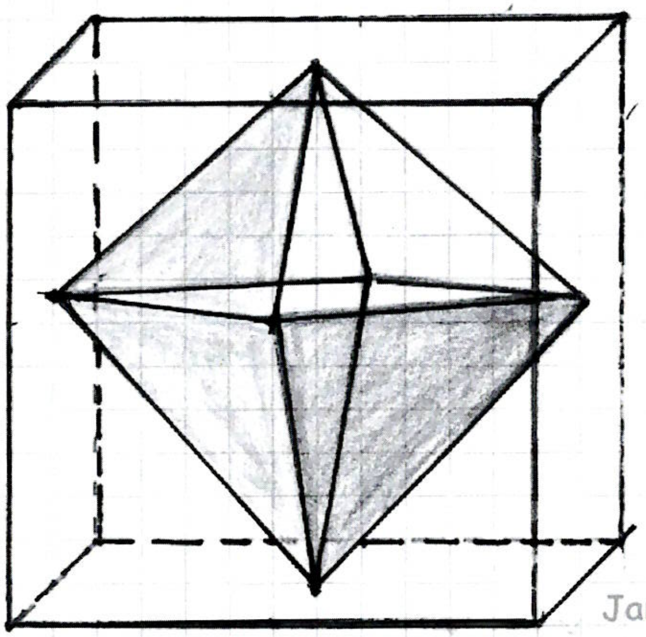
Math Junior !



Janssens Loïc - Jodoigne

28e année - N° 118J
Novembre 2007

Math-Jeunes et Math-Jeunes Junior

Revues trimestrielles publiées par la Société Belge des Professeurs de Mathématique d'expression française

Secrétariat : M-C Carruana, SBPMef, 24, rue du Onze Novembre, 7000 Mons.
Tél/fax : 065.31.91.80
GSM : 0473973808 e-mail : sbpm@sbpm.be, URL : http://www.sbpm.be.

Tarifs

Abonnements groupés (au moins 5)		
	Une des deux revues	Les **deux** revues
Belgique	4 €	8 €

Abonnements individuels				
	Une des deux revues		Les **deux** revues	
Belgique	6 €		12 €	
France (abonnement(s) pris par l'intermédiaire de l'APMEP)	8€		16€	
	✉	✉̸	✉	✉̸
Europe	18 €	20 €	24 €	26 €
Autres pays	19 €	22 €	25 €	28 €

Légende : « prior »=✉̸, « non prior »=✉.

Trois numéros de chaque revue sont publiés annuellement. Pour connaître la liste des anciens numéros encore disponibles et leur prix selon votre localisation, adressez-vous au secrétariat.

Les abonnements destinés aux élèves de l'enseignement secondaire sont de préférence pris par l'intermédiaire d'un professeur. Effectuez vos paiements :

- ☞ pour la Belgique : par virement au Compte n°000-0728014-29 de *S.B.P.M.e.f.*, rue du Onze Novembre, 24, 7000 Mons
- ☞ pour la France : par virement au Compte CCP Lille 10 036 48 S
- ☞ pour l'étranger (sauf la France) : par virement international au Compte n°IBAN: BE 26 0000 7280 1429 BIC: BPOTBEB1 au nom de la *SBPMef*, rue du Onze Novembre, 24, B 7000 Mons, Belgique. Les personnes résidant à l'étranger qui ne peuvent faire un virement à ce compte sont invitées à envoyer un mandat postal international. Tout chèque bancaire non encaissable en Belgique devra être majoré de 12,50 € pour frais d'encaissement.

Éditeurs responsables et rédacteurs en chef :

– pour *Math-Jeunes* : G. Noël, Rue de la Culée 86, 6927 Resteigne

– pour *Math-Jeunes Junior* : A. Paternottre, Rue du Moulin 78, 7300 Boussu

N°118J Vingt-huitième année 2007

Math-Jeunes junior

Sommaire

$0 = 1 = 2 = 3 = \ldots$

C. Villers

Vous ne douterez pas un instant que cette affirmation est évidemment incorrecte !

Et pourtant, si on n'y prend garde, on pourrait presque la croire !

Suivez le récit de cette aventure !

Tout a commencé par quelques calculs simples proposés à titre d'exercices.

Ecrire les réponses sous la forme de fractions.

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=?,\ \frac{1}{5}-\frac{1}{6}=?,\ \frac{1}{99}-\frac{1}{100}=?,\ \ldots,\ \frac{1}{2007}-\frac{1}{2008}=?$$

Vous n'aurez pas grand peine à effectuer ces calculs. En effet, l'application de la règle classique de soustraction de deux fractions donne :

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{3}{2\times 3}-\frac{2}{2\times 3}=\frac{3-2}{2\times 3}=\frac{1}{2\times 3}$$

De la même manière : $\frac{1}{5}-\frac{1}{6}=\frac{6}{5\times 6}-\frac{5}{5\times 6}=\frac{1}{5\times 6}$

et pour terminer : $\frac{1}{2007}-\frac{1}{2008}=\frac{2008}{2007\times 2008}-\frac{2007}{2007\times 2008}=\frac{1}{2007\times 2008}$

Effectuez quelques autres calculs de ce type. Vous constaterez, bien entendu, que vous pouvez écrire directement la fraction réponse.

Le procédé découvert peut se traduire sous la forme d'une jolie formule dans laquelle nous convenons que n est un nombre naturel non nul.

$$\boxed{\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=\frac{1}{n(n+1)}}$$

Voici maintenant un autre exercice un peu moins simple.

Calculer et écrire la réponse sous la forme d'une fraction irréductible.

$$\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\frac{1}{3\times 4}+\frac{1}{4\times 5}+\frac{1}{5\times 6}=?$$

Une première réaction est d'effectuer les produits qui figurent aux dénominateurs.

$$\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\frac{1}{3\times 4}+\frac{1}{4\times 5}+\frac{1}{5\times 6}$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\frac{1}{30}$$

Math-Jeunes Junior n°118J, 2–5, 2007

$$= \frac{30}{60} + \frac{10}{60} + \frac{5}{60} + \frac{3}{60} + \frac{2}{60}$$

$$= \frac{50}{60} = \frac{5}{6}$$

Vous admettrez que ce genre de calcul risque de ne pas être aussi simple qu'on peut le croire … notamment lorsque le nombre de termes de la somme est assez important.

En voici un exemple :

Calculer et écrire la réponse sous la forme d'une fraction irréductible.

$$\frac{1}{1\times 2} + \frac{1}{2\times 3} + \frac{1}{3\times 4} + \frac{1}{4\times 5} + \frac{1}{5\times 6} + \cdots + \frac{1}{2007\times 2008}\ ?$$

On a : $\frac{1}{1\times 2} + \frac{1}{2\times 3} + \frac{1}{3\times 4} + \frac{1}{4\times 5} + \frac{1}{5\times 6} + \cdots + \frac{1}{2007\times 2008}.$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \frac{1}{30} + \frac{1}{42} + \cdots + \frac{1}{4030056}$$

$$= ?$$

Faut-il vraiment écrire tous les termes de cette somme ?

Comment réduire toutes ces fractions au même dénominateur ?

Les calculs ne sont-ils pas trop fastidieux ?

Voilà des questions qui nous incitent à réfléchir à un moyen de calculer cette somme de manière plus « intelligente ».

Chaque fraction de la somme initiale nous rappelle les résultats des premiers calculs.

Rappelons-nous la formule alors découverte.

$$\boxed{\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)}}$$

C'est le moment de donner du sens à ce qui est écrit. En effet, cette expression peut aussi se lire de droite à gauche.

$$\boxed{\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}}$$

Elle nous permet alors de décomposer une fraction du type de celle du premier membre en la différence de deux fractions comme celle du deuxième membre.

Ainsi, il est immédiat que, par exemple :

$$\frac{1}{1\times 2} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2}, \frac{1}{2\times 3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{2007\times 2008}, \ldots$$

(Ecrivez donc quelques décompositions de ce genre).

Reprenons alors nos deux calculs précédents, en décomposant chaque terme.

$$\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\frac{1}{3\times 4}+\frac{1}{4\times 5}+\frac{1}{5\times 6}$$

$$=(\frac{1}{1}-\frac{1}{2})+(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})+(\frac{1}{3}-\frac{1}{4})+(\frac{1}{4}-\frac{1}{5})+(\frac{1}{5}-\frac{1}{6})$$

$$=\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}=\frac{1}{1}-\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$$

car, heureuse surprise, des fractions se suppriment.

De la même manière, on a :

$$\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\frac{1}{3\times 4}+\frac{1}{4\times 5}+\frac{1}{5\times 6}+\cdots+\frac{1}{2007\times 2008}$$

$$=(\frac{1}{1}-\frac{1}{2})+(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})+(\frac{1}{3}-\frac{1}{4})+(\frac{1}{4}-\frac{1}{5})+(\frac{1}{5}-\frac{1}{6})+\cdots+(\frac{1}{2007}-\frac{1}{2008})$$

$$=\frac{1}{1}-\frac{1}{2008}=\frac{2007}{2008}$$

Ce qui précède prouve qu'il est bien nécessaire de réfléchir avant de se lancer dans des calculs routiniers.

Et si maintenant on vous demandait d'évaluer la somme **infinie** S que voici ! !

$$S=\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\frac{1}{3\times 4}+\frac{1}{4\times 5}+\frac{1}{5\times 6}+\cdots+\frac{1}{2007\times 2008}+\cdots$$

Cela semble simple ; il suffit d'appliquer la méthode précédente. Faites-le !

Appliquons à chaque terme la formule établie plus haut.

$$\boxed{\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}}$$

On a donc :

$$\begin{aligned}S &= \frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\frac{1}{3\times 4}+\frac{1}{4\times 5}+\frac{1}{5\times 6}+\cdots+\frac{1}{2007\times 2008}+\cdots\\ &= (\frac{1}{1}-\frac{1}{2})+(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})+(\frac{1}{3}-\frac{1}{4})+(\frac{1}{4}-\frac{1}{5})+(\frac{1}{5}-\frac{1}{6})+\cdots+(\frac{1}{2007}-\frac{1}{2008})+\cdots\\ &= \frac{1}{1}=1\end{aligned}$$

car tous les termes à partir du deuxième vont se simplifier. S **semble donc valoir 1**.

Tout ceci semble fort joli sauf qu'il est possible de transformer la formule.

Par exemple, en ajoutant 1 et en le retirant aussitôt on obtient :

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = (1+\frac{1}{n}) - (1+\frac{1}{n+1}) = \frac{n+1}{n} - \frac{n+2}{n+1}$$

Si nous appliquons cette nouvelle formule au calcul proposé, nous obtenons alors :

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{1\times 2} + \frac{1}{2\times 3} + \frac{1}{3\times 4} + \frac{1}{4\times 5} + \frac{1}{5\times 6} + \cdots + \frac{1}{2007\times 2008} + \cdots \\ &= (\frac{2}{1} - \frac{3}{2}) + (\frac{3}{2} - \frac{4}{3}) + (\frac{4}{3} - \frac{5}{4}) + (\frac{5}{4} - \frac{6}{5}) + (\frac{6}{5} - \frac{8}{6}) + \cdots + (\frac{2008}{2007} - \frac{2009}{2008}) + \cdots \\ &= \frac{2}{1} = 2 \end{aligned}$$

Cette fois S semble valoir 2. Dès lors, nous devrions admettre que $1 = 2$.

Si vous modifiez encore la formule comme suit :

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = (2+\frac{1}{n}) - (2+\frac{1}{n+1}) = \frac{2n+1}{n} - \frac{2n+3}{n+1}$$

alors le calcul de S devient :

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{1\times 2} + \frac{1}{2\times 3} + \frac{1}{3\times 4} + \frac{1}{4\times 5} + \frac{1}{5\times 6} + \cdots + \frac{1}{2007\times 2008} + \cdots \\ &= (\frac{3}{1} - \frac{5}{2}) + (\frac{5}{2} - \frac{7}{3}) + (\frac{7}{3} - \frac{9}{4}) + (\frac{9}{4} - \frac{11}{5}) + (\frac{13}{5} - \frac{15}{6}) + \cdots + (\frac{40015}{2007} - \frac{4017}{2008}) + \cdots \\ &= \frac{3}{1} = 3 \end{aligned}$$

Et voilà que maintenant S **semble valoir 3.**

A vous d'essayer de « prouver » que S vaut aussi 4.

On aurait donc : $1 = 2 = 3 = 4 = \cdots$

Aurait-on prouvé que **tous les naturels non nuls sont égaux** ?

Vous vous doutez bien qu'il y a une erreur quelque part.

Elle est due au fait qu'un raisonnement correct sur un **nombre fini** de termes ne l'est pas nécessairement pour un **nombre infini** de termes.

Moralité de l'histoire : méfiez-vous toujours des généralisations abusives.

Puissances et jolies égalités

Y. Noël-Roch

1. Ce n'est qu'un début ...

Voici deux séries d'égalites. J'espère que je n'ai pas commis d'erreurs et que tu les trouveras jolies !

A.
$$\begin{aligned} 1 &= 1^2 - 0^2 \\ 3 &= 2^2 - 1^2 \\ 5 &= 3^2 - 2^2 \\ 7 &= 4^2 - 3^2 \end{aligned}$$

B.
$$\begin{aligned} 1^3 &= 1^2 - 0^2 \\ 2^3 &= 3^2 - 1^2 \\ 3^3 &= 6^2 - 3^2 \\ 4^3 &= 10^2 - 6^2 \end{aligned}$$

- Muni(e) d'un papier et d'un crayon, peux-tu prolonger les deux colonnes après avoir bien observé « mes » égalités ?
- Es-tu certain(e) que « tes » égalités sont correctes ?
- Peux-tu écrire 2007 comme une différence de deux carrés ?
- Peux-tu écrire 2007^3 comme une différence de deux carrés ?

Note tes résultats avant de continuer ta lecture !

2. Continuons donc !

Selon que tu es en première, en deuxième ou en troisième année, tu as pu appliquer des procédés différents et obtenir des résultats plus ou moins avancés. Dans la suite du texte, nous construirons *mécaniquement* de nouvelles égalités ... mais ces égalités sont-elles correctes ?

- Certaines ne nécessitent qu'un peu de calcul mental.
- Pour d'autres, nous apprécierons l'aide d'une calculatrice.
- Des nombres trop grands dépasseront la capacité de notre calculatrice ...
- Nous raisonnerons finalement sur des « nombres inconnus » en représentant ces nombres par des lettres. Nous exploiterons alors différentes méthodes. Si l'une te paraît obscure, passe à la suivante : tu as une bonne chance d'en trouver une qui te convienne !

3. Série A.

Tu as pu observer
- à gauche du signe « = » le début de la liste des nombres impairs : 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, ...

– immédiatement à droite du signe « = », les carrés de 1, 2, 3, 4 … donc la liste des naturels à partir de 1

– à droite du signe « - » les carrés des nombres 0, 1, 2, 3 … donc la liste des naturels.

Dès lors, de nouvelles égalités naissent mécaniquement, en progressant régulièrement dans chacune des listes reconnues :

$$9 = 5^2 - 4^2 \qquad 11 = 6^2 - 5^2 \qquad 13 = 7^2 - 6^2 \qquad 15 = 8^2 - 7^2 \qquad 17 = 9^2 - 8^2 \cdots$$

… mais toutes ces nouvelles égalités sont-elles correctes ? De plus, il serait fastidieux de continuer ainsi pour compléter l'égalité $2007 = \cdots$

Continuons donc à analyser les égalités écrites (… et toutes correctes) : les triples de nombres sont (1, 1, 0), (3, 2, 1), (5, 3, 2), (7, 4, 3), (9, 5, 4), (11, 6, 5), (13, 7, 6), (15, 8, 7), (17, 9, 8).

Le premier nombre du triple étant impair, nous le désignons par $2n + 1$. Chaque triple peut alors s'écrire $(2n + 1, n + 1, n)$. Tu peux contrôler le lien entre les trois nombres dans tous les triples ci-dessus.

Comme $2007 = (2 \times 1003) + 1$, l'égalité à vérifier est $2007 = 1004^2 - 1003^2$.

Comme $1\,234\,567\,890\,123\,456\,789 = (2 \times 617\,181\,945\,061\,718\,194) + 1$, une nouvelle égalité à vérifier est

$$1\,234\,567\,890\,123\,456\,789 = 617\,181\,945\,061\,718\,195^2 - 617\,181\,945\,061\,718\,194^2$$

As-tu envie d'effectuer ces calculs ?

Personnellement, cela ne me tente pas du tout, même avec une calculatrice. Je préfère avoir recours à un peu d'algèbre !

Quel que soit le naturel n, on a $(n+1)^2 = (n+1)(n+1) = n(n+1)+1(n+1) = n^2+n+n+1 = n^2 + 2n + 1$. J'en déduis

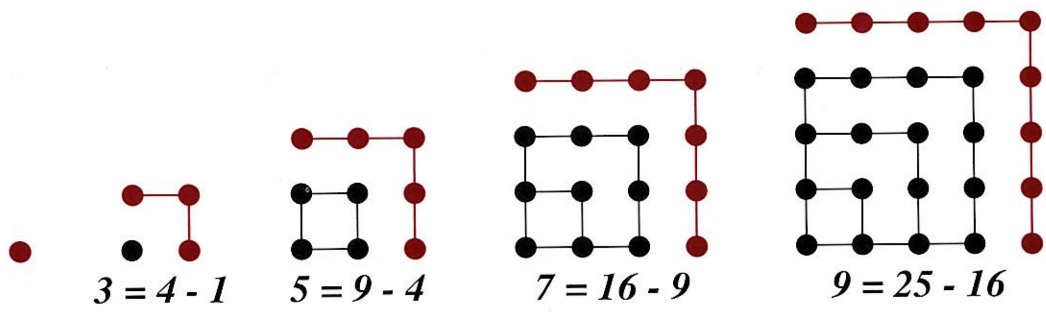
$2n + 1 = (n + 1)^2 - n^2$ quel que soit le naturel n.

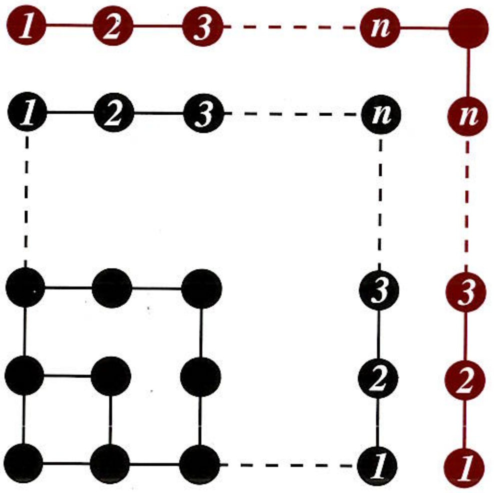
Ainsi, la série **A.** dont la première égalité est écrite avec $n = 0$, la deuxième avec $n = 1$, … peut être continuée éternellement : toutes les égalités écrites sont correctes … je le sais sans avoir à effectuer ni les carrés ni la différence.

Tu as peut-être déjà rencontré … ou tu rencontreras un jour la proposition que nous venons de démontrer :

Tout nombre naturel impair est la différence de deux carrés

3.1. Une démonstration plus esthétique.





Sur ce schéma général sont visualisés
– un carré noir de $n \times n = n^2$ points.
– des points de couleur : $n + n + 1 = 2n + 1$.
– l'ensemble des points : $(n+1)^2$.
… et la démonstration de ce que

Pour tout naturel n, on a $2n+1 = (n+1)^2 - n^2$

Tout naturel impair est la différence de deux carrés.

4. Série B.

4.1. Progresser pas à pas.

Comme dans la série précédente, tu peux observer le passage d'une égalité à la suivante.
– à gauche du signe « = » les nombres 1, 2, 3, 4 …
– immédiatement à droite du signe « = », les nombres 1, 3, 6, 10 …
– à droite du signe « - » les carrés des nombres 0, 1, 3, 6 ….
Voici donc des schémas possibles pour construire de nouvelles égalités :

$$1 \xrightarrow{+1} 2 \xrightarrow{+1} 3 \xrightarrow{+1} 4 \xrightarrow{+1} 5 \xrightarrow{+1} 6 \xrightarrow{+1} \cdots$$

$$1 \xrightarrow{+2} 3 \xrightarrow{+3} 6 \xrightarrow{+4} 10 \xrightarrow{+5} 15 \xrightarrow{+6} 21 \xrightarrow{+7} \cdots$$

$$0 \xrightarrow{+1} 1 \xrightarrow{+2} 3 \xrightarrow{+3} 6 \xrightarrow{+4} 10 \xrightarrow{+5} 15 \xrightarrow{+6} \cdots$$

Le processus est-il valable ? Les égalités construites avec les triples $(5, 15, 10)$, $(6, 21, 15)$, … *sont-elles correctes ? Et que dire de* 2007^3 … *faut-il écrire tous les triples intermédiaires ?*

4.2. Construire et résoudre une équation.

Trois nombres interviennent dans chaque égalité, nous pouvons partir d'un moule $a^3 = b^2 - c^2$. Pour toutes les égalités déjà écrites, remarquons que a est l'écart entre b et c.

Si x est le plus petit et y le plus grand des deux nombres, nous créons de nouveaux moules qui correspondent aux égalités données :

$$a^3 = (x+a)^2 - x^2 \qquad \text{ou encore} \qquad a^3 = y^2 - (y-a)^2.$$

Utilisons le premier moule avec $a = 2007$. Nous pouvons alors chercher une valeur de x qui satisfait la condition $2007^3 = (x + 2007)^2 - x^2$.

ou encore $2007^3 = 2 \times 2007 \times x + 2007^2$

ce qui donne $x = \frac{2007^3-2007^2}{2\times 2007} = \frac{2007^2-2007}{2} = \frac{2007(2007-1)}{2} = 2007 \times 1003 = 2\,013\,021$

Et nous voici à même d'écrire l'égalité attendue

$$2007^3 = 2\,015\,028^2 - 2\,013\,021^2.$$

Nous pouvons effectuer de manière générale la recherche que nous venons de décrire à partir de 2007^3 :

$$\begin{aligned} a^3 &= (x+a)^2 - x^2 \\ a^3 &= x^2 + 2ax + a^2 - x^2 \\ a^3 - a^2 &= 2ax \\ x &= \frac{a^3 - a^2}{2a} \\ x &= \frac{a(a-1)}{2} \end{aligned}$$

Il reste à calculer le nombre central du triple $(a, ?, \dfrac{a(a-1)}{2})$.

Nous l'obtenons en calculant $x + a = \dfrac{a(a-1)}{2} + a = \dfrac{a^2-a}{2} + \dfrac{2a}{2} = \dfrac{a^2+a}{2} = \dfrac{a(a+1)}{2}$.

Nous connaissons dès lors les triples de la série B : $\left(a, \dfrac{a(a+1)}{2}, \dfrac{a(a-1)}{2}\right)$.

Si tu as un oeil de lynx, tu avais peut-être repéré ces liens en observant ligne par ligne les quatre lignes du tableau donné initialement. Le calcul algébrique qui précède confirme dans ce cas ta bonne intuition !

Tu peux exploiter d'une manière analogue le deuxième moule $a^3 = y^2 - (y-a)^2$ *... Sauf erreur, le résultat devrait être le même !*

4.3. Autre approche, nouvelles solutions ?

Le second membre de l'égalité est la différence de deux carrés. Nous pouvons dès lors exploiter la factorisation $b^2 - c^2 = (b-c)(b+c)$. Une nouvelle méthode en découle :

- écrire le premier membre comme un produit de deux facteurs
- égaler chacun des facteurs du premier membre à un des facteurs du second membre.

Exemple : $4^3 = (b-c)(b+c)$ peut faire penser à $4 \times 4^2 = (b-c)(b+c)$.

Tu peux dès lors rechercher deux nombres b et c tels que

$$4 = b - c \qquad \text{ET} \qquad 16 = b + c$$

Ces deux égalités additionnées membre à membre donnent $20 = 2b$, donc $b = 10$ et on peut en déduire $a = 6$. Nous avons donc retrouvé l'égalité déjà connue $4^3 = 10^2 - 6^2$. Mais cette façon de faire nous apporte **d'autres solutions** parce que d'autres factorisations de 4^3 sont possibles !

Par exemple $4^3 = 1 \times 4^3$, $4^3 = 2^6 = 2 \times 2^5$, $4^3 = 2^3 \times 2^3$.
Recherchons par exemple le couple (b, c) solution de

$$1 = b - c \qquad \text{ET} \qquad 64 = b + c.$$

L'addition membre à membre des deux égalités donne $65 = 2b$, et nous n'obtenons donc pas de valeur pour b si nous nous limitons aux solutions dans $\mathbb{N}$. Au contraire, si nous étendons la recherche aux non entiers, nous découvrons une nouvelle égalité :

$$4^3 = 32,5^2 - 31,5^2.$$

Quelle précaution faut-il prendre dans le choix de deux nombres dont le produit vaut a^3 pour que les nombres b et c soient des naturels ?

En exploitant de manière analogue les autres factorisations possibles, tu trouveras

$$4^3 = 17^2 - 15^2 \qquad \text{à partir de} \qquad (2 = b - c \qquad \text{ET} \qquad 2^5 = b + c)$$

$$4^3 = 8^2 - 0^2 \qquad \text{à partir de} \qquad (2^3 = b - c \qquad \text{ET} \qquad 2^3 = b + c)$$

5. Retour en arrière et conclusion

Dans le prolongement de la série **B.** par la recherche de deux nombres b et c dont on connaît la somme et la différence, nous avons découvert de nouvelles égalités entre un cube et une différence de deux carrés. Mais ces nouvelles égalités ont perdu une des caractéristiques des égalités données en début d'article : elles ne satisfont pas à la condition $a = b - c$.

Une extension analogue de la recherche pour la série **A.** fournit également de nouvelles égalités. Nous avions par exemple trouvé $15 = 8^2 - 7^2$.

Le second membre étant, comme dans la série **B.**, une différence de deux carrés, appliquons la méthode de factorisation des deux membres. Voyons par exemple ce qui découle de l'identification des premiers et des seconds facteurs dans

$$15 = 3 \times 5 = (b - c) \times (b + c).$$

$$(3 = b - c \qquad \text{ET} \qquad 5 = b + c) \Longrightarrow (b = 4 \qquad \text{ET} \qquad c = 1)$$

d'où la nouvelle égalité $15 = 4^2 - 1^2$.

Recherche des différences de deux carrés égales à 27.

Quelle condition les nouvelles égalités ont-elles perdue si tu les compares aux égalités données en début d'article ?

$$(1 = b - c \qquad \text{ET} \qquad 27 = b + c) \Longrightarrow (b = 14 \qquad \text{ET} \qquad c = 13)$$

ce qui donne l'égalité obtenue par le premier procédé.

$$(3 = b - c \qquad \text{ET} \qquad 9 = b + c) \Longrightarrow (b = 6 \qquad \text{ET} \qquad c = 3)$$

ce qui donne une nouvelle égalité $27 = 6^2 - 3^2$.

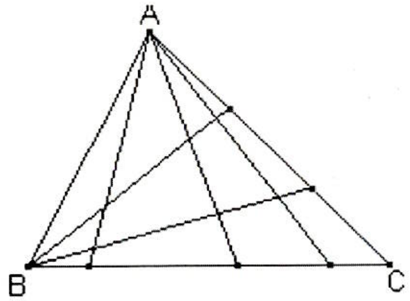
Dans les nouvelles égalités, la propriété $b - c = 1$ est perdue.

Combien de triangles ?

A. Paternottre

Cet article fait suite à celui déjà paru dans le $n^o 116$ de *Math-Jeunes Junior* intiitulé « Combien de rectangles ? ». Cette fois il s'agira de dénombrer le nombre de triangles générés à l'intérieur du triangle ABC par des sécantes issues d'un ou deux sommets et coupant le côté opposé en des points distincts des sommets. Ainsi combien de triangles sont-ils générés à l'intérieur du triangle ABC ci-dessous par les trois sécantes issues de A et les deux sécantes issues de B ?

Notations pour la suite :



a désignera le nombre de sécantes issues de A.$(a \in N)$

b désignera le nombre de sécantes issues de B.$(b \in N)$

T_a sera le nombre de triangles générés par les a sécantes issues de A coupées par le côté$[BC]$ ou par chacune des b sécantes issues de B.

T_b sera le nombre de triangles générés par les b sécantes issues de B coupées par le côté $[AC]$ ou par chacune des a sécantes issues de A.

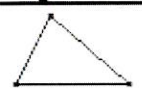
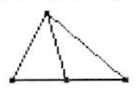
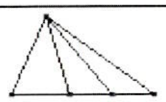
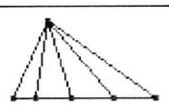
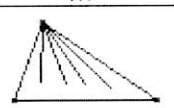
Enfin T sera le nombre total de triangles générés à l'intérieur de ABC.

Si, à première lecture, cette présentation des notations ne te paraît pas claire, n'abandonne pas pour autant la lecture. Tu comprendras sûrement les choses plus loin dans le texte.

- Premier cas $a \geqslant 0$ et $b = 0$

  On ne mène donc des sécantes que par le seul sommet A.

  Procédons par paliers progressifs. Observe attentivement le tableau ci-dessous à gauche puis les calculs effectués à droite de ce tableau :

a	Figures	T_a
0		1
1		3
2		6
3		10
...	...	...
a		T_a

$$\begin{array}{lcl}
\text{pour } a = 0 & : & T_0 = 1 \\
\text{pour } a = 1 & : & T_1 = T_0 + 2 \\
\text{pour } a = 2 & : & T_2 = T_1 + 3 \\
\text{pour } a = 3 & : & T_3 = T_2 + 4 \\
\ldots & & \\
\text{pour } a = a & : & T_a = T_{a-1} + (a+1) \\
\hline
\text{finalement} & : & T_a = 1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + (a+1).
\end{array}$$

Cette dernière égalité est obtenue en additionnant membre à membre les $a + 1$ égalités

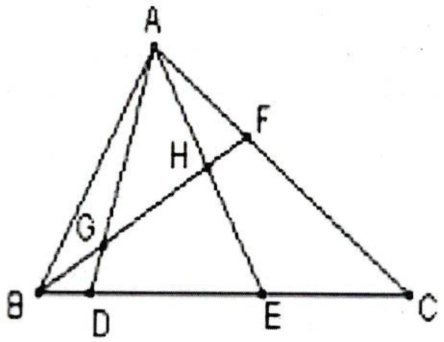
Appliquons une fois de plus la formule donnant la somme des n premiers nombres naturels, à savoir : $1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + n = \frac{1}{2}n(n+1)$. Il vient donc finalement :

$$Ta = \frac{(a+1)(a+2)}{2}$$

- Deuxième cas : $a \geqslant 0$ et $b \geqslant 0$

  Intéressons-nous maintenant au cas plus général où on mène « a » sécantes par le sommet A et « b » sécantes par le sommet B d'un triangle ABC.

  Raisonnons par exemple le cas $a = 2$ et $b = 1$.



Triangles de sommet commun A et		Triangles de sommet commun B et		
de base ⊂ [BC]	de base ⊂ [BF]	de base ⊂ [AC]	de base ⊂ [AE]	de base ⊂ [AD]
ABC ABE ADC ABD ADE AEC	ABF ABH AGF ABG AGH AHF	~~BCA~~ BCF ~~BFA~~	~~BEA~~ BEH ~~BHA~~	~~BDA~~ BDG ~~BGA~~
6	6	1	1	1

Tu remarques qu'on a barré dans ce tableau six triangles de sommet commun B.
C'est normal puisque ceux-ci figurent déjà parmi ceux de sommet commun A.
Ils ne peuvent donc être comptés deux fois.
Dès lors si $a = 2$ et $b = 1$ alors $T = 6 + 6 + 1 + 1 + 1 = 15$.
On peut donc dénombrer exactement 15 triangles dans le triangle ABC ci-dessus.
On peut écrire aussi : $T = 6 \times 2 + 1 \times 3$
ou encore (en compliquant un peu) : $T = 6 \times 2 + 3 \times 3 - 2 \times 3$

Mais $a = 2$ et $b = 1$ et donc

$$T_a = \frac{(2+1)(2+2)}{2} = 6, \qquad T_b = \frac{(1+1)(1+2)}{2} = 3, \qquad a+1 = 3,$$

$b + 1 = 2$
et dès lors

$$T = \underbrace{T_a \times (b+1)}_{\text{nombre de triangles de sommet } A} + \underbrace{T_b \times (a+1)}_{\text{nombre de triangles de sommet } B} - \underbrace{(b+1) \times (a+1)}_{\text{nombre de triangles comptés } 2fois} \qquad (1)$$

Recommence tout ce qui vient d'être fait avec cette fois $a = 2$ et $b = 2$. Tu arriveras à la même formule que celle découverte ci-dessus. (tu dois alors trouver $T = 27$)

Ecrivons(1) en y remplaçant T_a et T_b par leur expression générale démontrée en début d'article.

$$\begin{aligned}
T &= \frac{(a+1)(a+2)}{2}(b+1) + \frac{(b+1)(b+2)}{2}(a+1) - (a+1)(b+1) \\
&= \frac{1}{2}[a^2+3a+2)(b+1) + (b^2+3b+2)(a+1) - 2(a+1)(b+1)] \\
&= \frac{1}{2}[a^2b + a^2 + 3ab + 3a + 2b + 2 + ab^2 + b^2 + 3ab + 3b + 2a + 2 - 2ab - 2a - 2b - 2] \\
&= \frac{1}{2}[a^2b + ab^2 + 4ab + a^2 + 3a + b^2 + 3b + 2] \\
&= \frac{1}{2}[ab(a+b+4) + a(a+3) + b(b+3) + 2]
\end{aligned}$$

Cette dernière formulation de la valeur de T sera celle que nous retiendrons. Nous énonçons donc en conclusion :

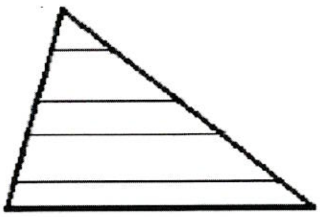
Si par les sommets A et B d'un triangle ABC on mène respectivement a et b sécantes (a et $b \in N$) alors le nombre T de triangles générés par ces sécantes à l'intérieur de ABC est tel que :

$$\boxed{T = \frac{1}{2}[ab(a+b+4)+a(a+3)+b(b+3)+2]}$$

Trois remarques avant d'en terminer :

1. Nous n'avons manifestement pas « démontré » la formule ci-dessus puisque nous l'avons découverte à partir d'un exemple. En fait, la formule qu'il conviendrait de démontrer est la formule (1) ci-dessus.
2. La formule précédente est aussi applicable lorsque $a = 0$ et/ou $b = 0$.
3. On peut aussi vérifier que si $a = b$ alors $T = (a+1)^3$.
4. T doit être évidemment un nombre naturel. Dès lors peux-tu prouver que, quelle que soit la parité de a et de b, l'expression entre crochets est toujours paire ?

– A ton tour



Dans le triangle ci-contre, on a mené un certain nombre « p » de segments parallèles à une des bases. Ces p parallèles génèrent à l'intérieur du grand triangle un nombre F de formes géométriques, celles-ci étant des triangles et des trapèzes.
On te demande de découvrir la formule donnant F en fonction de p.

Bien sûr tu t'inspires de l'article que tu viens de lire.
Ta solution nous intéresse à la rédaction. Tu peux nous la faire parvenir au secrétariat dès que possible. La meilleure solution reçue paraîtra dans le prochain numéro de *Math-Jeunes Junior*. Les noms et écoles des participants y figureront également. La solution peut éventuellement être collective. N'oublie pas d'indiquer tous les renseignements te concernant ou concernant le collectif.
Merci de nous répondre.

Jeux

Y. Noël-Roch

1. Un clavier à réparer !

Une touche de mon clavier est bloquée, celle qui permet d'écrire la virgule ! Tu peux reconstituer des égalités correctes, en y plaçant les virgules manquantes.

Aucune virgule ne manque dans le second membre.

$10000+10000+10000+10000+10000 = 11111$

$30 + 700 = 100$

$30290 + 2931 = 5960$

$3743 + 5357 = 91$

$7533 - (33 + 333) = 39$

Une virgule manque dans le second membre.

$30 + 700 = 100$

$3743 - 315 = 373985$

$102 + 103 + 104 + 105 = 21735$

$23 + 456 + 789 - 1023 = 1266977$

$1000 + 1010 - (9000 + 9090) = 1920$

2. Puzzle et dominos

Ce jeu utilise les pièces d'un jeu de domino traditionnel. Des dominos sont disposés dans une grille rectangulaire pour créer un puzzle.

Il faut **reconstituer la disposition des dominos** sachant qu'aucune pièce ne peut apparaître plusieurs fois.

Voici un puzzle construit à l'aide des six dominos faisant apparaître les nombres de 0 à 2. Il admet de nombreuses solutions, nous en donnons trois ...

2	2	2	0
1	0	2	1
0	0	1	1

2	2	2	0
1	0	2	1
0	0	1	1

2	2	2	0
1	0	2	1
0	0	1	1

2	2	2	0
1	0	2	1
0	0	1	1

Voici trois puzzles. Le premier est construit avec six pièces (marquées de 0 à 2), les deux suivants avec 10 pièces (marquées de 0 à 3).

2	2	1	0
0	0	1	0
2	2	1	1

2	3	1	0	2
2	0	0	2	2
3	0	1	1	3
1	0	1	3	3

2	3	3	0	3
1	1	0	0	2
1	1	1	2	0
0	3	3	2	2

3. Nombres croisés

Complète la grille ci-dessous (le renseignement 2 peut t'aider à déterminer a).

	1	2	3	4	5	6	7
1			■		■		
2							
3	■		■		■		■
4				■			
5	■		■		■		■
6							
7			■		■		

Horizontalement et verticalement

1. $a^2 + a - 1$; $2a$.
2. a^{a+1}
4. a^3 ; $a^3 + 3a$.
6. $10^6 + a^5$.
7. $a^2 - a - 1$; $2a^2 - 4a$.

4. Une famille nombreuse

Albert et Gabrielle sont frère et soeur. Ils te donnent deux informations qui te permettent de connaître le nombre d'enfants de leur grande famillle :
- Albert : je trouve le même nombre si je compte mes frères ou si je compte mes soeurs.
- Gabrielle : le nombre de mes frères est double de celui de mes soeurs.

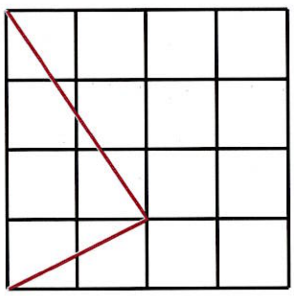
5. Trissaut et Quadrissaut

Trissaut et Quadrissaut doivent entrer par un coin de la grille, Trissaut ne peut passer que par les cases occupées par un multiple de trois et Quadrissaut ne peut passer que par les cases occupées par un multiple de quatre. Pourront-ils atteindre tous les deux la case noire en ne se déplaçant que horizontalement ou verticalement ?

75	57	30	1	35	50	28	64	80	104	19	22	200
31	4	24	52	68	11	8	47	23	124	32	116	92
49	20	15	43	48	60	12	7	38	55	3	10	9
65	120	60	16	9	5	33	2	29	46	59	77	26
14	27	13	56	66	160	72	84	840	40	93	39	51
37	42	150	300	21	100	25	17	63	76	57	68	60
41	53	107	88	136	44	67	41	108	240	51	79	96
10	131	61	73	34	62	■	112	224	58	70	710	170

6. Symétries ([1])

Tu disposes de deux cartes transparentes identiques à la carte ci-contre. Le quadrillage et le triangle se voient d'un côté comme de l'autre puisque les cartes sont transparentes. Par superposition des deux cartes en faisant coïncider leurs bords, que peut-on obtenir
- comme figure ayant un axe de symétrie ?
- comme figure ayant un centre de symétrie ?

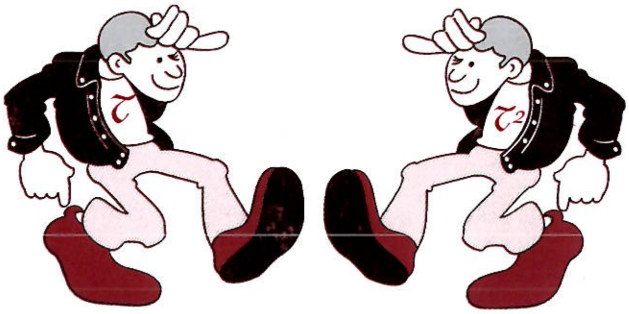


([1]) Inspiré du Rallye Mathématique Transalpin, 13e édition, épreuve II, Livret RMT, tome 1 pp. 57 et 58.

Les frères Hick 21

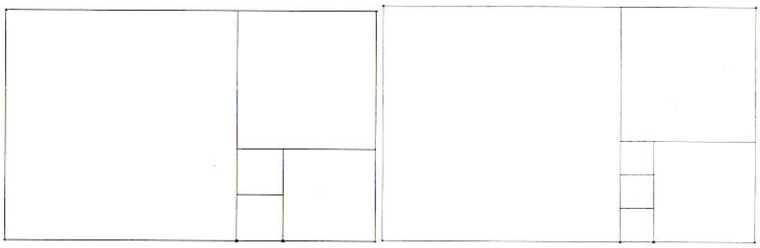
B. Honclaire

Agence de détectives privés
Les frères Hick
Recherches en tous genres



Ami lecteur,

$\mathcal{T}^2$ nous fera part de ses recherches sur le problème suivant *(La recherche a été lancée dans Hick20 (voir* Math-Jeunes Junior*117) mais les rappels suffisent à la lecture de cet article)*



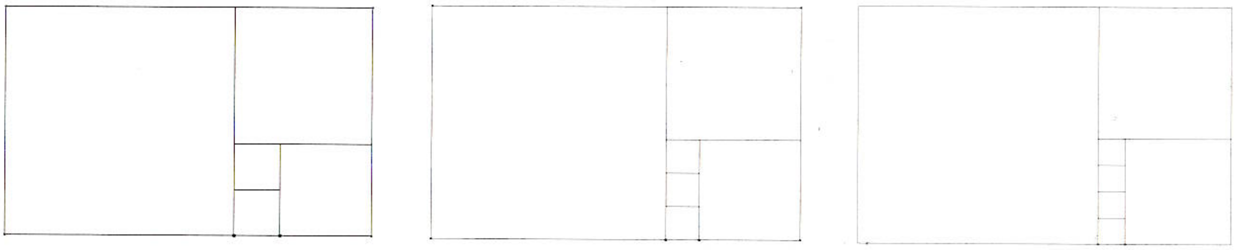
Un rectangle quelconque peut-il se décomposer en un assemblage de carrés de ce type ?

Il commentera ses travaux sur un autre problème (voir Hick 20)

$\mathcal{T}$ usera de toute sa rigueur pour effectuer les mises au point nécessaires !

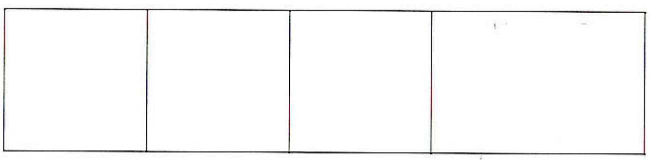
Bon courage et bon amusement.

$\mathcal{T}^2$ - « *J'avais abordé le problème en partant des petits carrés et en les prenant comme unité ! J'avais examiné les cas suivants*



et j'avais ainsi trouvé des rectangles (5 sur 8), (7 sur 11) et (9 sur 14) ! Il est question maintenant de renverser la vapeur : partir d'un rectangle, en retirer TROIS fois UN carré et partager en petits carrés le rectangle restant ! ...

Il est évident qu'on ne peut pas prendre un rectangle trop allongé... sinon, il faudrait commencer par construire plusieurs carrés dont le côté serait le petit côté du rectangle ...



Math-Jeunes Junior n°118J, 16–20, 2007

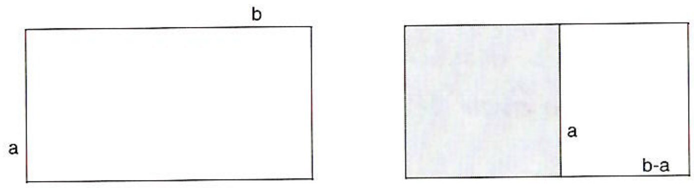
Et pour ce fait, on choisira un côté inférieur au double de l'autre... »

$\mathcal{T}$ (l'interrompant avec un léger sourire) - « *Nous sommes mal partis pour les explications ! Je te propose, comme d'habitude de désigner par* a *le petit côté du rectangle et par* b *le grand côté...* »

$\mathcal{T}^2$ (impatient, il reprend) - « *J'oublie toujours !... C'est vrai ! ... On doit donc partir d'un rectangle pour qui* b *est inférieur au double de* a *...* »

$\mathcal{T}$ (ajoute négligemment) - « $b < 2a \cdots$ »

$\mathcal{T}^2$ (semblant ignorer la remarque) - « *On se retrouve dans la situation suivante...*



Nous devons donc maintenant décomposer le rectangle restant ... »

$\mathcal{T}$ - « *... dont les dimensions sont ...* »

$\mathcal{T}^2$ (après une brève hésitation) - « ... a *et* $b - a$ ... *Nous devons pouvoir tracer un seul carré dans ce rectangle...*

Attention je zoome un peu les rectangles suivants pour mieux voir... (il semble passer le relais à son frère) »

$\mathcal{T}$ (magistralement) - « *Il faut de nouveau que le grand côté soit inférieur au double de l'autre...* »

$\mathcal{T}^2$ (un peu ironique) - « *Deuxième refrain !* »

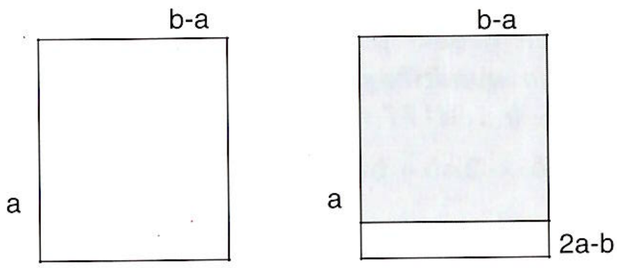
$\mathcal{T}$ (souriant) - « ... *il faut donc que* a *soit inférieur au double de* $b - a \cdots$ *ce qui veut dire* $a < 2(b-a) \cdots a < 2b - 2a \cdots 3a < 2b \cdots b > 1,5a \cdots$ »

$\mathcal{T}^2$ (fièrement)-« *En résumé, on doit donc choisir* b *plus petit que* $2a$ *et plus grand que* $1,5a$ *!* »

$\mathcal{T}$ - « *Nous écrirons* $1,5a < b < 2a$ *et ...* »

$\mathcal{T}^2$ (l'interrompant) - « ... *nous nous retrouvons avec un rectangle dont les dimensions sont* $b-a$ *et* $a-(b-a)$ ... (il jette un regard vers son frère, se doutant qu'il va intervenir) »

$\mathcal{T}$ - « *Prenons la bonne habitude de simplifier les expressions* $a - (b-a) \cdots a - b + a \cdots 2a - b$ *! Les dimensions du dernier rectangle sont* $b - a$ *et* $2a - b$ *!* »



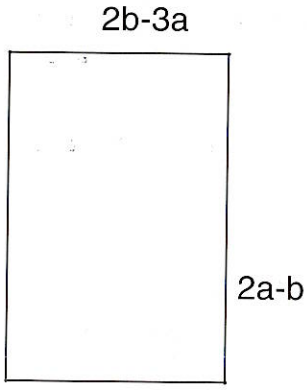
$\mathcal{T}^2$(distraitement) - ... *Cela me rappelle de bons souvenirs...* (il poursuit) ... *On ne doit y tracer qu'un seul carré !... Le refrain est pour moi ! Il faut de nouveau que le grand côté soit inférieur au double de l'autre !*

Ce qui signifie que $b - a$ *doit être inférieur au double de* $2a - b$ *!* »

$\mathcal{T}$ (l'air désinvolte) - ... $b - a < 2(2a - b) \cdots b - a < 4a - 2b \cdots\ 3b < 5a \ldots\ b < \frac{5}{3}a$ »

$\mathcal{T}^2$ - « *L'étau se resserre :...* $1,5a < b < \frac{5}{3}a$ ... *et voilà notre dernier rectangle dont les dimensions sont* $(b-a)-(2a-b)$ *et* $2a - b$*... soit en simplifiant les écritures ...* $(b-a)-(2a-b) \cdots b - a - 2a + b \cdots 2b - 3a$ *et* $2a - b$ »

$\mathcal{T}$ (fier de son frère) - « *Je constate que tu n'as pas perdu la main !* »



$\mathcal{T}^2$ (ignorant la remarque) - « ... *Et ce dernier rectangle, on doit pouvoir le partager exactement en deux, trois ou plusieurs carrés !... Ce qui signifie que le grand côté* $2a-b$ *doit être le double, le triple, le quadruple ou... du petit côté* $2b-3a$ *!* »

$\mathcal{T}$ (magistral) - « *Si je regarde le cas du double, je dois avoir* $2(2b-3a)=2a-b\cdots 4b-6a=2a-b\cdots\ 5b=8a$ *ou mieux encore* $b=\frac{8}{5}a\ldots$ »

$\mathcal{T}^2$ (songeur) - « *Cela est compatible avec mes calculs précédents...! Si tu veux, je peux continuer !* - (sans attendre l'approbation de son frère) -

Je te prépare un tableau et j'ajoute MES résultats :

2 carrés	$2(2b-3a)=2a-b$	$4b-6a=2a-b$	$5b=8a$	$b=\frac{8}{5}a$
3 carrés	$3(2b-3a)=2a-b$	$6b-9a=2a-b$	$7b=11a$	$b=\frac{11}{7}a$
4 carrés	$4(2b-3a)=2a-b$	$8b-12a=2a-b$	$9b=14a$	$b=\frac{14}{9}a$

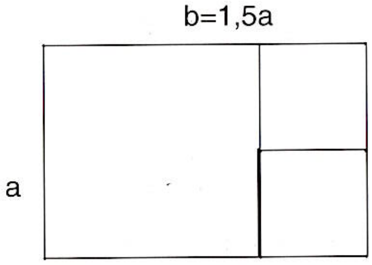
Et ainsi de suite...! »

$\mathcal{T}$ (satisfait) - « *Revenons à une certaine réalité : que se passe-t-il si le rectangle de départ a comme dimensions 19 et 29?... Et si je te dis que le dernier rectangle doit se partager en* n *petits carrés ?* »

$\mathcal{T}^2$ (concentré) -« *Pour ta première question, je ferai un dessin pour la prochaine fois !* (en lui-même) - *je crois bien que je travaillerai sur un quadrillage* - (reprenant)... *Par contre, pour* n *petits carrés... ...* $n(2b-3a)=2a-b$ *...!!??* »

$\mathcal{T}$(mettant fin à ce long silence)- « ... $2nb-3na=2a-b\cdots 2nb+b=2a+3na\cdots(2n+1)b=(3n+2)a$ *ce qui donne* $b=\frac{(3n+2)}{(2n+1)}a$! »

$\mathcal{T}^2$(admiratif et se précipitant sur sa calculatrice) - ... $\frac{8}{5}$ $1,6\cdots\frac{11}{7}$ $1,5714285\cdots\frac{14}{9}$ $1,5555555\cdots$ *on est toujours bien dans l'intervalle* $1,5a<b<\frac{5}{3}a\ldots$*!* ... *Tiens si je veux 100 petits carrés...* (s'agitant sur sa calculatrice)... *cela me donne* $\frac{302}{201}$ *ou* $1,5024875\cdots$



J'ai l'impression que lorsqu'on augmente le nombre de petits carrés, on va se rapprocher de $1,5\cdots$!! Mais pour $1,5$ exactement... peut-on encore parler des petits carrés?... (semblant perturbé)... *Ils n'existent plus!... Ou alors... ils sont si petits qu'on ne les voit plus!!?...*

(observant son frère dont le regard semblait plonger vers l'infini)... *Tu trouves sans doute que je dépasse les limites avec mes explications!* »

$\mathcal{T}$ (ramené à la réalité) - « *Tu ne crois pas si bien dire!* »

$\mathcal{T}^2$ - « *Il est temps de regarder ton deuxième problème!*

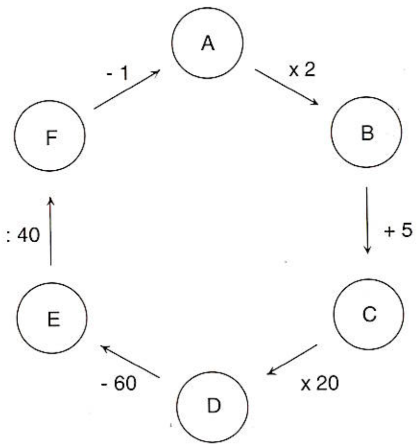
Enoncé du problème

– Choisis un nombre, écris-le dans un des six disques.

– En appliquant les opérateurs imposés, calcule les contenus des disques suivants.

– Recommence en changeant de nombre initial, de disque initial.

La boucle se fermera-t-elle toujours?



Je suis parti en premier lieu du disque A et j'ai choisi un nombre au hasard... 9!

Voici ma suite de résultats : 9... 18... 23... 460... 400... 10... 9

en partant de B, on obtient 9... 14... 280... 220... 5,5... 4,5... 9

départ de C : 9... 180... 120... 3... 2... 4... 9

départ de D : 9... -51... -1,275... -2,275... -4,55... 0,45 ... 9 - j'ai cru un instant ne pas y arriver!-

départ de E : 9... 0,225... -0,775... -1,55... 3,45... 69... 9

Et enfin pour le départ de F : 9... 8... 16... 21... 420... 360... 9

C 'est surprenant mais on retombe toujours sur 9! Je suppose que pour les autres nombres... (en lui-même)... *Je sens qu'il va me reparler de lettres... et en plus il aura raison, j'aurais dû y penser bien avant!...* »

$\mathcal{T}$ - « *Tu aurais pu...* »

$\mathcal{T}^2$ (l'interrompant net) - « *Je sais! Je sais! Je te le refais avec des lettres! Mais attention, ce n'était pas prévu!... L'artiste travaille sans filet!... Je dirai donc que le nombre choisi est n!*

départ de A : $n\cdots n\times 2\cdots(n\times 2)+5\cdots((n\times 2)+5)\times 20\cdots$ (de plus en plus inquiet) ... $(((n\times 2)+5)\times 20)-60\cdots$ (son regard est un véritable appel au secours) ... »

$\mathcal{T}$(amusé) - « *Tu oublies de simplifier les écritures! Si tu continues de cette manière, tu n'y arriveras pas!! Regarde plutôt : $n\cdots 2n\cdots 2n+5\cdots 40n+100\cdots$* »

$\mathcal{T}^2$(reprenant)- « $40n + 40 \cdots n + 1 \cdots n \cdots$ *C'est quand même beaucoup plus efficace ! Je continue sur ma lancée :*
départ de B : $n \cdots n + 5 \cdots 20n + 100 \cdots 20n + 40 \cdots 0,5n + 1 \cdots 0,5n \cdots n$
départ de C : $n \cdots 20n \cdots 20n - 60 \cdots 0,5n - 1,5 \cdots 0,5n - 2,5 \cdots n - 5 \cdots n$
départ de D : $n \cdots n - 60 \cdots 0,025n - 1,5 \cdots 0,025n - 2,5 \cdots 0,05n - 5 \cdots 0,05n \cdots n$
départ de E : $n \cdots 0,025n \cdots 0,025n - 1 \cdots 0,05n - 2 \cdots 0,05n + 3 \cdots n + 60 \cdots n$
et enfin, départ de F : $n \cdots n - 1 \cdots 2n - 2 \cdots 2n + 3 \cdots 40n + 60 \cdots 40n \cdots n$.
Et maintenant, il n'y a plus de doute, la boucle se ferme toujours ! »
$\mathcal{T}$- « *Pourrais-tu réfléchir à la façon de réaliser de telles boucles ? Et je te propose d'examiner le problème suivant !* »

Un magicien t'impose une succession de consignes

A. Choisis un nombre.
B. Multiplie-le par 2.
C. Ajoute 15 au résultat.
D. Multiplie cette somme par 2.
E. Ajoute encore 10.
F. Divise ce que tu viens de trouver par 4.
G. Soustrais 10.
H. Stop : tu viens de retrouver ton choix initial.

Sans connaître ton choix et sans voir tes calculs, comment le magicien sait-il que tu as retrouvé ton nombre initial ?

Ami lecteur, peux-tu aider $\mathcal{T}^2$ à répondre à ces questions ?

Bon courage, bon amusement et à bientôt !

Sudomath

Règle du jeu : Vous devez compléter la grille de manière que chaque ligne horizontale, chaque colonne verticale et chaque carré 3×3 comportent toutes les lettres du mot- mystère.

Les lettres différentes qui figurent dans les grilles permettent, si elles sont replacées dans le bon ordre, de former un mot-mystère bien connu ayant trait aux mathématiques.

Le mot-mystère du jour répond à la définition suivante :

« *Généralement il y en a quatre dans le moteur d'une voiture ordinaire* »

Grille 5 : *Niveau de difficulté : 1*

			N		D			
		N	I		C	L		
E	I			Y			S	N
	S	D				Y	E	
	N	L				I	R	
D	C			N			I	L
		R	D		S	C		
			E		I			

Grille 6 : *Niveau de difficulté : 2*

	R		L			C		E
		N	R		S	I	D	
		L						S
I				E				
D	L						E	Y
				N				R
L						E		
	E	S	I		C	Y		
R		Y			N		S	

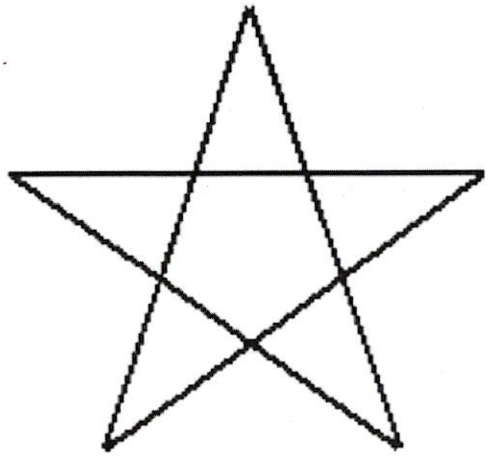
vous trouverez les solutions en page 33 de ce Math-Jeunes Junior *118*

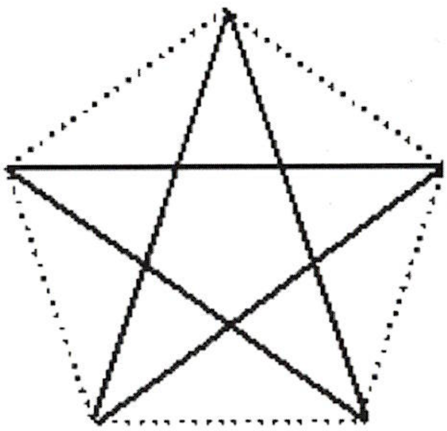
Des étoiles et des angles

F. Drouin

La secte des Pythagoriciens en avait fait un de ses signes de reconnaissance, pour certains elle symbolise les cinq piliers de l'Islam et d'autres l'intègrent dans leurs décorations de Noël.

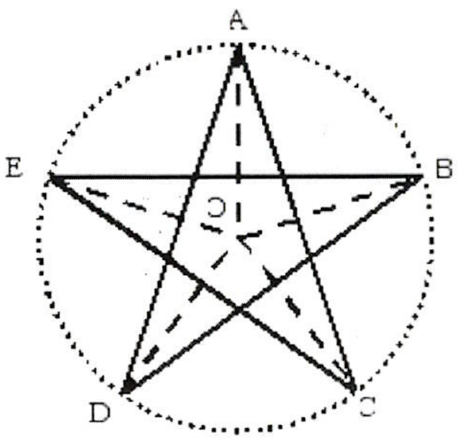
En mathématiques, nous y voyons un polygone étoilé obtenu à partir d'un pentagone régulier soit en prolongeant ses côtés, soit en traçant ses diagonales.





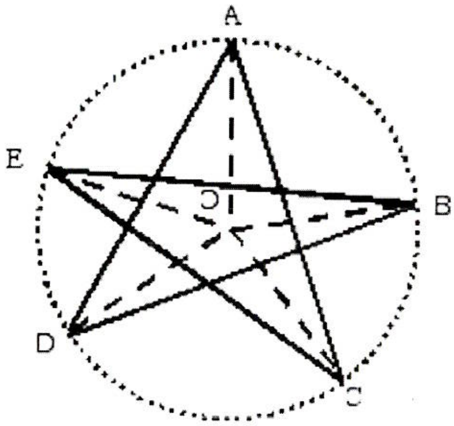
Quelle est la somme des mesures des angles formant les cinq pointes ?

Si tu ne connais pas le résultat, voici une méthode possible pour y parvenir.



L'étoile considérée possède cinq axes de symétrie donc les angles formant les pointes ont même mesure.
L'angle $D\hat{A}C$ inscrit dans le cercle a pour mesure la moitié de celle de son angle au centre $D\hat{O}C$.
Des considérations de symétrie permettent d'affirmer que les cinq angles définis par les cinq rayons tracés ont même mesure.
J'en déduis $D\hat{O}C = 360° : 5 = 72°$ et $D\hat{A}C = 72° : 2 = 36°$.
La somme des mesures des angles formant les cinq pointes est donc égale à $36° \times 5 = 180°$.

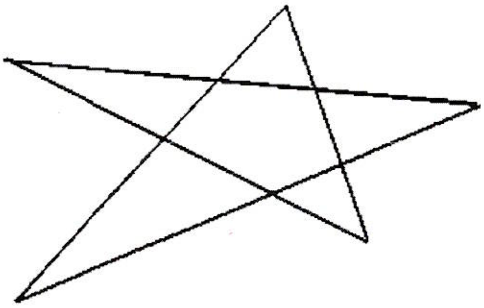
Et si l'étoile est non régulière mais ses sommets appartiennent à un même cercle ?



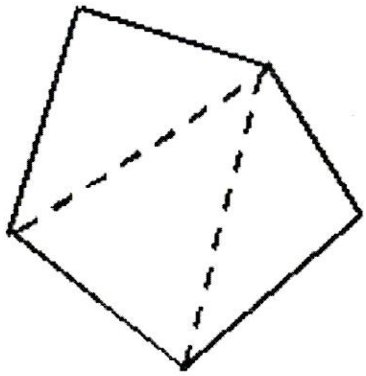
Nous allons utiliser une démarche semblable à celle utilisée pour l'étoile issue du pentagone régulier.
$A\hat{O}B + B\hat{O}C + C\hat{O}D + D\hat{O}E + E\hat{O}A = 360°$.
Un angle inscrit a pour mesure la moitié de celle de son angle au centre donc
$A\hat{D}B + B\hat{E}C + C\hat{A}D + D\hat{B}E + E\hat{C}A = \dfrac{360^0}{2} = 180°$.

Nous retrouvons le résultat précédent : la somme des mesures des angles formant les cinq pointes est égale à 180°.

Et si l'étoile est quelconque ?

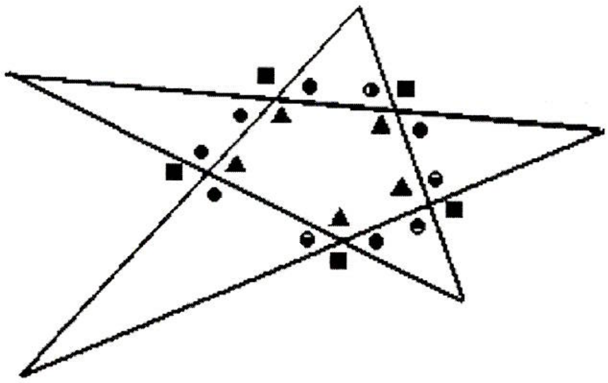


Nous allons d'abord utiliser un résultat que tu connais déjà :
La somme des mesures des angles d'un pentagone est égale à 540°.



Voici de quoi prouver ce résultat car tu connais la somme des mesures des angles d'un triangle et tu sais que $3 \times 180°$ est égal à 540°.

Considérons notre étoile. La zone centrale est un pentagone.



La somme des mesures des angles marqués d'un triangle noir est égale à 540° (somme des mesures des angles d'un pentagone).
La somme des mesures des angles marqués d'un carré noir est égale à 540° (les angles marqués d'un triangle noir et les angles marqués d'un carré noir sont deux à deux opposés par le sommet et ont donc deux à deux même mesure).

La somme des mesures des angles marqués d'un disque noir, d'un triangle noir et d'un carré noir est égale à 5×360^0.

La somme des mesures des angles marqués d'un disque noir est donc égale à $720^0(5 \times 360^0 - 2 \times 540^0)$.

La somme des mesures des angles des triangles formant les pointes de l'étoile est égale à $900^0(5 \times 180^0)$.

La somme des mesures des angles formant les cinq pointes de l'étoile est donc égale à $180^0(900^0 - 720^0)$.

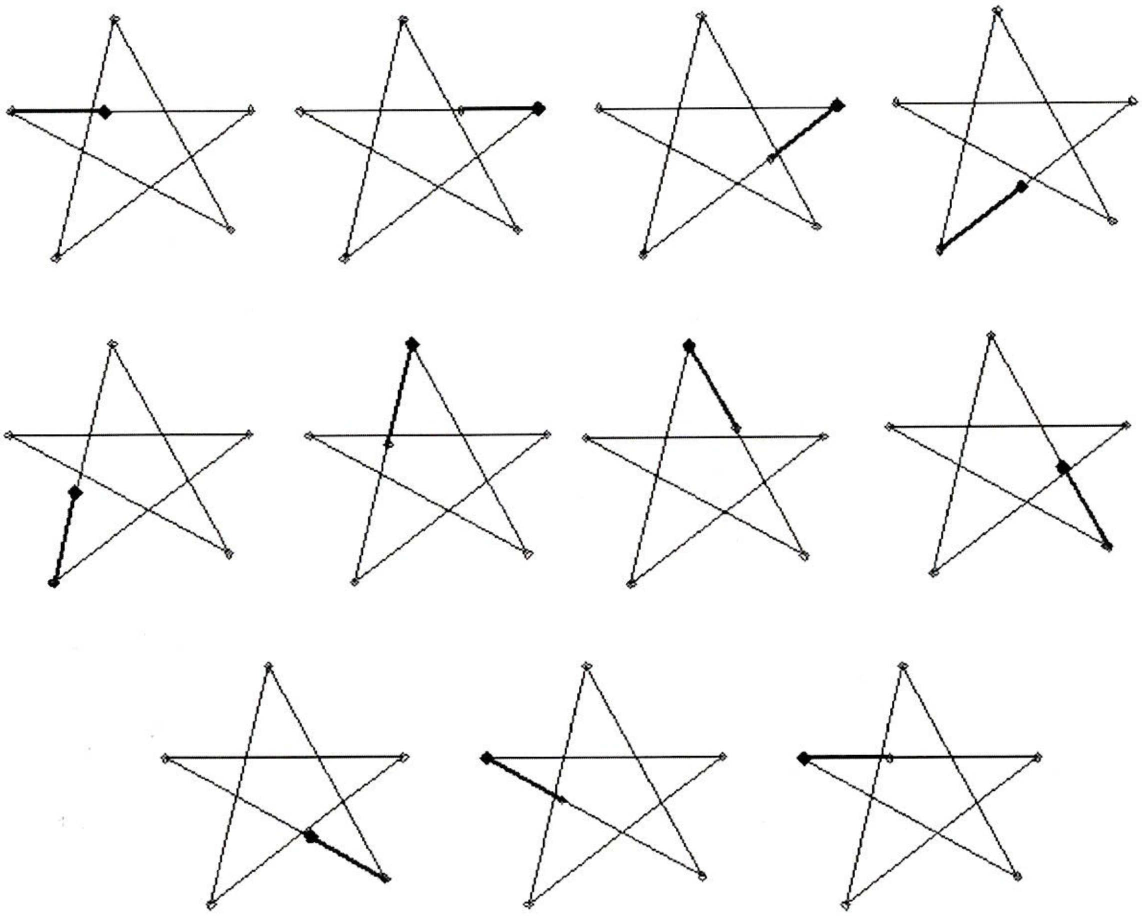
Voici donc un résultat peu connu que tu pourras présenter à ton professeur :

La somme des mesures des cinq angles de chacun des cinq triangles formant les pointes d'une étoile à cinq branches est égale à 180^0.

Récemment, Claude Villers (que les lecteurs de *Math-Jeunes Junior* connaissent bien) m'a présenté la justification qui suit :

je fais d'abord glisser et ensuite pivoter une allumette le long des segments formant l'étoile à cinq branches : lorsqu'elle revient à son point de départ, elle a tourné d'un demi-tour.

Nous retrouvons les 180° du résultat précédent.(lire les 11 figures de gauche à droite et de haut en bas).



J'espère que tu ne m'en voudras pas de t'avoir fait lire les démonstrations précédentes alors que la proposition de Claude Villers est tout aussi convaincante...

Des opérations à compléter. . .

R. Gérardy

1. Une division mystérieuse

Voici une division écrite de nombres entiers naturels, dans laquelle bien peu de renseignements sont donnés. Est-il possible de la compléter sachant que chaque point représente un chiffre de 0 à 9 ?

En observant les flèches rouges, tu trouveras facilement les 2^e et 4^e chiffres du quotient.

```
        . . . . . . . . | . .
                        |-----------
(a)     . . . ↓ ↓       | . . 8 . .
        -----
          0 . .
(b)         . . ↓ ↓
            -----
              . . .
(c)           . . .
              -----
                  0
```

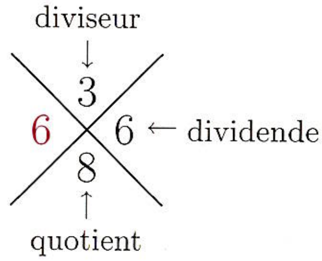
Il te reste donc à trouver les premier et dernier chiffres du quotient.

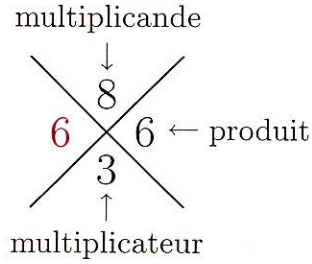
Tu peux remarquer que la ligne (b) indique que le produit de 8 par un nombre de 2 chiffres (le diviseur) est aussi un nombre de 2 chiffres, tandis que les lignes (a) et (c) sont occupées par des nombres de 3 chiffres. Que faut-il en conclure ? Justifie ta réponse.

Y a-t-il plusieurs solutions au problème ?
Vérifie ton calcul en effectuant l'opération inverse :

```
      . . 8 . .
  ×         . .
  -------------
    . . . . . .
  + . . . . .
  -------------
  . . . . . . .
```

La preuve par 9 (rappel : recherche du reste dans la division entière par 9) de ces deux opérations donnerait les résultats suivants :





Pour la division nous avons :
$3 \times 8 = 24$ et $24 = (2 \times 9) + 6$

De même, pour la multiplication :
$8 \times 3 = 24$ et $24 = (2 \times 9) + 6$

Le 6 correspond respectivement au reste obtenu pour le dividende et pour le produit, donc les résultats sont (probablement) exacts.

La preuve par 9 se base sur le caractère de divisibilité suivant : un nombre naturel est entièrement divisible par 9 lorsque la « somme de ses chiffres » (abus de langage) est divisible par 9.

Le nombre 876 354 075 est divisible par 9 car $8 + 7 + 6 + 3 + 5 + 4 + 0 + 7 + 5 = 45$.

Toutefois, la preuve par 9 n'est pas vraiment une certitude car une erreur de 9 et/ou la permutation de deux chiffres ne seront pas détectées. Par exemple $97\,372\,675 \times 9 \neq 867\,372\,075$ malgré un « total des chiffres » de 45.

2. Le problème des 4 fois 4

Tu peux utiliser tous les types de calculatrice, à condition de te servir obligatoirement 4 fois de la touche 4 du pavé numérique, à l'exclusion de toutes les autres ; par contre, toutes les touches « opératoires » sont autorisées.

En respectant ces contraintes, essaie d'obtenir successivement (affichage du résultat sur la calculatrice) tous les nombres entiers de 1 à 24 inclus.

Exemples : $4+4+4+4=16$; $(4\times 4)+(4:4)=17$; $(4+4):(4+4)=1$

Parfois, plusieurs solutions sont valables ; choisis alors la plus « élégante ». A toi de continuer. Pour le nombre 19, c'est un peu plus difficile car tu pourrais utiliser une touche que tu ne connais peut-être pas encore : la touche « factorielle » $\boxed{!}$

La notion de « factorielle » est simple à comprendre (pense aux facteurs d'un produit) :

$2\,! = 1.2 = 2$ ($2\,!$ se lit factorielle 2)
$3\,! = 1.2.3 = 6$
$4\,! = 1.2.3.4 = 24$
$5\,! = 1.2.3.4.5 = 120$
Nous avons aussi : $1\,! = 1$ et $0\,! = 1$

La notation est très « économique » au niveau de l'écriture de grands nombres. Par exemple :
$10! = 1.2.3.4.5.6.7.8.9.10 = 3\,628\,800$
$20! = 2\,432\,902\,008\,176\,640\,000$
$30! = 265\,252\,859\,812\,191\,058\,636\,308\,480\,000\,000$.

Les joueurs de whist ou de bridge utilisent un jeu de 52 cartes. En le battant, ils peuvent obtenir $52\,!$ empilements différents du jeu complet à distribuer. Pour écrire ce nombre (appelé le nombre de *permutations* de 52 objets), 68 chiffres sont nécessaires.

3. Choisir des opérations

Tu pourrais avoir à nouveau besoin de cette notation pour compléter le tableau ci-dessous.

Toutes les « opérations » sont permises pour y arriver. Pour chaque ligne, les opérations doivent intervenir sur les trois nombres proposés, aucun nombre supplémentaire ne peut être introduit et le résultat doit toujours être 6. Dans certains cas, tu devras préciser le déroulement du calcul à l'aide de parenthèses.
Tu pourrais avoir besoin d'aide pour les lignes 0 ; 1 ; 8 ; 10.

0		0		0	=	6
1		1		1	=	6
2	+	2	+	2	=	6
3		3		3	=	6
4		4		4	=	6
5		5		5	=	6
6		6		6	=	6
7		7		7	=	6
8		8		8	=	6
9		9		9	=	6
10		10		10	=	6

Ta recherche peut évidemment se faire sans calculatrice.

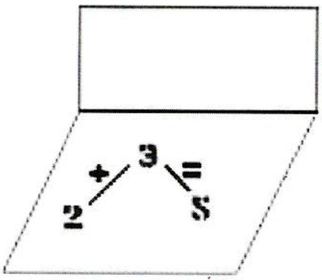
Bon amusement !

Tu trouveras les solutions à ces exercices à la page 33 de ce Math-Jeunes Junior *118*

Naturels et Entiers, il faut choisir votre camp !

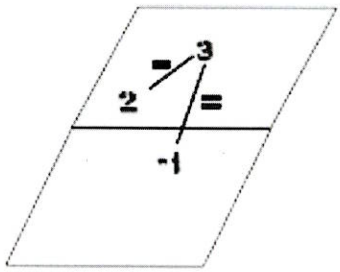
G. Villemin

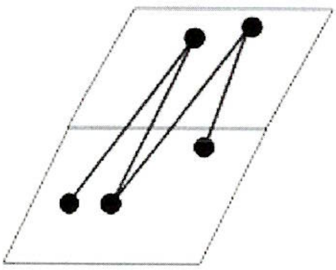
Lorsque l'on additionne deux nombres naturels, nous obtenons une somme qui est elle-même un nombre naturel. En d'autres mots, lorsque nous additionnons des nombres naturels, nous restons dans le même « camp ». Ce « camp » est appelé l'ensemble des nombres naturels ou l'ensemble des nombres entiers positifs.



Nous pourrions comparer cette observation à une partie de squash. En effet, les joueurs envoient une balle sur un mur, qui rebondit alors vers les joueurs. La balle ne quitte donc jamais son camp.

Par contre, lorsque l'on soustrait deux nombres naturels, la solution est impossible si l'on reste dans l'ensemble des naturels sauf si le 1[er] terme est plus grand que 2[e] terme (ex : $3 - 2 = 1$). Pour trouver une solution à $2 - 3$, nous devons élargir notre champ de travail, trouver un second camp avec lequel il est possible de résoudre cette différence.
Les mathématiciens ont donc décidé de créer un nouvel ensemble, un nouveau camp, celui des nombres entiers négatifs.





Les nombres naturels (ou nombres entiers positifs) et les nombres entiers négatifs, ensemble, ne forment qu'un seul groupe, celui des nombres entiers, noté $\mathbb{Z}$. Lorsque nous travaillons dans l'ensemble des entiers, nous passons donc d'un camp à l'autre, tout comme le tennis.

Nous espérons à présent que lorsque vous ferez des soustractions, vous penserez à réfléchir à la nature des nombres employés et au camp du résultat !!! Vous deviendrez alors la Justine Henin des mathématiques ...

Cet article nous est parvenu à la rédaction et nous remercions les étudiants de l'Ecole Normale de Braine-le-Comte qui l'ont réalisé (M. Colletti et M.-N. Deback) ainsi qu'à leur maître-assistant (G. Delcroix)

Source:`http://villemin.gerard.free.fr/Wwwgvmm/Type/NbDebut.htm`(Le20Septembre2007)

Olympiades

C. Festraets

Participer !

Durant cette année scolaire, aura lieu la trente-troisième édition de l'Olympiade Mathématique Belge (OMB).

Comme *presque* tout le monde le sait, l'OMB est une épreuve mathématique ouverte à tous les élèves de l'enseignement secondaire. Depuis douze ans déjà, cette épreuve est divisée en trois concours. Ceux-ci se déroulent en parallèle. La " Mini-Olympiade " accueille les élèves de première et de deuxième années ; la " Midi-Olympiade " est réservée aux élèves de troisième et de quatrième années ; enfin, la " Maxi-Olympiade " est destinée aux élèves de cinquième et de sixième années.

Voici en quelques mots le principe commun à tous ces concours. Pour chacun d'entre eux, il y a trois étapes : une éliminatoire qui a lieu dans les locaux mêmes de ton école, une demi-finale organisée dans des centres régionaux et une finale qui se tient à Namur. Le calendrier de la trentième-troisième Olympiade Mathématique Belge est le suivant :

éliminatoire : le 16 janvier 2008
demi-finale : le 5 mars 2008
finale : le 30 avril 2008
proclamation : le 24 mai 2008

Evidemment, ton professeur reçoit toutes les informations utiles sur cette Olympiade. Alors si tu désires en savoir plus, il te suffira de lui poser les questions auxquelles cet article n'apporte pas de réponse. Il se fera certainement un plaisir de mieux t'informer.

Se préparer !

Si tu souhaites te préparer à cette épreuve, tu trouveras plus loin quelques problèmes posés dans le passé. Ils vont non seulement éveiller ta curiosité mais encore te permettre de te familiariser avec la forme du questionnaire.

Comme tu vas bientôt le constater, il y a, pour la plupart des questions, cinq réponses proposées. Une seule d'entre elles est correcte. Par contre, certaines questions n'ont pas reçu de réponse " préformulée ". Dans ce cas, tu dois trouver un nombre entier appartenant à l'intervalle [0, 999], autrement dit un nombre entier positif, éventuellement nul, strictement inférieur à 1000. Ne réponds que si tu es sûr de ta réponse. En effet, la manière de calculer ton score lors du concours est la suivante : 5 points pour une bonne réponse, 0 pour une mauvaise réponse. Tout à fait normal, diras-tu ! Mais, si tu t'abstiens de répondre à une question, tu reçois 2 points. Là tu te demandes peut-être quel est le but de ce procédé ? Mais précisément de te faire prendre conscience qu'il vaut mieux ne rien répondre plutôt que de répondre n'importe quoi. Enfin tu dois savoir qu'il est nécessaire de répondre à un minimum de 5 questions pour être classé. Les problèmes que tu vas résoudre ci-dessous ont été choisis dans le tome 4 des OMB reprenant toutes les questions posées de 1994 à 1998. Malheureusement, ce tome n'est plus en vente, il est épuisé. Par contre, si tu désire peaufiner ta préparation et évaluer ton potentiel olympique, tu peux acquérir les tomes 5 (1999-2002) et 6 (2003-2006) des OMB. Voici tous les renseignements nécessaires pour cela :

Olympiades Mathématiques Belges, tome 5 ou tome 6 : 6 euros, les deux tomes : 10 euros
Ajouter 1,80 euros de port pour un tome, 3,50 euros pour deux tomes.

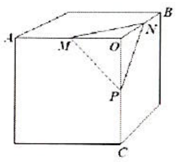
Les commandes sont à adresser à
SBPMef, rue du 11 nocvembre, 24, 7000 Mons
Compte : 000-0728014-29
Fax et téléphone : 065 31 91 80.

S'exercer !

1. Chaussettes (demi-finale - 1994)
Dans un tiroir sont mélangées 20 chaussettes provenant de 5 paires blanches et de 5 paires bleues. S'il fait noir, combien faut-il prendre de chaussettes dans ce tiroir pour être certain d'avoir au moins une paire de chaussettes de même couleur ?

Ⓐ 2 Ⓑ 3 Ⓒ 6 Ⓓ 11 Ⓔ une autre réponse

2. Cube(demi-finale - 1995)
Dans la figure ci-contre, M, N et P sont les milieux des arêtes $[OA]$, $[OB]$ et $[OC]$ du cube. Quel est le rapport du volume du cube à celui de la pyramide $OMNP$?



Ⓐ 6 Ⓑ 8 Ⓒ 16 Ⓓ 24 Ⓔ 48

3. Premier (demi-finale - 1996)
Sans réponse préformulée - Quel est le nombre premier le plus proche de 100 ?

4. Combien ? (éliminatoire - 1994)
Combien de nombres entiers sont strictement compris entre 257^2 et 258^2 ?

Ⓐ 513 Ⓑ 514 Ⓒ 515 Ⓓ 516 Ⓔ 517

5. Sculpture (demi-finale - 1997)
Sans réponse préformulée - Une artiste, disposant de cubes tous de même dimension, réalise une sculpture abstraite en collant un cube sur chaque face d'un cube central. Le lendemain, elle décide de retravailler son œuvre en collant encore un cube sur chaque face libre du solide obtenu la veille. Combien de cubes a-t-elle alors utilisés en tout ?

6. Divisibilité (éliminatoire - 1997)
Combien de nombres de deux chiffres ont la somme de leurs chiffres divisible par 7 ?

Ⓐ 7 Ⓑ 9 Ⓒ 10 Ⓓ 11 Ⓔ 12

7. Calcul (éliminatoire - 1995)
L'opposé de l'inverse de 2^6 est

Ⓐ $\left(\frac{1}{2}\right)^6$ Ⓑ $\left(-\frac{1}{2}\right)^6$ Ⓒ $-\frac{1}{2^{-6}}$ Ⓓ $(-2)^{-6}$ Ⓔ -2^{-6}

8. Pyramide (éliminatoire - 1994)
Le nombre de faces régulières d'une pyramide à base triangulaire n'est *jamais*

Ⓐ 0 Ⓑ 1 Ⓒ 2 Ⓓ 3 Ⓔ 4

9. Internes (éliminatoire - 1998)
Dans une école, il y a 30 % de garçons et 70 % de filles ; 30 % des garçons et 20 % des filles sont internes. Quel est le pourcentage d'internes dans l'établissement ?

Ⓐ 22 % Ⓑ 23 % Ⓒ 24 % Ⓓ 25 % Ⓔ 26 %

10. Tangente (demi-finale - 1997)
La droite d'équation $y = x$ est tangente à un cercle centré au point de coordonnées (2,4). Quel est le rayon de ce cercle ?

Ⓐ Ⓑ $\frac{7}{5}$ Ⓒ $\frac{3}{2}$ Ⓓ $\sqrt{2}$ Ⓔ $\sqrt{3}$

11. Balance (demi-finale - 1994)
Sans réponse préformulée - Une balance a ses deux plateaux en équilibre. Sur l'un d'eux se trouvent trois anthologies et un manuel d'algèbre, sur l'autre une anthologie et quatre manuels. Chaque anthologie pèse 450 grammes. Si tous les manuels ont le même poids, quel est ce poids en grammes ?

12. Carré (éliminatoire - 1995)
Les côtés d'un carré mesurent $x + 3$, $x^2 + 1$, $y - 3$ et $y^2 - 6y - 11$. Que vaut la différence $y - x$?

Ⓐ -6 Ⓑ 0 Ⓒ 4 Ⓓ 6 Ⓔ 10

13. Polynôme (demi-finale - 1998)
Sans réponse préformulée - Pour combien de valeurs du réel a le polynôme $X^2 + aX + 12$ a-t-il ses deux racines dans $\mathbb{Z}$?

Solutions

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
B	E	101	B	25	E	E	D	B	D	300	D	6

Solutions des jeux des pages 14 et 15

1. Un clavier à réparer

$10000 + 1000,0 + 100,00 + 10,000 + 1,0000 = 11111$

$30 + 70,0 = 100$

$3029,0 + 2931 = 5960$

$37,43 + 53,57 = 91$

$75,33 - (33 + 3,33) = 39$

$3,0 + 7,00 = 10,0$

$3743 - 3,15 = 3739,85$

$102 + 10,3 + 104 + 1,05 = 217,35$

$23 + 456 + 789 - 1,023 = 1266,977$

$1000 + 10,10 - (900,0 + 90,90) = 19,20$

2. Puzzle et dominos

La solution est unique dans le premier cas, pas dans les deux suivants.

2	2	1	0
0	0	1	0
2	2	1	1

2	3	1	0	2
2	0	0	2	2
3	0	1	1	3
1	0	1	3	3

2	3	3	0	3
1	1	0	0	2
1	1	1	2	0
0	3	3	2	2

3. Nombres croisés

$a = 7$ et voici la grille complétée :

	1	2	3	4	5	6	7
1	5	5		3		1	4
2	5	7	6	4	8	0	1
3		6		3		1	
4	3	4	3		3	6	4
5		8		3		8	
6	1	0	1	6	8	0	7
7	4	1		4		7	0

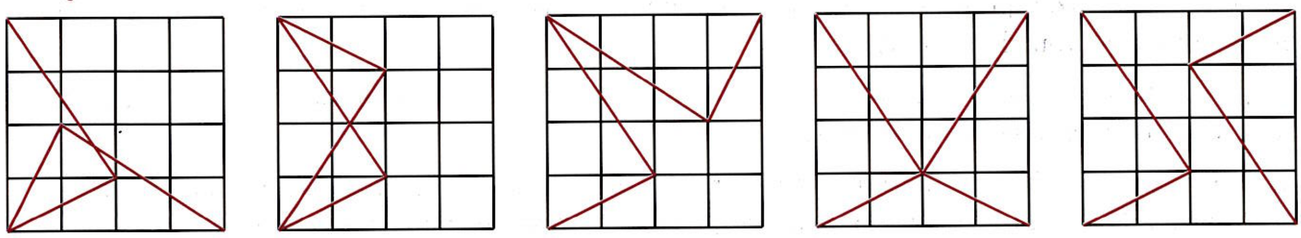
4. Une grande famille

La famille comprend sept enfants : quatre garçons et trois filles.

5. Trissaut et Quadrissaut

Trissaut parcourt nécessairement le chemin 75, 57, 30, 24, ... pour terminer sa course en 96, sans avoir atteint la case noire. Quadrissaut part nécessairement de 200 et atteint 112, donc la case noire.

6. Symétries



Math-quiz

Claude Villers

Voici donc la cinquième édition de notre modeste concours qui n'est, en fin de compte, qu'un prétexte à vous donner des occasions de résoudre quelques problèmes pas bien difficiles qui se situent peu ou prou en dehors du cadre scolaire proprement dit.

La plupart des questions font surtout appel au bon sens et ne nécessitent que de l'attention, un peu de recherche et de la débrouillardise. Ce sont donc vos facultés d'investigations qui vont être sollicitées. A vous de faire la preuve de votre esprit de participation et de vos capacités à vous organiser.

Comme ce fut déjà le cas lors des quatre années scolaires précédentes, nous vous proposons en fait de relever un « défi » c'est à dire une invitation à un effort de dépassement soit celui de trouver le maximum de réponses correctes aux questions qui vous sont proposées dans cette rubrique.

Ce « challenge », ne requiert aucun droit d'inscription.

Il se déroulera à nouveau en deux étapes publiées dans les deux premiers numéros de l'année scolaire 2007-2008. Chaque étape fera l'objet d'un classement et d'une inscription au tableau d'honneur du concours. Il vous est donc, à la limite, loisible de ne participer seulement qu'à l'une ou l'autre de ces étapes (mais ce n'est évidemment pas conseillé). Un classement général sera établi à l'issue de la deuxième étape et les meilleurs résultats du classement général seront récompensés

Cette année encore, nous avons reçu l'appui appréciable de la firme CASIO Belgium, qui dotera le concours de calculatrices scientifiques Fx 92 Collège 2D.

Le principe :

A chacune des deux étapes, 10 questions vous sont proposées. Chacune d'elles possède un coefficient de difficulté indiqué sous la forme d'étoiles. Chaque étoile vous permet de gagner des points... si votre réponse est correcte, bien entendu. Vous répondez à autant de questions, parmi les dix, que vous le souhaitez.

Bien que Math-Quiz soit donc un concours individuel, rien ne vous interdit de travailler en groupes ou même en classes complètes.

Chacun devra cependant nous faire parvenir sa carte-réponse personnelle soit par un envoi personnel soit dans un envoi groupé effectué par votre professeur ou votre école.

Participez à ce jeu-concours et invitez vos condisciples à y prendre part

Comment répondre :

Math-Jeunes Junior n°118J, 30–32, 2007

Vous nous nous faites parvenir vos réponses rédigées sur une carte (bristol) de format $10cm \times 15cm$, éventuellement rassemblées par votre professeur de mathématiques, dans une enveloppe affranchie et à l'adresse suivante :

SBPMef-Math-Quiz 2007-2008, Rue du Onze Novembre, 24 à 7000 MONS

Attention, respectez bien la procédure ci-après.

Sur une même face, indiquez lisiblement (en caractères d'imprimerie SVP), vos nom et prénom, votre adresse complète, le nom de votre école et son adresse, le niveau de votre classe en 2007-2008, ainsi que vos réponses aux questions de l'étape sous la forme d'un tableau du modèle ci-dessous.

Question	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Réponse										

Attention : Vos réponses à cette première étape doivent nous être impérativement parvenues avant le samedi 22 décembre 2007.

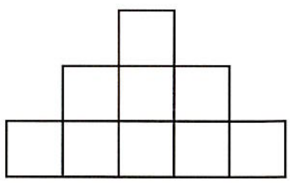
L'autre face de la carte est destinée à recevoir votre participation éventuelle au concours annexe.

Nous vous invitons en effet à être imaginatif et créatif en réalisant, sur l'autre face de la carte, un dessin illustrant un thème mathématique de votre choix.

A vous donc de faire preuve d'originalité. Les meilleures propositions seront également récompensées par leur publication dans les deux autres revues de l'année scolaire. Vos dessins doivent être réalisés à l'encre. Evitez le crayon qui manque de contraste.

Voici maintenant les questions de la première étape. Notez que chaque étoile y aura cette fois une valeur de 3 points. 78 points sont donc en jeu comme vous pouvez le constater ci-dessous. Signalons encore qu'il restera 130 points en jeu lors de la deuxième étape.

N'hésitez pas à convier vos condisciples à relever le défi de participer à ce concours.

1	*	Par quel chiffre se terminera le nombre n si n est la 19^e puissance de 19 ?
2	*	Une route rectiligne mesure 3 km de longueur. Quelle est, en cm, la longueur du segment de droite qui la représente sur une carte au $\frac{1}{10000}$?
3	*	Sur une feuille carrée de côté $10cm$, Mathieu a dessiné deux cercles tangents l'un à l'autre et de rayons respectifs 5cm et 4 cm. Quelle est, en centimètres, la distance des deux centres ?
4	**	Une cave obscure renferme des bouteilles d'un seul et même vin mais de 5 années différentes. Combien doit-on en remonter pour être certain d'en avoir pris trois de la même année ?
5	**	Pour numéroter les dossards des participants au jogging à partir de 1, sans manque ni ajout ni répétition, il a fallu imprimer 261 chiffres. Combien y avait-il de participants à ce jogging ?
6	***	« Alain possède au moins 100 CD » dit Bernard. « C'est faux, il en possède moins de 100 » dit Claire. « Il possède au moins un CD » dit Daniel . Quel est le nombre de CD d'Alain si on sait qu'une seule de ces affirmations est vraie ?
7	***	Un gros cube en bois de $4dm$ de côté est entièrement peint en vert. Il est ensuite découpé en petits cubes de $10cm$ de côté par des découpes parallèles aux faces. Parmi les 64 petits cubes ainsi obtenus, combien ont exactement 4 faces non peintes ?
8	* ***	Un commerçant a déjà appliqué une baisse de 10% sur un produit. Il souhaite maintenant appliquer une nouvelle baisse sur le nouveau prix de manière à obtenir une diminution globale du prix initial de 28%. Quel doit être le pourcentage de cette deuxième baisse ?
9	****	La figure représente un empilement de trois étages construits avec des briques carrées. Combien de telles briques faut-il en plus de celles déjà placées pour construire de la même manière un empilement de 50 étages au total ? 
10	****	Les échecs se jouent sur un jeu comportant 8 lignes de 8 cases chacune. De combien de manières pouvez-vous placer 8 pions sur un jeu de façon à ne jamais avoir plus d'un pion sur la même rangée (ligne ou colonne) ?

Solution des sudomath n° 5 et 6 de la page 20

Le mot-mystère est : **CYLINDRES**

Grille 5 :

L	R	Y	N	S	D	E	C	I
S	D	N	I	E	C	L	Y	R
E	I	C	R	Y	L	D	S	N
R	S	D	L	I	N	Y	E	C
C	E	I	S	R	Y	N	L	D
Y	N	L	C	D	E	I	R	S
D	C	E	Y	N	R	S	I	L
I	Y	R	D	L	S	C	N	E
N	L	S	E	C	I	R	D	Y

Grille 6 :

S	R	I	L	Y	D	C	N	E
E	Y	N	R	C	S	I	D	L
C	D	L	N	I	E	R	Y	S
I	N	R	D	E	Y	S	L	C
D	L	C	S	R	I	N	E	Y
Y	S	E	C	N	L	D	I	R
L	I	D	Y	S	R	E	C	N
N	E	S	I	L	C	Y	R	D
R	C	Y	E	D	N	L	S	I

****

Solution de l'article : « Des opérations à compléter . . . » des pages 24 et 25

1. Une division mystérieuse

a) les 2^e^ et 4^e^ chiffres du quotient sont évidemment des 0 (les flèches rouges te l'indiquent) ;

b) la ligne (b) de la division écrite t'indique que le produit de 8 par le diviseur est un nombre de 2 chiffres : plusieurs solutions sont possibles, mais le diviseur sera au plus 12 car $8 \times 12 = 96$;

c) les lignes (a) et (c) comprenant chacune 3 chiffres indiquent que le diviseur est au moins 12 car $9 \times 12 = 108$;

d) le diviseur est donc 12 et le quotient 90809 ; ce qui donne un dividende de 1089708.

2. Le problème des 4 fois 4

Plusieurs solutions sont très souvent possibles :

$1 = (4:4) \times (4:4)$	$13 = (44:4) + \sqrt{4}$
$2 = (4:4) + (4:4)$	$14 = (4 \times 4) - (4:\sqrt{4})$
$3 = (4+4+4):4$	$15 = (4 \times 4) - (4:4)$
$4 = (4:\sqrt{4}) \times (4:\sqrt{4})$	$16 = 4+4+4+4$
$5 = \sqrt{4}+\sqrt{4}+(4:4)$	$17 = (4 \times 4) + (4:4)$
$6 = \sqrt{4}(4-4/4)$	$18 = (4 \times 4) + (4:\sqrt{4})$
$7 = 44/4 - 4$	$19 = (4!-4) - (4:4)$
$8 = (4 \times 4)/4 + 4$	$20 = 4(4+4/4)$
$9 = 4+4+4/4$	$21 = (44-\sqrt{4}):\sqrt{4}$
$10 = (44-4):4$	$22 = (44:4) \times \sqrt{4}$
$11 = 44:(\sqrt{4}+\sqrt{4})$	$23 = (44+\sqrt{4}):\sqrt{4}$
$12 = (44+4):4$	$24 = (44:\sqrt{4}) + \sqrt{4}$

3. Choisir des opérations

$(0!+0!+0!)! = 6$	$(6 \times 6):6 = 6$
$(1+1+1)! = 6$	$7-(7:7) = 6$
$2+2+2 = 6$	$\sqrt[3]{8}+\sqrt[3]{8}+\sqrt[3]{8} = 6$
$(3 \times 3) - 3 = 6$	$(\sqrt{9} \times \sqrt{9}) - \sqrt{9} = 6$
$\sqrt{4}+\sqrt{4}+\sqrt{4} = 6$	$(\log 10 + \log 10 + \log 10)! = 6$
$5+(5:5) = 6$	

Pour le 0, le 1 et le 10 souviens-toi de la notion de factorielle ; pour le 8, certaines calculatrices possèdent la fonction « ipart » (partie entière) de $\sqrt[3]{8} = 2$; pour $log 10 = 1$, la calculatrice te l'indique bien sûr, mais demande une explication à ton professeur.

Math-Jeunes Junior
Périodique trimestriel
24, rue du Onze Novembre - 7000 Mons
Bureau de dépôt 7000 Mons 1

Responsable de l'édition : A. PATERNOTTRE
Rue du Moulin, 78 - 7300 Boussu
Bureau de dépôt : Mons 1

Autorisation de fermeture
Sluitings toelating
7000 Mons 1
5/156

Belgique - België
P.P.
7000 Mons 1
5/124

Périodique - Peut être ouvert pour contrôle postal

Réservé à la poste

Inconnu
Refusé
Décédé
Adresse insuffisante
N'habite plus à l'adresse indiquée