au moins un axe de symétrie ?

Ⓐ 2 Ⓑ 3 Ⓒ 4 Ⓓ 5 Ⓔ 7

Solution

Les deux premières et les deux dernières figures ont au moins un axe de symétrie (dessiné ci-dessous en pointillés) :



Les autres figures n'ont aucun axe de symétrie. La réponse est donc C.

Mini 29 - Midi 16

Un train reliant deux villes et partant toujours à la même heure arrive à destination avec 10 minutes de retard lorsqu'il roule à la vitesse de 80 km/h et avec 16 minutes de retard lorsqu'il roule à la vitesse de 60 km/h. La distance, en kilomètres, entre les deux villes est de

Ⓐ 1440 Ⓑ 144 Ⓒ 100 Ⓓ 64 Ⓔ 24

Solution

On a la relation $e=v\cdot t$ où e désigne la distance en km entre les deux villes, v la vitesse en km/h et t le temps en heures mis pour parcourir le trajet. L'énoncé nous donne $e=80(t+\frac{10}{60})=60(t+\frac{16}{60})$, d'où $20t=\frac{960}{60}-\frac{800}{60}=\frac{160}{60}=\frac{8}{3}$, $t=\frac{8}{60}$ et $e=80\cdot\frac{18}{60}=24$, réponse E.

Maxi 10 - Midi 17

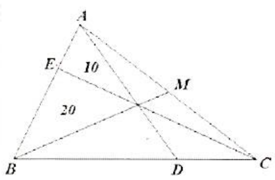
Sans réponse préformulée - Une feuille de papier rectangulaire a un périmètre de 108 cm. Je la plie en deux dans un sens, en quatre dans l'autre et j'obtiens ainsi un carré. Quel est, en centimètres, le périmètre de ce carré ?

Solution

Soient x et y les dimensions du rectangle ; son périmètre vaut $2x+2y=108$. Après le premier pliage, les dimensions sont $\frac{x}{2}$ et y ; après le second pliage, elles sont $\frac{x}{2}$ et $\frac{y}{4}$. On obtient un carré, donc $y=2x$. En remplaçant y par $2x$ dans l'équation $2x+2y=108$, on obtient $6x=108$ d'où $x=18$ et le périmètre du carré vaut $2x=36$.

Midi 30

Dans la figure ci-contre, M est le milieu de $[AC]$ et les droites AD, BM et CE sont concourantes. Deux des petits triangles déterminés par



AD, BM et CE ont pour aires 10 et 20. Quelle est l'aire du triangle ABC ?

Ⓐ 60 Ⓑ 75 Ⓒ 85 Ⓓ 90
Ⓔ Il manque des données.

Solution

Soit K le point d'intersection des droites AD, BM, CE. Comme M est le milieu de $[AC]$, les triangles AKM et CKM ont même aire, soit a. Les triangles ABM et CBM ont aussi même aire, d'où $20+10+a=$ aire $BKC+a$, d'où aire $BKC=30$. Le point E partage le segment $[AB]$ dans le rapport $\frac{1}{2}$, donc aire$BCE=2$.aire ACE, $20+30=2(10+2a)$ et $2a=15$. L'aire du triangle ABC vaut $10+20+30+2a=75$.

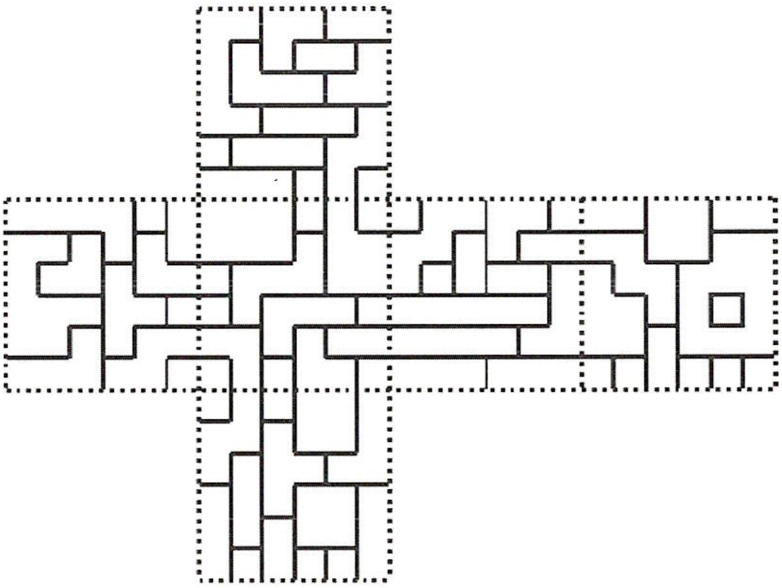
Des développements coloriés

F. Drouin

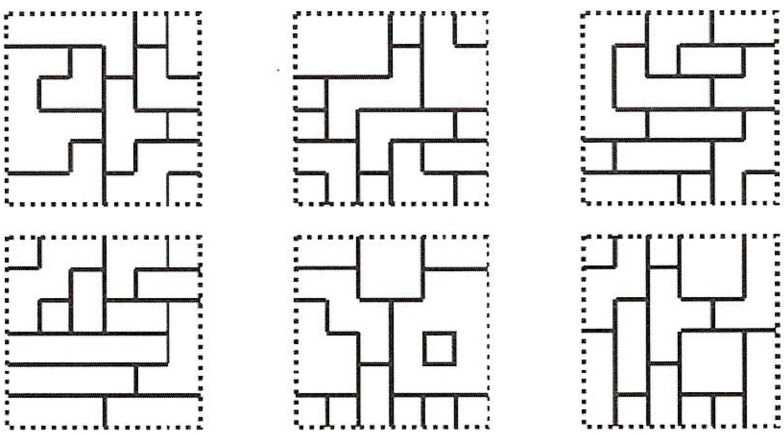
Le numéro 116J de Maths Jeunes Junior vous a présenté un premier développement de solide à colorier. Je vous en redis les contraintes :

1. *Deux zones voisines (c'est à dire ayant au moins un côté commun) ne peuvent pas être de même couleur.*
2. *Les pointillés ne sont pas des limites de zones.*
3. *Une zone peut se prolonger d'une face à une face adjacente.*

Je vous en propose un deuxième qui va nous permettre d'en trouver bien d'autres...

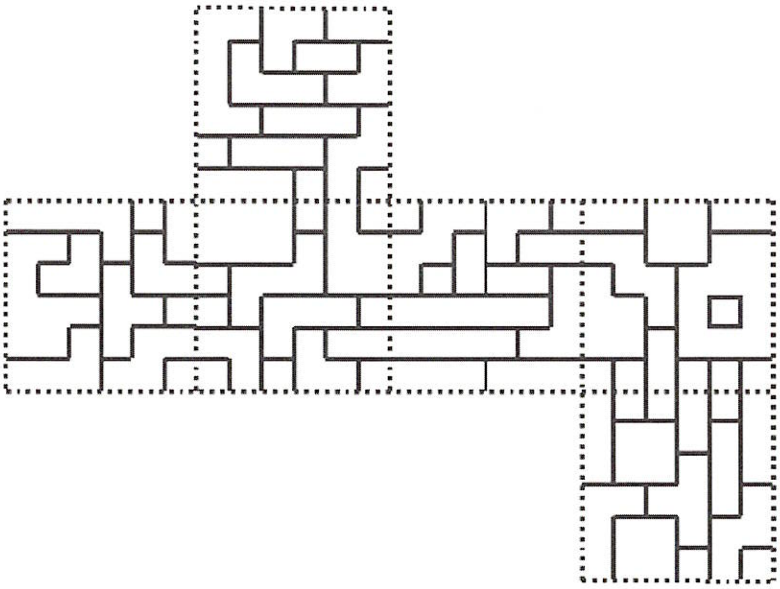


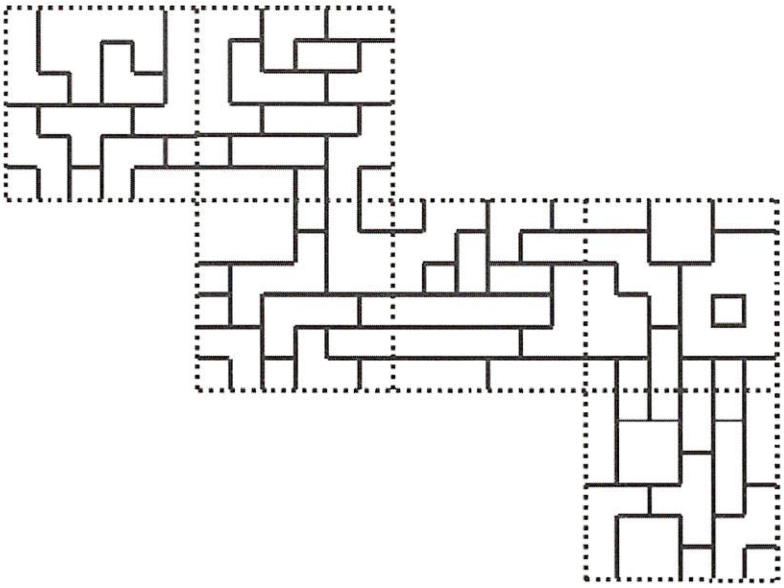
J'ai découpé les six carrés du développement du cube.



Math-Jeunes Junior n°117J, 26–28, 2007

Je les ai ensuite ré assemblés en respectant les jonctions des zones. J'avoue que cet assemblage est facilité lorsque les six carrés découpés sont obtenus à partir d'un développement de cube colorié en respectant les contraintes redites en début de cet article... La rédaction de *Math-Jeunes Junior* ne peut pas vous fournir un développement colorié. J'ai donc pris garde de créer douze types de jonctions différentes pour les faces du cube ; ainsi, il n'y avait pas d'ambiguïté pour leur placement.

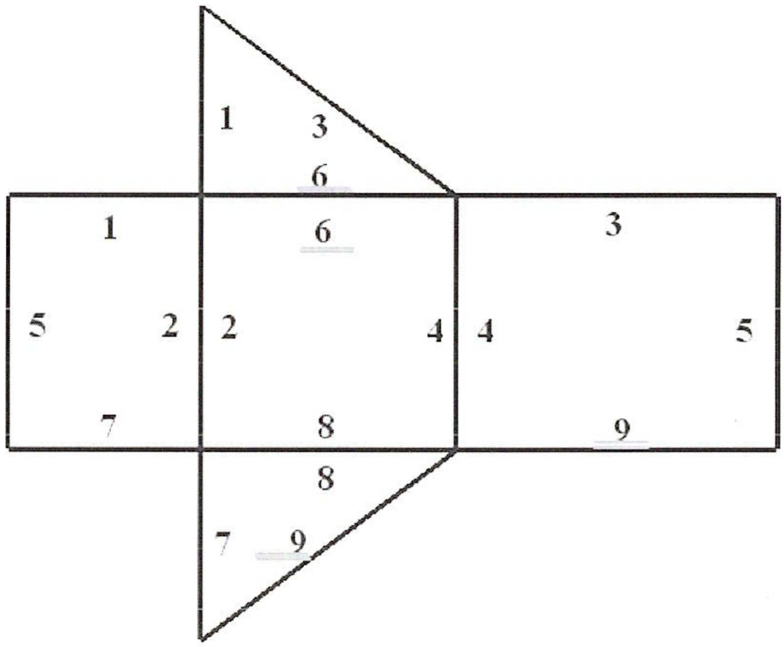




Vous reconnaissez sans nul doute deux autres développements de cubes. Je vous rappelle qu'il en existe 11 différents, je vous laisse les retrouver en manipulant les carrés du patron à colorier que je vous confie en début d'article.

Cette méthode de recherche peut être utilisée pour trouver des développements « non traditionnels » de tout type de solides.

Il n'est pas nécessaire de partir d'un développement à colorier. Il est possible de considérer comme point de départ un développement « classique » pour lequel les arêtes sont toutes différentiées. Je vous propose ci-dessous le développement d'un prisme droit pour lequel toutes les arêtes ont été numérotées.



Il vous reste à photocopier ce développement, découper les cinq faces du prisme et rechercher tous les assemblages possibles en associant les arêtes portant le même numéro.

Pour en revenir aux parallélépipèdes :

- Le développement proposé dans *Math-Jeunes Junior*n°116 était celui d'un parallélépipède dont deux faces étaient des carrés. Combien trouverez-vous de développements différents ?
- Si le parallélépipède avait trois dimensions différentes, combien trouveriez-vous de développements différents (deux développements seront considérés comme différents s'ils ne peuvent pas se correspondre par une symétrie ou par une rotation).

Bonne recherche.

Solutions des sudomath 3 et 4 de la page 21 du *Math-Jeunes Junior* 117

Solution du Sudomath n°3

Le mot mystère est : GRAPHIQUE

I	H	G	Q	P	U	R	A	E
R	E	Q	G	A	I	H	P	U
U	P	A	E	R	H	I	G	Q
P	U	H	R	Q	E	G	I	A
Q	A	I	P	U	G	E	H	R
E	G	R	H	I	A	U	Q	P
G	I	U	A	E	Q	P	R	H
H	Q	P	U	G	R	A	E	I
A	R	E	I	H	P	Q	U	G

Solution du Sudomath n° 4

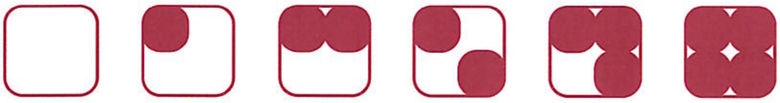
Le mot-mystère est : GRAPHIQUE

Q	E	A	U	G	P	I	R	H
U	I	P	H	R	A	Q	E	G
G	R	H	Q	I	E	P	A	U
P	U	I	A	E	G	H	Q	R
A	H	Q	R	U	I	G	P	E
R	G	E	P	Q	H	A	U	I
I	A	G	E	P	U	R	H	Q
E	P	R	I	H	Q	U	G	A
H	Q	U	G	A	R	E	I	P

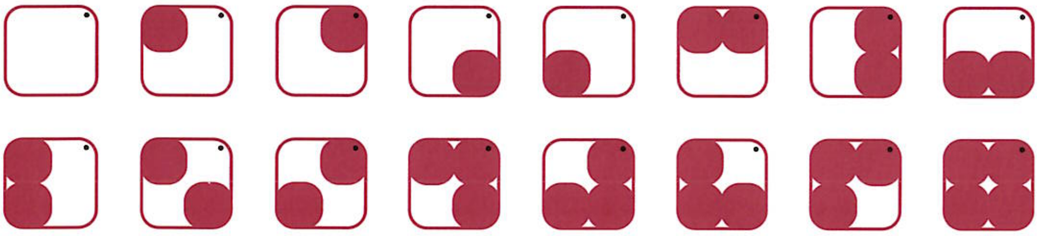
Solutions des jeux

1. Des « carrés bicolores »

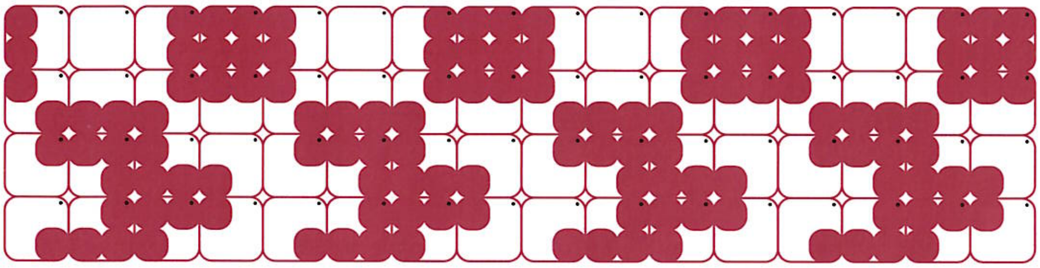
A. Six carrés différents



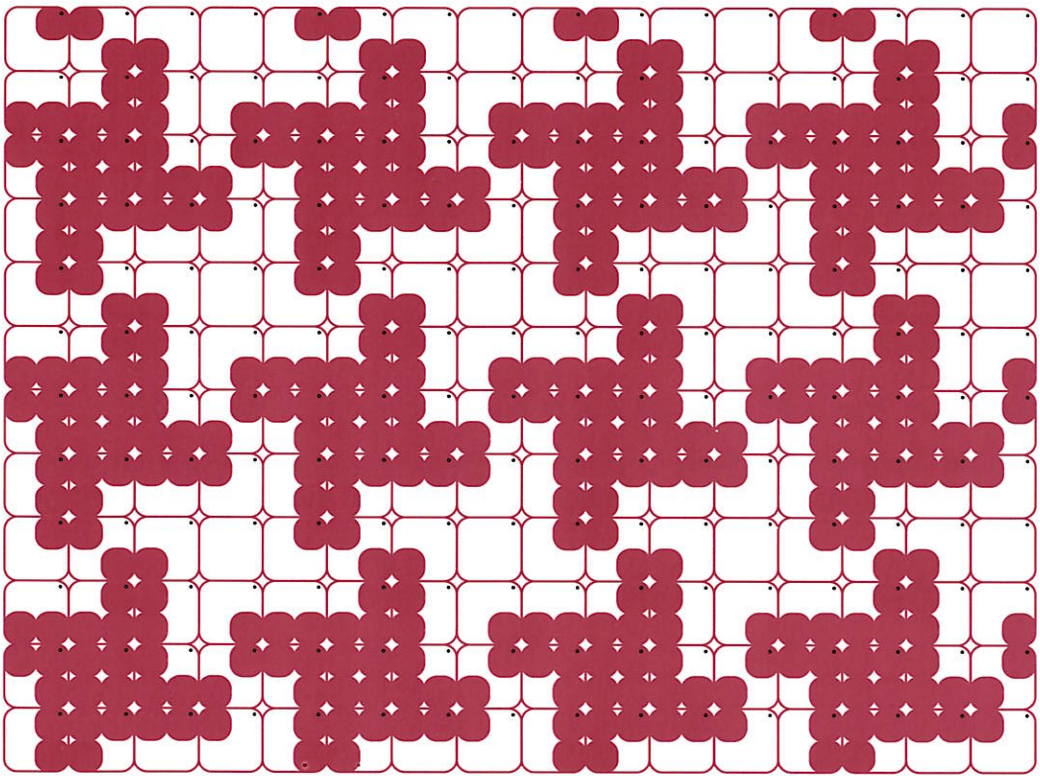
B. Seize pavés différents



C. et D. Dans cette bande, n'importe quel « grand carré » (carré 4×4) est un assemblage des 16 pavés de base tous orientés de la même manière, de plus, les bords verticaux des grands carrés sont assemblables.



Et voici un pavage du plan dans lequel n'importe quel « grand carré » est un assemblage des 16 pavés de base présentant des bords verticaux et des bords horizontaux assemblables.



2. Un paradoxe

Tu sais que cette revue ne compte pas 200 pages. L'affirmation du personnage de gauche est donc fausse.

Si l'autre personnage dit vrai, les deux affirmations sont fausses, donc la sienne également !

Si ce personnage ment, une des deux affirmations au moins doit être vraie ... et ce ne peut être que la sienne !

Les deux amis ont donc bien créé un paradoxe !

3. Des nombres de quatre chiffres

Il existe 279 nombres de quatre chiffres formés de 1 ou 2 chiffres différents : 9 du type "$AAAA$", 90 du type "$AABB$", 90 du type "$ABBA$" et 90 du type "$ABAB$", ($A \neq B$).

- Tous les nombres de type "$AAAA$" ou "$AABB$" ou "$ABBA$" sont multiples de 11.
- Les nombres du type "$ABAB$" (avec $A \neq B$) ne sont pas multiples de 11 mais sont multiples de 101. Les nombres du type "$AAAA$" sont également multiples de 101.

Echo de la 32e Olympiade Mathématique Belge

En cette année 2007, le 17 janvier, les éliminatoires de l'Olympiade ont réunis 22905 participants, soit 38 de plus que l'an dernier. 306 écoles de la partie francophone de notre pays ont participé à l'épreuve. En voici la répartition et, entre parenthèses, la différence de participation par rapport à l'an passé :

MINI	MIDI	MAXI
1re année : 6260(−167)	3e année : 3820(+101)	5e année : 2695(+128)
2e année : 4797(−105)	4e année : 3065(+137)	6e année : 2268(−56)
Totaux : 11057(−272)	6885(+238)	4963(+72)

Le tableau suivant vous donne les scores obtenus en catégories MINI et MIDI :

Scores	$\leqslant 25$	$[26, 51]$	$[52, 77]$	$[78, 103]$	$[104, 129]$	$\geqslant 130$
1re année	50	635	2800	2401	362	12
2e année	3	225	1402	2322	797	48
Total MINI	53	860	4202	4723	1159	60
3e année	39	839	2244	672	25	1
4e année	16	422	1652	886	85	4
Total MIDI	55	1261	3896	1558	110	5

Les demi-finales ont eu lieu le 07 mars 2007 et la finale se fera le 25 avril 2007.

Dans ce numéro de *Math-Jeunes Junior*, Claudine Festraets propose des solutions à quelques problèmes posés lors des éliminatoires antérieures. Il en est de même dans chaque numéro de *Math-Jeunes Junior*.

Bravo à tous les participants de cette année et... à l'année prochaine.

André Paternottre

Math-quiz

Une fois de plus, c'est avec un grand plaisir que nous remercions et nous félicitons très vivement tous ceux qui ont bien voulu participer à notre modeste challenge et chercher des réponses aux questions proposées à l'occasion de ce concours Math-Quiz 2006-20 , (qu'ils nous aient d'ailleurs envoyé les résultats de leurs travaux ou qu'ils ne l'aient pas fait !). Ils ont ainsi prouvé leur intérêt envers les mathématiques en même temps que leur sagacité.

Signalons au passage que ce sont 42 élèves qui nous ont envoyé les résultats de leur recherche.

Nous exprimons également notre gratitude aux enseignants qui ont ont bien voulu inciter leurs élèves à participer et/ou qui ont utilisé les questions dans le cadre de leur cours. Vous trouverez ci-dessous les réponses attendues aux questions de la deuxième étape.

Question n°	Réponse	Question n°	Réponse
11	4016	16	12
12	16	17	28.8
13	1024	18	25
14	24	19	1
15	31km/h	20	3

Rappelons encore une fois qu'un doute, un désaccord, une interrogation au sujet d'une réponse, . . ., constituent en fin de compte autant d'occasions rêvées d'en parler en classe avec vos condisciples et/ou votre professeur !

Cela offre ainsi des possibilités d'effectuer des rappels de matières déjà rencontrées au cours ainsi que d'aborder des sujets de discussions et d 'échanger de points de vue.

Il y avait parfois quelques modestes pièges à éviter et peut-être aussi la nécessité de connaître une matière pas encore rencontrée. Cela offrait donc également l'opportunité d'un premier contact avec ces éléments nouveaux et en préparait une éventuelle étude future plus fouillée.

La rédaction de*Math-Jeunes Junior* remercie vivement tous les participants au concours et espère qu'ils auront tous éprouvé un plaisir certain à rechercher les réponses et à déterminer des stratégies à mettre en oeuvre pour les obtenir.

« Nul besoin d'espérer pour entreprendre ni de réussir pour persévérer »

C'est connu de longue date et à mettre bien souvent en application !

Tableau d'honneur de la participation à la deuxième étape (par ordre alphabétique)

Nom+Prénom	Cl	Cp-Commune	Ecole	adresse école
Degeest Martin		Faulx les Cours	CEPES de Jodoigne	Chaussée de Tirlemeont 85-Jodoigne
Demany Martial	3	6540 Lobbes	Athénée Royal	Drève des Alliés-Thuin
Hardy Baptiste	1	6596 Seloignes	Collège St Joseph	Rue de Virelles, 75-Chimay
Hauquiert Bénédicte	2	6464 Bailleux	Collège St Joseph	Rue de Virelles, 75- Chimay
Janssens Loïc		1370 Jodoigne	CEPES Jodoigne	Chaussée de Tirlemont 85-Jodoigne
Lapôtre Guillaume	2	5670 Nismes	Collège St Joseph	Rue de Virelles 75-Chimay
Miam Raza		3300 Tienen	CEPES Jodoigne	Chaussée de Tirlemont 85-Joidoigne
Moers Clémence	1	1315 Opprebais	CEPES Jodoigne	Chaussée de Tirlemont 85-Jodoigne
Pâque Frédérique		4130 Esneux	Collège St Louis	Rue Alfred Magis 20-Liège
Radelet Charline	3	6650 Walcourt	Atnénée Royal Vauban	Rue Tumelaire 12-Charleroi
Ransquin Ignace	2	5670 Olloy sur Viroin	Collège St Joseph	Rue de Virelles 75-chimay
Renoirt Lionel	2	1370 St Jean-Geest	CEPES Jodoigne	Chaussée de Tirlemont 85-Jodoigne
Styles Jasmine	2	1040 Bruxelles	Lycée Emile Jacqmain	Rue Bélliard 135A-Bruxelles

Classement final du Math-Quiz 2006-2007

Obtiennent un premier prix (Tous classés ex aequo avec le maximum de points)
Hauquiert Bénédicte 6464 Bailleux
Lapôtre Guillaume 5670 Nismes
Rasquin Ignace 5670 Olloy sur Viroin

Obtiennent un deuxième prix (Classement par ordre des points obtenus)
Hardy Baptiste 6596 Seloignes
Styles Jasmine 1040 Bruxelles
Pâque Frédérique 4130 Esneux
Radelet Charline 6650 Walcourt

Obtiennent un troisième prix(Classement par ordre de points obtenus)
Demany Martial 6540 Lobbes
Moers Clémence 1315 Opprebais

Obtient une mention Jannssens Loïc 1370 Jodoigne
Renoirt Lionel 1370 St Jean-Geest

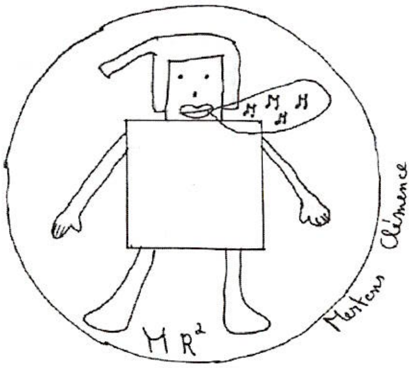
Chacun de ces lauréats recevra sous peu, à son adresse, une calculatrice Casio généreusement offerte par la firme DEXXON, distributrice de ce matériel

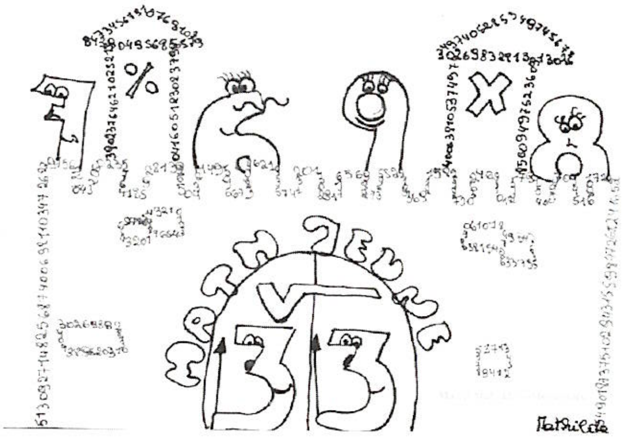
Cette année encore, nous avons reçu l'appui appréciable de la firme DEXXON Belgium, distributrice notamment des calculatrices CASIO.
DEXXON Belgium récompense les meilleurs participants de ce concours en leur offrant des calculatrices scientifiques FX-Junior et FX-92 Collège 2D.

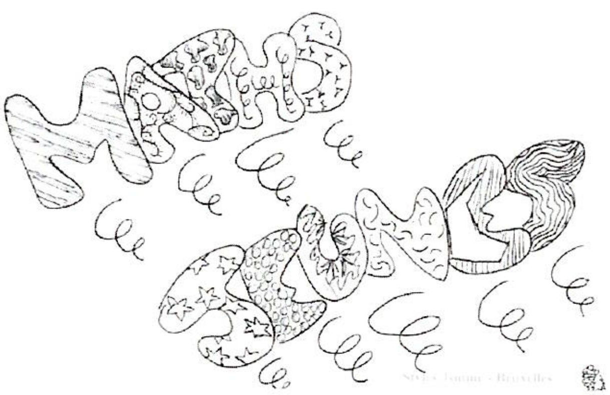
Encore une fois, félicitations à ces lauréats. Nous souhaitons à tous une bonne fin d'année scolaire et vous invitons à vous préparer à éventuellement participer au **Math-quiz 2007-2008**

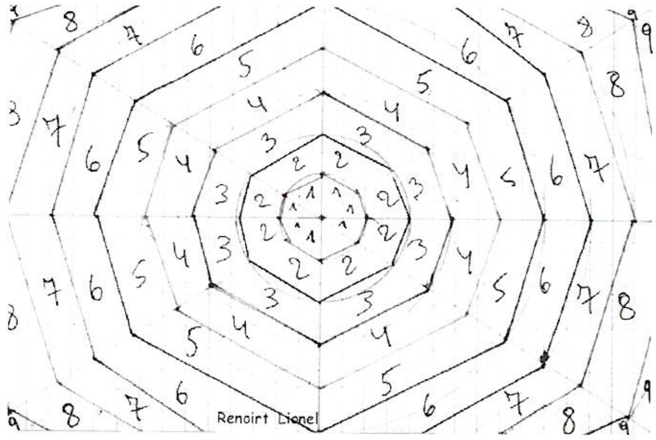
Concours annexe

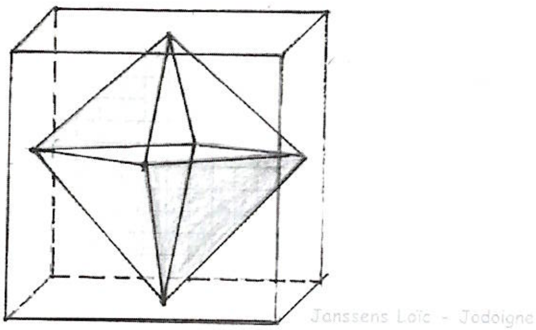
Nous félicitons tous les participants pour leur talent précoce et nous les invitons à poursuivre dans cette voie. Voici les illustrations distinguées cette année. Les noms des auteurs y figurent.

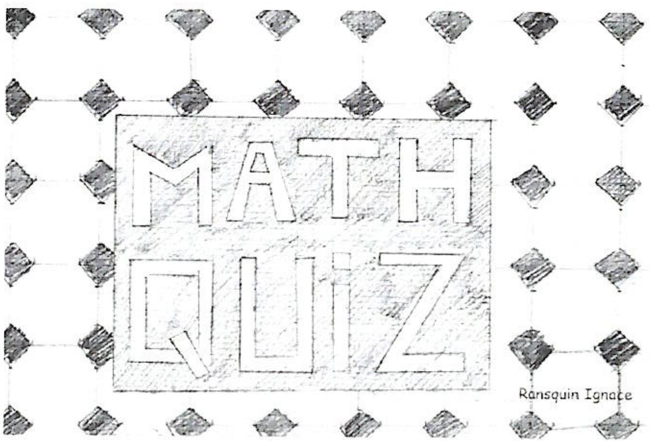












Math-Jeunes Junior
Périodique trimestriel
24, rue du Onze Novembre - 7000 Mons
Bureau de dépôt 7000 Mons 1

Responsable de l'édition : A. PATERNOTTRE
Rue du Moulin, 78 - 7300 Boussu
Bureau de dépôt : Mons 1

Autorisation de fermeture
Sluitings toelating
7000 Mons 1
5/156

Belgique - België
P.P.
7000 Mons 1
5/124

Périodique - Peut être ouvert pour contrôle postal

Réservé à la poste

Inconnu
Refusé
Décédé
Adresse insuffisante
N'habite plus à l'adresse indiquée