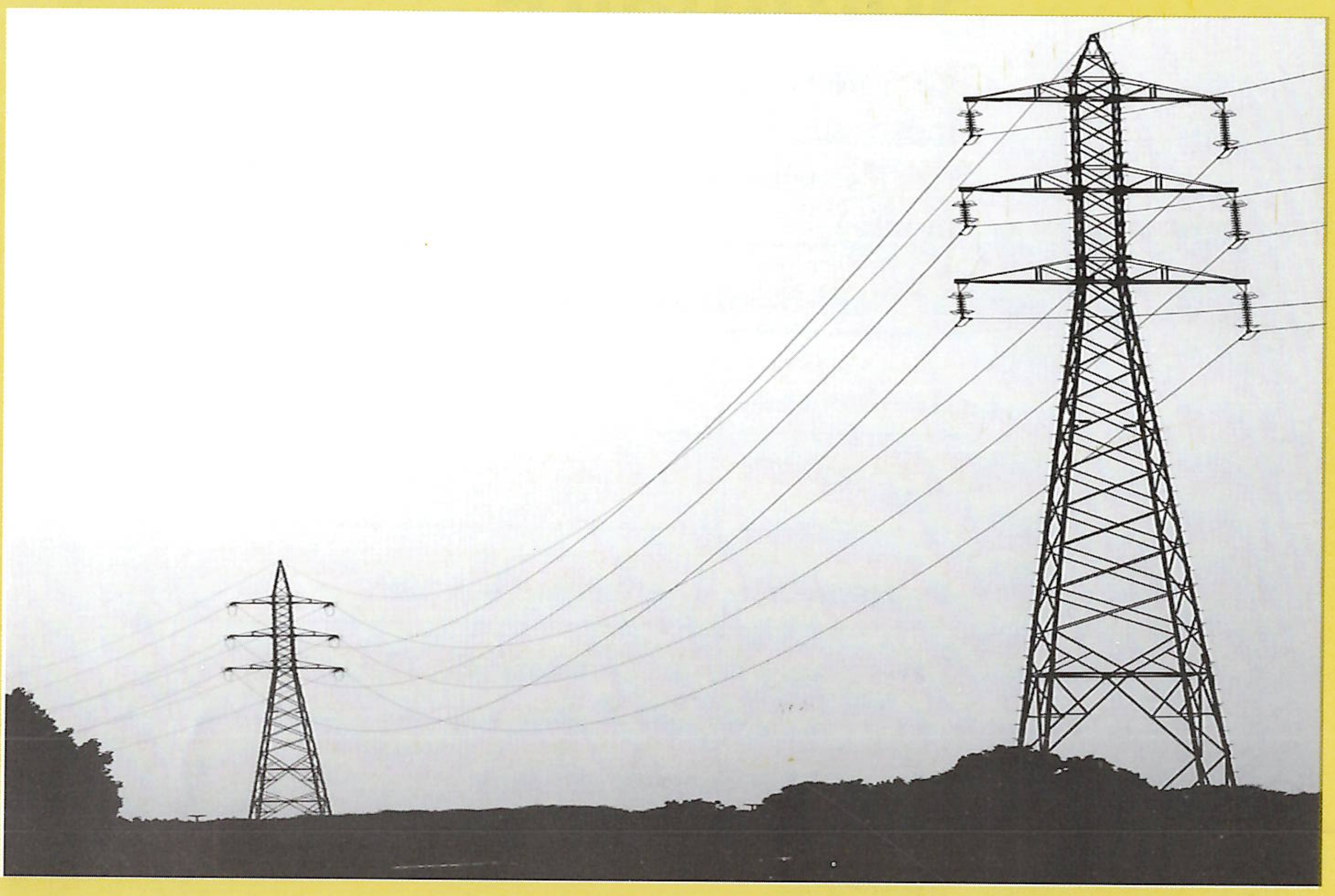
MJ Junior !



29e année - N° 119J
Février 2008

N°119J Vingt-neuvième année 2008

Math-Jeunes junior

Sommaire

Illustration de couverture : photographie de Claude Villers

La chaînette

Les conducteurs des lignes à haute tension peuvent être considérés comme des fils homogènes et pesants suspendus, pour chaque portée, entre deux points. Sous l'effet de son propre poids, chacun de ces câbles dessine une courbe appelée « chaînette ». De longue date, de nombreux mathématiciens se sont intéressés au problème de cette forme. Signalons que Galilée croyait qu'il s'agissait d'un arc de parabole. En 1691, à la suite d'un défi lancé par Jacques Bernouilli, Leibniz, Jean Bernoulli et Huygens ont prouvé de manière indépendante qu'il n'en était rien. Le nom de « chaînette » est dû à Huygens. La chaînette n'apparaît pas seulement dans la forme d'un fil suspendu. On la trouve aussi pour un arc tenant par son propre poids où elle est renversée.

La mouche, l'aquarium et le morceau de sucre

C. Villers

Brèves de classe 5

La « fable » mathématique qui suit aurait pu être réelle.

Mais après tout, il n'est certainement pas excessif de faire appel à votre imagination, que du contraire.

Tout se passe donc sur les parois d'un aquarium, vide et sans couvercle, tout ce qu'il y a de plus ordinaire. Vous savez certainement que cet objet de l'espace a généralement la forme d'un parallélépipède rectangle. C'est bien le cas ici.

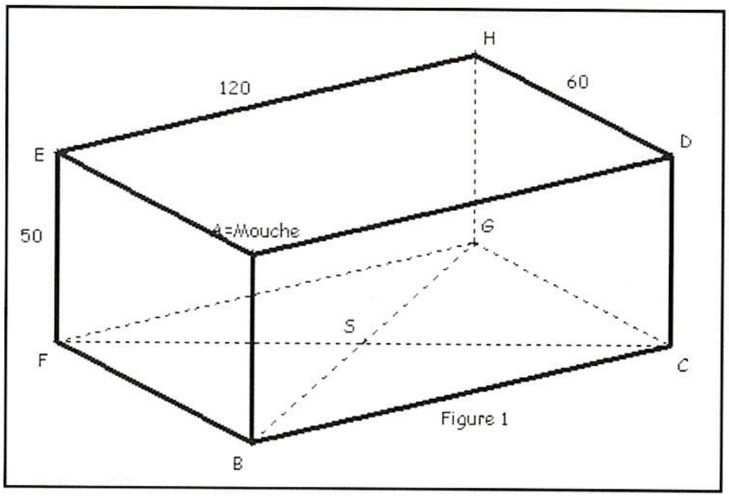


Figure 1

La figure 1 illustre cet aquarium. Elle comporte des indications de dimensions pour lesquelles l'unité de longueur est le centimètre. Il en sera ainsi d'ailleurs pour tout le reste de l'histoire.

Et puis surtout, il y a une mouche qui n'est pas tout à fait ordinaire. Elle a perdu ses ailes dans des circonstances qui ne nous sont pas connues mais ce n'est pas important. Quoique...!

Du fait de son handicap, elle ne peut plus voler. Elle ne peut seulement que se déplacer sur les parois latérales et sur le fonds.

Admettez maintenant que notre mouche M se trouve au sommet A de l'aquarium et qu'elle observe avec envie un tout petit morceau de sucre situé au centre S de la face $BCGF$. Elle a vraiment envie d'aller se délecter mais comme elle est à la fois handicapée des ailes et maligne du cerveau, elle commence par étudier la situation de manière à déterminer le chemin le plus court qui la mènera de A à S, en circulant sur les parois et sur le fonds. Mais quel sera ce chemin ? Quelle en sera la longueur ? Par où passer ? ...

Alors, avant de lire la suite, pouvez-vous aider la mouche à définir son trajet et à en évaluer sa longueur ?

Le plus court chemin entre deux points est le segment de droite qui les joint, c'est bien connu. Mais, la mouche ne peut pas aller en ligne droite de A et S (elle ne peut plus voler).

Une première idée de déplacement consiste à suivre le chemin composé des deux segments $[AB]$ et $[BS]$.

Quelle en est la longueur ?

Il est immédiat que $|AB| = 50$.

Calculer $|BS|$ est moins simple.

On peut dire que $|BS|$ vaut la moitié de$|BG|$ puisque les diagonales du rectangle $BCGF$ se coupent en leur milieu ; c'est bien connu aussi. $[BG]$ est l'hypoténuse d'un triangle rectangle dont les côtés de l'angle droit ont 120 et 60 pour longueurs.

L'application du théorème de Pythagore ([1]) permet d'écrire : $|BG|^2 = (120)^2 + (60)^2$.

D'où : $|BG|^2 = 14400 + 3600 = 18000$ et $|BG| = \sqrt{18000} = \sqrt{3600 \times 5} = 60\sqrt{5}$:

N.B : Vous pouvez, bien entendu, vous satisfaire d'une approximation donnée par une calculatrice : $\sqrt{18000} = 134,164\cdots$ qui approche $|BG|$ au millième de centiimètre.

Dès lors $|AS| = 50 + (\dfrac{134,164\cdots}{2}) = 50 + 67,082\cdots = 117,082\cdots$

Il est maintenant certain que la longueur d'un éventuel meilleur trajet sera inférieure à $117,082\cdots$

Une deuxième idée consiste à envisager de suivre un segment tel que $[AI]$ suivi du segment $[IS]$. Ce trajet est celui illustré sur la figure 1bis.

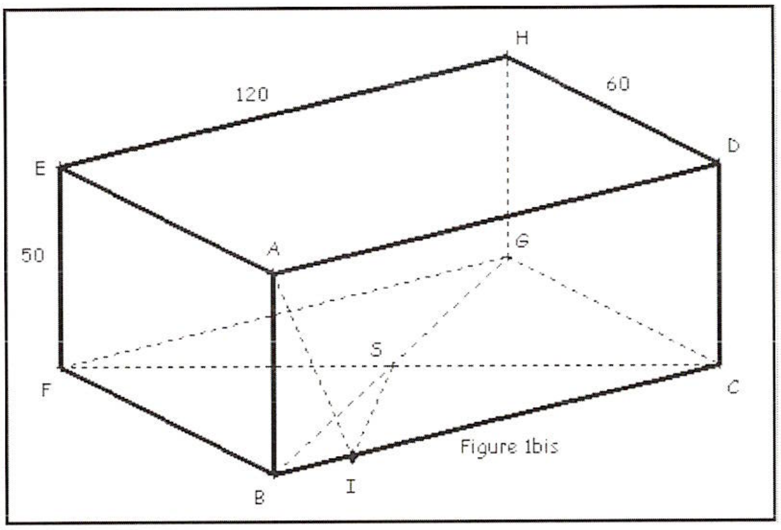


Figure 1bis

Où situer I sur $[BC]$ pour que la longueur de ce trajet soit la plus petite possible ? ? Cherchez ! ! !

Il est certes possible de désigner $|BI|$ par une lettre (x par exemple) et de calculer les longueurs des segments $[AI]$ et $[IS]$ par l'emploi du théorème de Pythagore (encore lui ! ! !).

La longueur du trajet s'exprimera alors sous la forme d'une expression dépendant de x.

Il faudra ensuite trouver la valeur de x pour laquelle cette expression est la plus petite possible. Cela ne paraît pas très simple. Par cette méthode, le calcul prendra le pas sur les considérations géométriques. Mais peut-être est-il possible d'essayer de réaliser le contraire c'est à dire que la géométrie prenne le pas sur les calculs.

Donc, avant de s'embarquer dans des calculs, il convient de faire preuve d'un peu d'astuce.

Une idée est de placer la paroi $ABCD$ et le fond $BCGF$ dans le même plan (sans les superposer).

([1]) si vous ne l'avez pas encore rencontré, demandez une petite explication à votre professeur ou à...

A cet effet, on imagine que la paroi $ABCD$ tourne de 90^0 autour de BC.

On obtient ainsi la figure 2 suivante.

Le plus court chemin de A' à S est tel que A', I et S sont alignés. Il est donc représenté par le segment $[A'S]$.

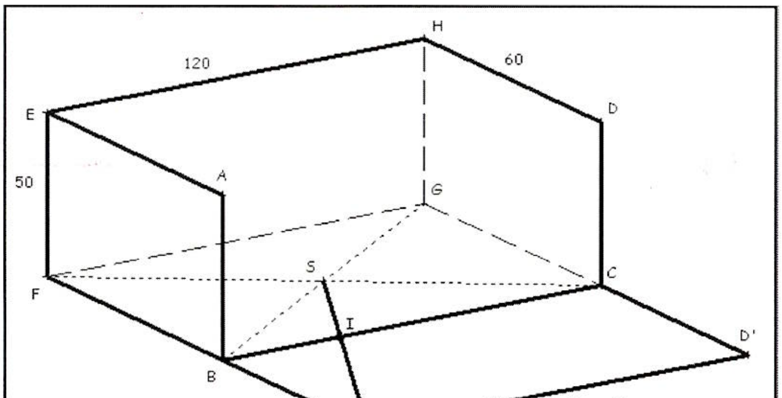


Figure 2

Une objection apparaît ! C'est que la paroi $AEFB$ peut également être « rabattue » dans le plan contenant le fond.

La figure 2bis illustre cette option dans laquelle le plus court chemin de $A"$ à S est représenté par le segment $[A"S]$.

Il faut donc maintenant évaluer $|A'S|$ et $|A"S|$ de manière à déterminer le meilleur trajet.

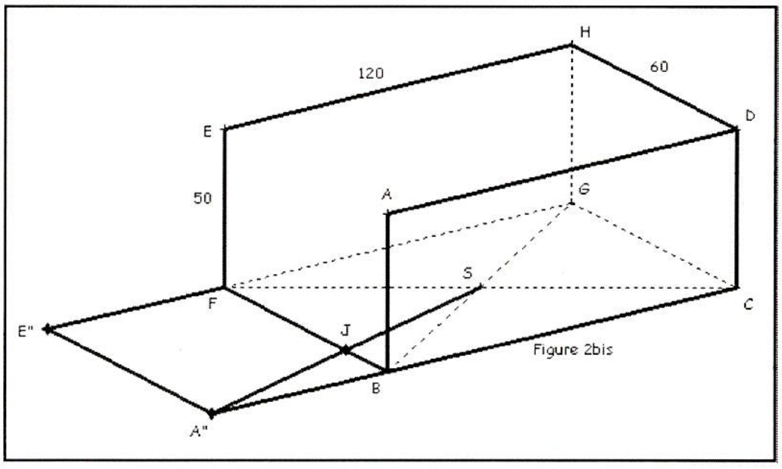
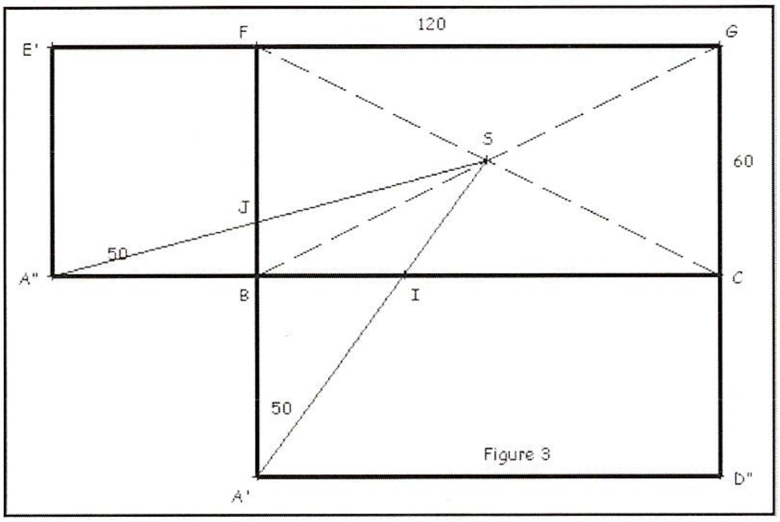


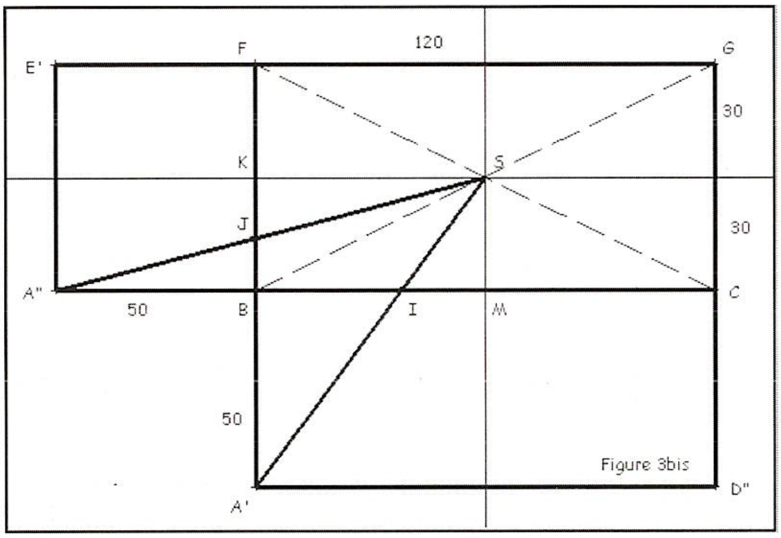
Figure 2bis

La figure 3 reprend les deux distances $|A'S|$ et $|A"S|$ à évaluer.

Cela est relativement simple si nous faisons appel, à nouveau, à notre cher ami Pythagore.



Les parallèles aux côtés BC et BF par S coupent $[BC]$ et $[BF]$ en leurs milieux M et K, ce qui finalement fournit la figure 3bis.



On a donc :

$|A'S|^2 = |A'K|^2 + |KS|^2 = (80)^2 + (60)^2 = 6400 + 3600 = 10000$

d'où $|A'S| = \sqrt{10000} = 100$

$|A"S|^2 = |A"M|^2 + |MS|^2 = (110)^2 + (30)^2 = 12100 + 900 = 13000$

d'où $|A"S| = \sqrt{13000} = 114,017\cdots$

$[A'S]$ est donc ici le chemin le plus court.

Pourquoi n'est ce pas $[A"S]$?

Pour répondre à cela il faut observer la situation de S par rapport à la médiatrice ([2]) m de $[A'A"]$.

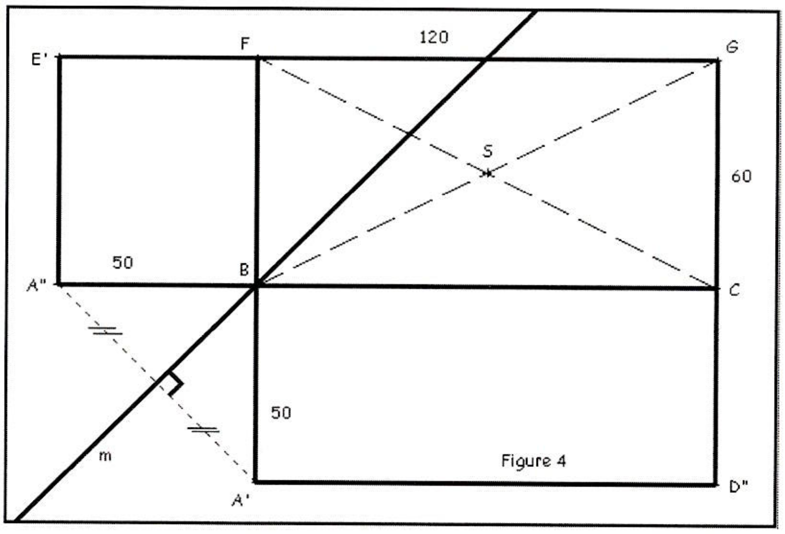
La figure 4 illustre ceci.

Le triangle $A'BA"$ est de toute évidence un triangle rectangle isocèle. La médiatrice m de $[A'A"]$ est donc aussi la bissectrice de l'angle $A"BA'$.

Elle est donc aussi la bissectrice de l'angle FBC du rectangle $FBCG$.

S est du même de côté de m que A'.

S est donc plus proche de A' que de $A"$.



Dès lors, le chemin optimal que doit suivre la mouche pour aller de A à S (cfr fig1bis) consiste à passer par I.

Mais quelle est donc la position de I sur $[BC]$?

Revenons à la figure 3bis.

Les triangles $A'BI$ et $A'KS$ sont semblables puisque $BI || KS$.

Dès lors $\dfrac{|BI|}{|KS|} = \dfrac{|A'B|}{|A'K|}$ donc $\dfrac{|BI|}{60} = \dfrac{50}{80}$ ou $80|BI| = 60 \times 50$ et $|BI| = \dfrac{60 \times 50}{80} = 37.5$

Vous avez déjà compris que les calculs précédents seront adaptés au cas où les dimensions de l'aquarium seraient autres que celles indiquées ci-avant.

([2]) Rappelons que si un point apprtient à la médiatrice d'un segment alors il est à distances égales des extrémités du segment.
Si un point n'appartient pas à la médiatrice d'un segment alors il est plus proche de l'extrémité du segment située dans le même demi-plan créé par la médiatrice que lui, que de l'autre extrémité

Pour ceux qui en veulent un peu plus !

Que se passe-t-il si les dimensions de l'aquarium sont différentes de celles utilisées ci-avant ?

Il suffirait, bien entendu, de recommencer tout ce qui précède mais en utilisant les nouvelles dimensions.

Il est également possible de généraliser la situation en employant des variables pour représenter ces dimensions.

Par exemple, nous pouvons désigner la longueur et la largeur du fond de l'aquarium par les lettres L et l, la hauteur de l'aquarium étant désignée par h.

Nous convenons qu'ici les trois variables sont strictement positives et que L est plus grand ou égal à l. La figure 5 illustre cela.

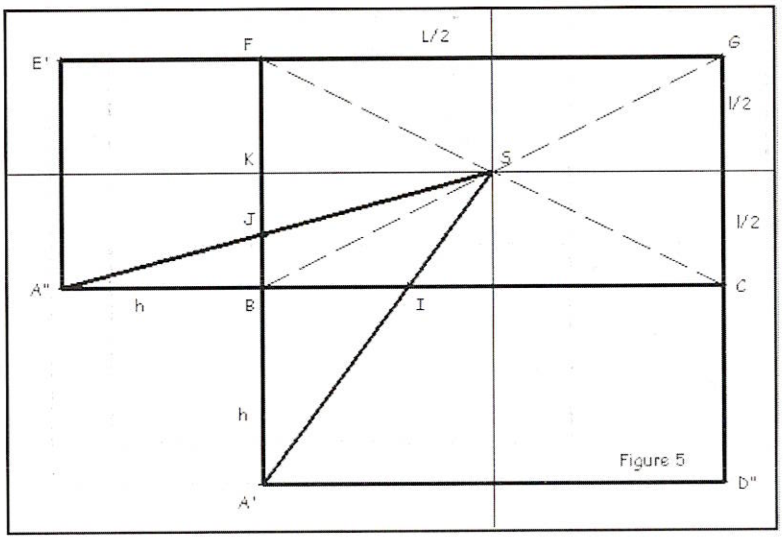


Figure 5

Calculons, en fonction de L, l et h les longueurs de $[A'S]$ et $[A"S]$ en vue de les comparer.

$$|A'S|^2 = (h + \frac{l}{2})^2 + (\frac{L}{2})^2 = h^2 + hl + \frac{l^2}{4} + \frac{L^2}{4}$$

et $|A''S|^2 = (h + \frac{L}{2})^2 + (\frac{l}{2})^2 = h^2 + hL + \frac{L^2}{4} + fracl^2 4$

Nous constatons que les seconds membres des deux expressions sont composés des mêmes termes à l'exception de hl et hL.

Pour comparer $|A'S|$ avec $|A"S|$ il suffit, ici, de comparer $|A'S|^2$avec $|A"S|^2$ donc de comparer hl et hL donc finalement l et L.

Si $l = L$ alors les deux distances sont égales et S appartient à m (cfr Fig 4)

Sinon $l < L$ et $|A'S| < |A"S|$

Le calcul confirme ainsi les enseignements de la géométrie.

Encore des dénombrements !

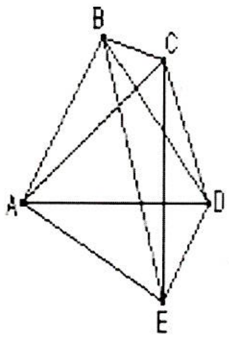
A. Paternottre

Après « Combien de rectangles ? » et « Combien de triangles ? » parus dans les deux numéros précédents de *Math-Jeunes Junior*, voici encore un dénombrement qui, comme d'habitude, ne nécessite qu'un bagage minimum de mathématique élémentaire. Il s'agira cette fois de déterminer le nombre de diagonales pouvant être tracées dans un polygone quelconque de n côtés (n étant un nombre naturel au moins égal à 3) *ainsi que le nombre de points d'intersection de ces diagonales.* Il s'agit des points situés à l'intérieur du polygone. Cette précision ne sera pas répétée dans la suite de cet article.

Je vous avoue franchement qu'avant de commencer à écrire cet article, je connaissais bien sûr la réponse à la première question mais je n'avais aucune idée du résultat auquel j'aboutirais dans la recherche d'une réponse à la deuxième question. C'est pourquoi je vous explique le cheminement de ma réflexion.

Combien de diagonales ?

Et tout d'abord qu'est-ce qu'une diagonale de polygone ? Prenons l'exemple un pentagone $ABCDE$:



A, B, C, D, E sont les 5 sommets . Les sommets « voisins » de A sont E et B, ceux de B sont A et C ... etc.

Un côté est un segment joignant un sommet à un de ses deux voisins. Ainsi $[AB]$, $[BC]$ ... sont les 5 côtés de ce pentagone.

Une diagonale issue d'un sommet est un segment joignant ce sommet à l'un quelconque des sommets non voisins.

Ainsi $[AC]$ et $[AD]$ sont les diagonales issues du sommet A, $[BD]$ et $[BE]$ sont les diagonales issues du sommet B ... etc.

On compte donc cinq diagonales dans un pentagone. Y a-t-il pour autant six diagonales dans un hexagone, sept dans un heptagone et ainsi de suite ?

Sûrement pas. Alors combien de diagonales dans un polygone de n côtés ($n \geqslant 3$) ?

Raisonnons : en vertu de la définition ci-dessus, on obtient une diagonale issue d'un sommet en le joignant à chacun de ses $(n-3)$ sommets non voisins. Recommençons ce raisonnement pour chacun des n sommets.

Nous aurons ainsi $n \times (n-3)$ segments ou encore deux fois chacune des diagonales. Dès lors, si nous désignons par d_n le nombre de diagonales d'un polygone de n côtés, on a :

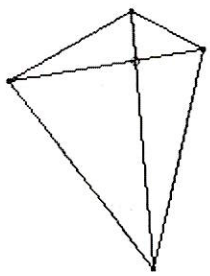
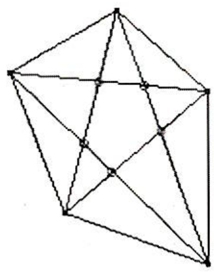
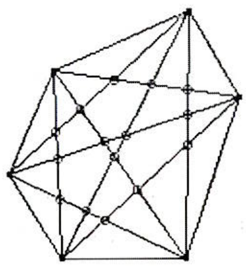
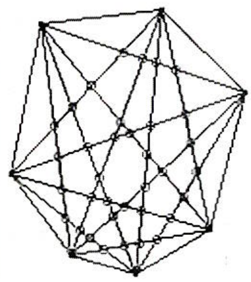
$$d_n = \frac{n \times (n-3)}{2}$$

Ainsi si $n = 3$ (triangle) alors $d_3 = 0$. On pouvait s'y attendre !
$n = 4$ (quadrilatère) alors $d_4 = 2$.
$n = 5$ (pentagone) alors $d_5 = 5$
...
$n = 20$ (icosagone) alors $d_{20} = 170$.

En combien de points ces diagonales se coupent-elles ?

- Première démarche.

Comme tu le ferais toi-même je suppose, ma première démarche a été de dessiner des polygones de 4, 5, 6, $7 \cdots$ côtés, de tracer toutes leurs diagonales (après avoir préalablement calculé leur nombre pour être sûr de n'en oublier aucune). Ensuite il reste à compter le nombre de points d'intersection de toutes ces diagonales. Je me suis arrêté à l'octogone car à partir de $n = 9$, le comptage devient un peu fastidieux et peu commode. Désignons par p_n le nombre de points d'intersection d'un polygone de n côtés.

Quadrilatère	Pentagone	Hexagone	Heptagone
			
d4 = 2	d5 = 5	d6 = 9	d7 = 14
p4 = 1	p5 = 5	p6 = 15	p7 = 35

- Deuxième démarche.

J'ai observé la suite des valeurs de p_n pour $n = 4, 5, 6, 7, 8$ et je me suis posé la question de savoir quelle logique se cachait derrière la suite : $1, 5, 15, 35, 70 \cdots$

C'est alors que je me suis souvenu du célèbre « triangle arithmétique de Pascal » dont C. Villers vous avait déjà entretenu dans le numéro 112 (novembre 2005) et dont je vous rappelle les règles de construction :

1) Zéro ne s'inscrit pas dans ce tableau et un « blanc » équivaut à zéro.

2) Trois nombres naturels a , b , c disposés dans le tableau comme suit : $\begin{array}{|c|c|}\hline c & b \\ \hline & a \\ \hline\end{array}$ sont tels que $a = b + c$

3) Dans la colonne 0 on n'écrit que des 1.

Tu obtiens alors un tableau de chiffres triangulaire communément appelé « triangle de Pascal ».

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	etc
0	1										
1	1	1									
2	1	2	1								
3	1	3	3	1							
4	1	4	6	4	1						
5	1	5	10	10	5	1					
6	1	6	15	20	15	6	1				
7	1	7	21	35	35	21	7	1			
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1		
9	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1	
etc	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...

Tu remarques de suite que dans la colonne 4 figure bien la suite 1, 5, 15, 35, 126 ...

Ce tableau comporte évidemment une infinité de lignes et colonnes mais seule la colonne 4 nous intéresse dans le cadre de cet article.

Or il faut savoir que le terme occupant la cellule (n ; 4) c'est-à-dire celle qui se trouve à l'intersection de la n^{e} ligne et de la 4^{e} colonne vaut $\dfrac{n!}{4! \times (n-4)!}$. (Il te faut accepter cette égalité dont la démonstration sort du cadre de cette étude et ne sera faite qu'en cinquième ou sixième année).

Mais que signifient les symboles figurant dans cette formule ? Il en a déjà été question dans MJJ. (voir l'article de R. Gérardy dans le numéro 118).

Rappelons que le symbole « $n!$ » se lit « factorielle (de)n » et que, par définition il représente le produit des n premiers nombres naturels non nuls :

$$n! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times \cdots \times n$$

On pose aussi $0! = 1$

Ainsi :

$6! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 = 720$

$\dfrac{8!}{5!} = \dfrac{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5} = 6 \times 7 \times 8 = 336$

$(n-4)! = 1 \times 2 \times 3 \times \ldots \times (n-5) \times (n-4)$

Venons-en à ce qui nous intéresse :

$$\frac{n!}{4! \times (n-4)!} = \frac{1 \times 2 \times 3 \times \ldots \times (n-4) \times (n-3) \times (n-2) \times (n-1) \times n}{24 \times 1 \times 2 \times 3 \times \ldots \times (n-5) \times (n-4)}$$

$$= \frac{(n-3) \times (n-2) \times n-1) \times n}{24}$$

Cette dernière expression est la formule permettant de calculer le nombre de points d'intersection de toutes les diagonales d'un polygone de n côtés.

Donc

$$p_n = \frac{n \times (n-1) \times (n-2) \times (n-3)}{24}$$

Ainsi $p_4 = 1$; $p_5 = 5$; $p_6 = 15$; $p_7 = 35$; $p_8 = 70 \cdots p_{20} = 4845$ (vérifie ces égalités)

Concluons :

Le nombre de points d'intersection de toutes les diagonales d'un polygone de n côtés ($n \geqslant 3$) vaut le quotient par 24 du produit des 4 premiers nombres naturels décroissants à partir de n.

Deux remarques avant de terminer :

1. Le nombre p_n étant évidemment un nombre entier, peux-tu démontrer que le produit des 4 facteurs figurant au numérateur est toujours divisible par 24 ?
2. Dans le cas où au moins trois diagonales auraient un point commun (par exemple dans le cas d'un hexagone régulier dont le centre est commun à trois diagonales), ce point commun compte pour autant de points qu'il n'y a de diagonales concourantes en ce point. (dans l'hexagone régulier, le centre compte donc pour trois points d'intersection). La formule ci-dessus suppose en effet que deux diagonales quelconques se coupent en un seul point.

Sudomaths n° 7 et 8

Niveaux de difficulté : 1 pour le n° 7 et 3 pour le n° 8.

Règle du jeu : Vous devez compléter la grille de manière que chaque ligne horizontale, chaque colonne verticale et chaque carré 3 × 3 comportent toutes les lettres du mot- mystère.

Les lettres différentes qui figurent dans les grilles permettent, si elles sont replacées dans le bon ordre, de former un mot-mystère bien et connu ayant trait aux mathématiques.

Le mot-mystère du jour répond à la définition suivante :

« *On peut alors appliquer la règle du produit nul* »

Grille 7 :

S	O		C		A		F	R
		F	O	I	E	S		
E			R		C			O
	F						E	
C			A		O			I
		I	E	A	R	C		
O	R		T		S		I	F

Grille 8 :

			E	I		O		
C		F			T			E
	I				A	F		S
I			A					
		E				T		
S					C			I
R		C	F				A	
T			O			S		F
		I		A	S			

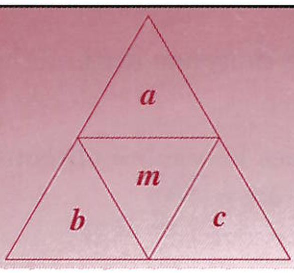
Solution des jeux à la page 16 de ce *Math-Jeunes Junior*119

Moyenne arithmétique

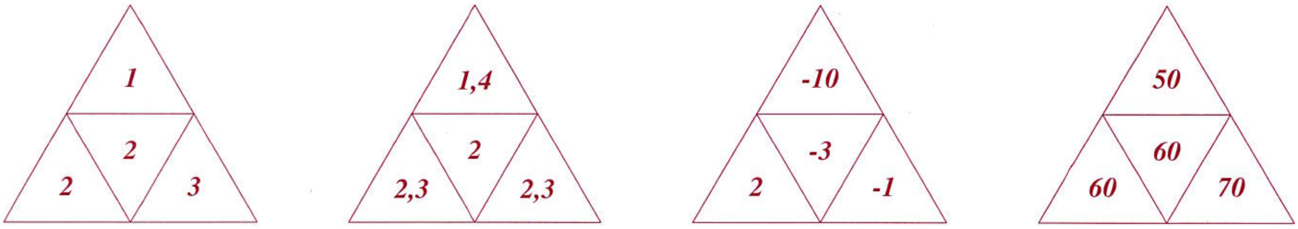
Y. Noël-Roch

1. Première étape.

1.1. Observe, devine...

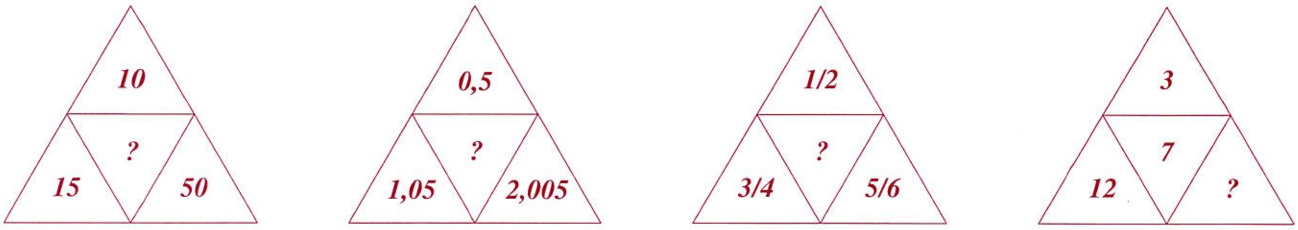


Le nombre m est calculé à partir des trois nombres a, b et c. Trouve la règle appliquée à partir des exemples suivants !



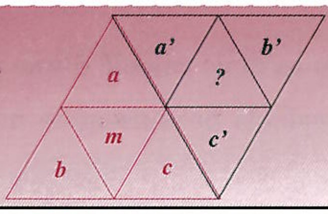
m est la moyenne arithmétique des trois nombres a, b et c, ou encore $m = \dfrac{a+b+c}{3}$.

1.2. ... et applique !



2. Deuxième étape.

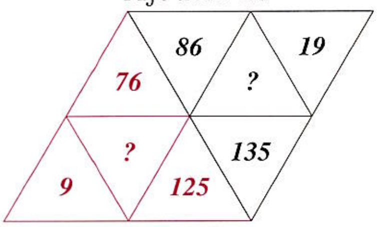
2.1. Un triangle noir est lié au triangle initial.



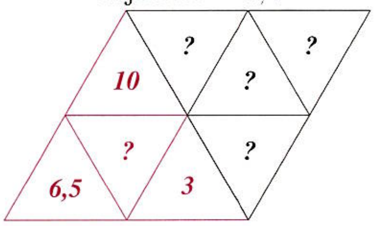
Les nombres a', b' et c' sont calculés à partir des nombres correspondants a, b et c en appliquant une règle. Quelle valeur attribuer au centre du triangle noir ?

2.1.1. Règle : ajouter le même nombre

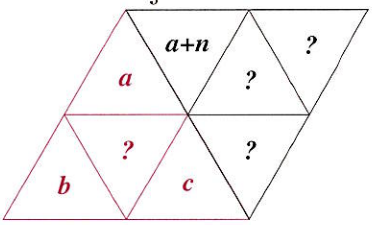
Ajouter 10



Ajouter $-6,5$



Ajouter n



Dans le schéma de gauche, la case marquée « ? » doit contenir $\dfrac{76+9+125}{3}$, soit 70. Quant à la case marquée « ? » comment la calculer ?

- Si tu la perçois comme case centrale du triangle noir, tu y places la moyenne arithmétique de a', b' et c', c'est-à-dire dans ce cas $\dfrac{86+19+135}{3} = \dfrac{240}{3} = \boxed{80}$.
- Si tu penses au passage du triangle initial au triangle noir, tu y places le nombre obtenu en appliquant la règle « ajouter 10 » à m , c'est-à-dire dans ce cas $70 + 10 = \boxed{80}$.

... et nous voyons que, dans cet exemple, les deux procédés donnent le même résultat !

Les deux calculs du centre du triangle noir donnent-ils également le même résultat si « ajouter 10 » est remplacé par« ajouter $-6,5$ » ? *Sauf erreur de calcul ...*

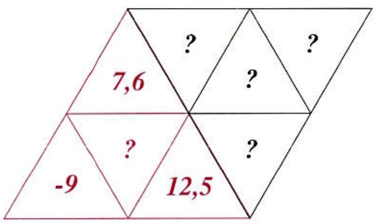
Généralisons la règle qui consiste à **ajouter le même nombre** : c'est ce qui est suggéré dans le troisième schéma ci-dessus. Complète-le et calcule de deux manières différentes le centre du triangle noir.

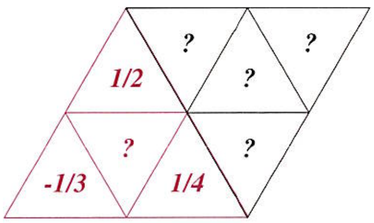
Avec un peu de calcul littéral, tu peux démontrer que les deux façons de calculer ce centre donnent le même résultat. Cela résulte de la propriété suivante :

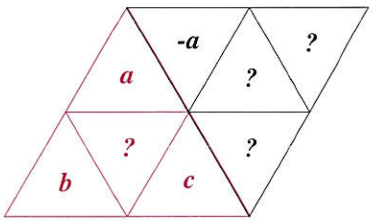
quels que soient les nombres a, b, c et n, on a

$$\frac{a+b+c}{3} + n = \frac{(a+n)+(b+n)+(c+n)}{3}$$

2.1.2. Règle : prendre l'opposé







Dans chacun des trois schémas, applique le règle « prendre l'opposé » et calcule de deux manières différentes le centre du triangle noir. Note tes conclusions, avant de continuer ta lecture.

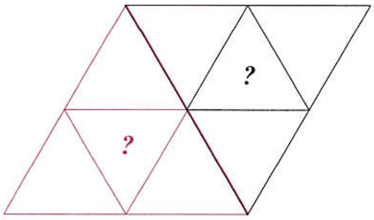
2.1.3. D'autres règles !

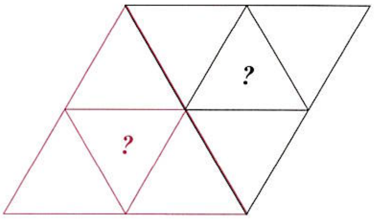
« Prendre l'opposé » c'est aussi « multiplier par -1 ». Ci-dessus, tu as donc calculé d'une part $\dfrac{(-a)+(-b)+(-c)}{3}$ et d'autre part $(-1) \times \dfrac{a+b+c}{3}$. Ces deux calculs produisent le même résultat quels que soient les nombres a, b et c.

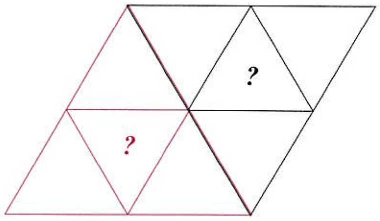
En est-il de même

– si tu **multiplies par un nombre** n autre que -1 ?
– Si tu prends pour a', b' et c' les **inverses** de a, b et c plutôt que les opposés.
– Si tu prends pour a', b' et c' les **carrés** de a, b et c ?
–

Tu peux travailler dans les schémas suivants, en introduisant toi-même nombres et règles de ton choix.







Note tes conclusions avant de lire le résumé qui suit.

3. Quelques résultats.

3.1. Règle : multiplier par le même nombre

En appliquant cette règle aux cas particuliers que tu as choisis, tu as dû constater que le centre du triangle noir est occupé par le même nombre, qu'on le calcule à partir du centre du triangle initial ou comme moyenne arithmétique dans le triangle noir.

Cela résulte de la propriété suivante :

quels que soient les nombres a, b, c et n, on a

$$\frac{a+b+c}{3} \times n = \frac{(a \times n) + (b \times n) + (c \times n)}{3}$$

3.2. Règle : prendre l'inverse

Cette fois, la situation est différente ! Si tu as choisi par exemple $a = 1$, $b = 2$ et $c = 3$, tu as trouvé $\frac{1}{2}$ d'une part et $\frac{11}{18}$ d'autre part. Beaucoup d'autres essais te donnent aussi deux résultats différents.

Cela résulte du fait que les expressions $\dfrac{1}{\frac{a+b+c}{3}}$ et $\dfrac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}{3}$ ne sont généralement pas égales.

Attention : cela ne veut pas dire qu'elles ne le sont jamais ! (Examine par exemple le cas $a = b = c = 1$.

3.3. Règle : prendre le carré

À toi de découvrir une situation analogue à la précédente en considérant par exemple le cas ($a = 1$, $b = 2$ et $c = 3$) et le cas ($a = b = c = 0$).

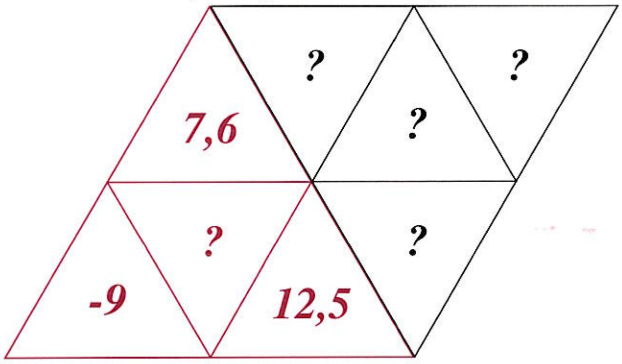
En résumé, les expressions $\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^2$ et $\frac{a^2+b^2+c^2}{3}$ ne sont généralement pas égales !

4. La cerise sur le gâteau

Nous allons cette fois appliquer le règle **Multiplier par k ET ajouter n.**

Si tu es en première année, le calcul littéral ne t'est pas familier mais tu peux observer quelques exemples. Nous t'en proposons un mais tu peux en choisir d'autres !

Multiplier par 10 ET ajouter 3



Si le calcul littéral t'est familier, voici le cas général.

- Au centre du triangle initial se trouve le nombre $\dfrac{a+b+c}{3}$.
- Sur le pourtour du triangle noir se trouvent les nombres $ka+n$, $kb+n$ et $kc+n$.
- Au centre du triangle noir, nous calculons d'une part

$$k\frac{a+b+c}{3}+n$$

et d'autre part

$$\frac{(ka+n)+(kb+n)+(kc+n)}{3}$$

Les deux résultats sont donc toujours les mêmes puisque

quels que soient les nombres a, b, c, k et n, on a

$$\frac{(ka+n)+(kb+n)+(kc+n)}{3}=\frac{k(a+b+c)+3n}{3}=\frac{k(a+b+c)}{3}+\frac{3n}{3}=k\frac{a+b+c}{3}+n$$

ANNIVERSAIRE

S. Trompler

Giuseppe PEANO (1858–1932)

Giuseppe Peano est né, il y aura 150 ans cette année . . Ce mathématicien italien a joué un rôle décisif au vingtième siècle et son oeuvre est devenue classique depuis lors.

Ses parents étaient cultivateurs dans le Piémont, mais l'intelligence du jeune garçon se fait très vite jour et son oncle, prêtre à Turin, le prend en charge et lui fait faire l'école secondaire, puis l'université, dans cette ville.

En 1880, il obtient son doctorat en mathématique. Dès lors ses articles se suivent dans différentes branches de cette science, notamment en logique.

Nommé professeur à l'université de Turin en 1890, il y reste toute sa vie.

Il était doué d'un esprit critique très prononcé et accordait une importance primordiale à la rigueur du langage.

L'une de ses contributions les plus connues concerne **les nombres naturels**.

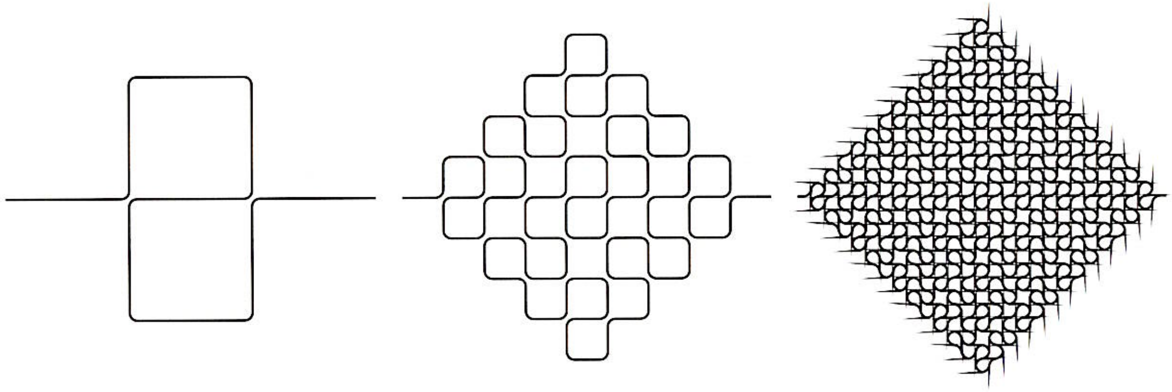
Dans son livre « **principes de l'Arithmétique** » publié en 1889, il énonce **les axiomes**, dits **de Peano** :

1. Zéro est un nombre naturel.
2. Pour tout nombre naturel n il existe un unique nombre naturel n' dit successeur de n.
3. Zéro n'est successeur d'aucun nombre naturel.
4. Deux nombres dont les successeurs sont égaux sont eux aussi égaux.
5. Si une propriété est telle que :
   – zéro a cette propriété
   – et, pour tout nombre naturel, n possède la propriété ainsi que son successeur
   alors cette propriété est valable pour tous les nombres naturels.

En 1890, il publie un article intitulé « **Sur une courbe qui remplit toute une aire plane** »

C'est un résultat inattendu et paradoxal puisque les courbes sont de dimension **1** et les aires de dimension **2**.

Les répercussions de cette découverte ont été impressionnantes et sont toujours d'actualité.



En 1891 il publie sa « **Revue de mathématique** » dans laquelle il veut étendre le symbolisme utilisé dans ses travaux sur les nombres naturels à toute la mathématique.

C'est à lui que l'on doit les notations que l'on utilise encore actuellement :

$$\in \qquad \cup \qquad \cap \qquad \supset$$

Il passe les années suivantes de sa vie à utiliser ces symboles dans un « formulaire de mathématique ».

Il recherche un langage universel qu'il appelle « **latino sine flexione** » et qui devrait, selon lui, être spécialement utile à la communauté scientifique. Mais celle-ci n'est pas enthousiaste car ce langage, proche du latin, rend la lecture compliquée.

Peano était un savant attentif aux problèmes sociaux de son temps et il s'impliqua beaucoup dans l'éducation primaire et secondaire. Il trouvait important de faire aimer les mathématiques par les jeunes et publia des jeux à leur intention.

Il meurt d'una attaque cardiaque alors qu'il était encore en pleine possession de ses moyens intellectuels.

Solution des Sudomaths N° 7 et 8

Le mot mystère est : FACTORISE

Grille 7 :

I	A	T	S	R	F	O	C	E
S	O	E	C	T	A	I	F	R
R	C	F	O	I	E	S	T	A
E	I	S	R	F	C	T	A	O
A	F	O	I	S	T	R	E	C
C	T	R	A	E	O	F	S	I
F	S	I	E	A	R	C	O	T
O	R	A	T	C	S	E	I	F
T	E	C	F	O	I	A	R	S

Grille 8 :

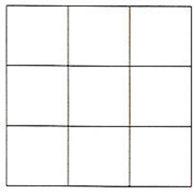
A	T	S	E	I	F	O	R	C
C	R	F	S	O	T	A	I	E
E	I	O	R	C	A	F	T	S
I	F	T	A	E	O	C	S	R
O	C	E	I	S	R	T	F	A
S	A	R	T	F	C	E	O	I
R	S	C	F	T	E	I	A	O
T	E	A	O	R	I	S	C	F
F	O	I	C	A	S	R	E	T

Jeux

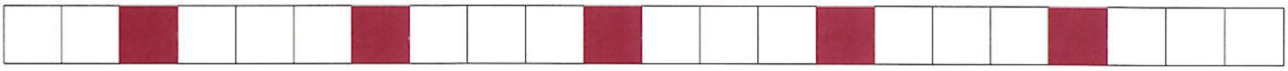
Y. Noël-Roch

1. Coloriage et actualité

A. Colorie six cases sur les neuf de manière à ce qu'il n'y ait pas plus de deux cases coloriées alignées ni verticalement, ni horizontalement, ni sur les diagonales.



B. Les nombres naturels 0, 1, 2, 3, 4, 5, ... étaient écrits régulièrement sur un long ruban. Les bouts du ruban ont été coupés par un petit plaisantin qui a aussi effacé tous les nombres et badigeonné certaines cases !



Quelles sont les familles de nombres qui pouvaient occuper les cases coloriées ?

C. L'année 2003 était une « année première », 2004, 2005 et 2006 n'en étaient manifestement pas ! Qu'en est-il de 2007 ? Quelle est la prochaine « année première » ?

2. Vrai ou faux ?

A. Le produit de trois nombres naturels est toujours différent de leur somme.

B. Si le nombre n est une sixième puissance, il est un carré parfait et un cube parfait.

C. Aucune puissance quatrième d'un entier n'a 2 comme chiffre des unités.

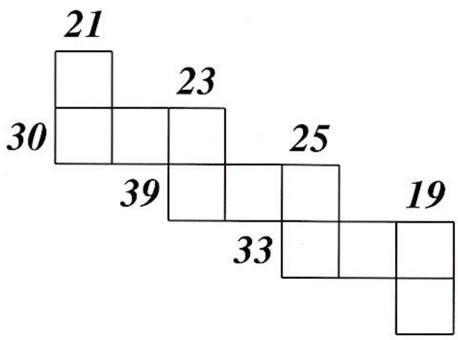
D. De deux nombres entiers, celui qui s'écrit avec le plus de chiffres est le plus grand.

E. Quel que soit le naturel n, $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

3. Deux ou trois nombres consécutifs

Trouver les nombres à placer dans chacune des cases sachant que

- Chaque colonne de deux cases contient deux nombres consécutifs dont la somme est donnée en haut de la colonne .
- Chaque ligne de trois cases contient trois nombres consécutifs dont la somme est donnée à gauche de la ligne.
- Les deux ou les trois nombres ne sont pas nécessairement écrits dans l'ordre ni croissant, ni décroissant.



4. Un tour de magie

Un magicien te donne des consignes.

- Noter, sans les montrer, trois nombres différents, tous de un chiffre.
- Communiquer leur somme.
- Écrire les uns en dessous des autres (de manière à pouvoir les additionner) tous les nombres de trois chiffres que tu peux former en utilisant chaque fois les trois chiffres que tu as choisis.
- Additionner les six nombres de trois chiffres.
- Diviser la somme obtenue par ... (un nombre qu'il impose)

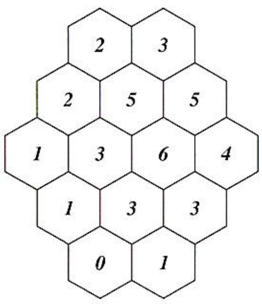
Avant que tu aies terminé tes calculs, le magicien a écrit le résultat final !

Par exemple, si tu as annoncé 12 comme somme des trois nombres choisis, et qu'il décide de te demander de diviser par 8 à la dernière étape, il écrit immédiatement 333 comme résultat final. Comment y arrive-t-il ?

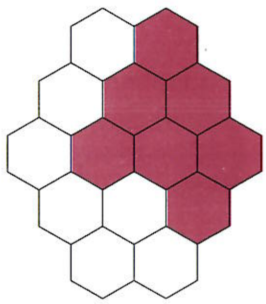
5. Hexagones

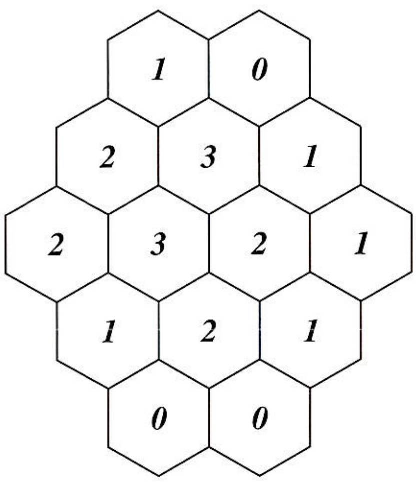
Dans les trois configurations proposées ci-dessous, on demande de colorier certains des hexagones de façon que tout hexagone ait autant de voisins coloriés que le nombre indiqué en son centre. Attention : *tout hexagone est considéré comme voisin de lui-même !*

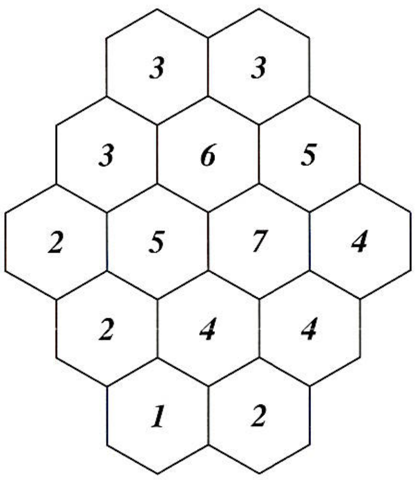
Exemple

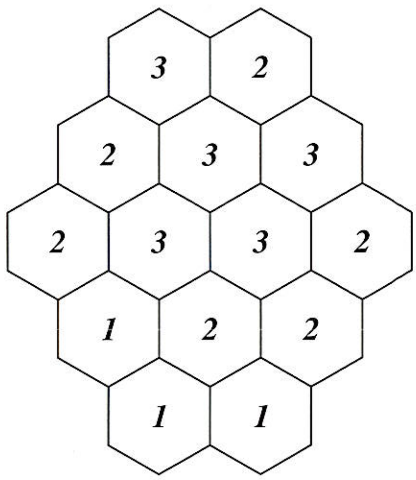


Solution









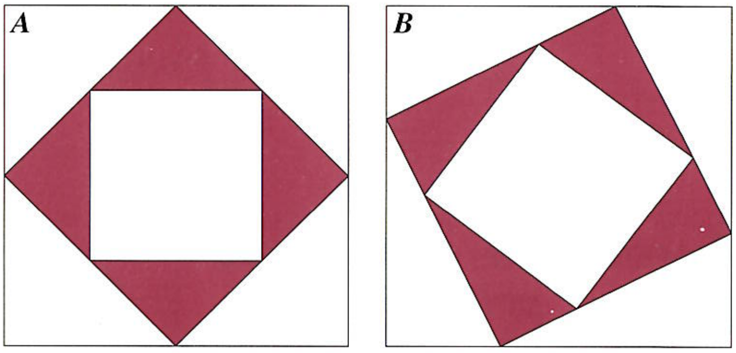
6. Une opération à décrypter

Chaque lettre cache un chiffre, le même chiffre lorsqu'elle est répétée. Deux lettres différentes cachent deux chiffres différents.
Reconstitue la multiplication écrite qui a été effectuée.

$$
\begin{array}{ccccc}
 & & a & b & c \\
 & & \times & d & c \\
\hline
 & f & d & b & 9 \\
h & g & a & d & \\
\hline
f & j & 9 & h & 9
\end{array}
$$

7. Que des carrés !

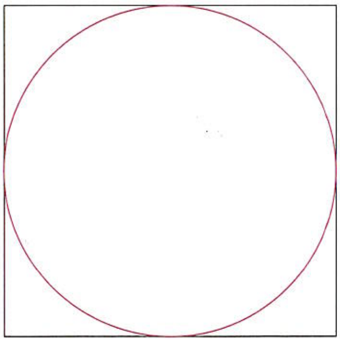
Dans deux carrés de même dimension, on dessine des carrés inscrits.
- A. En joignant à chaque étape les milieux des côtés du dernier carré dessiné.
- B. En joignant à chaque étape les points situés aux tiers des côtés du carré précédent.



Compare les aires coloriées dans les deux cas.

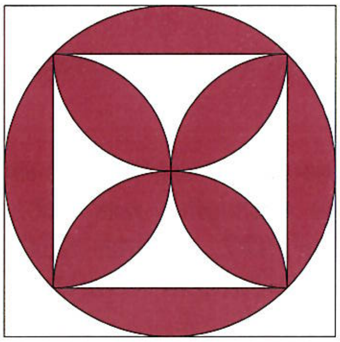
8. Des carrés et des cercles

Dans un carré d'aire $4u^2$ est inscrit un disque. Quelle est l'aire de ce disque ?
- Dans ce disque, inscris un carré. Quelle est l'aire de ce carré ?
- Dans ce nouveau carré, inscris un nouveau disque. Quelle est son aire ?
- Et si tu continues ?



9. Des carrés, des cercles et des arcs de cercles

Analyse ce dessin réalisé à l'aide de carrés, d'un cercle et de demi-cercles. La zone coloriée a-t-elle une aire égale, inférieure ou supérieure à celle de la zone non coloriée ?



10. Produits en lignes et en colonnes

Dans les tableaux ci-dessous, le nombre indiqué à droite de chaque ligne et en dessous de chaque colonne est le produit des nombres cachés dans la ligne ou la colonne.

A. Complète à l'aide des nombres 1, 2, … 9.

			288
			42
			30
144	***18***	***140***	

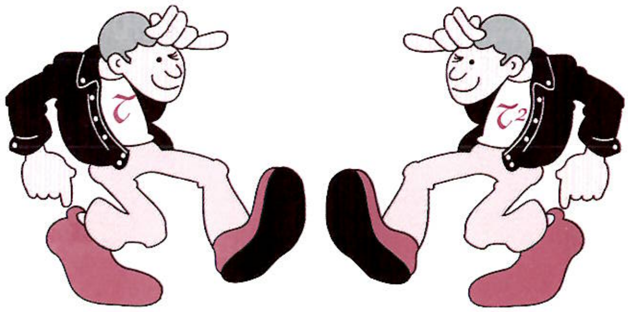
B. Complète à l'aide des nombres 2, 3, … 13.

				560
				2106
				5280
180	***231***	***192***	***780***	

Les frères Hick 22

B. Honclaire

Agence de détectives privés
Les frères Hick
Recherches en tous genres



Ami lecteur,

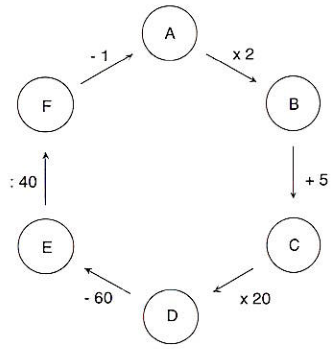
$\mathcal{T}^2$ nous fera part de ses réflexions sur le problème suivant (recherche lancée dans Hick21 - voir *Math-Jeunes Junior* 118)

Rappel de l'énoncé du problème

– Choisis un nombre, écris-le dans un des six disques.

– En appliquant les opérateurs imposés, calcule les contenus des disques suivants.

– Recommence en changeant de nombre initial, de disque initial.



La boucle se fermera-t-elle **toujours** ?

$\mathcal{T}$ interviendra pour effectuer les mises au point !

Bon courage et bon amusement.

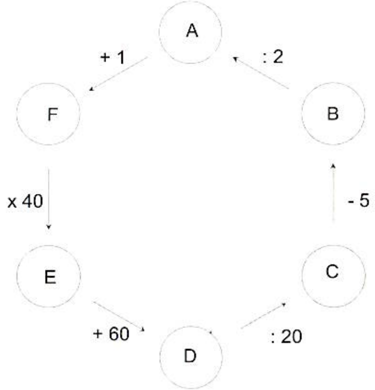
$\mathcal{T}^2$ « ***Je pense avoir compris comment fonctionnent ces boucles! Les multiplications et les divisions se neutralisent : multiplier par 2 et ensuite multiplier par 20 cela revient à multiplier par 40 et c'est annulé par diviser par 40 ...!*** »

$\mathcal{T}$ (interrogateur) - « ***Veux-tu me dire que les multiplications et les divisions peuvent être placées dans n'importe quel ordre ?*** »

$\mathcal{T}^2$ (surpris)- « ***... Je ne pense pas!... Elles influencent les additions et les soustractions! ... C'est un peu plus complexe! ... Ajouter 5 puis multiplier par 20*** - (il jette un regard interrogateur vers son frère) - ***cela revient à ajouter 100, ensuite retirer 60... cela revient à ajouter 40... on divise ensuite par 40... cela revient donc à ajouter 1 et enfin on retire 1...*** »

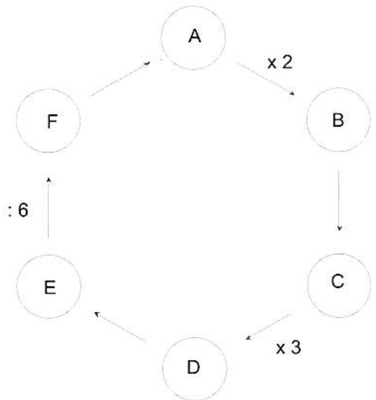
$\mathcal{T}$ (l'air satisfait) - « ***C'est parfait !*** »

Math-Jeunes Junior n 119J, 20–24, 2008

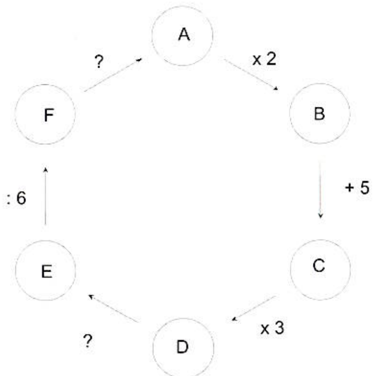


$\mathcal{T}^2$ (impatient, il reprend) - « *J'ai également remarqué que l'on peut tourner dans l'autre sens ! Regarde ! C'est marrant !*
Je vais vérifier en partant de F *par exemple :*
$a \cdots 40a \cdots 40a + 60 \cdots 2a + 3 \cdots 2a - 2 \cdots a - 1 \cdots a$

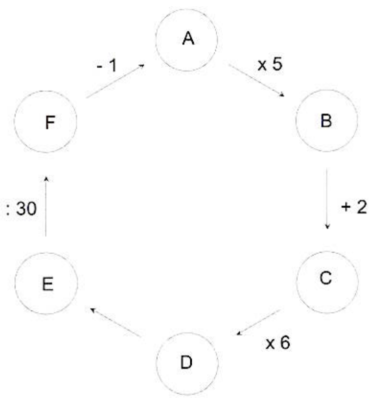
Je peux aussi fabriquer de nouveaux circuits :

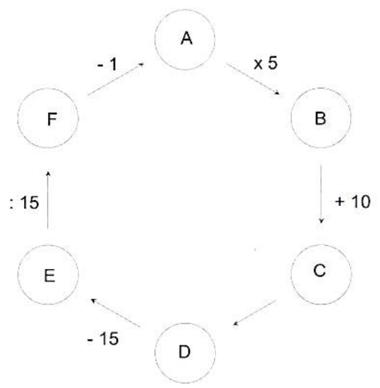


Je commence par placer des multiplications et des divisions pour qu'elles se neutralisent ! Par exemple $\times 2$, $\times 3$ *et* $:6 \cdots$ *ou* $:2$, $:3$ *et* $\times 6$ *ou* $\cdots$
Puis je place une addition pour passer de B *en* $\cdots$ *par exemple* $+5 \cdots$ (en lui-même)... *cela me donne* $+15$ *en* $D \cdots$ (il reprend)... *Je dois réfléchir un peu pour l'étape suivante... je vais devoir diviser par 6 et si je veux que cela tombe juste...* »



$\mathcal{T}$ (ajoute négligemment, avec un large sourire) - « *C'est assez naturel !* »
$\mathcal{T}^2$ (semblant ignorer la remarque) - « *... Je vais soustraire 3... (en lui-même)... cela me donne* $+12$ *en* $E \cdots +2$ *en* $F \cdots$ (il termine)... *et enfin, je soustrais 2 ! Il est évident que si je place différemment les multiplications et les divisions, dans chaque cas, je dois effectuer de nouveaux calculs pour équilibrer les additions et les soustractions* »
$\mathcal{T}$ (satisfait) - « *Je t'ai préparé deux situations comme celles que tu viens d'examiner. Mais j'ai oublié une étape ! Peux-tu la retrouver ?* »





Ami lecteur, peux-tu répondre avant de lire la suite ?

$\mathcal{T}^2$ (après une brève hésitation) - « *Le deuxième est très facile ! Il manque une multiplication par 3 !...* »

$\mathcal{T}$ (l'interrompant net) - « *Et tu penses qu'il n'est pas nécessaire de tenir compte des additions et soustractions ?* »

$\mathcal{T}^2$ (hésitant) - « *Euh !... Attends je vérifie : je pars de* $\boldsymbol{A} \cdots a \cdots 5a \cdots 5a + 10 \cdots 15a + 30 \cdots 15a + 15 \cdots a + 1 \cdots a$ (visiblement soulagé, il reprend) *... Quant au premier, cela demande plus de réflexion ! Nous savons déjà que l'on peut partir de n'importe quelle case... Je décide de placer un nombre* a *dans la case* $\boldsymbol{A} \cdots$ *et c'est parti... en* $\boldsymbol{B} \cdots 5a \cdots$ *en* $\boldsymbol{C} \cdots 5a + 2 \cdots$ *en* $\boldsymbol{D} \cdots 30a + 12 \cdots$ *et je suis bloqué !...* (comme inspiré, après un long silence) *... Je pourrais partir dans l'autre sens !* a *en* $\boldsymbol{A} \cdots$ *en* $\boldsymbol{F} \cdots a+1 \cdots$ *en* $\boldsymbol{E} \cdots 30a + 30 \cdots$ *Et maintenant passer de* $\boldsymbol{D}$ *en* $\boldsymbol{E} \cdots$ *c'est passer de* $30a + 12$ *à* $30a + 30 \cdots$ *il suffit d'ajouter 18* »

$\mathcal{T}$ - « *Pourrais-tu envisager un départ qui évite ce blocage intermédiaire ?* »

$\mathcal{T}^2$ (après un temps de réflexion) - « *En fait, j'en vois deux : un départ de* $\boldsymbol{E} \cdots a \cdots \frac{a}{30} \cdots \frac{a}{30} - 1 \cdots \frac{a}{6} - 5 \cdots \frac{a}{6} - 3 \cdots a - 18$ *et il suffit d'ajouter 18 pour retrouver* a*. J'imagine également un départ de* $\boldsymbol{D}$ *mais à contresens* $\cdots a \cdots \frac{a}{6} \cdots \frac{a}{6} - 2 \cdots \frac{a}{30} - 0,4 \cdots \frac{a}{30} + 0,6 \cdots a + 18$ *en* $\boldsymbol{E}$ *! Ce qui montre bien qu'il faut ajouter 18 pour passer de* $\boldsymbol{D}$ *en* $\boldsymbol{E}$ »

$\mathcal{T}$ (manifestement satisfait) - « *Peux-tu maintenant me parler de tes recherches au sujet de l'autre problème ?* »

Rappel : Un magicien t'impose une succession de consignes

A. Choisis un nombre.

B. Multiplie-le par 2.

C. Ajoute 15 au résultat.

D. Multiplie cette somme par 2.

E. Ajoute encore 10.

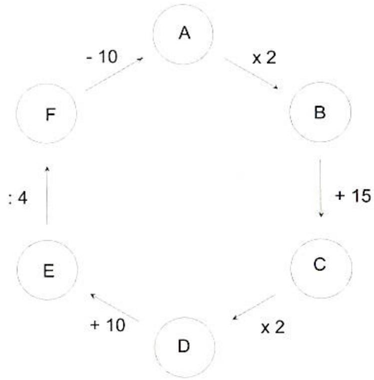
F. Divise ce que tu viens de trouver par 4.

G. Soustrais 10.

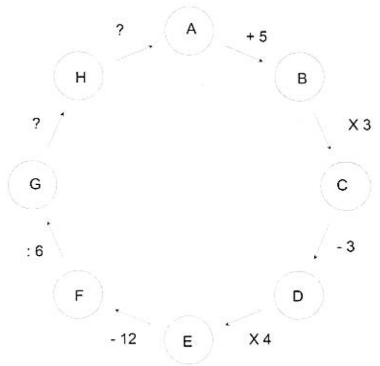
H. Stop : tu viens de retrouver ton choix initial.

Sans connaître ton choix et sans voir tes calculs, comment le magicien sait-il que tu as retrouvé ton nombre initial ?

$\mathcal{T}^2$ (semblant irrité) - « *Autre !... C'est un bien grand mot !... C'est en fait exactement la même marchandise dans un emballage différent ! Regarde, en modifiant la présentation, on revient au problème précédent ! Je vais quand même effectuer une vérification : je démarre de* F *et voila la suite :* $a \cdots a-10 \cdots 2a-20 \cdots 2a-5 \cdots 4a-10 \cdots 4a \cdots a$ »



$\mathcal{T}$ (souriant) - « *J'ai l'impression que cela est devenu trop simple pour toi ! Je t'ai donc préparé une surprise : un circuit octogonal* - (il jette un regard furtif vers son frère) -*enfin, si tu permets que j'appelle les précédents des circuits hexagonaux ! Je te demande simplement de le compléter* »



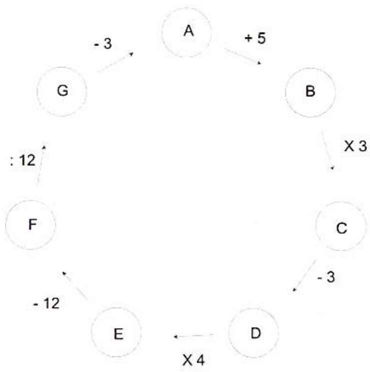
Ami lecteur, peux-tu y réfléchir en même temps que Matt ?

$\mathcal{T}^2$ (concentré et en lui-même) - « *... Il n'y a pas de raison que cela soit différent !... Pour les multiplications et les divisions ?... Il doit manquer une division par 2 !... Pour les additions et les soustractions !?... Il vaut mieux que j'écrive les calculs... je place* a *en* A *et je démarre :* $a \cdots a+5 \cdots 3a+15 \cdots 3a+12 \cdots 12a+48 \cdots 12a+36 \cdots 2a+6 \cdots$ *Je suis en* G *et je dois retrouver* a *en deux étapes !...* (fièrement, il clôture) - *pour passer de* G *en* H*, je soustrais* $6 \cdots$ *j'obtiens donc* $2a$ *en* $H \cdots$ *et là, je peux placer une division par 2 !* »

$\mathcal{T}$ (provocateur) - « *Tu m'étonnes ! Je n'avais pas la même solution que toi !* »

$\mathcal{T}^2$ (surpris, il se met à douter de ses calculs et se concentre un peu plus) - « *... Euh !... Je crois que tu me tends un piège !... Je ne vois pas d'erreur !...* (soudainement inspiré) *... A moins que... je ne place d'abord la division par 2 !... J'obtiens donc* $a+3$ *en* H *et ensuite, il me reste à soustraire 3 !...* (le regard malicieux, il se retourne vers Mat et ajoute) *... C'est bien ce que tu voulais ?...* (soulagé en voyant le regard approbateur de son frère) *... Je ne m'étais pas trompé !...*

Tu voulais simplement que je trouve une autre solution ! ... (l'air malicieux)... *Attends !... Ton circuit je peux le transformer en un autre... diviser par 6 suivi de diviser par 2... je peux les remplacer par diviser par 12... et j'obtiens un circuit... euh !!!...* »



$\mathcal{T}$ (magistral) - « *Heptagonal !* »

$\mathcal{T}^2$ (décomposé) - « *Hepta... quoi !?... Je connais heptathlon, mais...* »

$\mathcal{T}$ (hilare) - « *Et oui ! Heptathlon, sept épreuves pour les dames en athlétisme et heptagone, polygone à sept côtés ! En poursuivant ton raisonnement, tu aurais pu me proposer un circuit hexagonal ! ...* »

$\mathcal{T}^2$ (l'interrompant) - « *... Je vois... soustraire 3 suivi de ajouter 5... j'aurais pu les remplacer par ajouter 2 !* »

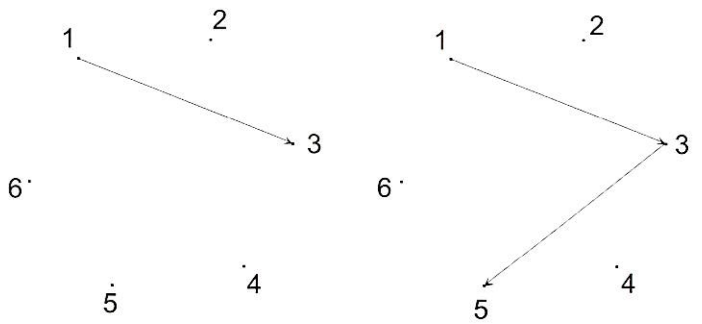
$\mathcal{T}$ - « *On vient de parler d'hexagone, d'heptagone et d'octogone, et à ce sujet, je me pose quelques questions !...* »

$\mathcal{T}^2$ (ironique et en lui-même) - « *Tiens ! Tiens ! C'est nouveau !* »

$\mathcal{T}$ « *En fait c'est comme un jeu de saute-mouton ! Tu pars d'un sommet d'un polygone régulier, hexagone ou autre, tu passes un sommet et tu continues ! Reviendras-tu à ton point de départ ? Passeras-tu par tous les sommets* »

$\mathcal{T}^2$ (rêveur) -« *Si je pars sans revenir à mon point de départ, je risque de me retrouver dans les étoiles !* »

$\mathcal{T}$ (souriant) - « *Je te donne un exemple avec l'hexagone. Tu vas de 1 en 3 et ensuite de 3 en 5 et...* »

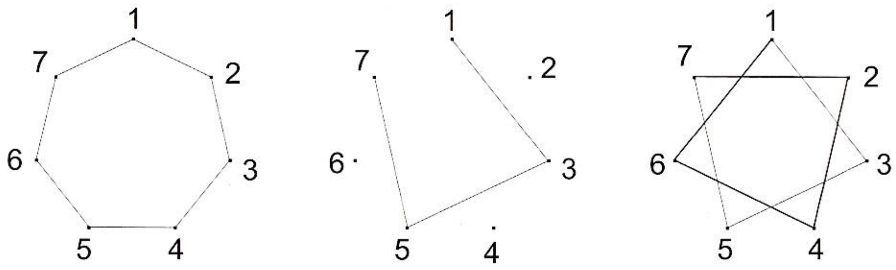


$\mathcal{T}^2$ (interrompant son frère) -« *Tu continues vers 1 !... Tu es revenu à ton point de départ... mais tu n'es pas passé par tous les sommets !* »

$\mathcal{T}$- « *On a en fait tracé un triangle équilatéral !*

Pourrais-tu le comparer à l'hexagone de départ ? Que se passe-t-il si on passe deux sommets ? Et que se passe-t-il si on choisit un autre polygone régulier...? »

$\mathcal{T}^2$ (soudainement motivé) - « *J'ai envie de prendre ton heptagone régulier et de passer un sommet ! Rien que pour voir ! J'explorerai la situation plus en détail plus tard ! Je pars de 1 vers 3... ensuite vers 5... puis vers 7... Si je veux continuer, je dois faire un second tour : 2... 4... 6... et retour en 1 ! Et de plus j'ai rencontré tous les sommets !* - (rêveur) *-Cela ressemble à une étoile !* »



$\mathcal{T}$ (le ramenant à la réalité) - « *Tant que tu y es, tu pourras également te poser des questions sur les angles de ces figures !* »

$\mathcal{T}^2$ (amusé) - « *C'est joli !... Les angles des étoiles !* »

Ami lecteur, peux-tu accompagner $\mathcal{T}^2$ dans les étoiles et l'aider à répondre à ces questions ?

Bon courage, bon amusement et à bientôt !

à suivre...

Cette fois-ci, ton compte est bon...

Brouckaert M-A, Delcroix G.

Sans doute, as-tu déjà regardé à la télé l'émission de divertissement intitulée « **Des chiffres et des lettres** », proposée tous les jours depuis 1972 sur France 3 à 17h35. Dans cet article bien sûr, nous ne nous intéressons qu'aux chiffres.

1) Règles du jeu

Ce jeu se joue à deux candidats aidés de trois animateurs. Un nombre naturel de 3 chiffres est tiré au hasard et il s'agit pour ces candidats de tenter de l'obtenir ou de l'approcher le plus possible en 45 secondes maximum et en utilisant six autres nombres naturels tirés aussi au hasard parmi les nombres 1, 2 , 3 , 4 , 5 , 6 , 7, 8 , 9 , 25 , 50 , 75 , 100.

Il est impératif de respecter les trois règles suivantes :

1. tous les résultats intermédiaires doivent être des nombres naturels.
2. seules les quatre opérations fondamentales sont permises c'est-à-dire $+$,$-$, $\times$, :
3. les six nombres naturels tirés au hasard ne peuvent être utilisés qu'au plus une fois.

Voici un exemple. On tire au hasard : $\boxed{5}\boxed{25}\boxed{1}\boxed{75}\boxed{3}\boxed{10}$ $\boxed{645}$

Etape 1 : $10 - 1 = 9$
Etape 2 : $75 \times 9 = 675$
Etape 3 : $25 + 5 = 30$
Etape 4 : $675 - 30 = 645$

2) Quelques stratégies

Afin de te donner un maximum de chances d'obtenir le bon compte, nous te proposons quelques stratégies possibles. L'exemple suivant sera repris dans chacune de ces stratégies.

$\boxed{3}\boxed{25}\boxed{50}\boxed{105}\boxed{5}\boxed{8}$ et $\boxed{450}$

- *Une première stratégie* consiste à décomposer 450 en 400 + 50 et à tenter d'obtenir 400 et 50 avec les six nombres tirés.

Etape 1 : $8 \times 50 = 400$
Etape 2 : $10 \times 5 = 50$
Etape 3 : $400 + 50 = 450$

- *Une deuxième stratégie* consiste à obtenir le multiple de 100 directement supérieur à 450 c'est-à-dire ici 500 puis à soustraire 50 :

Etape 1 : $10 \times 50 = 500$

Etape 2 : $5 - 3 = 2$

Etape 3 : $2 \times 25 = 50$

Etape 4 : $500 - 50 = 450$

- *Une troisième stratégie* utilise la « distributivité ».

Etape 1 : $8 + 3 + 5 = 16$

Etape 2 :$25 \times 16 = 400$ $(100 \times 16 : 4)$

Etape 3 : $400 + 50 = 450$

- *Une dernière stratégie* utilise les « critères de divisibilité ».

450 est terminé par 0 et est donc divisible par 10 et donc aussi par 2 et 5.

La somme des chiffres de 450 est 9. Dès lors 450 est divisible par 9.

Finalement 450 est divisible par 2 et 9 donc aussi par 18.

Etape 1 : $50 - 5 = 45$
Etape 2 : $45 \times 10 = 450$

ou

Etape 1 : $10 + 8 = 18$
Etape 2 : $18 \times 25 = 450$ $(18 \times 100 : 4)$

Essaie d'utiliser l'une ou l'autre de ces stratégies pour trouver le bon compte avec le tirage suivant extrait de l'émission du 30/11/07. Un candidat a trouvé la solution en moins de 45 secondes.

$\boxed{100}\boxed{6}\boxed{7}\boxed{4}\boxed{3}\boxed{9}$ et $\boxed{819}$

Sitographie

1) `htpp://jesweb.net/?2006/12/21/85-des-chiffres-et-des-lettres-jeu-video(21/09/07)`

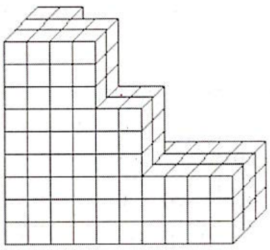
2) `htpp://sutter.fabrice.free.fr/logiciels/aideChiffres.htm(21/09/07)`

C. Festraets

L'éliminatoire de l'Olympiade Mathématique Belge a eu lieu le 16 janvier. Tu y as sans doute participé et voici les solutions de quelques uns des exercices proposés. Tu pourras ainsi te préparer soit pour la demi-finale si tu as eu la chance d'y être admis, soit pour ta prochaine participation dans un an.

Mini 4

Sans réponse préformulée - Sur un sol horizontal, on a superposé, comme l'indique la figure ci-dessous, un certain nombre de briques toutes identiques.



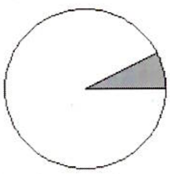
Combien y a-t-il de briques au minimum ?

Solution

Comptons le nombre de briques dans chaque colonne à partir de la gauche.
colonnes 1, 2 : $2 \times 9 \times 3 = 54$, colonnes 3, 4 : $2 \times 9 \times 2 = 36$, colonne 5 : $6 \times 2 = 12$, colonne 6 : $6 \times 2 + 3 = 15$, colonnes 7, 8, 9 : $4 \times 3 \times 3 = 36$.
Au total, il y a donc $54 + 36 + 12 + 15 + 36 = 153$ briques. C'est le nombre minimum car il y a peut-être des briques situées à l'arrière et que l'on ne voit pas.

Mini 9

Dans un cercle dont l'aire vaut 30 cm^2, on considère un secteur d'angle 24°. Que vaut, en centimètres carrés, l'aire de ce secteur ?



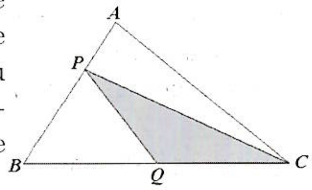
(A) 1,8 (B) 2 (C) 2,25 (D) 4,5 (E) 7,2

Solution

$\frac{360}{24} = 15$, le secteur d'angle 24° représente donc $\frac{1}{15}$ du cercle et, en cm^2, son aire vaut $\frac{1}{15} \cdot 30 = 2$ (réponse B).

Mini 14

L'aire du triangle ABC vaut 24 cm^2. Le point P est situé au tiers de $[AB]$ à partir de A et le point Q est le milieu de $[BC]$. En centimètres carrés, que vaut l'aire du triangle PQC ?



(A) 4 (B) 8 (C) 9 (D) 12 (E) Il manque des données.

Solution

Le point Q étant le milieu de $[BC]$, l'aire du triangle PQC vaut la moitié de l'aire du triangle PBC. Comme $[BP]$ vaut les deux tiers de $[AB]$, l'aire du triangle PBC vaut les deux tiers de l'aire du triangle ABC.
D'où aire$PQC = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}$ aire$ABC = \frac{1}{3} \cdot 24 = 8$ (réponse B).

Mini 17 - Midi 1

On choisit deux nombres parmi les six entiers -8, -7, -6, 2, 3, 4 et on effectue leur produit. Quel est le plus petit produit possible ?

(A) -56 (B) -48 (C) -32 (D) -12 (E) 6

Solution

Le plus petit produit possible sera négatif, il s'obtient en multipliant le plus grand nombre positif et le plus petit nombre négatif, soit $4 \times (-8) = -32$ (réponse C).

Mini 19

Combien existe-t-il de nombres premiers dont la somme des chiffres est 15 ?

(A) 0 (B) 1 (C) 3 (D) 5 (E) 7

Solution

Si la somme des chiffres est 15, c'est que le nombre cherché est divisible par 3. Or le seul nombre premier divisible par 3 est 3 et la somme de ses chiffres n'est pas 15. Aucun nombre premier ne répond à la question (réponse A).

Mini 21 - Midi 8

Sans réponse préformulée - Un nombre entier comporte deux chiffres dont la différence vaut 5. Si l'on permute les deux chiffres, le nombre obtenu ne vaut plus que les trois huitièmes du précédent. Quel est le nombre initial ?

Solution

Soit a le chiffre des dizaines et b celui des unités du nombre initial que nous écrirons $\overline{ab}$.
$\overline{ab} > \overline{ba}$ car le second nombre vaut les $\frac{3}{8}$ du premier, donc $a > b$ et $a-b=5$. Les valeurs possibles du nombre $\overline{ab}$ sont donc 94, 83, 72, 61 et 50. Parmi ces nombres, le seul qui soit divisible par 8 est 72 et on a bien $27 = \frac{3}{8} \cdot 72$.

Mini 28

À la poste, j'achète 18 timbres, les uns à 0,45 €, les autres à 0,70 €, pièce. Je paie avec un billet de 10€ et le guichetier me rend 0,15€. Combien de timbres à 0,70€ ai-je acheté ?

Ⓐ 11 Ⓑ 10 Ⓒ 8 Ⓓ 7 Ⓔ 3

Solution

Soit x le nombre de timbres à 0,45€. Puisque le nombre total de timbres est 18, le nombre de timbres à 0,70€ est $18-x$. On a donc l'égalité $x \cdot 0{,}45 + (18-x) \cdot 0{,}70 = 9{,}85$.
Multiplions le deux membres par 100, on obtient successivement
$45x + 1260 - 70x = 985$, $25x = 275$, $x = 11$.
Le nombre de timbres à 0,70€ est donc $18 - 11 = 7$ (réponse D).

Mini 29

On augmente la longueur d'un rectangle de 30 % et on diminue sa largeur de 20 %. Son aire est

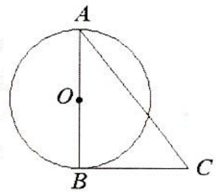
Ⓐ Augmentée de 10 % ;
Ⓑ Augmentée de 6 % ;
Ⓒ Augmentée de 4 % ;
Ⓓ Diminuée de 0,4 %
Ⓔ Diminuée de 10 %.

Solution

Soient L et l respectivement la longueur et la largeur du rectangle. L'aire initiale est $L \cdot l$. Après modifications, l'aire est devenue $\frac{130}{100}L \cdot \frac{80}{100} \cdot l =< frac104100 \cdot L \cdot l$. Cette aire est donc augmentée de 4 % (réponse C).

Midi 12

Le segment $[AB]$ est un diamètre du cercle de centre O et la droite BC est tangente au cercle en B. Que vaut l'aire du cercle sachant que $|AC| = 12$ et $|BC| = 8$?



Ⓐ 12π Ⓑ $8\sqrt{3}\pi$ Ⓒ 16π Ⓓ 20π Ⓔ 80π

Solution

$|AB|^2 = |AC|^2 - |BC|^2 = 144 - 64 = 80$, d'où $|AO|^2 = \frac{1}{4}|AB|^2 = 20$ et l'aire du cercle vaut 20π (réponse D).

Midi 15

Dans une assemblée, 60 % sont des femmes. Une femme sur trois est sportive et un homme sur deux est sportif. Parmi les sportifs de cette assemblée, quelle est, exprimée en %, la proportion de femmes ?

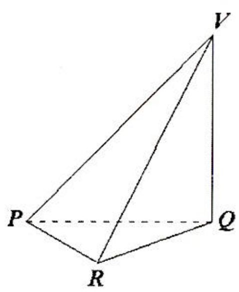
Ⓐ 35 Ⓑ 40 Ⓒ 45 Ⓓ 50 Ⓔ 55

Solution

Si l'assemblée comporte 100 personnes, 60 sont des femmes dont 20 sont sportives et 40 sont des hommes dont 20 sont sportifs. Il y a donc autant de femmes que d'hommes sportifs. Dans l'ensemble des sportifs, la proportion de femmes est de 50 % (réponse D).

Midi 19

Dans le tétraèdre $VPQR$, la droite VQ est perpendiculaire au plan PQR, $\widehat{PQR} = 60°$, $|VP| = |VR| = 10$ et $|VQ| = 8$. Que vaut la longueur de $[PR]$?



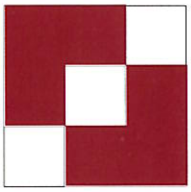
Ⓐ 6 Ⓑ $6\sqrt{2}$ Ⓒ 9 Ⓓ 10 Ⓔ $8\sqrt{3}$

Solution

La droite VQ est perpendiculaire au plan PQR, donc perpendiculaire aux droites QP et QR. Dans le triangle rectangle VQP, $|PQ|^2 = |VP|^2 - |VQ|^2 = 100 - 64 = 36$, d'où $|PQ| = 6$. De même $|RQ| = 6$. Le triangle PQR est isocèle et comme il a un angle de $60°$, il est équilatéral, donc $|PR| = 6$ (réponse A).

Solutions des jeux

1. Coloriage et actualité

A. 

B. Les cases coloriées étaient occupées
- soit par les multiples de 4,
- soit par les multiples de 4 augmentés de 1,
- soit par les multiples de 4 augmentés de 2,
- soit par les multiples de 4 augmentés de 3.

C. 2007 n'est pas premier puisque $2007 = 3 \times 669$. Le premier nombre premier dans la suite est 2011.

2. Vrai ou faux

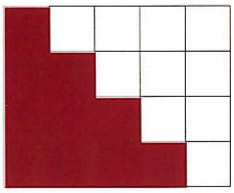
A. Faux : $1 \times 2 \times 3 = 1 + 2 + 3$.

B. Vrai : Quel que soit le nombre a, a^6 est le carré de a^3 et le cube de a^2 puisque $a \times a \times a \times a \times a \times a = (a \times a \times a) \times (a \times a \times a) = (a \times a) \times (a \times a) \times (a \times a)$.

C. Vrai : Quel que soit l'entier a, le chiffre des unités de a^4 est 0 ou 1 ou 5 ou 6.

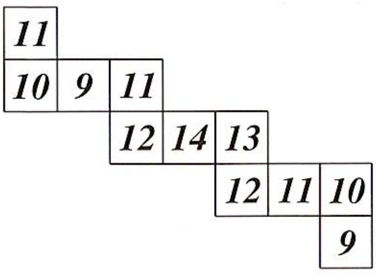
D. Faux : $-12345 < 3$.

E. Vrai : cette égalité est souvent illustrée par le schéma suivant :



Si tu as du mal pour décrypter ce schéma, demande l'aide de ton professeur qui te racontera peut-être la légende liée à Gauss et son instituteur.

3. Deux ou trois nombres consécutifs

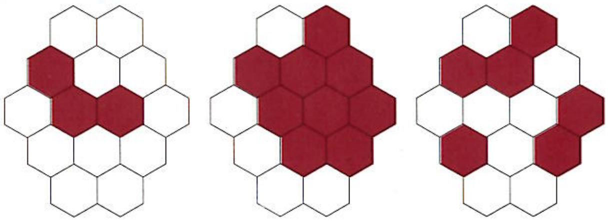


4. Un tour de magie

Dès que tu commences à écrire et en ne connaissant que la somme 12, le magicien connaît la somme finale 2664. Après division par 8, le résultat final sera donc 333. Si tu ne vois pas pourquoi, reprends le tour en changeant de nombres !

Nous en reparlerons dans le prochain numéro de *Math-Jeunes Junior*.

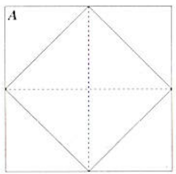
5. Hexagones



6. Une opération à décrypter

$$\begin{array}{r} 367 \\ \times\ 57 \\ \hline 2569 \\ 1835 \\ \hline 20919 \end{array}$$

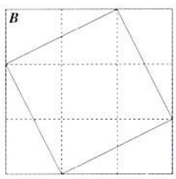
7. Que des carrés !



A. Les éléments de symétries du carré permettent de justifier que l'aire du premier carré inscrit vaut la moitié de l'aire du carré initial.

À chaque étape, la situation est analogue et si nous désignons par S l'aire du carré initial, les aires valent successivement S , $\frac{S}{2}$ et $\frac{S}{4}$.

L'aire coloriée vaut donc $\frac{S}{2} - \frac{S}{4} = \frac{S}{4}$.



B. La subdivision ci-contre (ou le théorème de Pythagore) prouve que si 9 est l'aire du carré initial, celle du carré inscrit est 5.

À chaque étape, l'aire du nouveau carré vaut donc $\frac{5}{9}$ de l'aire du carré dans lequel il est inscrit.

S étant l'aire du carré initial, l'aire coloriée vaut donc $\frac{5S}{9} - \frac{25S}{81} = \frac{20S}{81}$.

L'aire coloriée en B est donc inférieure à l'aire coloriée en A.

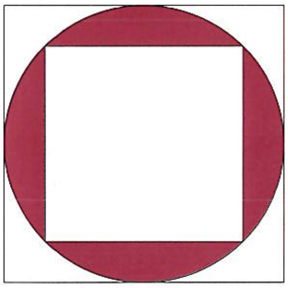
8. Des carrés et des cercles

En supposant que le côté du grand carré mesure 2 cm, les aires valent successivement, en cm^2 :

carre initial	1er disque	2^e carré	2^e disque	3^e carré	3^e disque	4^e carré	4^e disque	...
4	π	2	$\frac{\pi}{2}$	1	$\frac{\pi}{4}$	0.5	$\frac{\pi}{8}$	...

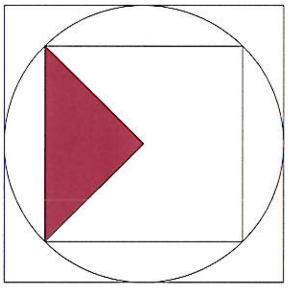
9. Des carrés, des cercles et des arcs de cercles

Toujours en supposant que le côté du grand carré mesure 2 cm, on obtient (en cm^2) les aires des zones coloriées suivantes :



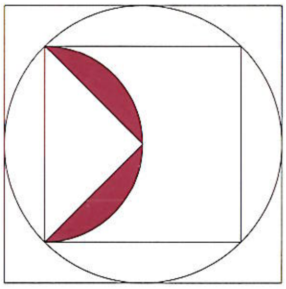
Aire du disque - aire du petit carré :

$\pi - 2 \approx 1{,}14$



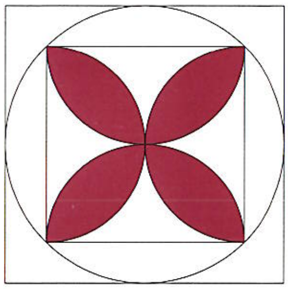
Un quart de l'aire du petit carré :

$2 : 4 = 0,5$



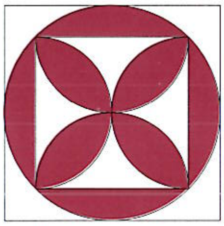
Aire d'un demi-cercle - aire du triangle :

$\frac{1}{2}\pi\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - 0{,}5 = \frac{\pi}{4} - 0{,}5$



Aire de quatre lunules :

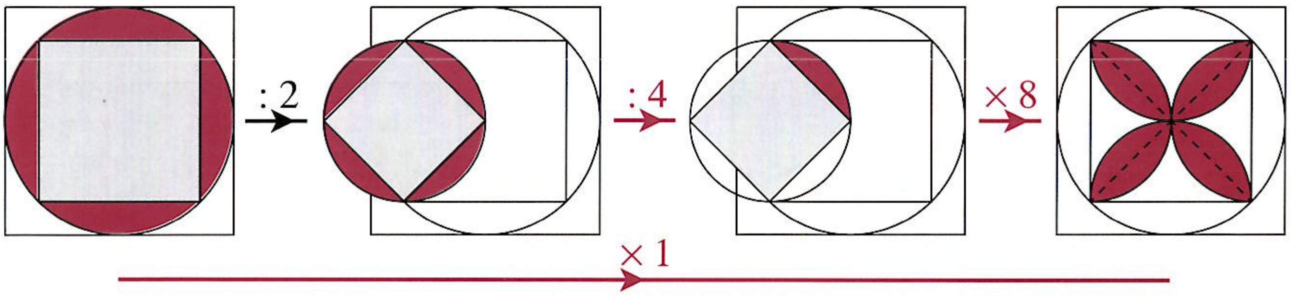
$4(\frac{\pi}{4} - 0{,}5) = \pi - 2$
$\approx 1{,}14$



L'aire de la zone coloriée est donc proche de 2,28 cm^2. Elle est donc supérieure à 2 cm^2, moitié de l'aire du grand carré. L'aire de la zone coloriée est donc supérieure à celle de la zone non coloriée (qui est proche de 1,72 cm^2).

En prime ! L'égalité découverte ci-dessus en obtenant $\pi - 2$ comme aire de chacune des deux zones coloriées peut être justifiée sans calculer ces aires mais en exploitant la propriété apparue dans le jeu précédent :

Dans l'élaboration du dessin, chaque zone a comme aire la moitié de l'aire de la zone analogue au niveau précédent. La suite est un petit jeu de puzzle.



10. Produits en lignes et en colonnes

La solution n'est pas nécessairement unique ... c'est le cas de la première grille !

8	9	4
3	2	7
6	1	5

8	9	4
6	1	7
3	2	5

2	7	8	5
9	3	6	13
10	11	4	12

Math-quiz

Claude Villers

Nous remercions et nous félicitons très vivement tous ceux qui ont répondu, en tout ou en partie, aux questions de la première étape de notre Math-Quiz 2007-2008 et nous les invitons à poursuivre dans cette bonne voie de la participation. Le tableau « d'honneur » de cette première étape s'établit comme suit (ordre alphabétique) :

Nom	Commune	Classe	Nom	Commune	Classe
De Groote Aurélie	Rixensart	2	Hauquier Bénédicte	Chimay	3
Delorme Antoine	Montigny le Tilleul	1	Loloyaux Laurent	Thuin	1
Dierickx Tristan	Ham sur Heure	1	Lecut Emeline	Thuin	1
Haquin Simon	Beauraing	1	Van Heghe Maxime	Saint Ghislain	1
Hardy Baptiste	Seloignes	1			

Voici maintenant les réponses aux quesions de la premiere étape.

Question	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Réponse	9	30	1	11	123	0	24	20	2491	40320

Nous ne donnons pas des justifications de ces réponses car nous pensons fermement que, comme toujours, un doute, un désaccord, une interrogation au sujet de l'une d'elles constituent autant de belles occasions d'en parler autour de soi et d'en débattre en classe, avec vos condisciples et/ou votre professeur ... et même à la maison !!

Nous invitons maintenant tous les lecteurs à participer à la deuxième étape de notre challenge dont nous rappelons la teneur : fournir le maximum de réponses correctes aux questions qui sont proposées ci-après. Cette deuxième étape nous permettra à nouveau de vous placer au tableau d'honneur qui sera publié dans le troisième numéro de *Math-Jeunes Junior* de cette année scolaire. Le classement général nous permettra quant à lui d'attribuer des récompenses aux meilleurs envois.

Cette année encore, nous avons reçu l'appui appréciable de la firme CASIO Belgium, qui dotera le concours de calculatrices scientifiques Fx 92 Collège 2D.

Comment répondre ? Vous nous envoyez vos réponses sur carte postale simple ou illustrée (voir ci-après le concours annexe) à l'adresse : SBPMef - Math-Quiz Rue du Onze Novembre 24 B-7000 Mons- en indiquant bien vos nom et prénom, votre adresse complète, le nom exact et la localisation de votre école ainsi que le niveau de votre classe en 2007-2008. Nous rappelons qu'il est possible de grouper plusieurs réponses dans une même enveloppe. Vos réponses à cette deuxième étape doivent nous être parvenues dès que possible et avant le vendredi 4 avril 2008. (Ce sont les délais d'impression et d'expédition du dernier numéro de l'année scolaire qui nous obligent à fixer ce délai). Exemple de tableau-réponse

Question	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Réponse										

Le concours annexe (facultatif) se poursuit aussi : Nous vous invitons en outre à être imaginatif et/ou créatif en réalisant une illustration mathématique du verso de votre carte-réponse. Le choix du sujet mathématique est laissé à votre appréciation. Cela doit vous permettre de la transformer en un sujet touchant aux mathématiques. A vous de faire preuve d'originalité. Les meilleures propositions seront également primées. Elles auront peut-être l'honneur de figurer en première de couverture d'une de nos revues à paraître !

Vous ne manquez pas d'idées ! Alors, n'hésitez pas à nous envoyer vos dessins.

Questions de la deuxième étape

11	*	Dans cette classe, tous les élèves pratiquent une activité sportive ou musicale. A la question « qui pratique un sport ? », 18 mains se lèvent. A la question « qui joue de la musique ? », 6 mains se lèvent. Chaque élève a levé la main au moins une fois et 3 élèves l'ont fait deux fois. De combien d'élèves se compose cette classe à ce moment ?
12	*	Pour scier un morceau de 1dm de long dans une latte de 1 m de long, il faut 1 minute. Combien de minutes faudra-t-il, dans les mêmes conditions, pour scier 10 morceaux de 1dm de long dans une telle latte ?
13	**	Le rayon du Soleil vaut huit fois celui de la Terre. Combien de fois la superficie du Soleil vaut-elle celle de la Terre ?
14	**	Un hexagone régulier et un triangle équilatéral ont le même périmètre. Quel est, sous forme d'une fraction irréductible, le rapport entre l'aire de l'hexagone et celle du triangle équilatéral ?
15	**	Un numéro spécial de Math-Jeunes comportait 64 pages de format A4. Il était composé, comme celui que vous avez devant vous, d'un assemblage de feuillets de format A3 pliés et agrafés. Un tel feuillet s'est échappé lors du montage d'un exemplaire. La partie gauche d'une de ses faces portait le numéro 22. Quel était le numéro figurant sur la partie droite de cette face ? ?
16	***	Par quel chiffre se terminera $1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + \cdots + 2005^3$?
17	***	La piste du vélodrome fait 400 m à la corde. C'est cette corde que suivent les deux participants à une course poursuite. Le vainqueur rattrape son adversaire après huit minutes. Quelle est, en km/h, la différence des vitesses moyennes des deux concurrents ?
18	***	Pour ficeler un paquet ayant la forme d'un parallélépipède rectangle vous l'entourez d'un ruban adhésif collé bord à bord selon deux des trois plans médians de la boite. Vous utilisez soit 2,2 m, soit 2,6m, soit 2,4 m de ruban. Quelle est, en cm, la plus grande dimension de ce paquet ?
19	****	Des héritiers se partagent une somme en héritage. Le premier reçoit 100€et 10% du reste.Le deuxième reçoit 200€et 10% du reste. Le troisième reçoit 300€et 10% du reste, et ainsi de suite jusqu'au dernier héritier qui reçoit le reste. Toutes les parts sont égales. Combien y a-t-il d'héritiers ?
20	*****	A l'arrivée de la course de 10 km, le vainqueur possède 200m d'avance sur le deuxième qui possède lui-même 490 m d'avance sur le troisième. Dans les mêmes conditions de course et de classement, quelle sera, en m, l'avance à l'arrivée du deuxième sur le troisième ?

Math-Jeunes et Math-Jeunes Junior

Revues trimestrielles publiées par la Société Belge des Professeurs de Mathématique d'expression française

Secrétariat : M-C Carruana, SBPMef, 24, rue du Onze Novembre, 7000 Mons.
Tél/fax : 065.31.91.80
GSM : 0473973808 e-mail : sbpm@sbpm.be, URL : http://www.sbpm.be.

Tarifs

Abonnements groupés (au moins 5)		
	Une des deux revues	Les **deux** revues
Belgique	4 €	8 €

Abonnements individuels				
	Une des deux revues		Les **deux** revues	
Belgique	6 €		12 €	
France (abonnement(s) pris par l'intermédiaire de l'APMEP)	8€		16€	
	✉	✉̸	✉	✉̸
Europe	18 €	20 €	24 €	26 €
Autres pays	19 €	22 €	25 €	28 €

Légende : « prior »=✉̸, « non prior »=✉.

Trois numéros de chaque revue sont publiés annuellement. Pour connaître la liste des anciens numéros encore disponibles et leur prix selon votre localisation, adressez-vous au secrétariat.
Les abonnements destinés aux élèves de l'enseignement secondaire sont de préférence pris par l'intermédiaire d'un professeur. Effectuez vos paiements :

- ☞ pour la Belgique : par virement au Compte n°000-0728014-29 de *S.B.P.M.e.f.*, rue du Onze Novembre, 24, 7000 Mons
- ☞ pour la France : par virement au Compte CCP Lille 10 036 48 S
- ☞ pour l'étranger (sauf la France) : par virement international au Compte n°IBAN: BE 26 0000 7280 1429 BIC: BPOTBEB1 au nom de la *SBPMef*, rue du Onze Novembre, 24, B 7000 Mons, Belgique. Les personnes résidant à l'étranger qui ne peuvent faire un virement à ce compte sont invitées à envoyer un mandat postal international. Tout chèque bancaire non encaissable en Belgique devra être majoré de 12,50 € pour frais d'encaissement.

Éditeurs responsables et rédacteurs en chef :

– pour *Math-Jeunes* : G. Noël, Rue de la Culée 86, 6927 Resteigne

– pour *Math-Jeunes Junior* : A. Paternottre, Rue du Moulin 78, 7300 Boussu

Math-Jeunes Junior
Périodique trimestriel

24, rue du Onze Novembre - 7000 Mons
Bureau de dépôt 7000 Mons 1

Responsable de l'édition : A. PATERNOTTRE
Rue du Moulin, 78 - 7300 Boussu
Bureau de dépôt : Mons 1

Autorisation de fermeture
Sluitings toelating

7000 Mons 1
5/156

Belgique - België
P.P.
7000 Mons 1
5/124

Périodique - Peut être ouvert pour contrôle postal

Réservé à la poste

Inconnu
Refusé
Décédé
Adresse insuffisante
N'habite plus à l'adresse indiquée