22e année
Janvier 2001 – N° 96J
Bureau de dépôt : Mons 1

Math-Jeunes

Revue trimestrielle publiée par la Société Belge des Professeurs de Mathématique d'expression française

Math-Jeunes

Rédaction, administration : Bld. de l'Europe 36/1, 1420 Braine-l'Alleud.

Comité de Rédaction : M. Ballieu, J.-P. Cazzaro, C. Festraets, M.-F. Guissard, J. Miéwis, G. Noël, F. Pourbaix, G. Sinon, S. Trompler, C. Van Hooste, C. Villers

Math-Jeunes junior

Rédaction, administration : Rue du Moulin 78, 7300 Boussu.

Comité de Rédaction : C. Festraets, G. Laloux, R. Midavaine, G. Noël, A. Paternottre, F. Pourbaix, N. Van den Abeele, C. Vandercammen, C. Van Hooste, C. Villers

Illustrations : F. Pourbaix

Le courrier et les projets d'articles doivent être envoyés aux rédactions respectives.

Abonnements : sauf mention contraire, les prix sont indiqués en EUROS

	Belgique	Union Européenne	Europe hors Union	Hors Europe prioritaire	Hors Europe non priorit.
Abonnement isolé	(*) 4 numéros (**) 7 numéros				
Math-Jeunes junior ou *Math-Jeunes*(*)	200 BEF ou 4.96	9.2	10.2	20.4	11.4
Les deux revues (**)	350 BEF ou 8.68	16.5	17.17	35.6	20
Abonnements groupés (au moins 5)	(*) 4 numéros (**) 7 numéros				
Math-Jeunes junior ou *Math-Jeunes*(*)	150 BEF ou 3.72	6	7.6	15.2	8.6
Les deux revues (**)	265 BEF ou 6.57	10.6	13.4	26.6	15.1

Pour connaître la liste des anciens numéros encore disponibles et le prix de ceux-ci selon votre région, adressez-vous à la S.B.P.M.e.f., rue de la Halle 15, 7000 Mons

Tél. 32-(0)65-373729

Les abonnements destinés aux élèves de l'enseignement secondaire sont de préférence pris par l'intermédiaire d'un professeur. Effectuez vos paiements :

- pour la Belgique : par virement au Compte n° 001-0828109-96 de *Math-Jeunes*, rue de la Halle 15, 7000 Mons
- pour la France : par virement au Compte CCP Lille 10 036 48 S
- pour l'étranger (sauf la France) : par virement international au Compte n° 000-0728014-29 de la *S.B.P.M.e.f.*, rue de la Halle 15, B 7000 Mons, Belgique. Il est vivement conseillé aux étrangers qui ne peuvent faire un virement de C.C.P. à C.C.P. de nous envoyer un mandat postal international. En principe, seuls les chèques encaissables dans une banque belge sont acceptés (tout chèque bancaire non encaissable en Belgique devra être majoré de 200 BEF pour frais d'encaissement.)

Éditeurs responsables :

- pour *Math-Jeunes* : M. Ballieu, Bld. de l'Europe 36/1, 1420 Braine-l'Alleud
- pour *Math-Jeunes junior* : A. Paternottre, Rue du Moulin 78, 7300 Boussu

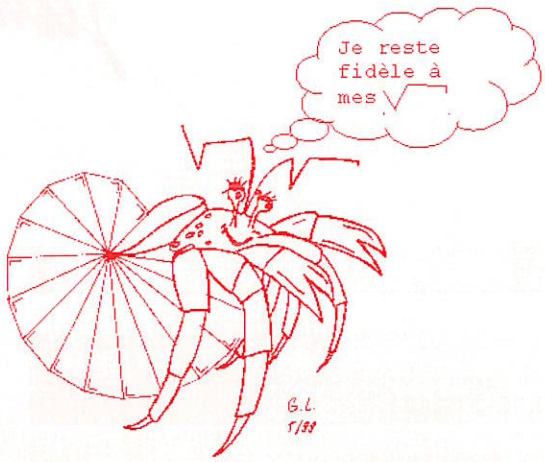
N ° 96 J Vingt-deuxième année 2000

Math-Jeunes junior

Bernard l'ermite radical

G. Laloux, *Institut Sainte-Marie, Rêves*

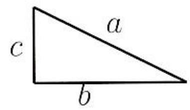
Commençons par un peu de culture zoologique ! Bernard-l'ermite est le nom usuel du pagure (du grec pagouros qui signifie « qui a la queue en corne »). Il s'agit en fait d'un crustacé très commun sur les côtes de l'Europe occidentale et qui protège son abdomen mou dans une coquille qu'il a taxée à un gastropode imprudent. Si je vous raconte cela, c'est parce qu'en passant mes vacances à la côte j'ai vu une chose étrange :



J'ai trouvé une coquille
un peu spéciale
car elle est plutôt
radicale.
Et c'est assez rare
pour un bernard-
... l'ermite.

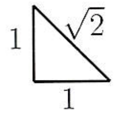
La coquille de notre ami est engendrée grâce au théorème de Pythagore.

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 \\ a &= \sqrt{b^2 + c^2} \end{aligned}$$

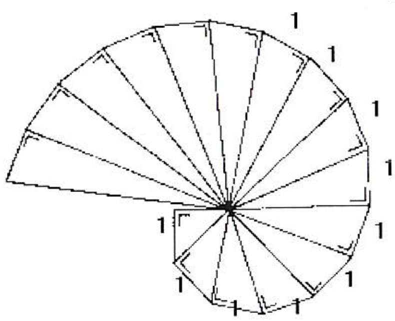


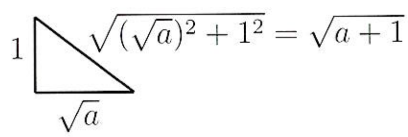
On part d'un triangle rectangle isocèle dont les côtés de l'angle droit mesurent 1 unité Et donc, la mesure de l'hypoténuse est :

$$\sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$



On voit bien comment sont construits les triangles rectangles qui constituent la coquille. On repart de l'hypoténuse précédente avec un côté perpendiculaire de 1 unité. Les hypoténuses obtenues mesurent donc successivement : $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{4}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$, $\sqrt{7}$, $\sqrt{8}$, ...





Math-Jeunes junior n°96 J,2–3, 2000

En observant la représentation finale de la coquille de « l'ami Bernard » on constate qu'elle est formée de 16 triangles rectangles. Mais en est-il toujours ainsi ? Quel est certainement le nombre maximum de triangles que l'on peut ainsi dessiner avant qu'il y ait **recouvrement** ?

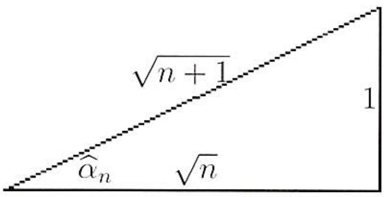
Effectuons un petit zoom de façon à y voir plus clair (zoom = agrandissement → il n'y a donc pas de modification des amplitudes des angles ni des rapports de longueur).

La question peut également s'énoncer comme suit : *Combien d'angles $\widehat{\alpha_n}$ la spirale peut-elle comporter pour que la somme des $\widehat{\alpha_n}$ soit la plus proche possible de 360° tout en restant inférieure à 360° ?* Pour répondre à cette question, nous pouvons utiliser les nombres trigonométriques des angles aigus d'un triangle rectangle et en particulier, **la tangente d'un angle aigu**.

> Pour rappel ou pour information, **la tangente d'un angle aigu d'un triangle rectangle est égale au rapport entre le côté opposé et le côté adjacent à cet angle.**

↪ Pour chaque triangle de la coquille, on a :

$$\tan \widehat{\alpha_n} = \frac{1}{\sqrt{n}}$$



Connaissant la tangente de l'angle, on peut calculer cet angle. Le tableau ci-dessous reprend les valeurs des angles successifs et les amplitudes cumulées.

A titre informatif, voici la méthode de calcul de la calculatrice (pour une « Casio College New + »). La fonction qui renvoie la valeur d'un angle lorsqu'on connaît sa tangente est « *arctangente* » ; elle est symbolisée par `Atn` (sur d'autres machines on trouve aussi $\tan^{-1}$).

$\tan \widehat{\alpha_2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ → calcul de $\widehat{\alpha_2}$:
`[second] [Atn]` (1 $\boxed{\div}$ $\boxed{\sqrt{}}$ 2) `[EXE]` → 35.264 . . .

n	$\tan \widehat{\alpha_n}$	$\widehat{\alpha_n}$	amplitudes cumulées
1	$\frac{1}{1} = 1$	45	45
2	$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$	35.264	80.264
3	$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$	30	110.264
4	$\frac{1}{\sqrt{4}} = \frac{\sqrt{4}}{4}$	26.565	136.829
5	$\frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$	24.095	160.924
6	$\frac{1}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{6}$	22.208	183.132
7	$\frac{1}{\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{7}}{7}$	20.705	203.837
8	$\frac{1}{\sqrt{8}} = \frac{\sqrt{8}}{8}$	19.471	223.308
9	$\frac{1}{\sqrt{9}} = \frac{\sqrt{9}}{9}$	18.435	241.743
10	$\frac{1}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{10}$	17.548	259.291
11	$\frac{1}{\sqrt{11}} = \frac{\sqrt{11}}{11}$	16.779	276.070
12	$\frac{1}{\sqrt{12}} = \frac{\sqrt{12}}{12}$	16.102	292.172
13	$\frac{1}{\sqrt{13}} = \frac{\sqrt{13}}{13}$	15.501	307.673
14	$\frac{1}{\sqrt{14}} = \frac{\sqrt{14}}{14}$	14.963	322.637
15	$\frac{1}{\sqrt{15}} = \frac{\sqrt{15}}{15}$	14.478	337.114
16	$\frac{1}{\sqrt{16}} = \frac{\sqrt{16}}{16}$	14.036	351.150
17	$\frac{1}{\sqrt{17}} = \frac{\sqrt{17}}{17}$	13.633	364.783

La ligne n° 16 montre que

> Le nombre maximum de triangles rectangles est 16

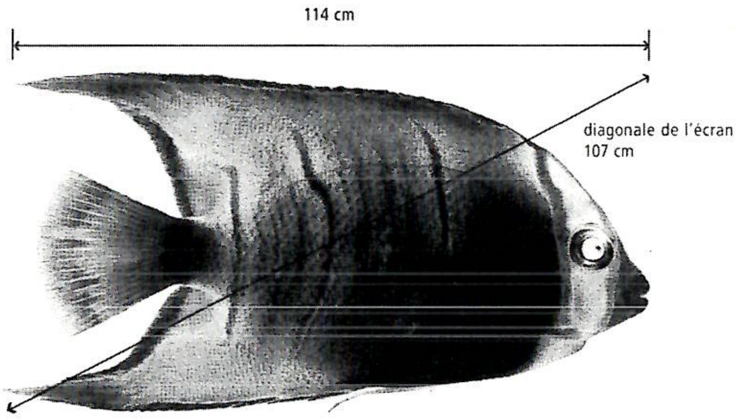
Il en résulte également que la longueur maximale de la spirale (contour extérieur) est de 16 unités.

La mathématique au quotidien...

C. Villers, *Athénée Royal de Mons*

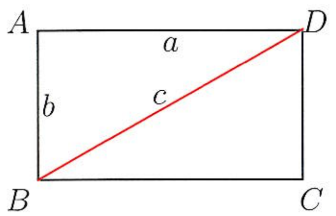
Pauvre Pythagore !

Cette image d'un poisson, utilisée pour une publicité parue dernièrement dans un hebdomadaire à gros tirage, ne présente par elle-même rien de particulier. Il n'en est pas de même des indications des dimensions qui y ont été ajoutées.
Vous avez certainement déjà dû sursauter à leur lecture. En effet, elles semblent indiquer qu'une diagonale d'un rectangle est plus courte qu'un de ses côtés. Or vous savez certainement que ce n'est pas vrai.



Autant que possible.

Si nous voulons *mathématiser* la situation présentée par la photographie ci-dessus, nous pouvons utiliser un rectangle $ABCD$ dont les côtés et la diagonale ont des longueurs représentées par a, b et c.

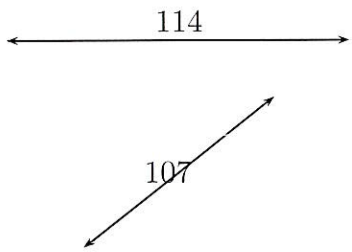


Vous savez certainement que $AD \perp AB$ donc que $|DA| < |DB|$ (perpendiculaire et oblique). D'autre part, le triangle DAB est un triangle rectangle et dans ce cas on peut appliquer le théorème de Pythagore (si vous ne le connaissez pas encore, c'est le moment de vous y intéresser car il vous sera très utile).

Cela donne : $|BD|^2 = |DA|^2 + |AB|^2$ (ou $a^2 + b^2 = c^2$), ce qui montre que $|DA| < |DB|$. La situation décrite sur l'image n'est pas correcte car on n'a pas $114 < 107$.

Que s'est-il donc passé ? En fait, il s'agissait d'une publicité pour un téléviseur et le dessinateur a voulu comparer la largeur de la « caisse » avec la diagonale de l'écran qui y est inséré. Les dimensions sont assez mal indiquées.

Il aurait fallu quelque chose comme ce qui suit.



Ceci est plus acceptable. C'est peut-être la raison de la présence de la locution « *Autant que possible* » qui figure dans l'image ? Pythagore peut donc être tranquille !

N.B. Si vous découvrez, au hasard de vos lectures, des situations paradoxales ou trompeuses, faites-nous en part.

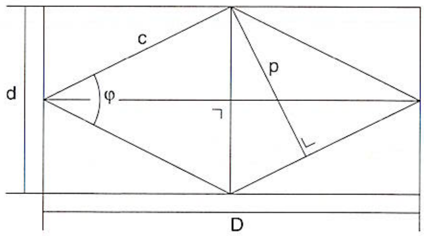
Math-Jeunes junior n°96 J,4–4, 2000

Le rhomboèdre (2)

A. Paternottre, ***I.T.C. Boussu***

Voici les réponses aux questions parues dans le *Math-Jeunes* junior n°95.

1. **Concernant le losange dont les diagonales mesurent D et d ($0 < d \leqslant D$) et pour lequel on pose : $x = \frac{d}{D} (0 < x \leqslant 1)$:**



   (a) $c = \frac{1}{2}\sqrt{D^2 + d^2}$.

   (b) $S = \frac{1}{2}Dd = pc$.

   (c) Des égalités précédentes, on déduit aisément : $p = \dfrac{Dd}{\sqrt{D^2+d^2}}$

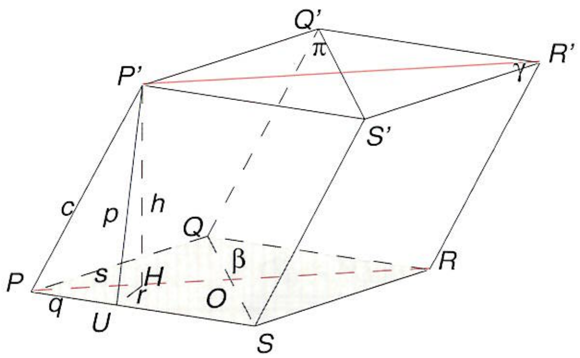
   (d)

$$\sin\frac{\varphi}{2} = \frac{d}{\sqrt{D^2+d^2}} = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}};$$
$$\cos\frac{\varphi}{2} = \frac{D}{\sqrt{D^2+d^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}};$$
$$\tan\frac{\varphi}{2} = \frac{d}{D} = x$$

   (e)

$$\sin\varphi = \frac{p}{c} = \frac{2dD}{D^2+d^2} = \frac{2x}{1+x^2};$$
$$\cos\varphi = \sqrt{1-\sin^2\varphi} = \frac{D^2-d^2}{D^2+d^2} = \frac{1-x^2}{1+x^2};$$
$$\tan\varphi = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} = \frac{2dD}{D^2-d^2} = \frac{2x}{1-x^2}.$$

2. **Concernant le rhomboèdre :**



1. Dans le cas où $D = d$, les six faces du rhombo deviennent des carrés isométriques et le rhombo lui-même devient un cube d'arête $\frac{d}{\sqrt{2}}$.
2. Observez attentivement le rhombo en carton que vous avez confectionné. Vous constatez que le plan γ est perpendiculaire au plan β ainsi qu'au plan π. Par contre, si $D \neq d$, le plan π est oblique au plan β. Pour votre bonheur, on ne vous demandait pas de démontrer ces affirmations !

– La section plane du rhombo par le plan γ est le parallélogramme $PP'R'R$. En effet ce quadrilatère a deux côtés opposés parallèles et de même longueur : $PP'//RR'$ et $|PP'| = |RR'|$.
– La section plane du rhombo par le plan π est le parallélogramme $QQ'S'S$. La justification est la même que la précédente mais il y a plus : on peut démontrer que ce parallélogramme a ses diagonales de même longueur. Il est donc un rectangle.

3. *Les quatre diagonales du rhombo sont concourantes en un point situé au milieu de chacune d'elles.*

- Nous savons déjà que le quadrilatère $PP'R'R$ est un parallélogramme. Ses diagonales $[PR']$ et $[P'R]$ se coupent donc en leur milieu M.
- Le quadrilatère $PQ'R'S$ est aussi un parallélogramme car $PS//Q'R'$ et $|PS| = |Q'R'|$. Ses diagonales $[PR']$ et $[SQ']$ se coupent donc en leur milieu. Mais le milieu de $[PR']$ est le point M. Celui-ci est donc aussi le milieu de $[SQ']$.
- Idem pour démontrer que M est le milieu de $[QS']$.
- On peut à présent faire un pas de plus et démontrer que toute droite comprenant le point M perce deux faces opposées du rhombo en deux points symétriques par rapport à M. Pour cette raison, ce point M est le centre de symétrie du rhombo.

4. Aire totale du rhombo $= A = 6 \times \frac{1}{2} \times D \times d = 3Dd.$

5.a.1. Calcul de q

$$q^2 = c^2 - p^2 = \frac{D^2+d^2}{4} - \frac{D^2d^2}{D^2+d^2} = \frac{(D^2+d^2)^2 - 4D^2d^2}{4(D^2+d^2)} = \frac{(D^2-d^2)^2}{4(D^2+d^2)}$$

ou

$$q = c \times \cos\varphi = \frac{1}{2}\sqrt{D^2+d^2}\frac{D^2-d^2}{D^2+d^2} = \frac{D^2-d^2}{2\sqrt{D^2+d^2}}$$

Dès lors : $\boldsymbol{q = \frac{D^2-d^2}{2\sqrt{D^2+d^2}}}$

5.a.2. Calcul de r

Soit O le point de rencontre des diagonales de la face inférieure $PQRS$. Les triangles rectangles POS et PUH étant semblables (deux angles de même amplitude chacun à chacun),

on a : $\dfrac{r}{(\frac{d}{2})} = \dfrac{q}{\frac{D}{2}} \Rightarrow r = \dfrac{dq}{D} = \dfrac{d(D^2-d^2)}{2D\sqrt{D^2+d^2}}$

Ou encore : $r = q \times \tan\dfrac{\varphi}{2} = \dfrac{D^2-d^2}{2\sqrt{D^2+d^2}} \times \dfrac{d}{D}$

5.a.3. Calcul de h

Dans le triangle rectangle $P'UH$:

$$h^2 = p^2 - r^2 = \frac{d^2D^2}{D^2+d^2} - \frac{(D^2-d^2)^2 \times d^2}{4(D^2+d^2) \times D^2} = \frac{4d^2D^4 - d^2(D^4 - 2d^2D^2 + d^4)}{4D^2(D^2+d^2)} = \frac{3d^2D^4 + 2d^4D^2 - d^6}{4D^2(D^2+d^2)}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{d^2}{4D^2} \times \frac{3D^4 + 2d^2D^2 - d^4}{D^2 + d^2} \\
&= \frac{d^2}{4D^2} \times \frac{D^4 + 2d^2D^2 + d^4 + 2D^4 - 2d^4}{D^2 + d^2} \text{ (petite astuce !)} \\
&= \frac{d^2}{4D^2} \times \frac{(D^2 + d^2)^2 + 2(D^2 + d^2)(D^2 - d^2)}{D^2 + d^2} \\
&= \frac{d^2}{4D^2} \times (D^2 + d^2 + 2D^2 - 2d^2) \\
&= \frac{d^2}{4D^2} \times (3D^2 - d^2)
\end{aligned}
$$

et finalement $h = \frac{d}{2D}\sqrt{3D^2 - d^2}$ ouf ! ! !

5.a.4. Calcul de s

Dans le triangle rectangle PUH, on a :

$$
\begin{aligned}
s^2 = q^2 + r^2 &= \frac{(D^2 - d^2)^2}{4(D^2 + d^2)} + \frac{d^2(D^2 - d^2)^2}{4D^2(D^2 + d^2)} \\
&= \frac{D^2(D^2 - d^2)^2 + d^2(D^2 - d^2)^2}{4D^2(D^2 + d^2)} \\
&= \frac{(D^2 - d^2)^2(D^2 + d^2)}{4D^2(D^2 + d^2)}
\end{aligned}
$$

dès lors $s = \dfrac{D^2 - d^2}{2D}$

Autrement $s = \dfrac{r}{\sin \frac{\varphi}{2}} = \cdots = \dfrac{q}{\cos \frac{\varphi}{2}} = \cdots$

5.b.1. Volume du rhombo (V)

$V =$ aire base $\times$ la hauteur $= \frac{1}{2} \times D \times d \times h = \frac{d^2}{4}\sqrt{3D^2 - d^2}$

Remarques :

- Puisque $D \geqslant d > 0$ par hypothèse, on a toujours $3D^2 - d^2 > 0$
- Si $D = d$ alors $V = \dfrac{d^2}{4}(\sqrt{2d^2}) = \dfrac{d^3\sqrt{2}}{4} = (\dfrac{d}{\sqrt{2}})^3$

  On retrouve le volume du cube d'arête $\dfrac{d}{\sqrt{2}}$.

5.c.1. Aire des sections planes S_π et S_γ du rhombo par les plans respectifs π et γ

$S_\pi =$ aire du rectangle $QQ'S'S = d \times c = \frac{1}{2}d \times \sqrt{D^2 + d^2}$

$S_\gamma =$ aire du parallélogramme $P'R'RP = D \times h = \frac{1}{2}d \times \sqrt{3D^2 - d^2}$

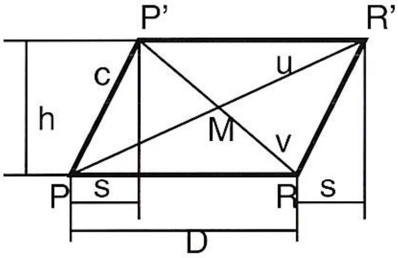
On en déduit aisément que $S_\pi^2 + S_\gamma^2 = (2\times$ aire d'une face $)^2$. Vérifie cette égalité.

5.d.1. Longueur des diagonales du rhombo

Démontrons par le calcul la proposition suivante :

Dans tout rhomboèdre, trois au moins des quatre diagonales ont la même longueur.

– Dans le parallélogramme $PP'R'R$, posons $|PR'| = u$ et $|P'R| = v$



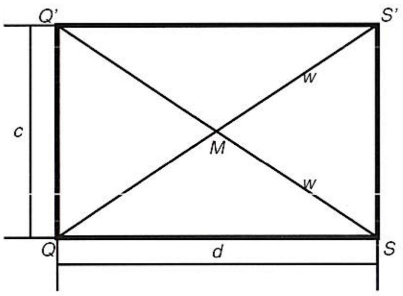
$$\begin{aligned}
\text{on a : } u^2 &= h^2 + (D+s)^2 \\
&= h^2 + D^2 + 2Ds + s^2 \\
&= c^2 + D^2 + 2Ds \qquad (h^2 + s^2 = c^2) \\
&= \frac{1}{4}(D^2 + d^2) + D^2 + 2D\frac{D^2 - d^2}{2D} \\
&= \frac{1}{4}D^2 + \frac{1}{4}d^2 + 2D^2 - d^2 \\
&= \frac{9}{4}D^2 - \frac{3}{4}d^2
\end{aligned}$$

Dès lors $u = \frac{1}{2}\sqrt{3}\sqrt{3D^2 - d^2}$

$$\begin{aligned}
\text{De même : } v^2 &= h^2 + (D-s)^2 \\
&= h^2 + D^2 - 2Ds + s^2 \\
&= \ldots \text{ comme pour le calcul de } u \\
&= \frac{1}{4}D^2 + \frac{1}{4}d^2 + D^2 - (D^2 - d^2) \\
&= \frac{1}{4}D^2 + \frac{5}{4}d^2
\end{aligned}$$

Dès lors $v = \frac{1}{2}\sqrt{D^2 + 5d^2}$

– Dans le rectangle $QQ'S'S$, posons $w = |QS'| = |Q'S|$



$$\begin{aligned}
\text{On a : } w^2 &= c^2 + d^2 \\
&= \frac{1}{4}(D^2 + d^2) + d^2 \\
&= \frac{1}{4}D^2 + \frac{1}{4}d^2 + d^2 \\
&= \frac{1}{4}(D^2 + 5d^2)
\end{aligned}$$

Dès lors $w = \frac{1}{2}\sqrt{D^2 + 5d^2}$

Conclusion :$v = w$

En conséquence :

⋆ Les quadrilatères $P'Q'RS$ et $P'S'RQ$ sont donc aussi des rectangles.

⋆ $u^2 + v^2 + 2w^2 = 12c^2$. Autrement dit la somme des carrés des longueurs des quatre diagonales d'un rhomboèdre vaut douze fois le carré de son arête. Vérifie-le.

RALLYE problèmes

C. Festraets

Une donnée a été malheureusement omise dans l'énoncé du problème n° 1 de la rubrique « Problèmes » publiée dans le n° 95. Nous en sommes confus et prions nos lecteurs de nous en excuser. Nous remettons donc ce problème en compétition non sans vous en donner cette fois un énoncé complet.

1 – La lessive

Une lessive se vend en liquide ou en poudre. Un sondage est effectué auprès d'un certain nombre de clients d'un grand magasin et donne les résultats suivants :

1. un tiers des personnes interrogées n'utilisent pas la poudre ;
2. deux septièmes de ces personnes n'utilisent pas le liquide ;
3. 427 personnes utilisent à la fois la poudre et le liquide ;
4. le cinquième des personnes interrogées n'utilise pas cette marque de lessive.

Combien y a-t-il eu de personnes interrogées dans ce sondage ?

Voici les cinq problèmes suivants de ce rallye 2000-2001 ainsi que les solutions des problèmes parus dans le numéro précédent. Présentez soigneusement vos solutions en respectant les instructions données dans le numéro précédent de Math-Jeunes-Juniors, n'oubliez pas d'affranchir suffisamment vos lettres et envoyez-les à C. Festraets, 36, rue J.B. Vandercammen, 1160 Bruxelles, au plus tard pour le 15 mars 2001. Les abonnés qui ont reçu leur Math-Jeunes junior *tardivement, peuvent toujours me faire parvenir leurs solutions pour le rallye problème du numéro 95 parallèlement à celles du numéro 96.*

6 — Les cha-maths et les dro-maths

A ce congrès de mathématique se sont réunis un certain nombre de cha-maths (qui ont deux bosses des maths) et les dro-maths (qui ont une seule bosse des maths). On a compté, lors du repas, 56 pieds sous les tables et 45 bosses au-dessus des tables. Combien y avait-il de cha-maths et de dro-maths (ils ont tous deux pieds, comme tout le monde).

7 — L'âge de Jules

Ce petit village des Ardennes compte exactement 100 habitants. Tous sont nés lors d'années différentes et le plus âgé est né en 1900. Jules est né un premier janvier et, en 1999, la somme des quatre chiffres de son année de naissance est égale à son âge. Quel est l'âge de Jules ?

8 — Les carreaux

Une surface rectangulaire dont la longueur et la largeur sont des nombres entiers de décimètres est carrelée. Chaque carreau est un carré d'un décimètre de côté. Trouver toutes les dimensions possibles de ce rectangle sachant que le nombre de carreaux situés le long de ses bords vaut la moitié du nombre total de carreaux.

9 — Les séries

Soit A la somme des k premiers termes de la série

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 + \cdots$$

et soit B la somme des k premiers termes de la série

$$1 \times 2 + 2 \times 3 + 3 \times 4 + \cdots + n \times (n+1) + \cdots$$

Sachant que $B - A = 210$, trouver la valeur de k.

10 — Les panneaux routiers

Vous conduisez une voiture qui roule à vitesse constante et vous passez périodiquement devant des panneaux qui indiquent en kilomètres la distance parcourue depuis votre départ. Un premier panneau comporte un nombre de deux chiffres. Une heure plus tard, un deuxième panneau indique un nombre avec les deux mêmes chiffres mais inversés. Encore une heure plus tard, vous passez devant un troisième panneau qui indique le même nombre que le premier mais avec un zéro entre les deux chiffres. Quelle est votre vitesse ?

Solution du problème « L'échiquier »

Supposons que les cases de l'échiquier soient coloriées alternativement en blanc et en noir et supposons en outre que la case supérieure gauche est blanche. Il y aura ainsi 32 cases blanches et 31 cases noires. Remarquons que la case centrale est noire. Restent ainsi 32 cases blanches et 30 cases noires pour placer les dominos. Mais tout domino couvre exactement une case noire et une case blanche. Pour pouvoir placer les 31 dominos, il faudrait le même nombre de cases blanches et de cases noires, le problème est donc impossible.

Solution du problème « L'échiquier 3×3 »

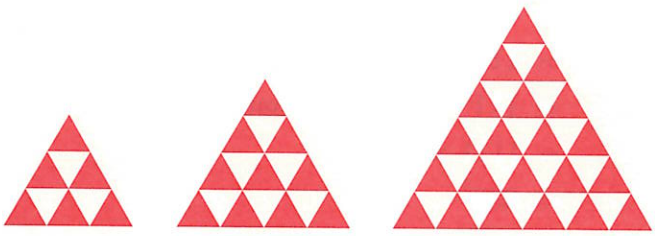
Considérons tous les carrés compris entre 100 et 999 et éliminons ceux qui n'ont pas trois chiffres distincts, il reste

$13^2 = 169$
$14^2 = 196$
$16^2 = 256$
$17^2 = 289$
$18^2 = 324$
$19^2 = 361$
$23^2 = 529$
$24^2 = 576$
$25^2 = 625$
$27^2 = 729$
$28^2 = 784$
$29^2 = 841$
$31^2 = 961$

Le chiffre 3 n'apparaît que dans deux nombres : 324 et 361. Si le nombre 324 est une des lignes de l'échiquier, les nombres figurant dans les autres lignes ne peuvent comporter les chiffres 3, 2, 4, ce qui laisse comme possibilités : 169, 196, 576, 961. Comme tous comportent le chiffre 6, il n'est pas possible de les placer dans les deux autres lignes. Procédons de même avec 361 ; les nombres possibles pour les deux autres lignes sont 289, 529, 729, 784. Seul 784 ne comporte pas le chiffre 2 et peut être associé à 529. D'où la solution

3	6	1
7	8	4
5	2	9

Solution du problème « Les dalles »



Examinons les figures ci-dessus.

- La première est de côté 3 et comporte trois « couches » de triangles équilatéraux élémentaires. En partant du haut, on a 1 triangle, puis 3 triangles, puis 5 triangles, donc en tout $1+3+5 = 9 = 3^2$ triangles élémentaires.
- De même dans la deuxième figure, de côté 4, on a $1+3+5+7 = 16 = 4^2$ petits triangles.
- De même, dans la troisième figure, de côté 6, on a $1+3+5+7+9+11 = 36 = 6^2$ petits triangles.

Observons que si n est le côté du triangle équilatéral de départ, on effectue la somme de n nombres impairs consécutifs en partant de 1.

Dès lors, dans un triangle équilatéral de 2 dm de côté, on placera $1+3 = 4 = 2^2$ dalles. Dans un triangle équilatéral de 2 m = 20 dm, de côté, on placera $1+3+5+\cdots+39 = 400 = 20^2$ dalles. Dans un triangle équilatéral de 10 m = 100 dm de côté, on placera $100^2 = 10000$ dalles.

Remarquons que la somme des n premiers nombres entiers impairs consécutifs vaut toujours n^2.

En effet, soit A cette somme. On a :

$$\begin{array}{rcccccccccccccc}
A & = & 1 & + & 3 & + & 5 & + & \cdots & + & (2n-5) & + & (2n-3) & + & (2n-1) \\
A & = & (2n-1) & + & (2n-3) & + & (2n-5) & + & \cdots & + & 5 & + & 3 & + & 1 \\
\hline
2A & = & 2n & + & 2n & + & 2n & + & \cdots & + & 2n & + & 2n & + & 2n \\
2A & = & n.2n & & & & & & & & & & & &
\end{array}$$

$$\boxed{A = n^2}$$

Solution du problème « Le carré parfait »

Prenons d'abord l'exemple d'un nombre composé de 6 chiffres 1 duquel on soustrait un nombre composé de $\frac{6}{2} = 3$ chiffres 2 :

$$\begin{aligned}
111111 - 222 &= (111000 + 111) - 2 \times 111 \\
&= 111000 + (111 - 2 \times 111) \quad \text{associativité de } + \\
&= 111000 + 111 \times (1 - 2) \\
&= 111 \times 10^3 - 111 \\
&= 111 \times (10^3 - 1) \\
&= 111 \times 999 \\
&= 111 \times (111 \times 9) \\
&= 111^2 \times 3^2 \quad \text{associativité de } \times \\
&= (111 \times 3)^2 \\
&= 333^2
\end{aligned}$$

Généralisons le procédé exposé dans l'exemple précédent : d'un nombre composé de $2n$ chiffres 1, on soustrait un nombre composé de n chiffres 2 :

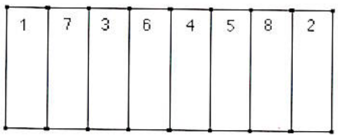
$$\begin{aligned}
\underbrace{111\ldots11}_{2n \text{ chiffres}} - \underbrace{222\ldots22}_{n \text{ chiffres}} &= \underbrace{111\ldots11}_{n \text{ chiffres}}\underbrace{000\ldots00}_{n \text{ chiffres}} + \underbrace{111\ldots11}_{n \text{ chiffres}} - 2 \times \underbrace{111\ldots11}_{n \text{ chiffres}} \\
&= \underbrace{111\ldots11}_{n \text{ chiffres}} \times (10^n - 1) \\
&= \underbrace{111\ldots11}_{n} \times \underbrace{999\ldots99}_{n} \\
&= 9 \times \underbrace{111\ldots11}_{n} \times \underbrace{111\ldots11}_{n} \\
&= 3^2 \times (\underbrace{111\ldots11}_{n})^2 \\
&= (\underbrace{333\ldots33}_{n})^2
\end{aligned}$$

Tonton C.

Les jeux et problèmes mathématiques de Tonton C.

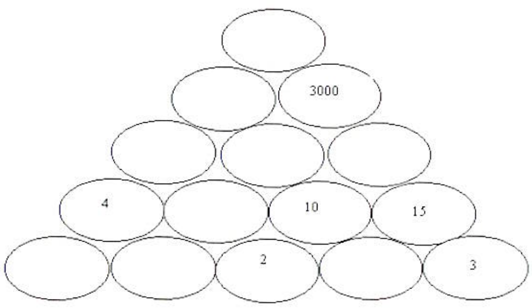
◇ Mathieu a une curieuse façon de retenir les numéros de téléphone de ses copines et copains. Il mémorise certaines de leurs caractéristiques. Ainsi, pour le numéro de Béatrice, il se souvient que c'est un numéro de six chiffres. Le dernier chiffre est un 7. Le quatrième chiffre a une valeur double de celle du deuxième et une valeur moitié de celle du premier qui, lui-même vaut une unité de moins que le sixième. Quel est le numéro de téléphone de Béatrice ?

◇ Les différents volumes du dictionnaire de Mathieu se retrouvent en désordre sur leur étagère. Mathieu veut remettre de l'ordre mais il décide de toujours déplacer ensemble deux volumes contigus sans les permuter.



Comment peut-il procéder de manière à effectuer le moins de déplacements possibles ?

◇ Quel est le nombre qui doit apparaître au sommet de cet empilement si chaque ellipse contient le produit des nombres inscrits dans les deux ellipses qui la supportent ?



Mot caché (n°17)

Le jeu consiste à retrouver dans la grille chacun des mots du texte qui vous est proposé. A cet effet, vous pouvez serpenter dans cette grille, horizontalement ou verticalement, en tous sens, mais jamais en oblique. Chaque mot est d'un seul tenant et chaque lettre ne sert qu'une fois. Les lettres qui resteront vous donneront alors le mot caché. Sachez que cette fois, il s'agit d'un nombre. Quel est ce nombre ? Voici maintenant la phrase qui est proposée à votre sagacité et la grille qui lui correspond. Bonne recherche.

« L'origine de la base xxxx est très simple. Elle remonte au temps ou les hommes comptaient en utilisant leurs mains et leurs pieds. Il reste des traces évidentes de la base. »

I	G	I	N	O	M	S	L	I	T	U	S	A	B
N	E	R	T	E	E	E	I	S	C	A	E	S	T
U	A	O	M	O	R	L	N	A	E	R	T	E	E
M	E	T	M	H	I	N	T	I	S	T	N	S	L
P	C	S	E	S	V	G	T	S	E	E	E	D	L
S	0	M	P	R	U	T	R	A	P	S	D	E	E
E	L	L	T	A	E	S	E	A	L	V	I	I	P
M	P	D	E	I	L	I	L	E	D	E	S	R	T
I	S	E	N	T	I	N	T	E	S	E	E	U	E
A	L	N	E	M	A	S	S	E	R	D	L	U	O

Solutions

◇ Vous n'avez certainement pas eu grand peine à découvrir le numéro codé par le texte. C'est 823437.

◇ Les différents volumes peuvent être remis en ordre en trois déplacements de deux volumes contigus. Voici une solution :

Au départ	1	7	3	6	4	5	8	2
1er mouvement	1	7	8	2	3	6	4	5
2ème mouvement	1	2	3	6	4	5	7	8
3ème mouvement	1	2	3	4	5	6	7	8

Si vous avez une autre solution, vous pouvez nous la proposer.

◇ En calculant de proche en proche les nombres qui manquent, vous avez dû obtenir le nombre du sommet c'est à dire 480 000.

◇ Le nombre caché est « vingt ».

Rappelons le calendrier de la vingt-sixième Olympiade Mathématique Belge :

Mercredi 17 janvier 2001 : éliminatoire,
Mercredi 21 février 2001 : demi-finale,
Mercredi 25 avril 2001 : finale,
Samedi 12 mai 2001 : proclamation.

Ton professeur reçoit toutes les informations utiles sur cette Olympiade. Si tu désires en savoir plus, il te suffit de lui poser les questions.

Si tu désires peaufiner ta préparation et évaluer ton potentiel olympique, tu peux acquérir le quatrième recueil des questions posées aux OMB. Voici tous les renseignements nécessaires pour cela :

OMB, Tome 4 (1994-1998) : prix 220 F. Ajouter 50 F de port pour un exemplaire et 100 F de port pour deux ou trois exemplaires. Les commandes sont à adresser à la SBPMef, rue de la Halle, 15, 7000 Mons, compte : 000-0728014-29 Fax et téléphone : 065 37 37 29.

Ajoutons que dès le lendemain de l'éliminatoire, soit le 18 janvier 2001, les questions posées seront disponibles sur Internet sous forme d'un fichier interactif qui te permettra de verifier tes réponses et de connaître ton résultat, Tu trouveras ce fichier à l'adresse

`http://ceco.umh.ac.be/noel/sbpm.htm`

Somme magique (2)

Y. Noël-Roch

Rappelons le problème posé dans le numéro précédent de la revue :

Compléter

$$\begin{array}{r} \star\ \star\ \star \\ +\ \star\ \star\ \star \\ \hline =\ \star\ \star\ \star \end{array}$$

en utilisant les neuf nombres 1, 2, ...9.

Voici quelques solutions

$$\begin{array}{rrrr}
\begin{array}{r}127\\+368\\ \hline =495\end{array} & \begin{array}{r}327\\+168\\ \hline =495\end{array} & \begin{array}{r}167\\+328\\ \hline =495\end{array} & \begin{array}{r}128\\+367\\ \hline =495\end{array} \\
\begin{array}{r}129\\+438\\ \hline =567\end{array} & \begin{array}{r}429\\+138\\ \hline =567\end{array} & \begin{array}{r}139\\+428\\ \hline =567\end{array} & \begin{array}{r}128\\+439\\ \hline =567\end{array} \\
\begin{array}{r}219\\+348\\ \hline =567\end{array} & \begin{array}{r}319\\+248\\ \hline =567\end{array} & \begin{array}{r}249\\+318\\ \hline =567\end{array} & \begin{array}{r}218\\+349\\ \hline =567\end{array} \\
\begin{array}{r}192\\+483\\ \hline =675\end{array} & \begin{array}{r}492\\+183\\ \hline =675\end{array} & \begin{array}{r}182\\+493\\ \hline =675\end{array} & \begin{array}{r}193\\+482\\ \hline =675\end{array} \\
\begin{array}{r}291\\+384\\ \hline =675\end{array} & \begin{array}{r}391\\+284\\ \hline =675\end{array} & \begin{array}{r}281\\+394\\ \hline =675\end{array} & \begin{array}{r}294\\+381\\ \hline =675\end{array}
\end{array}$$

$$\begin{array}{r}138\\+654\\ \hline =792\end{array} \qquad \begin{array}{r}124\\+659\\ \hline =783\end{array}$$

1. Construis de nouveaux exemples à partir des deux derniers, puis d'autres exemples librement.
2. Comment obtenir la somme 981 ? Et 459 ? (Ce sont respectivement la plus grande et la plus petite somme qu'on peut obtenir en respectant les règles du jeu.)
3. A partir de tous les exemples disponibles, conjecture des propriétés qui facilitent la découverte de nouvelles solutions.
4. Essaie de démontrer ces conjectures ... ou prouve qu'elles sont fausses !

A suivre ...

Anniversaire

Simone Trompler

Howard Hathaway Aiken est né, voici 100 ans aux USA et y est décédé en 1973. Diplômé de l'université de Harvard, il y effectue des recherches sur un système d'équations différentielles qui ne possède pas de solutions exactes. Il ne peut donc le résoudre que par des techniques de calcul numérique. Mais la quantité de calculs est insurmontable et Aiken cherche à se faire aider mécaniquement. Au début du siècle, Charles Babbage avait conçu une machine qui peut être considérée comme l'ancêtre des ordinateurs. Malheureusement, elle ne put fonctionner convenablement, faute d'une technologie adéquate. Hollerith reprit ses idées et les améliora, imaginant le premier système de tabulation électrique destiné à l'analyse de données statistiques, encodées sur cartes perforées. Aiken part des machines existantes et les modifie pour les rendre utilisables dans la recherche scientifique.

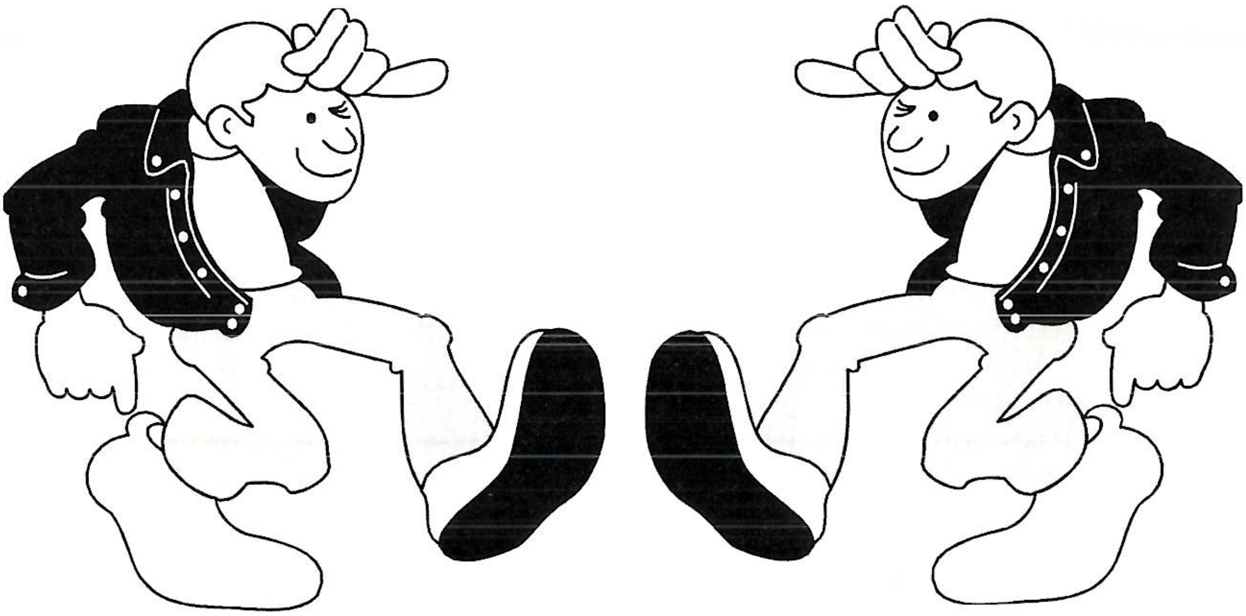
Il explique : « alors que les machines actuelles ne traitent que des nombres positifs, les machines scientifiques doivent être capables de traiter les nombres négatifs aussi ; elles doivent traiter également des fonctions telles que logarithmes, sinus, cosinus et une multitude d'autres fonctions. La machine à calculer serait très utile pour les scientifiques si, une fois mise en route, elle pouvait travailler tout au long du problème, pour des valeurs numériques nombreuses, sans intervention jusqu'à la fin du calcul. La machine devrait calculer des lignes au lieu de colonnes, ce qui est plus adapté aux séquences mathématiques ». Aiken parvient à convaincre les laboratoires IBM et développe avec leur aide l'ASCC (Automatic Sequence Controlled Calculator). L'ASCC fonctionnait à l'électricité, ses principaux composants étaient électromécaniques, sous la forme d'interrupteurs manœuvrés magnétiquement. Il pesait 25 tonnes et avait 800 000 mètres de fil électrique ! Une addition prenait 6 secondes et une division 12. L'ASCC fut utilisé à l'université de Harvard à partir de 1944. Il fut remplacé par un modèle entièrement électronique en 1947, puis par deux autres jusqu'en 1952. Aiken ne se contenta pas de travailler à la construction de machines à calculer mais publia aussi des textes sur l'électronique et la théorie des commutateurs. Aiken fut récompensé pour son œuvre par de nombreux pays tels les USA, La France, les Pays-Bas, la Belgique et l'Allemagne.

Sources

http ://www-history.mcs.st-and.ac.uk/ history/Mathematicians/Aiken.html
Encyclopedia Universalis.

Agence de détectives privés
Les frères Hick
Recherches en tous genres

Bernard Honclaire



Ami lecteur,

J'ai le plaisir de te présenter les jumeaux *Mat* et *Matt*, détectives privés de la célèbre agence des frères Hick.

Pour te permettre de les distinguer, je les ai surnommés $\mathcal{T}$ (prononce té) et $\mathcal{T}^2$ (prononce técarré).

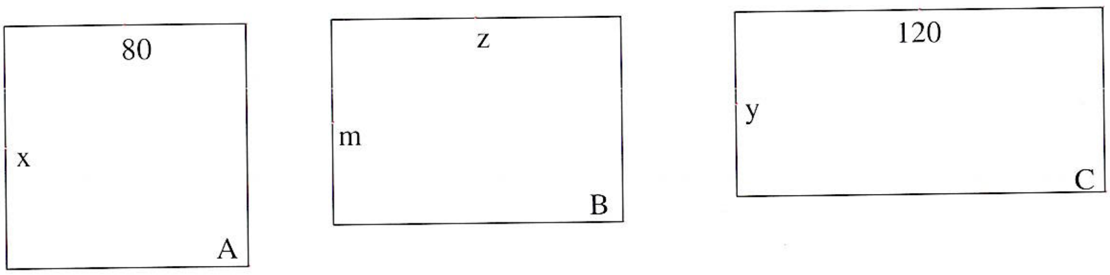
Ils ont accepté de te faire participer à quelques-unes de leurs recherches. Pour chacune d'entre elles, tu disposeras d'un énoncé et des premières réactions de $\mathcal{T}$ et de $\mathcal{T}^2$. Celles-ci devraient te mettre sur la piste. Il faut que tu saches que $\mathcal{T}$ est doté d'une intuition phénoménale, qu'il manque parfois de rigueur mais que $\mathcal{T}^2$ est là pour le rappeler à l'ordre. Dans le numéro suivant, ils te fourniront leur solution commentée.

Bon courage et bon amusement.

Où il est question d'un point commun !

Ces trois problèmes tu résoudras
Et le mystère t'envahira !

1. A, B et C sont trois rectangles de même aire.



Math-Jeunes junior n°96 J,16–18, 2000

m est la moyenne arithmétique de x et y, $(\frac{x+y}{2})$.

Que vaut la dimension du rectangle B représentée par le point d'interrogation ?

*****

***T* — Si je prends des valeurs pour x, y et m, je dois pouvoir calculer ce qu'on me demande !**

***T*² — Ouais ! Mais attention ! Tu ne peux pas te contenter d'un seul exemple ! Et de toute façon, il faudra bien que je tente de résoudre ce problème avec les lettres ! Alors on sera sûr que c'est toujours vrai !**

*****

2. Un automobiliste effectue le trajet de A vers B a une moyenne de 80 km/h. Il effectue le retour à une moyenne de 120 km/h.

Calculer la vitesse moyenne du trajet total.

*****

***T* — Je pense à une formule $e = vt$ (si mes souvenirs sont exacts !) ; je vais donc devoir choisir une longueur de trajet pour pouvoir faire mes calculs !**

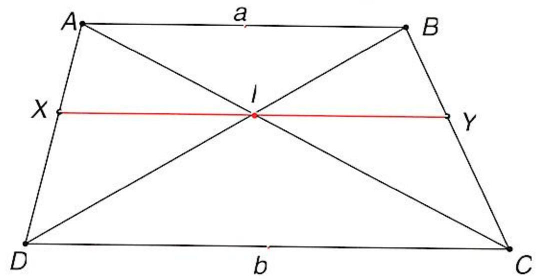
***T*² — Tu es incorrigible ! Je te répète que tu ne peux pas te contenter d'une seule longueur pour être sûr que c'est toujours vrai ! Ce sera encore à moi de travailler avec des lettres !**

*****

3. Dans le trapèze $ABCD$, XY est parallèle aux bases (longueurs a et b).

Pour des élèves de troisième (au moins) : démontrer que $|xy| = \frac{2ab}{a+b}$.

Pour tous : utiliser ce résultat pour calculer $|xy|$ sachant que $a = 80$ et $b = 120$.



*****

***T* — Pour le calcul, pas de problème ! Mais pour la démonstration, je n'ai aucune idée ! J'ai cependant l'impression que le point I est au milieu de $[XY]$! Et je m'étonne qu'on ne donne pas la hauteur du trapèze ! Je vais devoir en choisir ... !** (regard triomphant vers son frère) **Non, je prends n'importe quoi !**

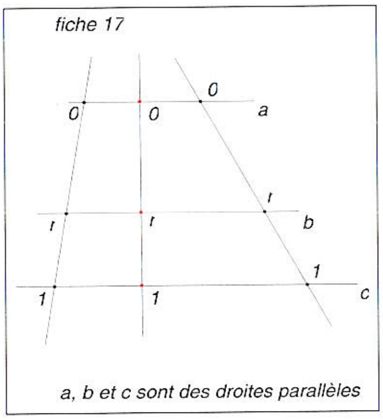
***T*² — Pour le milieu, il faut voir !**

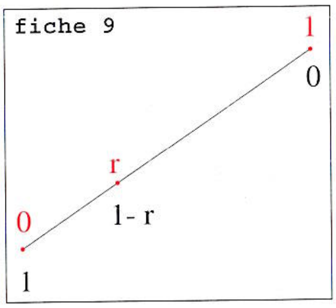
Moi, je pense à trois droites parallèles et des sécantes ... !

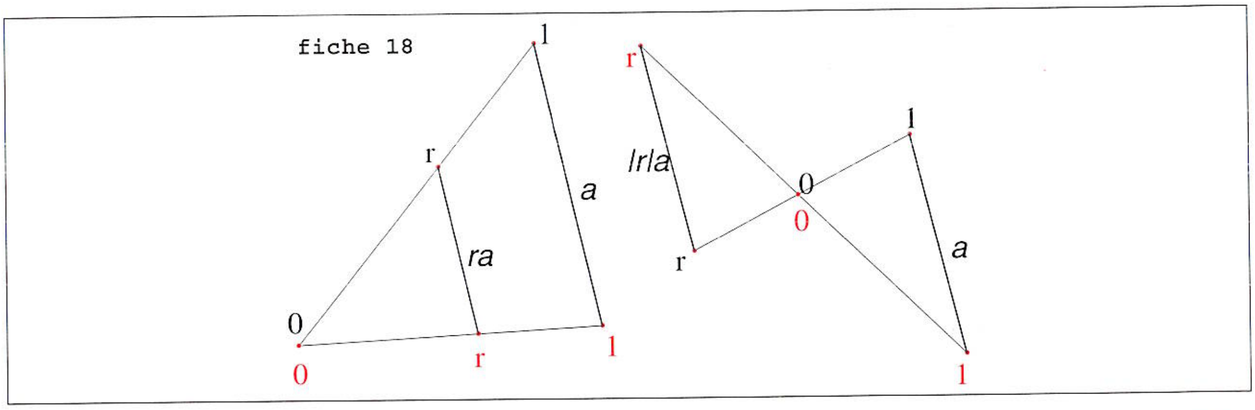
Cela me rappelle Thalès !

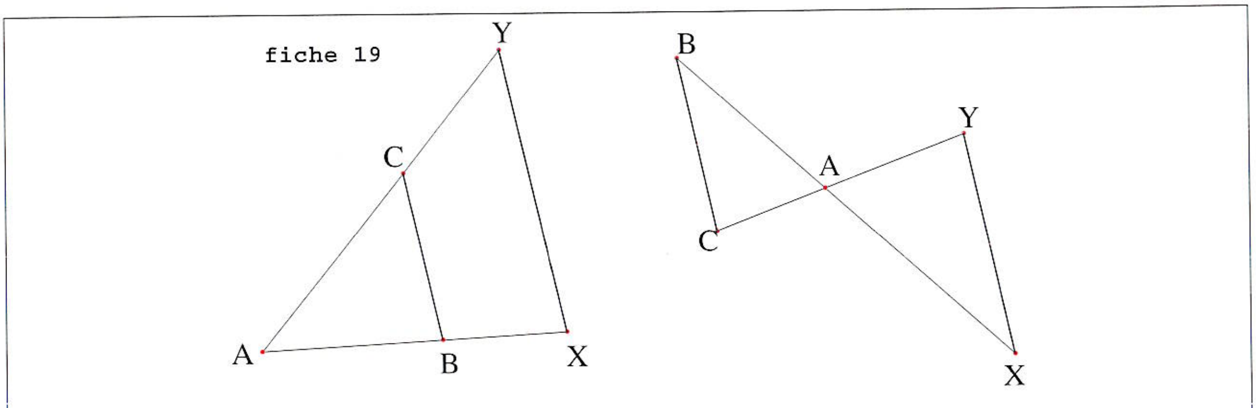
Mais il faudrait bien que j'aille consulter mes notes à ce sujet !

***T* — Avec sa passion du rangement, il va nous les trouver illico !**









$$\frac{|AX|}{|AB|} = \frac{|AY|}{|AC|} = \frac{|XY|}{|BC|}$$

T^2 — *Avec cela, on va pouvoir travailler!*

*****

à suivre . . .

Les nombres cachés (2)

Y. Noël-Roch

1. Un lien important entre a et L

1.1. Tableau initial de largeur 16

Pour préparer la suite, nous devons analyser plus finement que dans l'article précédent le phénomène apparu dans les fenêtres 4 et 5. En nous référant une fois de plus au tableau 1 (*Math-Jeunes* n°95 j, 1-5, 2000)

- recherchons les nombres a $(3 \leqslant a \leqslant 10)$ pour lesquels les multiples apparaissent en colonne : ce sont les nombres 4, 8 et 16.
- observons les nombres qui se placent en colonnes :

1	4	5	8	10	k
17	20	21	24	26	k+16
33	36	37	40	42	k+32=k+2x16
49	52	53	56	58	k+48=k+3x16
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮ … et généralement	⋮

Ainsi, les multiples de 4 se placent en colonne avec k chaque fois que les nombres $k, k+16, k+32, k+38\ldots$ sont multiples de 4.

D'une manière plus générale, pour un nombre a, les multiples de a se placent en colonne avec le nombre k chaque fois que les nombres k, $k+16$, $k+48$, … sont multiples de a.

Mais pour que k et $k+16$ soient tous les deux multiples de a, il faut que 16 soit multiple de a.

Dans le tableau 1, les seules valeurs de a $(3 \leqslant a \leqslant 10)$ qui donnent des multiples en colonnes sont donc 4 et 8.

1.2. Tableau initial de largeur L

Cette fois, toute colonne sera du type

k
k+(1xL)
k+(2xL)
k+(3xL)
⋮

et pour que les multiples de a apparaissent dans une telle colonne, il faut et il suffit que k et $k+L$ soient tous les deux des multiples de a, donc que a soit un diviseur de k **et de** L.

Math-Jeunes junior n°96 J,19–23, 2000

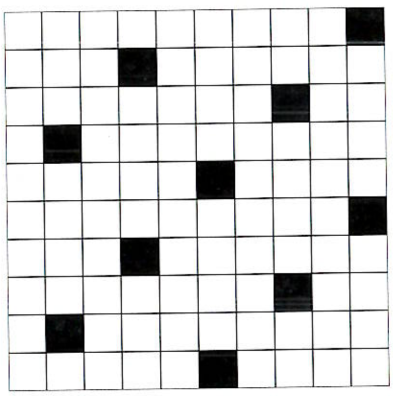
En resumé :

> « *a est diviseur de L* »
> *équivaut à*
> « *les cases contenant des multiples de a sont disposées en colonnes* ».

Avant de te proposer de nouveaux jeux, nous allons analyser brièvement les problèmes posés dans le numéro précédant de *Math-Jeunes*.

2. Premier cas : la largeur L du tableau initial est connue

Rappelons la fenêtre donnée et les conditions connues : $L = 16$ et $3 \leqslant a \leqslant 10$



Fenêtre 6

Recherche de a : Dans une aucune ligne n'apparaissent deux cases noires consécutives et la fenêtre ne visualise donc pas l'écart qui sépare un nombre n multiple de a et le multiple suivant $n + a$.

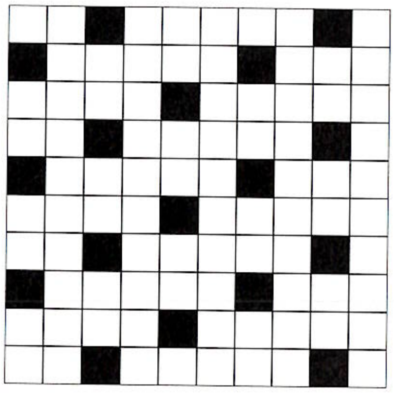
La ligne 1 indique par contre que au moins 9 cases blanches séparent deux multiples consécutifs de a. Donc $a > 9$ et a ne peut valoir que 10.

Implantation de la fenêtre 6 dans le tableau initial : En nous référant au tableau 1 de l'article précédent, nous voyons que la case noire située dans le coin supérieur droit de la fenêtre peut être occupée par les nombres 10 ou 30 ou 60 ou 80 ou 90 ... ou encore bien d'autres.

3. Deuxième cas : la largeur initiale L est inconnue

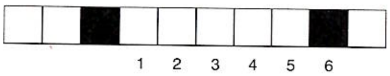
Rappelons que pour les fenêtres 7 et 8, nous savons que $10 \leqslant L \leqslant 20$ et $3 \leqslant a \leqslant 10$.

3.1. Première situation



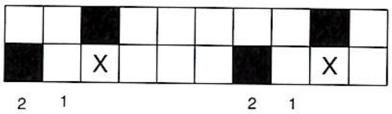
Fenêtre 7

Recherche de a : Dès la première ligne, nous savons que $a = 6$.



Recherche de L :

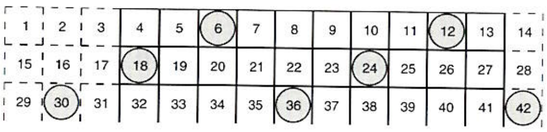
Comparons les positions des cases noires dans les lignes 1 et 2.

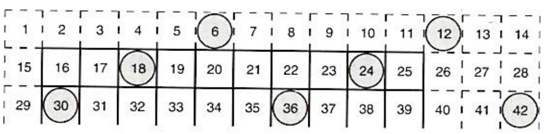


Si les cases marquées d'une croix dans la deuxième ligne étaient des cases noires, L **serait un multiple de** a et vaudrait donc 12 ou 18.

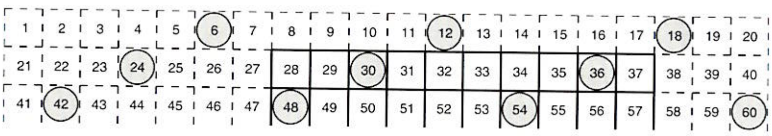
Le décalage de deux places entre les cases noires et les cases marquées d'une croix dans la deuxième ligne indique que nous disposons de deux places supplémentaires en largeur. Les valeurs possibles pour L sont donc 14 ou 20.

Voici plusieurs découpages de fenêtre possible dans chacun des deux cas :





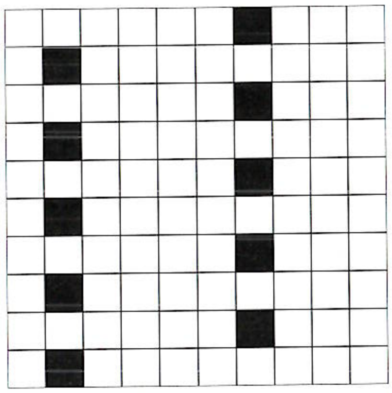
$L = 14$, $a = 6$, 4 ou 16 dans le coin supérieur gauche (nous noterons abusivement $csg = 4$ ou $csg = 16$)



$L = 20$, $a = 6$, $csg = 28$ (ou $cgs = 22$ ou $cgs = 46$ ou ...)

Tu trouveras toi-même d'autres découpages de fenêtres possibles si tu le souhaites.

3.2. Deuxième situation

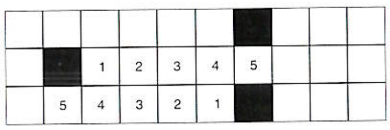


Fenêtre 8

Recherche de a

($3 \leqslant a \leqslant 10$) Aucune ligne ne fournit directement la valeur de a mais la deuxième ligne montre que la périodicité avec laquelle les cases noires se succèdent vaut plus que 8. nous pouvons en conclure que $a = 9$ ou $a = 10$. C'est la recherche de L qui va permettre de trancher entre ces deux possibilités.

Observons les trois premières lignes de la fenêtre 8.



Supposons que a=9

- Le passage de la ligne 1 à la ligne 2 montre que L doit être **un multiple de 9 augmenté de 5**.
- Le passage de la ligne 2 à la ligne 3 montre que L doit être **un multiple de 9 diminué de 5**.

Ces deux conditions sont à satisfaire **en même temps** que $10 \leqslant L \leqslant 20$. Il faudrait donc avoir **à la fois** $L = 14$ et $L = 13$, ce qui est contradictoire.

La largeur initiale L ne peut exister dans ce cas ; a ne pouvait donc pas valoir 9 . . . nous avions pris une fausse piste !

Supposons que $a = 10$

A partir du schéma précédent, nous savons que :

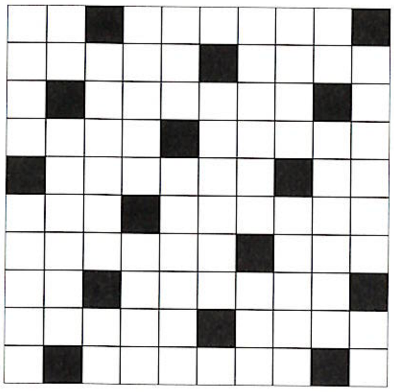
- L doit être **un multiple de 10 augmenté de 5**
- L doit être **un multiple de 10 diminué de 5**

Cette fois, $L = 15$ satisfait à ces deux conditions en même temps que $10 \leqslant L \leqslant 20$ et nous pouvons conclure que $\boxed{L = 15 \text{ et } a = 10}$ **est la solution de la fenêtre 8**.

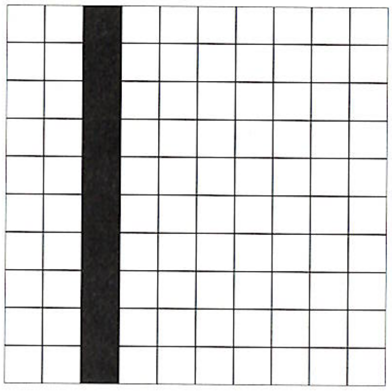
Si c'est utile pour achever de te convaincre, nous te laissons le soin d'écrire un tableau initial de largeur 15, d'y repérer les multiples de 10 et, enfin, d'y découper une fenêtre analogue à la fenêtre 8.

4. De nouveaux jeux

Les fenêtres 9 et 10 ci-dessous ont été découpées dans des tableaux de largeur 18. Quelles sont les valeurs de a qui ont été utilisées ?



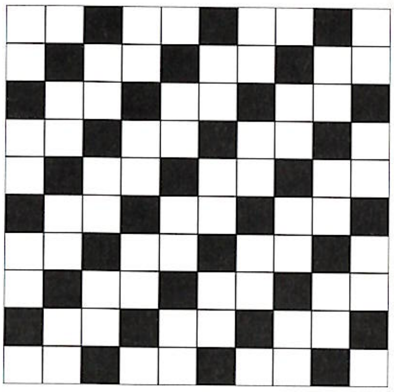
Fenêtre 9



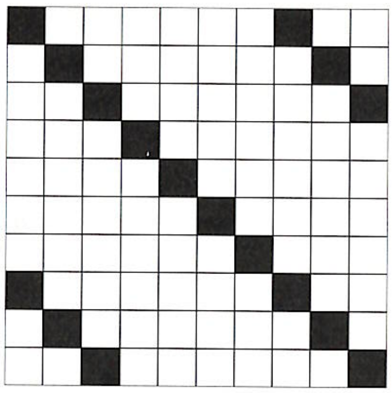
Fenêtre 10

Les fenêtres 11 et 12 ci-dessous ont été découpées dans des tableaux dont tu dois toi-même déterminer la largeur.

Pour rappel : $10 \leqslant L \leqslant 20$ et $3 \leqslant a \leqslant 10$.



Fenêtre 11



Fenêtre 12

Bon amusement dans la recherche de a et L dans chaque cas. Tu pourras confronter tes résultats aux solutions qui seront fournies dans le prochain numéro de *Math-Jeunes*.

Une inégalité qui remplace efficacement une égalité.

Y. Noël-Roch

Existe-t-il des entiers naturels a et b tels que $a + b = a \times b$?

Cherche un peu pour trouver une solution avant de lire la suite !

Sans doute as-tu pensé à $2 + 2 = 2 \times 2$ ... et peut-être à $0 + 0 = 0 \times 0$ ... ou tu as peut-être pensé que a et b devaient être différents ... ou le nombre 0 ne fait pas partie de tes amis ?

Précisons donc le contexte de notre recherche : après les deux solutions $a = b = 0$ et $a = b = 2$ déja vues, nous recherchons des naturels a et b tels que

$$a \text{ et } b \text{ sont des entiers, } a > 0 \text{ et } b > 0$$

Essayons d'abord avec quelques valeurs de a et b :

a	3	4	1	2	2	2	3	...	10	...
b	3	4	2	3	4	5	4	...	26	...
$a+b$	6		3	5				...		...
$a \times b$	9		2	6				...		...

Ces tâtonnements ne nous conduisent nulle part. En effet, ils ne nous donnent pas rapidement une solution. Nous avons l'impression que l'écart grandit entre la somme et le produit mais cela ne démontre en rien qu'il n'existe pas de nouvelle solution à trouver !

Ecrivons autrement la condition imposée. Puisque $a \neq 0$ et $b \neq 0$,

$$a + b = a \times b \qquad \text{équivaut à} \qquad \frac{1}{b} + \frac{1}{a} = 1$$

Sous cette nouvelle forme, nous sommes à la recherche de deux nombres $\frac{1}{a}$ et $\frac{1}{b}$ (tous les deux positifs puisque $a > 0$ et $b > 0$) dont la somme vaut 1. Si les deux termes d'une somme sont strictement inférieurs à $\frac{1}{2}$, leur somme est strictement inférieure à 1. Il faut donc que au moins un des deux nombres $\frac{1}{a}$ ou $\frac{1}{b}$ soit supérieur ou égal à $\frac{1}{2}$. Les deux nombres jouant le même rôle, nous pouvons supposer $\frac{1}{a} \geqslant \frac{1}{2}$, donc $a \leqslant 2$. Les seules valeurs à envisager pour a sont dès lors 1 et 2.

- nous savons déjà que $a = 2$ conduit à $b = 2$
- le cas $a = 1$ entraîne la condition $1 + b = b$ ...et aucun naturel ne satisfait à cette condition.

Comme a et b jouent le même rôle dans le problème posé, il est inutile de recommencer en supposant que $\frac{1}{b} \geqslant \frac{1}{2}$. Si ça t'amuse, tu peux bien sûr observer ce que cela donne !

Conclusion : des inégalités tirées de l'égalité de départ nous ont permis de démontrer que

les seules solutions naturelles de l'équation $a + b = a \times b$ sont $a = b = 0$ et $a = b = 2$

Existe-t-il des entiers naturels a, b et c tels que $a + b + c = a \times b \times c$?

Nous te laissons le plaisir de chercher !

Math-Jeunes junior n°96 J,24–24, 2000

Les rédactions de *Math-Jeunes* et de *Math-Jeunes junior* vous souhaitent une joyeuse et fructueuse entrée dans le troisième millénaire.

15 Rue de la Halle, B 7000 Mons, Belgique.
http ://ceco.umh.ac.be/noel/sbpm/sbpm.htm
e-mail sbpm@umh.ac.be

Math-Jeunes Junior
Périodique trimestriel
15, rue de la Halle – 7000 Mons
Bureau de dépôt 7000 Mons 1

Responsable de l'édition: A. PATERNOTTRE
Rue du Moulin 78 – 7300 Boussu

Autorisation de fermeture
Sluitings toelating

7000 Mons 1
5/156

Belgique - België
P.P.
7000 Mons 1
5/124

Périodique - Peut être ouvert pour contrôle postal

Réservé à la poste

Inconnu
Refusé
Décédé
Adresse insuffisante
N'habite plus à l'adresse indiquée