mj junior

21e année
Mars 2000 - N° 93 J
Bureau de dépôt : Mons 1

Math-Jeunes

Revue trimestrielle publiée par la Société Belge des Professeurs de Mathématique d'expression française

Le courrier et les projets d'articles doivent être envoyés aux rédactions respectives.

Abonnements : sauf mention contraire, les prix sont indiqués en EUROS

	Belgique	Union Européenne	Europe hors Union	Hors Europe prioritaire	Hors Europe non priorit.
Abonnement isolé (*) 4 numéros (**) 7 numéros					
Math-Jeunes junior ou *Math-Jeunes*(*)	200 BEF ou 4.96	9.2	10.2	20.4	11.4
Les deux revues (**)	350 BEF ou 8.68	16.5	17.17	35.6	20
Abonnements groupés (au moins 5) (*) 4 numéros (**) 7 numéros					
Math-Jeunes junior ou *Math-Jeunes*(*)	150 BEF ou 3.72	6	7.6	15.2	8.6
Les deux revues (**)	265 BEF ou 6.57	10.6	13.4	26.6	15.1

Pour connaître la liste des anciens numéros encore disponibles et le prix de ceux-ci selon votre région, adressez-vous à la S.B.P.M.e.f., rue de la Halle 15, 7000 Mons

Tél. 32-(0)65-373729

Les abonnements destinés aux élèves de l'enseignement secondaire sont de préférence pris par l'intermédiaire d'un professeur. Effectuez vos paiements :

- pour la Belgique : par virement au Compte n° 001-0828109-96 de *Math-Jeunes*, rue de la Halle 15, 7000 Mons
- pour la France : par virement au Compte CCP Lille 10 036 48 S
- pour l'étranger (sauf la France) : par virement international au Compte n° 000-0728014-29 de la *S.B.P.M.e.f.*, rue de la Halle 15, B 7000 Mons, Belgique. Il est vivement conseillé aux étrangers qui ne peuvent faire un virement de C.C.P. à C.C.P. de nous envoyer un mandat postal international. En principe, seuls les chèques encaissables dans une banque belge sont acceptés (tout chèque bancaire non encaissable en Belgique devra être majoré de 200 BEF pour frais d'encaissement.)

Éditeurs responsables :

- pour *Math-Jeunes* : M. Ballieu, Rue Alfred Moitroux 22, 7100 La Louvière
- pour *Math-Jeunes junior* : C. Van Hooste, Chemin de Marbisœul 25, 6120 Marbaix-la-Tour

N 93 J — Vingt et unième année — 2000

Math-Jeunes junior

La multiplication, une opération toujours branchée

André Paternottre, *Institut Technique et Commercial, Boussu*

Les tables de multiplication ... tu connais, j'espère !

Elles te servent tous les jours et pas seulement à l'école. Je t'entends me dire : « j'ai une calculette dont je sais bien me servir. » Bravo ! Mais comment fais-tu quand tu l'as oubliée à la maison ou encore lorsqu'on t'interdit de l'utiliser (lors d'un contrôle ou à l'occasion de l'Olympiade de Mathématique par exemple) ? Nous reparlerons de ta calculette à la fin de cet article mais pour ce qui suit immédiatement, laisse-la de côté.

Je te propose d'abord d'effectuer de manière traditionnelle la multiplication suivante : 183×79. Ensuite je te rappellerai la propriété utilisée dans ce calcul.

$$\begin{array}{r}
1\;8\;3\\
\times\;7\;9\\
\hline
1\;6\;4\;7\\
1\;2\;8\;1\;\;\\
\hline
1\;4\;4\;5\;7
\end{array}$$

$$\begin{aligned}
183 \times 79 &= 183 \times (9 + 70)\\
&= (183 \times 9) + (183 \times 70)\\
&= 1\,647 + 12\,810\\
&= 14\,457
\end{aligned}$$

Sans doute as-tu reconnu qu'on a simplement appliqué ici la propriété de **distributivité** de l'opération « × » sur l'opération « + ».

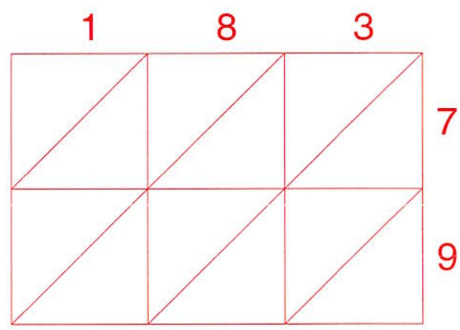
La façon dont on vient de procéder pour effectuer une multiplication présente néanmoins quelques inconvénients :

- il faut prendre soin de bien placer les chiffres sous peine de dangereuses « déviations » dans l'addition finale ;
- si on commence le calcul trop à gauche de la feuille, on risque un manque de place à gauche et cela d'autant plus que les deux facteurs du produit comportent un nombre élevé de chiffres ;
- dans chacun des produits partiels, il faut mémoriser les reports. « J'écris 7 et je retiens 2 », dit-on.

Voici une autre disposition du calcul précédent qui évite ces inconvénients en grande grande partie. Bien sûr, on s'efforcera aussi d'y découvrir la propriété utilisée.

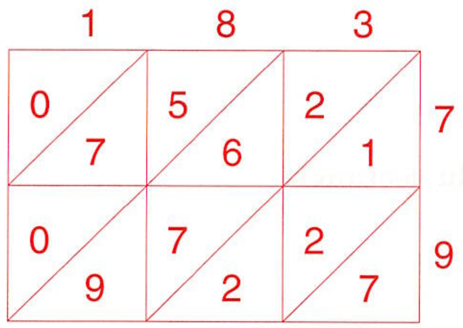
Je te propose d'utiliser du papier quadrillé. Ensuite, tu réalises successivement les étapes suivantes :

1. Compte le nombre de chiffres de chacun des deux facteurs à multiplier. Dans l'exemple proposé, ces nombres sont 2 et 3.
2. Dessine une grille de genre « 2×3 » c'est-à-dire une grille comportant 6 cases disposées en deux lignes et trois colonnes.



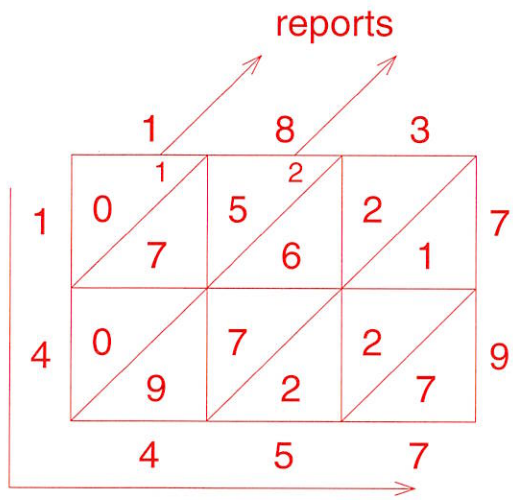
   Trace ensuite la diagonale montante de chacune des cases.
   Écris les deux facteurs à multiplier comme le montre la figure ci-dessus.
3. Inscris dans chaque case le produit partiel correspondant, les deux chiffres de ce produit étant séparés par la diagonale de la case.

Math-Jeunes junior n°93 J,50–51, 2000



Si ce produit n'a qu'un seul chiffre, on écrit 0 (zéro) en lieu et place du chiffre des dizaines.

4. Somme les chiffres situés à l'intérieur de la grille dans une même rangée **oblique**, en commençant par la rangée la plus à droite.



Écris le chiffre des unités de cette somme au bas de la rangée et ajoute le chiffre des dizaines (report) éventuel au chiffre de la rangée située immédiatement à gauche de la précédente.
Le produit recherché se lit alors facilement dans le sens de la flèche.

Cette fois encore, c'est la propriété de distributivité qui a été appliquée mais d'une façon plus extensive que dans la méthode traditionnelle :

$$
\begin{aligned}
& 183 \times 79 \\
& = (100 + 80 + 3) \times (70 + 9) \\
& = (100 \times 70) + (100 \times 9) + \cdots + (3 \times 9) \\
& = 7\,000 + 900 + 5600 + 720 + 210 + 27 \\
& = 14\,457
\end{aligned}
$$

$$
\begin{array}{rrrrrr}
 & 7 & 0 & 0 & 0 \\
 & & 9 & 0 & 0 \\
 & 5 & 6 & 0 & 0 \\
 & & 7 & 2 & 0 \\
 & & 2 & 1 & 0 \\
+ & & & 2 & 7 \\
\hline
1 & 4 & 4 & 5 & 7
\end{array}
$$

Observe l'addition effectuée. Hormis les zéros, chaque rangée verticale comporte les mêmes chiffres que les rangées obliques successives de la grille utilisée plus haut.

Quant à ta calculette, sache qu'elle applique la définition du produit de deux nombres entiers : somme d'autant de fois l'un de ces deux entiers qu'il n'y a d'unités dans l'autre. Pour reprendre l'exemple précédent :

$$183 \times 79 = 183 + 183 + \cdots + 183,$$

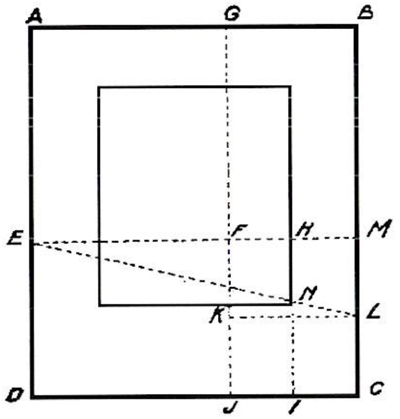
somme dans laquelle il y a 79 termes égaux à 183. Bien sûr, ta calculette, avant d'effectuer cette longue addition, aura préalablement écrit chacun des deux facteurs 183 et 79 en « binaire » c'est-à-dire en base 2. Quelle machine géniale et performante que cette petite calculatrice ! Mais n'oublie jamais qu'elle a été conçue et réalisée par des gens tout aussi géniaux et performants. Ils ne le sont pas devenus par hasard ! Ils ont d'abord appris les bases de l'arithmétique et ont su ensuite magistralement les appliquer. Comme quoi, tes études, cher lecteur, c'est super important !

La mathématique au quotidien ...

Claude Villers, *Athénée Royal de Mons*

La « cadrature » du rectangle

C'est dans un article intitulé « *Mounting a print* » paru le 8 juillet 1925 dans une revue destinée aux photographes (*The Amateur Photographer*) qu'un certain H. Wildman a proposé le schéma ci-dessous montrant comment réaliser un montage réussi d'une image rectangulaire dans un cadre rectangulaire.



L'auteur ajoute

- que $AGFE$ représente le format de l'image à présenter dans le cadre $ABCD$
- que $|FH| = |HM|$ et que $|ML| = |LC|$

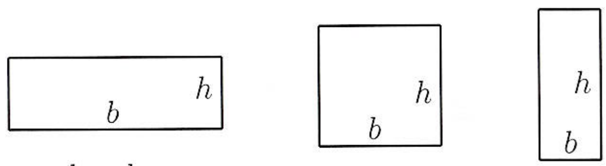
Certes, le schéma proposé suffit pour que le montage d'une image dans un cadre soit réalisé sans grande difficulté par le biais de cette construction géométrique.

Un tout petit peu d'observation permet quand même de découvrir des caractéristiques de ce montage.

- Puisqu'il faut $|FH| = |HM|$, il est assez immédiat que l'auteur de l'article propose de placer l'image de façon que les bordures gauche et droite soient égales.
- Il est tout aussi clair que les bordures inférieure et supérieure ne le seront pas : puisque $|ML| = |LG|$, on n'a pas $|HN| = |NI|$ mais bien $|HN| < |NI|$.
- Aucune dimension n'est indiquée ce qui oblige à effectuer l'entièreté de la construction chaque fois que l'on veut réaliser un montage selon le principe proposé.

Mais il est aussi possible de déterminer les dimensions des bordures à partir des dimensions du cadre et de l'image à y placer. Cela permet d'établir une table de ces dimensions pour les valeurs les plus couramment utilisées ou pour des valeurs tout à fait personnelles des éléments employés. Ce sera là une application pratique et réelle de notions très élémentaires de géométrie rencontrées dans les classes. Essayez de réaliser cela avant de lire la suite!!!

Désignons par b et h les dimensions du cadre disponible et par b' et h' les dimensions de l'image. Remarquez d'ailleurs qu'on pourra avoir selon les circonstances ou les souhaits personnels :



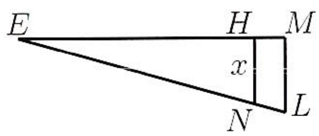
$b > h$ $\qquad$ $b = h$ $\qquad$ $b < h$

Il en sera de même pour b' et h'.

Si $b' > h'$ on dit que l'image est au format *paysage*. Si $b' = h'$ on dit que l'image est au format *carré*. Si $b' < h'$ on dit que l'image est au format *portrait*.

Pour les 2 bordures latérales, la réponse est immédiate : on a $|AB| = b$ et $|AG| = b'$ donc $|GB| = b - b'$ et $|FH| = |HM| = \frac{b-b'}{2}$. Pour les bordures supérieure et inférieure, une application de la similitude des triangles va nous donner les réponses.

Isolons une partie de la figure initiale.



Math-Jeunes junior n°93 J.52–54, 2000

Désignons $|HN|$ par x (ce sera la dimension de la bordure supérieure puisque $|NI|$ est la dimension de la bordure inférieure).

Les triangles EHN et EML sont semblables car $HN /\!/ ML$. Les longueurs de leurs côtés correspondants sont proportionnelles.

Dès lors $\frac{x}{|ML|} = \frac{|EH|}{|EM|}$ ou $\frac{x}{\frac{h-h'}{2}} = \frac{b - \frac{b-b'}{2}}{b}$ donc $\frac{x}{\frac{h-h'}{2}} = \frac{\frac{b+b'}{2}}{b}$ ou encore $bx = \frac{(b+b')(h-h')}{4}$. Dans une proportion, le produit des termes extrêmes est égal au produit des termes moyens.

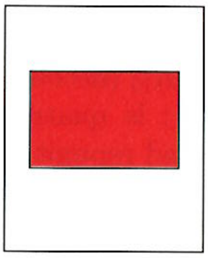
D'où enfin

$$x = \frac{(b+b')(h-h')}{4b}$$

La dimension de la bordure inférieure est donc $h - h' - x = h - h' - \frac{(b+b')(h-h')}{4b}$.

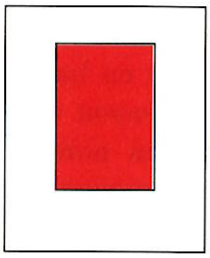
Exemple 1

Vous voulez placer une image 20×30 en format paysage dans un cadre 40×50 placé verticalement.



Ici, on a $b = 40$, $b' = 30$, $h = 50$ et $h' = 20$. Les bordures latérales mesureront $(40 - 30)/2 = 5$. La bordure supérieure mesurera $(40 + 30)(50 - 20)/(4 \times 40)$ soit $2100/160$ soit 13.125. La bordure inférieure mesurera $50 - 20 - 13.125$ soit 16.875.

Exemple 2



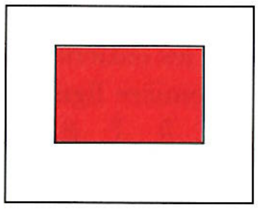
Vous voulez placer une image 20×30 en format portrait dans un cadre 40×50 placé verticalement.

Ici, on a $b = 40$, $b' = 20$, $h = 50$ et $h' = 30$. Les bordures latérales mesureront $(40-20)/2 = 10$. La bordure supérieure mesurera $(40 + 20)(50 - 30)/(4 \times 40)$ soit $1200/160$ soit $7,5$. La bordure inférieure mesurera $50 - 30 - 7,5 = 12,5$.

Exemple 3

Vous voulez placer une image 20×30 en format paysage dans un cadre 40×50 placé horizontalement.

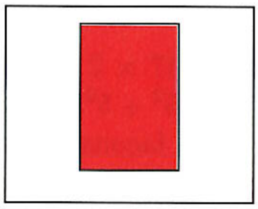
Ici, on a $b = 50$, $b' = 30$, $h = 40$ et $h' = 20$. Les bordures latérales mesureront $(50-30)/2 = 10$. La bordure supérieure mesurera $(50 + 30)(40 - 20)/(4 \times 50)$ soit $1600/200$ soit 8. La bordure inférieure mesurera $50-30-8 = 12$.



Exemple 4

Vous voulez placer une image 20×30 en format portrait dans un cadre 40×50 placé horizontalement.

Ici, on a $b = 50$, $b' = 20$, $h = 40$ et $h' = 30$. Les bordures latérales mesureront $(50 - 20)/2 = 15$. La bordure supérieure mesurera $(50+20)(40-30)/(4 \times 50)$ soit $700/200$ soit $3,5$. La bordure inférieure mesurera $40 - 30 - 3,5 = 6,5$.



Pour conclure...

Vous ne serez plus en peine maintenant de calculer les mesures des bordures à prévoir si vous devez présenter une image rectangulaire sur un support rectangulaire. Vous pouvez aussi constater que certaines dispositions sont plus agréables à l'œil que d'autres. Mais dans ce domaine comme dans beaucoup d'autres d'ailleurs, tout n'est-il pas aussi une affaire de goût personnel ?

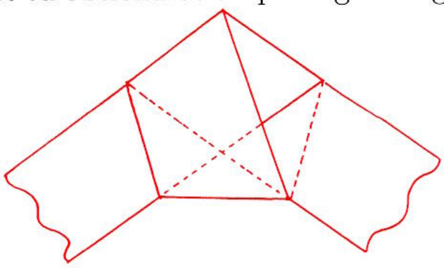
Curiosités

La Rédaction

- $\dfrac{1\cancel{6}}{\cancel{6}4} = \dfrac{1}{4}$ en simplifiant les deux « 6 ». Horreur !!! s'écrie le prof. de math. Et cependant, c'est correct, dans ce cas particulier ; et même, il existe trois autres exemples où « ça marche encore » avec des nombres inférieurs à 100 ???
- Écris les parties entières des multiples de $\sqrt{2}$ et, en dessous, les entiers qui n'apparaissent pas dans la première ligne :

  1 2 4 5 7 8 9 11 ...
  3 6 10 13 17 20 23 27 ...

  La différence entre le nombre du dessous et celui du dessus vaut $2n$ à la n^{e} place. (Roland SPRAGUE, *Recreations in Mathematics*, London, 1963).
- Fais un nœud au moyen d'une bande de papier et tu obtiendras un pentagone régulier :



- $47 + 2 = 49$ et $47 \times 2 = 94$!!!
- $50 = 1^2 + 7^2 = 5^2 + 5^2$
  50 est de deux façons la somme de deux carrés. Y a-t-il d'autres nombres possédant cette propriété ?
- 3 est tel que la somme de ses diviseurs est un carré :
  $$1 + 3 = 4 = 2^2$$
  Tiens, 22 aussi possède cette propriété, puisque
  $$1 + 2 + 11 + 22 = 36 = 6^2$$
  Y en a-t-il d'autres ?
- $132 = 13 + 32 + 21 + 31 + 23 + 12$
  132 est la somme de tous les nombres de deux chiffres qu'on peut former avec ses chiffres. Est-ce un cas isolé ?
- $169 = 13^2$ et $961 = 31^2$
- $371 = 3^3 + 7^3 + 1^3$ et il y en a d'autres ...
- $1\,634 = 1^4 + 6^4 + 3^4 + 4^4$ et il n'est pas le seul ...
- $54\,748 = 5^5 + 4^5 + 7^5 + 4^5 + 8^5$
- $548\,834 = 5^6 + 4^6 + 8^6 + 8^6 + 3^6 + 4^6$
- $1\,741\,725 = 1^7 + 7^7 + 4^7 + 1^7 + 7^7 + 2^7 + 5^7$
- $24\,678\,050 = 2^8 + 4^8 + 6^8 + 7^8 + 8^8 + 0^8 + 5^8 + 0^8$
- Un nombre dont tous les chiffres sont des unités s'appelle une *repunit* (Albert BEILER, mathématicien contemporain). On le note R_n où n est le nombre de ses chiffres. Ainsi, $R_1 = 1$, $R_2 = 11$ (le plus petit repunit premier) ; le suivant (qui est premier) est R_{19} (découvert en 1918) ; le troisième est R_{23} ; le quatrième est R_{317} : c'est le plus grand repunit premier connu à ce jour.
- Remarquons que

$$1^2 = 1 \text{ palindrome}$$
$$11^2 = 121 \text{ palindrome}$$
$$111^2 = 12\,321 \text{ palindrome}$$
$$1\,111^2 = 1\,234\,321 \text{ palindrome}$$
$$11\,111^2 = 123\,454\,321 \text{ palindrome}$$

- 357 686 312 646 216 567 629 137 est le plus grand nombre premier écrit en base 10 tel que, si on enlève consécutivement un chiffre à gauche, on a toujours un nombre premier. Cela se termine, évidemment, avec les nombres 9 137, 137, 37, 7.

Référence :

David WELLS, *The Penguin Dictionary of Curious and Interesting Numbers*, Penguin Books, 1987.

Math-Jeunes junior n°93 J,54–54, 2000

Simone Trompler

Daniel BERNOULLI (1700–1782)

Il y a 300 ans, Daniel BERNOULLI naissait à Groningen. La famille Bernoulli est peut-être la famille la plus célèbre dans l'histoire des mathématiques par le nombre de mathématiciens qu'elle comprend et l'importance des travaux accomplis. Cette famille vient d'Espagne, s'installe à Anvers mais fuit le duc d'Albe en 1583, pour vivre dorénavant en Suisse, à Bâle.

A partir de Nicolaus, fils, petits-fils et arrières petits-fils partagent le même enthousiasme pour les mathématiques. Cette situation créera d'ailleurs des rivalités et des brouilles familiales. Les trois plus célèbres d'entre eux sont : Jakob I (1634-1705), son frère Johann I (1667-1748) et le fils de celui-ci, Daniel. Johann était très opposé à l'idée que Daniel fasse carrière en mathématique et il l'envoya étudier la médecine à l'université de Bâle. Daniel devint médecin mais s'intéressa surtout à l'application de la mathématique physique en médecine (par exemple le mécanisme de la respiration).

Parti à Venise pour étudier la médecine pratique, il devint gravement malade et dut renoncer à poursuivre ses études médicales. Il en profita pour se consacrer aux mathématiques et écrivit un livre « *Exercices mathématiques* ». On y voit déjà son intérêt pour le calcul des probabilités. Ce livre lui procura la gloire et on lui offrit une chaire de mathématiques à Saint-Petersbourg, en 1725. Son frère Nicolaus II obtint aussi un poste dans cette ville mais il mourut peu de temps après.

En 1727, le grand mathématicien Euler arriva à Saint-Petersbourg et les deux hommes collaborèrent jusqu'en 1733, date à laquelle Daniel quitta Saint-Petersbourg. Cette période fut la plus féconde de sa vie : il étudia les mouvements des cordes musicales, travailla sur le calcul des probabilités et l'économie politique et surtout, écrivit un livre « *Hydrodynamica* » qui est le fondement de l'hydrodynamique théorique. Après Saint-Petersbourg, il voyagea dans divers pays et retourna à Bâle en 1734. Il gagna dix fois le Grand Prix de l'Académie de Paris pour des sujets d'astronomie et de navigation ! Il fut très honoré de son vivant.

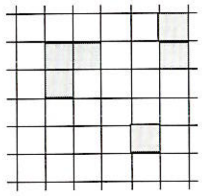
Sources :

- L. Geymonat, *Storia del pensiero scientifico*, Ed. Garzanti.
- D.M.Burton, *The History of mathematics*, 1997.
- Internet :
`http://www-groups.dcs.st_and.ac.uk:80/~history/Mathematicians/`

Math-Jeunes junior n°93 J,55–55, 2000

Le jeu de la vie

C. Festraets, *A.R. Woluwé-St-Pierre*



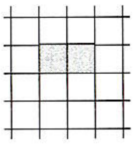
Ce jeu, inventé par le mathématicien John Conway, est une simulation de la vie, la mort, la reproduction des cellules. Il se joue sur une grille comme celle dessinée ci-contre, où chaque case représente une cellule, celles qui sont colorées sont des cellules vivantes, les autres sont mortes.

L'ensemble des cellules vivantes est appelé la population. Chaque cellule est entourée par 8 autres cellules (mortes ou vivantes), ce sont ses voisines. Deux cellules voisines se touchent donc soit par un bord, soit par un sommet. Au cours du temps, la population évolue, certaines cellules meurent, d'autres naissent. Les règles qui régissent cette évolution sont simples, les voici.

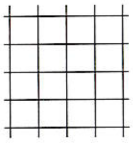
1. Si une cellule vivante a 2 ou 3 voisines vivantes, elle reste en vie à la génération suivante.
2. Si une cellule vivante a 0 ou 1 voisine vivante, à la génération suivante, elle meurt par isolement.
3. Si une cellule vivante a au moins 4 voisines vivantes, à la génération suivante, elle meurt par surpeuplement.
4. Si une cellule morte a exactement 3 voisines vivantes, à la génération suivante, une cellule vivante naît et remplace la cellule morte.

Exemple 1

1



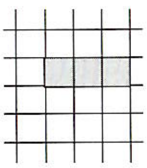
2



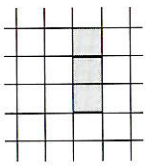
À la première génération, il y a deux cellules vivantes, chacune d'elles n'a qu'une seule voisine vivante, donc elles meurent ; aucune cellule morte n'a 3 cellules voisines vivantes, il n'y a aucune naissance. À la seconde génération, toutes les cellules sont mortes.

Exemple 2

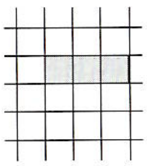
1



2



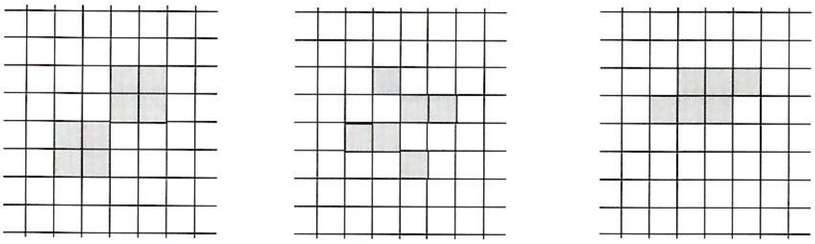
3



À la première génération, la cellule vivante centrale a deux voisines vivantes, à la deuxième génération, elle reste vivante. Les deux autres cellules vivantes n'ont chacune qu'une seule voisine vivante, à la deuxième génération, elles meurent. Mais il y a aussi deux cellules mortes qui ont trois cellules voisines vivantes, elles sont donc remplacées par des cellules vivantes. À la troisième génération, on retrouve le même schéma qu'à la première génération et bien

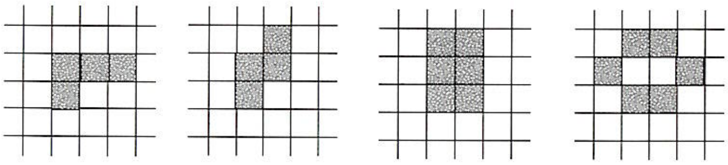
Math-Jeunes junior n°93 J,56–57, 2000

évidemment, les générations impaires seront toutes semblables à la première et les générations paires seront toutes semblables à la deuxième. Ce cycle de vie est dit périodique, de période 2. En voici d'autres.

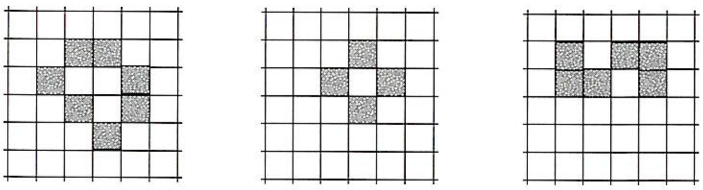


Exemple 3

1 2 3 4

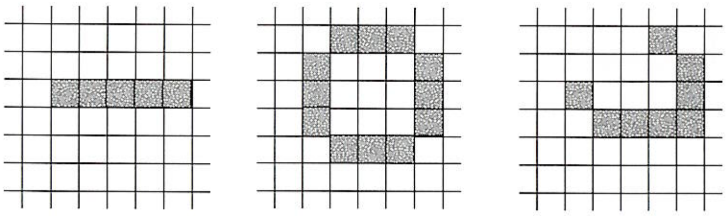


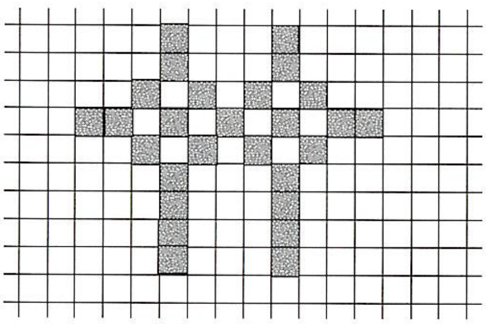
À la quatrième génération, chaque cellule vivante a deux voisines vivantes et aucune cellule morte n'a exactement trois voisines vivantes. Les générations suivantes seront similaires à la 4^{e}, la population est stable. Voici d'autres configurations où la population est stable :



Il en existe beaucoup d'autres, pouvez-vous en trouver quelques unes ?

Que deviennent les populations suivantes à la 5^{e} génération ?





Si ce jeu vous a intéressé et si vous disposez d'internet, vous pouvez charger gratuitement un logiciel qui permet de créer ses propres configurations et de voir comment elles évoluent génération après génération. En voici l'adresse : `http ://psoup.math.wisc.edu/Life32.html`.

Jeux

Tonton C

Math-Jeunes junior n°93 J,58–58, 2000

Jeu d'argent

Dix pièces sont alignées sur un support qui peut en porter 12. Les 5 premières sont tournées côté face (F) vers le haut et les 5 dernières côté pile (P) vers le haut.

F	F	F	F	F	P	P	P	P	P		

Vous pouvez **amener** 2 pièces contiguës, sans les permuter ni les retourner, dans deux emplacements libres.

Trouvez le plus petit nombre de telles opérations qui fournisse une suite de pièces alternant les côté F et P.

Le coin du bon langage

Quelle est l'écriture correcte ? A ou B ?

	A	B
1	Un équerre	Une équerre
2	L'hypothénuse	L'hypoténuse
3	Un hémisphère	Une hémisphère
4	Un abaque	Une abaque
5	Une absisse	Une abscisse
6	Un algorythme	Un algorithme
7	Une bissectrice	Une bissextrice
8	Un cylindre	Un cilyndre
9	Un paraléllogramme	Un parallélogramme
10	L'équipolence	L'équipollence

Un problème familial

Eric dit : « J'ai autant de sœurs que de frères ».

Solange, sa sœur, dit : « J'ai deux fois plus de frères que de sœurs ».

Combien y a t-il d'enfants dans cette famille ?

Le mot caché

Retrouvez les mots donnés, dans la grille, en serpentant horizontalement ou verticalement en tous sens mais pas en oblique. Chaque lettre ne sert qu'une fois. Les lettres restantes vous donneront le mot caché. Quel est-il ?

Mots à composer : CATEGORIE, CHANCE, CONDITIONNEL, EPREUVE, EVENEMENT, IMPOSSIBLE, INCERTITUDE, LANCER, PERMUTATION, REUSSITE.

B	I	C	E	C	N	C	N	A	L
A	L	O	N	D	A	H	C	I	M
B	I	T	E	I	T	I	E	R	P
O	R	P	I	T	E	O	S	S	O
R	I	S	S	E	V	N	I	B	L
O	E	U	E	N	E	N	E	L	E
G	R	E	D	E	M	E	P	E	R
E	T	A	U	T	I	N	T	U	M
P	E	C	E	R	T	I	A	T	N
R	E	U	V	E	C	N	T	I	O

Sports et math

André Paternottre, *Institut Technique et Commercial de Boussu*

Dans beaucoup de disciplines sportives se déroule chaque année, en Belgique comme à l'étranger, une compétition (un championnat) entre un certain nombre d'équipes évoluant au même niveau (dans la même division). Parmi ces disciplines, le football est sans aucun doute la plus populaire et la plus pratiquée, n'en déplaise à certains.

Le présent article fait donc référence au championnat belge de foot, mais est parfaitement applicable à toute autre discipline sportive pourvu qu'elle organise une championnat.

Quelques rappels à propos du championnat belge de foot :

⋆ Chaque club inscrit à l'« Union Belge de Football » participe à la compétition de sa division en rencontrant chacun des autres clubs inscrits dans cette même division. Les adversaires de chaque rencontre (match) ainsi que la date (la « journée ») de cette rencontre sont connus avant le début de la compétition. Enfin un club « visité » lors d'une journée par un club « visiteur » change (si possible) de rôle lors de la journée suivante où le visité devient le visiteur et vice-versa. C'est le principe de l'alternance hebdomadaire « visités-visiteurs ».

⋆ Actuellement la grosse majorité des divisions de foot en Belgique comporte un nombre pair de clubs : 18 équipes évoluent en divisions 1 et 2 tandis que 16 équipes composent la plupart des autres divisions. À la fin de cet article, nous envisagerons la cas d'une division composée d'un nombre impair d'équipes.

⋆ L'ensemble des « journées » d'un championnat constitue une « saison » de foot. Celle-ci se divise toujours en « deux tours » comportant chacun la moitié du nombre total des rencontres. Les rencontres du deuxième tour (matches-retour) sont les rencontres « réciproques » de celles du premier tour (matches-aller) et ont lieu exactement une demi-saison après celles du premier tour.

Après ces quelques précisions, abordons le vif du sujet. Deux problèmes essentiels se posent lorsqu'on veut organiser un championnat pour une division déterminée :

1. Déterminer les données de base, à savoir :
   - ◇ Le nombre d'équipes évoluant dans la division concernée. Nous le notons n et le supposons pour le moment PAIR et non nul. Chaque journée de championnat comporte donc $\frac{n}{2}$ rencontres.
   - ◇ Le nombre total de rencontres sur une saison. Nous le notons t et le calculerons ci-après en fonction de n. Du reste, il a déjà été calculé dans le « Math-Jeunes-Junior » n°91 (octobre 99).
   - ◇ Le nombre de journées composant la saison, nous le notons j et le calculerons également ci-après en fonction de n. Il y a donc $\frac{j}{2}$ journées de championnat à chaque tour. De plus, si le match $A - B$ (l'équipe A reçoit l'équipe B) a lieu lors de la p^{e} journée du

Math-Jeunes junior n°93 J,59–63, 2000

premier tour alors le match réciproque $B - A$ aura lieu lors de la $(p + \frac{j}{2})^{e}$ journée du second tour.

2. Établir le calendrier des rencontres du premier tour en observant AUTANT QUE FAIRE SE PEUT l'alternance « visités-visiteurs ». De plus, en vertu de ce qui a été dit ci-avant, le calendrier du deuxième tour est automatiquement établi à partir de celui du deuxième tour. Pour aider à établir ce calendrier, on utilise une GRILLE CARRÉE ou GRILLE $n \times n$. Celle-ci comporte n LIGNES (horizontales) et n COLONNES (verticales). L'exemple suivant fera comprendre son utilisation.

Voici une grille 4×4 utilisée pour une compétition à 4 équipes. Les nombres 1,2,3,4 bordant la grille au dessus et à gauche répertorient chacune des 4 équipes. Dans la case (2,3), on a inscrit le nombre 6. Comment faut-il interpréter ces renseignements ? Très simplement comme ceci :

	1	2	3	4
1				
2			6	
3				
4				

« L'équipe n°2 reçoit l'équipe n°3 lors de la 6^{e} journée ».

Les équipes répertoriées sur le bord vertical gauche sont donc toujours les « visités » , celles du bord horizontal du haut étant les « visiteurs ».

Question : pourquoi dans cette grille (comme dans toutes les autres d'ailleurs) noirçit-on les cases de la diagonale descendante ? La réponse saute aux yeux. Cela fait, chaque case libre correspond alors à un match unique à jouer à une date unique.

Imaginons à présent une grille $n \times n$. On suppose n pair et non nul. Une telle grille carrée comporte au départ n^2 cases. On noirçit les n cases de la diagonale descendante. Il reste donc $n^2 - n = n(n-1)$ cases libres. Or à chaque case libre correspond un match unique. Dès lors :

$$\boxed{t = n \times (n-1)}$$

Lors de chaque journée de championnat ont lieu $\frac{n}{2}$ rencontres. Le nombre j de journées nécessaires pour achever le championnat est donc tel que $j = \frac{t}{\frac{n}{2}} = n \times \frac{(n-1)}{\frac{n}{2}} = 2 \times (n-1)$

$$\boxed{j = 2 \times (n-1)}$$

CHAQUE TOUR COMPORTE DONC « $n - 1$ » JOURNÉES.

Il reste à faire le travail délicat du remplissage de la grille et, conséquemment, l'établissement du calendrier des rencontres. C'est un travail qui exige de la méthode et un certain sens de la symétrie. Examinons d'abord en détails le cas $n = 4$.

$$\boxed{n = 4} \text{ d'où : } \frac{n}{2} = 2,\ t = 4 \times 3 = 12,\ j = \frac{12}{2} = 6$$

La saison comporte donc 6 journées réparties sur deux tours de 3 journées chacun à raison de 2 rencontres par journée.

1. On commence par se donner une grille 4×4 dont on noirçit les cases de la diagonale descendante.

	1	2	3	4
1				
2				
3				
4				

2. On choisit les rencontres de la 1re journée : 1-2 et 3-4 par exemple. Les rencontres de la $(1+3) = 4^e$ journée sont dès lors fixées : $2-1$ et $4-3$. On pointe ces 4 rencontres dans la grille et on commence à élaborer le calendrier :

	1	2	3	4
1		1		
2	4			
3				1
4			4	

1er tour			2e tour		
1	2	3	4	5	6
1–2			2–1		
3–4			4–3		

3. On choisit les rencontres de la 2e journée en respectant le principe d'alternance évoqué plus haut. On les pointe dans la grille et on complète le calendrier :

	1	2	3	4
1		1		5
2	4		2	
3		5		1
4	2		4	

1er tour			2e tour		
1	2	3	4	5	6
1–2	2–3		2–1	3–2	
3–4	4–1		4–3	1–4	

4. Il reste à combler les 4 dernières cases vides avec les rencontres des 3e et 6e journées puis à finir le calendrier. On remarque qu'il n'est plus possible de respecter le principe d'alternance. Heureusement les bienfaits de la symétrie arrangent bien les choses : chaque équipe a été finalement trois fois visitée et trois fois visiteuse.

	1	2	3	4
1		1	3	5
2	4		2	3
3	6	5		1
4	2	6	4	

1er tour			2e tour		
1	2	3	4	5	6
1–2	2–3	1–3	2–1	3–2	3–1
3–4	4–1	2–4	4–3	1–4	4–2

Deux remarques intéressantes avant d'aborder le cas $n = 6$.

- Dans la grille complète (n°4), si on additionne les nombres entiers inscrits dans chaque ligne ou chaque colonne, on doit obtenir 9 ou 12 pour somme.

- Le calendrier finalement établi ci-dessus l'est pour des clubs anonymes dénommés 1, 2, 3, 4. Si on personnalise chacun de ces clubs, ce qu'on peut faire de $4! = 24$ façons ([1]) différentes, on constate qu'on a en fait établi 24 calendriers en une seule opération. La méthode précédente n'est-elle pas rentable ?

Pour compléter le travail, il faut encore préciser la date exacte de chacune des six journées de championnat.

$$\boxed{n = 6} \text{ d'où } \tfrac{n}{2} = 3\,;\; t = 6 \times 5 = 30\,;\; j = \tfrac{30}{3} = 10$$

La saison comporte donc 10 journées réparties en deux tours de 5 journées chacun et à raison de 3 rencontres par journée.

([1]) $4! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 = 24$ (*factorielle de 4*). Voir le professeur de mathématiques pour plus d'explications.

Voici la grille 6×6 construite méthodiquement à l'instar du cas précédent et le calendrier final. On remarquera ici aussi que le principe d'alternance est rompu dès la 3^e^ journée : le club n°4 est visité et le club n°5 est visiteur deux fois de suite lors des 2^e^ et 3^e^ journées. L'équilibre sera cette fois encore rétabli grâce à la symétrie des rencontres du second tour. Deux remarques s'imposent enfin comme au cas précédent :

- Si on additionne les entiers inscrits dans chaque ligne ou chaque colonne de la grille 6×6, on obtient une somme égale soit à 25, soit à 30.

- La grille 6×6 génère $6! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 = 720$ calendriers personnalisés.

Généralisons les deux remarques précédentes : il n'est pas trop difficile de démontrer que si n est un naturel pair et non nul alors la somme d'une ligne ou d'une colonne quelconque de la grille $n \times n$ est égale soit à $(n-1)^2$ soit à $n \times (n-1)$. Nous proposons cette démonstration à ta sagacité, cher lecteur !

D'autre part une grille $n \times n$ génère évidemment $n!$ calendriers personnalisés.

	1	2	3	4	5	6
1		1	9	10	3	7
2	6		2	8	9	5
3	4	7		1	10	3
4	5	3	6		2	9
5	8	4	5	7		1
6	2	10	8	4	6	

1^er^ tour					2^e^ tour				
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1–2	2–3	3–6	3–1	5–3	2–1	3–2	6–3	1–3	3–5
3–4	4–5	4–2	6–4	4–1	4–3	5–4	2–4	4–6	1–4
5–6	6–1	1–5	5–2	2–6	6–5	1–6	5–1	2–5	6–2

$\boxed{n = 16}$ d'où $\frac{n}{2} = 8$; $t = 15 \times 16 = 240$; $j = \frac{240}{8} = 30$

Voici une grille 16×16 qui pourrait être d'application pour la grosse majorité des divisions de foot en Belgique. Le lecteur patient en tirera le calendrier des rencontres que l'auteur de cet article tient d'ailleurs à sa disposition mais qui, vu sa longueur, ne pouvait décemment pas être imprimé dans ce *Math-Jeunes junior*.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
1		1	8	3	27	5	24	7	13	29	10	21	15	19	26	17
2	16		2	8	4	27	6	24	29	15	22	10	20	13	18	26
3	23	17		1	11	3	27	5	25	7	15	29	9	21	13	19
4	18	23	16		2	11	4	12	6	25	14	28	22	9	20	15
5	12	19	26	17		1	8	3	15	5	24	7	28	29	10	21
6	20	12	18	26	16		2	8	4	28	6	24	14	15	22	10
7	9	21	12	19	23	17		1	11	3	28	5	25	7	15	29
8	22	9	20	27	18	23	16		2	11	4	15	6	25	29	13
9	28	14	10	21	30	19	26	17		1	8	3	12	5	24	7
10	14	30	22	10	20	13	18	26	16		2	8	4	27	6	24
11	25	7	30	29	9	21	13	19	23	17		1	11	3	27	5
12	6	25	14	13	22	9	20	30	18	23	16		2	11	4	27
13	30	5	24	7	13	29	10	21	27	19	26	17		1	8	3
14	4	28	6	24	14	30	22	10	20	12	18	26	16		2	8
15	11	3	28	5	25	7	30	14	9	21	12	19	23	17		1
16	2	11	4	30	6	25	14	28	22	9	20	12	18	23	16	

Test de vérification d'une grille $n \times n$ lorsque n est PAIR.

Si une telle grille a été correctement construite, on doit pouvoir faire le test suivant :

> Les nombres naturels 1, 2, 3, ..., $2(n-1)$ sont inscrits au moins et au plus une fois dans les cases de la ligne et de la colonne qui se croisent en l'une quelconques des cases noircies.

Ce test peut utilement être fait sur les grilles précédentes pour lesquelles $n = 4$ ou $n = 6$ ou $n = 16$. Ce test inspirera peut-être le lecteur qui désire démontrer que la somme des naturels inscrits dans une ligne ou une colonne quelconque vaut toujours $(n-1)^2$ ou $n(n-1)$ si n est pair.

Terminons avec le cas où n est un naturel IMPAIR et différent de 1. Dès lors $n-1$ est un naturel pair au moins égal à 2. On établit le calendrier pour $n-1$ équipes de la division, laissant à tour de rôle une équipe AU REPOS à chaque tour.

Que deviennent les formules de base dans le cas où n est impair ?

- Le nombre de rencontres par journée est $\frac{(n-1)}{2}$
- La grille $n \times n$ comporte toujours n^2 cases au total et si on lui enlève les n cases de la diagonale descendante , il reste cette fois encore $n^2 - n = n(n-1)$ cases libres.

D'où :

$$\boxed{t = n(n-1)}$$

- Le nombre de journées de championnat est donc $\dfrac{\frac{t}{n-1}}{2} = 2n$

> $j = 2n$
> Chaque tour comporte donc n journées.

$$\boxed{n = 5} \text{ d'où } \frac{(n-1)}{2} = 2\,;\ t = 5 \times 4 = 20\,;\ j = 2 \times 5 = 10$$

La saison comporte donc 10 journées réparties sur 2 tours de 5 journées chacun et à raison de 2 rencontres par journées, une des 5 équipes restant au repos.

	1	2	3	4	5
1		1	4	8	7
2	6		2	10	3
3	9	7		1	5
4	3	5	6		9
5	2	8	10	4	

	1er tour					2e tour				
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	1–2	2–3	4–1	1–3	4–2	2–1	3–2	1–4	3–1	2–4
	3–4	5–1	2–5	5–4	3–5	4–3	1–5	5–2	4–5	5–3
Repos	5	4	3	2	1	5	4	3	2	1

Il est à remarquer cette fois que le test de vérification énoncé précédemment pour n pair ne s'applique que partiellement quand n est impair. Dès lors les formules donnant la somme des éléments d'une ligne ou d'une colonne ne sont plus applicables. Mais peut-être y a-t-il d'autres formules à découvrir ! Nous vous laissons ce plaisir cher lecteur.

Rallye problèmes

C. Festraets

Voici les cinq derniers problèmes de ce rallye. N'oubliez pas de présenter vos solutions sur des feuilles séparées pour chaque problème et d'y indiquer vos nom, prénom, âge, classe, école et adresse personnelle. Soignez votre présentation. Bon courage ! Vos solutions doivent parvenir à C. Festraets, 36, rue J.B. Vandercammen, 1160 Bruxelles, pour le 20 mai 2000 au plus tard.

11 — La Bible

La bible comprend 66 livres, ceux de l'ancien et ceux du nouveau testament. L'ancien testament comporte x livres, x est un nombre de deux chiffres qui, multipliés, donnent un nouveau nombre y et y est le nombre de livres du nouveau testament. Que valent x et y ?

12 — Cinq chaises

Cinq chaises sont numérotées 1, 2, 3, 4, 5 et placées dans cet ordre sur une rangée. Au départ, vous êtes assis sur la chaise 1. Le déplacement consiste à vous lever et à vous asseoir sur une des chaises voisines. Vous faites 25 déplacements, sur quelle chaise êtes vous assis ? Enlevez les chaises 1 et 5. Pouvez-vous reprendre votre place ? Si oui, faites 75 déplacements supplémentaires. Sur quelle chaise êtes vous maintenant assis ?

13 — Les bougies

1. Jean a acheté 5 longues bougies. Il en fait brûler certaines chaque jour pendant une heure. Le premier jour, il fait brûler une seule bougie, le deuxième jour, il fait brûler deux bougies (bien choisies), le troisième jour, trois bougies (bien choisies), le quatrième jour, quatre bougies (bien choisies) et le cinquième jour, les cinq bougies. Est-il possible que les cinq bougies soient alors consumées exactement de la même manière ?
2. Et si Jean avait 6 bougies ?
3. Et si Jean avait n bougies ?

14 — Des triples pythagoriciens

Un triple de nombres naturels (a, b, c) est dit « pythagoricien » s'il satisfait l'équation $a^2 + b^2 = c^2$; si de plus a, b, c sont premiers entre eux, alors on dit que le triple est primitif.

1. Quels sont les triples pythagoriciens primitifs dont le premier élément est 15 ?
2. Combien y a-t-il de triples pythagoriciens primitifs dont le premier élément est 1 155 ?
3. N étant un nombre naturel impair admettant k diviseurs premiers, combien y a-t-il de triples pythagoriciens primitifs commençant par N ?

Math-Jeunes junior n°93 J,64–66, 2000

15 — Trois cercles

Soit O le centre d'un carré $ABCD$ et P un point quelconque à l'intérieur du carré. Le cercle circonscrit au triangle PAB coupe le cercle circonscrit au triangle PCD en P et en Q. Le cercle circonscrit au triangle PAD coupe le cercle circonscrit au triangle PBC en P et R. Démontrer que $|QR| = 2 \cdot |OP|$.

Solutions des problèmes 6 à 10

Solution du problème 6

- $A+B+C = 18$ et $A = 3$, d'où $B+C = 15$
- $B+C+D = 18$ et $B+C = 15$, d'où $D = 3$
- $C+D+E = 18$ et $D = 3$, d'où $C+E = 15$
- $D+E+F = 18$, $D = 3$ et $F = 8$, d'où $E = 7$
- $C+E = 15$ et $E = 7$, d'où $C = 8$
- $B+C = 15$ et $C = 8$, d'où $B = 7$
- $E+F+G = 18$, $E = 7$ et $F = 8$, d'où $G = 3$
- $F+G+H = 18$, $F = 8$ et $G = 3$, d'où $H = 7$
- $G+H+I = 18$, $G = 3$ et $H = 7$, d'où $I = 8$

Ce qui donne le tableau

3	7	8	3	7	8	3	7	8

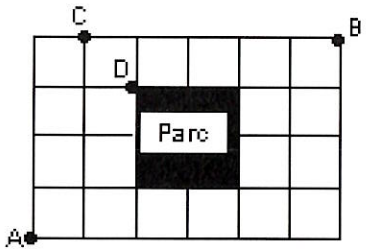
Solution du problème 7

Désignons par a, b, c les âges des trois malades, le produit abc vaut $2\,450 = 2 \cdot 5^2 \cdot 7^2$. En supposant qu'aucun malade ne soit âgé de plus de 150 ans, le tableau ci-dessous nous donne toutes les décompositions de 2 450 en un produit de trois facteurs a, b, c, la dernière ligne d étant la demi-somme de ces trois nombres, c'est-à-dire l'âge de l'infirmière.

a	1	1	1	2	5	5	5	5	7	7	7
b	25	49	35	25	5	7	10	14	7	10	14
c	98	50	70	49	98	70	49	35	50	35	25
d	62	50	53	38	54	41	32	27	32	26	23

Si l'infirmière ne peut pas donner l'âge des trois malades, c'est parce qu'elle hésite entre deux solutions possibles, elle a donc 32 ans et les âges des malades sont soit 5, 10 et 49, soit 7, 7 et 50. Lorsque le médecin ajoute « *je suis plus âgé que le plus âgé des trois malades* », elle n'hésite plus. C'est donc que le médecin a 50 ans (s'il en avait 51 ou plus, elle continuerait à hésiter entre les deux solutions), il est plus âgé que le plus âgé des malades qui a 49 ans, les autres ayant 10 et 5 ans.

Solution du problème 8



Tous les trajets de A vers B qui passent au-dessus du parc passent soit par C, soit par D (et aucun trajet ne passe par ces deux points). Il y a 5 façons d'aller de A à C, et de là, une seule route pour rejoindre B, donc 5 routes de A à B passant par C. Il y a 10 façons d'aller de A à D, et de là, 5 routes pour rejoindre B, donc 50 routes de A à B passant par D. Ce qui nous donne 55 trajets passant au-dessus du parc. Etant donné la symétrie de la figure, il y a le même nombre de trajets qui passent en dessous du parc. D'où le nombre total de trajets est 110.

Solution du problème 9

Sur une journée de 24 heures, les deux aiguilles d'une horloge forment un angle droit à 44 reprises. Cela se produit aux heures (approximatives) suivantes :

0h16, 0h49 1h22, 1h55, 2h27, 3h, 3h33, 4h05, 4h38, 5h11, 5h44, 6h16, 6h49, 7h22, 7h55, 8h27, 9h, 9h33, 10h05, 10h38, 11h11, 11h44, 12h16, 12h49, 13h22, 13h55, 14h27, 15h, 15h33, 16h05, 16h38, 17h11, 17h44, 18h16, 18h49, 19h22, 19h55, 20h27, 21h, 21h33, 22h05, 22h38, 23h11, 23h44.

Le bon sens suffit pour déterminer ces différentes heures, tout au moins à quelques minutes près. Mais si on désire une précision plus grande, voici comment procéder.

Fixons l'origine du temps à minuit. En 1 heure, la grande aiguille tourne de 360° et la petite aiguille de $360^\circ/12 = 30^\circ$. En t heures, elles tournent respectivement de $t \cdot 360^\circ$ et $t \cdot 30^\circ$ et leur angle est, au bout de t heures, égal à $t \cdot 360^\circ - t \cdot 30^\circ = t \cdot 330^\circ$. Si les deux aiguilles forment alors un angle droit, on a soit $t \cdot 330^\circ = 90^\circ + k \cdot 360^\circ$, soit $t \cdot 330^\circ = 270^\circ + k \cdot 360^\circ$ (où k est un nombre entier). D'où les valeurs de t :

$$t = \frac{3}{11} + \frac{12}{11}k \qquad \text{ou} \qquad t = \frac{9}{11} + \frac{12}{11}k$$

On remplace k dans ces égalités par 0, 1, 2, ... , 21 (à partir de 22, t est plus grand que 24 et on dépasse les limites d'un journée) et on obtient les 44 valeurs :

$$t = \frac{3}{11}, \frac{9}{11}, \frac{15}{11}, \cdots, \frac{361}{11}$$

Solution du problème 10

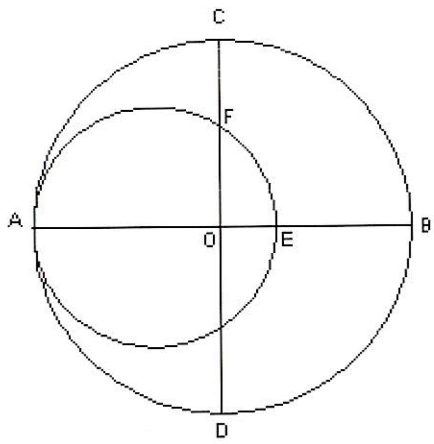
Soit R le rayon du grand cercle.

Dans le triangle rectangle AOF :

$$\begin{aligned} |OF|^2 + |OA|^2 &= |AF|^2 \\ (R-5)^2 + R^2 &= |AF|^2 \\ 2R^2 - 10R + 25 &= |AF|^2 \quad (1) \end{aligned}$$

Dans le triangle rectangle EOF :

$$\begin{aligned} |OF|^2 + |OE|^2 &= |EF|^2 \\ (R-5)^2 + (R-9)^2 &= |EF|^2 \\ 2R^2 - 28R + 106 &= |EF|^2 \quad (2) \end{aligned}$$



Additionnons les égalités (1) et (2) et remarquons que, dans le triangle rectangle AFE, $|AF|^2 + |EF|^2 = |AE|^2$. On obtient

$$\begin{aligned} 4R^2 - 38R + 131 = |AE|^2 &= (2R-9)^2 \\ &= 4R^2 - 36R + 81 \end{aligned}$$

d'où $R = 25$ et le rayon du petit cercle est $\dfrac{25-9}{2} = 8$.

La mathématique au quotidien ...

Claude Villers, *Athénée Royal de Mons*

Cycle, Cyclo, Cycloïde

Nul n'ignore ce qu'est un vélo !

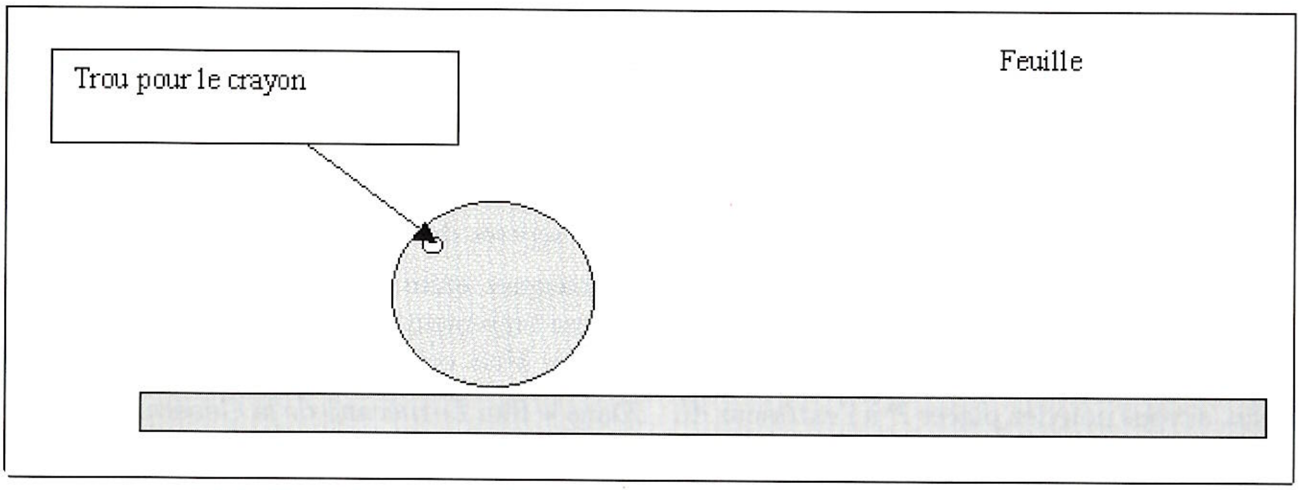
Vous savez que c'est un moyen de déplacement particulièrement écologique.

Vous savez aussi qu'il est important que le vélo utilisé soit en bon état et, notamment, muni des catadioptres de roues qui le rendent visible lorsqu'il fait sombre. C'est une question de sécurité pour l'usager faible que constitue le cycliste !

Ces accessoires de sécurité que sont les catadioptres de roues sont très efficaces. Dans les faisceaux des phares de voiture, ils ne passent pas inaperçus. Mais à propos ... avez-vous une idée de ce qu'est la courbe que décrit un tel point réfléchissant lorsque le vélo roule sur une route rectiligne ? Non ..., ce n'est pas un cercle.

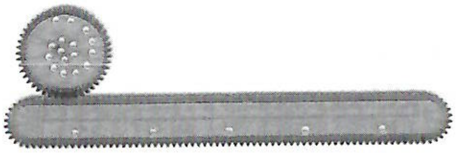
Si la roue est effectivement animée d'un mouvement circulaire, il faut cependant tenir compte du fait que le vélo se déplace.

Vous pouvez vous faire facilement une idée de l'allure de la courbe décrite par un point d'un rayon d'un cercle qui roule sans glissement, sur une droite. Il vous suffit de percer un trou dans un couvercle de boite cylindrique, d'y insérer un crayon et de faire rouler ce couvercle sur une règle en le maintenant en contact avec une feuille de papier. Un peu de soin et voilà la courbe qui apparaît à vos yeux, sans aucun doute émerveillés ! !



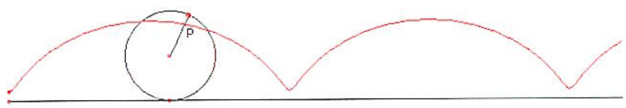
Math-Jeunes junior n°93 J,67–70, 2000

Ce tracé vous sera facilité si vous disposez du jeu bien connu appelé spirographe.

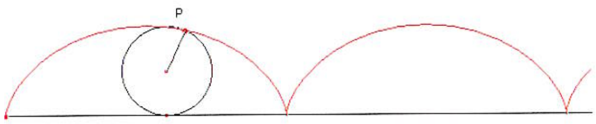


Il est également possible de réaliser ce tracé à l'aide d'un ordinateur si vous disposez d'un logiciel de géométrie du type Cabri-géomètre.

Voici un tel tracé pour un cercle ayant effectué un peu plus de deux tours. P a parcouru une courbe dite **cycloïdale**.



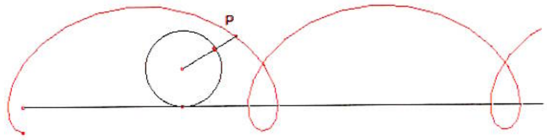
Si vous avez choisi de placer P sur le cercle même, alors la courbe prend l'allure que voici et s'appelle **une cycloïde**.



Et si vous avez placé le point P au centre du cercle alors la courbe cycloïdale est une droite.

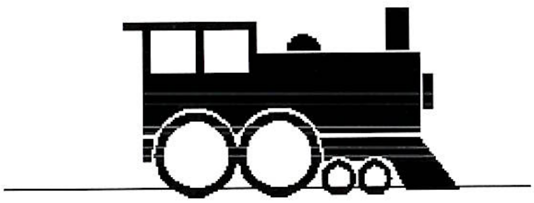
Ce cas limite ne présente guère d'intérêt.

Enfin, si vous pouviez placer P à l'extérieur du cercle (sur le prolongement d'un rayon) alors vous obtiendriez une courbe cycloïdale comme celle que voici.



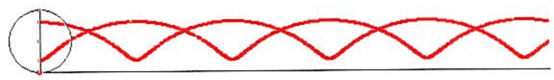
Vous pouvez remarquer que dans ce cas, le point P est, à certains moments, amené à reculer alors que le cercle continue à avancer.

C'est le cas pour les roues des wagons de chemin de fer. Les points situés sur les flasques des roues, plus bas que le niveau supérieur du rail, reculent à certains moments alors que le train, lui, avance.



Mais qui vous croira quand vous affirmerez que sur un train qui avance, il y a des points qui reculent ? ? ?

Comme vous pouvez le distinguer sur l'image du vélo, il y a deux catadioptres sur chaque roue. Chacun d'eux décrit une courbe cycloïdale ce qui fournit le dessin que voici.

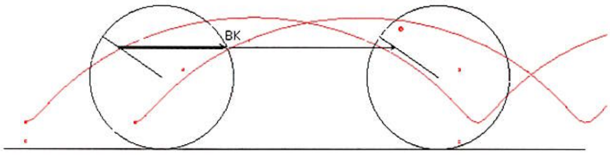


En fait chaque courbe (prolongée) est l'image de l'autre par une **translation** dont l'amplitude est, entre autres, égale à un demi-tour de roue.

Et puis, il y a deux roues. Je vous laisse le soin de trouver ce que peut donner la combinaison des courbes cycloïdales décrites par les quatre catadioptres du vélo.

Remarquez enfin que tout ceci se complique encore bigrement quand la route n'est pas rectiligne. Mais cela, c'est e histoire.

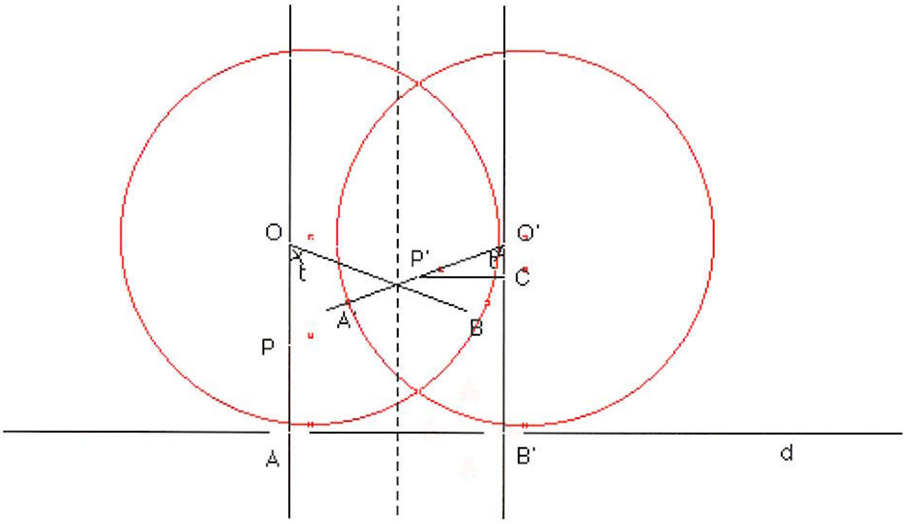
Dans le film *Le mécano de la Générale*, l'acteur Buster Keaton est assis sur la bielle qui relie deux roues identiques d'une locomotive. Celle-ci se met en mouvement et l'acteur décrit alors une courbe. Cette courbe est une translatée de la courbe décrite par le point d'attache de la bielle à l'une des roues. C'est donc une courbe cycloïdale.



Note mathématique

Considérons un point A d'un cercle (de centre O et dont le rayon est considéré comme valant 1) roulant sans glisser sur une droite. Après un tour complet, le cercle a été en contact avec cette droite sur une longueur $2\pi \times 1 = 2\pi$, puis tout recommence.

Soit P un point de $[OA$ et désignons $|OP|$ par $\ell > 0$. Soit B' un point de la droite d où le cercle est en contact après un certain déplacement.



On a donc : $|(AB)| = |(A'B')| = |AB'| = 2\pi \times \frac{t}{2\pi} = t$ (t est la mesure en radians de l'angle $\widehat{AOB}$). Si la droite AB' est considérée comme axe des X et la droite AO comme axe des Y alors nous devons exprimer la coordonnée (x, y) du point mobile P (arrivé en P') **en fonction du paramètre** t.

On a : $x = |AB'| - |P'C| = t - \ell \cdot \sin(t)$ et $y = |O'B'| - |O'C| = 1 - \ell \cdot \cos(t)$

ou encore :

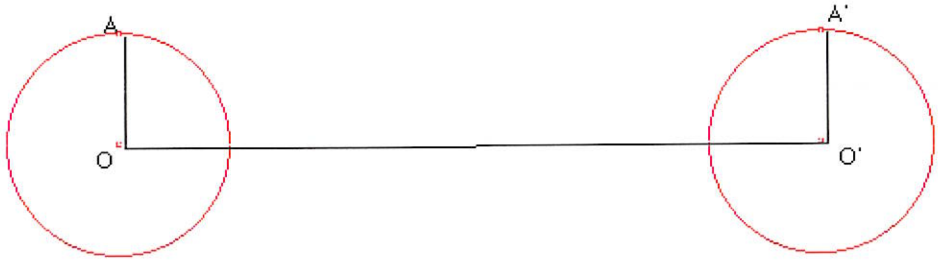
$$\begin{cases} x = t - \ell \sin(t) \\ y = 1 - \ell \cos(t) \end{cases}$$

Par exemple : si $t = 0$ alors $x = 0$ et $y = 1 - \ell$
si $t = \frac{\pi}{2}$ alors $x = \frac{\pi}{2} - \ell$ et $y = 1$
si $t = \pi$ alors $x = \pi$ et $y = 1 + \ell$
si $t = \frac{3\pi}{2}$ alors $x = \frac{3\pi}{2} + \ell$ et $y = 1$
si $t = 2\pi$ alors $x = 2\pi$ et $y = 1 - \ell$

Note historique

La cycloïde, dite aussi *la belle Hélène de la mathématique*, a suscité de nombreuses controverses chez les mathématiciens de diverses écoles.

ARISTOTE (384–322 avant J.C.) a traité du paradoxe de la roue. Quand celle-ci fait un tour complet, O vient en O' et la distance parcourue par O est $2\pi r$. A vient en A' mais la distance parcourue par A n'est pas $2\pi r$. En fait, des outils mathématiques permettent de montrer que c'est $8r$.



Le premier mathématicien qui traite de ce sujet semble être Charles DE BOUVELLES (1470–1553). John WALLIS (1616–1703) attribue la définition, vers 1450, de la cycloïde à Nicolas DI CUSA (1401–1464). De grands mathématiciens s'y sont intéressés. Citons : les BERNOULLI, BESSEL, EULER, FERMAT, GALILÉE, HUYGENS, LAGRANGE, LEIBNIZ, MERSENNE, NEWTON, PASCAL, ROBERVAL, TORRICELLI, WALLIS, ... et vous !

Cette notion de cycloïde et ses variantes ont encore beaucoup d'applications pratiques (en horlogerie, dans le domaine des engrenages par exemple). Mais, restons-en là !

Allez plutôt faire un petit tour en bicyclette ... après avoir contrôlé l'état de ses catadioptres.

Solutions des jeux

Jeu d'argent

Voici une solution en 5 opérations

F	F	F	F	F	P	P	P	P	P		
F			F	F	P	P	P	P	P	F	F
F	P	P	F	F	P	P			P	F	F
F	P	P	F			P	F	P	P	F	F
F	P	P	F	P	F	P	F	P			F
		P	F	P	F	P	F	P	F	P	F

Peut-être en avez-vous trouvé (au moins) une autre.

Le coin du bon langage

Les écritures correctes sont : 1-B, 2-B, 3-A, 4-A, 5-B, 6-B, 7-A, 8-A, 9-B, 10-B

Un problème familial

Cette famille comporte 3 filles et 4 garçons soit un total de 7 enfants.

Le mot caché

Le mot à retrouver était PROBABILITE.

Nadine Joelants, Athénée Royal de Mons I, Université de Mons-Hainaut

Vous avez dit « .be » ?

Eh oui, hissez les drapeaux tricolores, nous allons parler d'un site belge !

Rendez-vous à l'adresse suivante :

`http ://www.bib.ulb.ac.be/coursmath/`

Xavier HUBAUT, le concepteur, est professeur à l'Université Libre de Bruxelles et, si l'on en croit sa dédicace en début de site, père d'une famille nombreuse. C'est dire s'il a à cœur de donner le goût des mathématiques aux jeunes. Le titre du site est d'ailleurs évocateur : « Mathématique du secondaire ».

Pour la présentation, la sobriété est de rigueur, l'accent étant plutôt mis sur des articulations simples et efficaces. La table des matières ne dépaysera personne, elle se calque sur celle du célèbre explorateur conçu par les collaborateurs de ce bon vieux Bill, je veux parler de l'explorateur Windows.

Voici le menu principal :

Table des matières

- Introduction
- Note technique
- ⊞ Mathématique linéaire
- ⊞ Second degré
- ⊞ Complexes
- ⊞ Polyèdres
- ⊞ Analyse
- ⊞ Statistique
- ⊞ Varia
- ⊞ Applications
- ⊞ Vie courante
- ⊞ En 3 dimensions
- Biographies
- ⊞ Sites extérieurs
- Citations
- A domicile
- Envoyez-nous vos suggestions

© Xavier Hubaut 1995-2000

Voici le détail du sous-menu « Polyèdres » :

Polyèdres

- Polyèdres réguliers
- Polyèdres archimédiens
- "Snub" polyèdres
- Kaléidoscope plan
- Kaléidoscope sphérique
- Pavages réguliers du plan
- Pavages de la sphère
- M.C. Escher
- Polyèdres coordonnés

Retour à la table des matières

Envoyez-nous vos suggestions

© Xavier Hubaut 1995-2000

Math-Jeunes junior n°93 J,71–72, 2000

Les items précédés d'une case « + » donnent lieu à un sous-menu et en cliquant sur le nom de l'item, on obtient une description sommaire du chapitre concerné.

Quant au contenu, il y en a pour tous les goûts, des thèmes académiques aux variations exotiques. Xavier HUBAUT nous donne de précieux conseils culinaires, très justifiés puisque démontrés et s'attarde quelque peu sur le lancement du poids. Très cohérent tout cela ! Musique, art, cartographie, photographie, ... voisinent avec les chapitres les plus classiques des programmes scolaires dans la plus parfaite harmonie, de quoi meubler agréablement et « instructivement » (tiens, c'est français ça ?) tes heures d'étude dans les locaux du Centre Cybermédia de ton école.

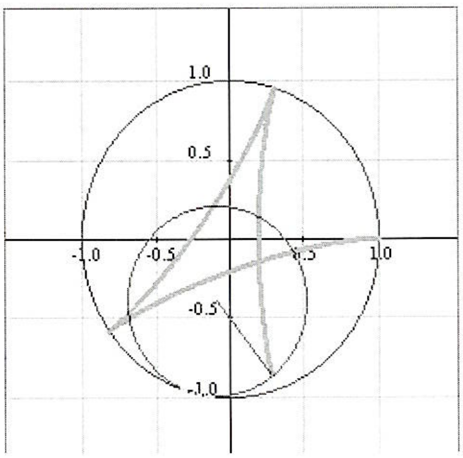
Encore un pour la route

Rendez-vous à l'adresse suivante :

`http ://www.saliege.com/dynamique/projet/cbparam/arcparam.html`

Une page bien agréable pour les nostalgiques du spirographe.

Tu te souviens sans doute de ce jeu. C'est une histoire de roues qui tournent et de courbes qui se tracent. Je sais, le plus difficile, c'est de ne pas déraper. Enfin bref, un dessin réalisé au spirographe, c'est un lieu géométrique. Le lieu décrit par la pointe du bic lorsque la roue tourne à l'intérieur ou à l'extérieur d'un cercle ou autour d'une figure plane de type polygone. Mais plus tu compliques et plus tu as de chances de déraper.



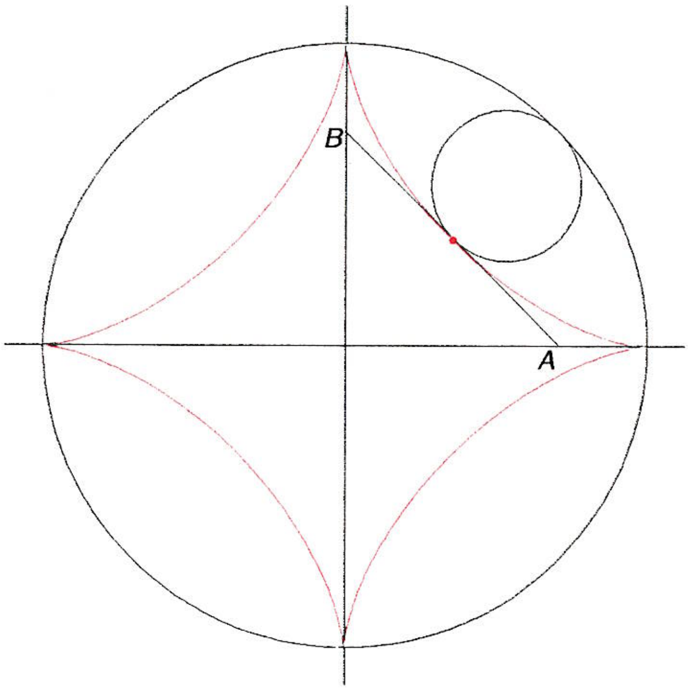
Sur ce site, pas de problème de soin. Tu trouveras une dizaine de lieux géométriques qui se construisent sous tes yeux, sans bavure ni dérapage, avec en prime le code du programme qui sert à les engendrer.

Amuse-toi bien et n'oublie pas de consulter aussi le site de la SBPMef (la Société Belge des Professeurs de Mathématique d'expression française, qui édite la présente revue). Tu y trouveras d'autres liens vers des sites mathématiques intéressants.

D'accord, certains sont en anglais mais il n'y a pas que les maths dans la vie et puis ... il faut bien que les cours de langues soient utiles ! ! !

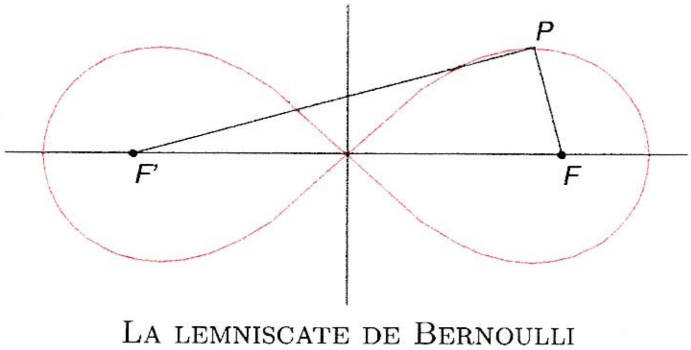
`http ://ceco.umh.ac.be/noel/sbpm/sbpm.htm`

Dans ce numéro, tu as pu lire une petite note concernant Daniel BERNOULLI. Voici deux courbes parmi celles que la famille BERNOULLI a étudiées.



L'ASTROÏDE

L'astroïde est générée par un point d'un cercle qui roule sans glisser à l'intérieur d'un cercle fixe de rayon quatre fois plus grand. Le segment AB de longueur égale au rayon du grand cercle et dont les extrémités appartiennent aux deux axes de symétrie de la courbe, est tangent à l'astroïde.



LA LEMNISCATE DE BERNOULLI

C'est l'ensemble des points P tels que $|PF| \times |PF'|$ est une constante, F et F' étant des points fixes.

Math-Jeunes
Périodique trimestriel
15, rue de la Halle – 7000 Mons
Bureau de dépôt 7000 Mons 1

Responsable de l'édition: C. VAN HOOSTE
Chemin de Marbisœul 25 – 6120 Marbaix-la-Tour

Autorisation de fermeture
Sluitings toelating

7000 Mons 1
5/156

Belgique - België
P.P.
7000 Mons 1
5/124

Périodique - Peut être ouvert pour contrôle postal

Réservé à la poste

Inconnu
Refusé
Décédé
Adresse insuffisante
N'habite plus à l'adresse indiquée