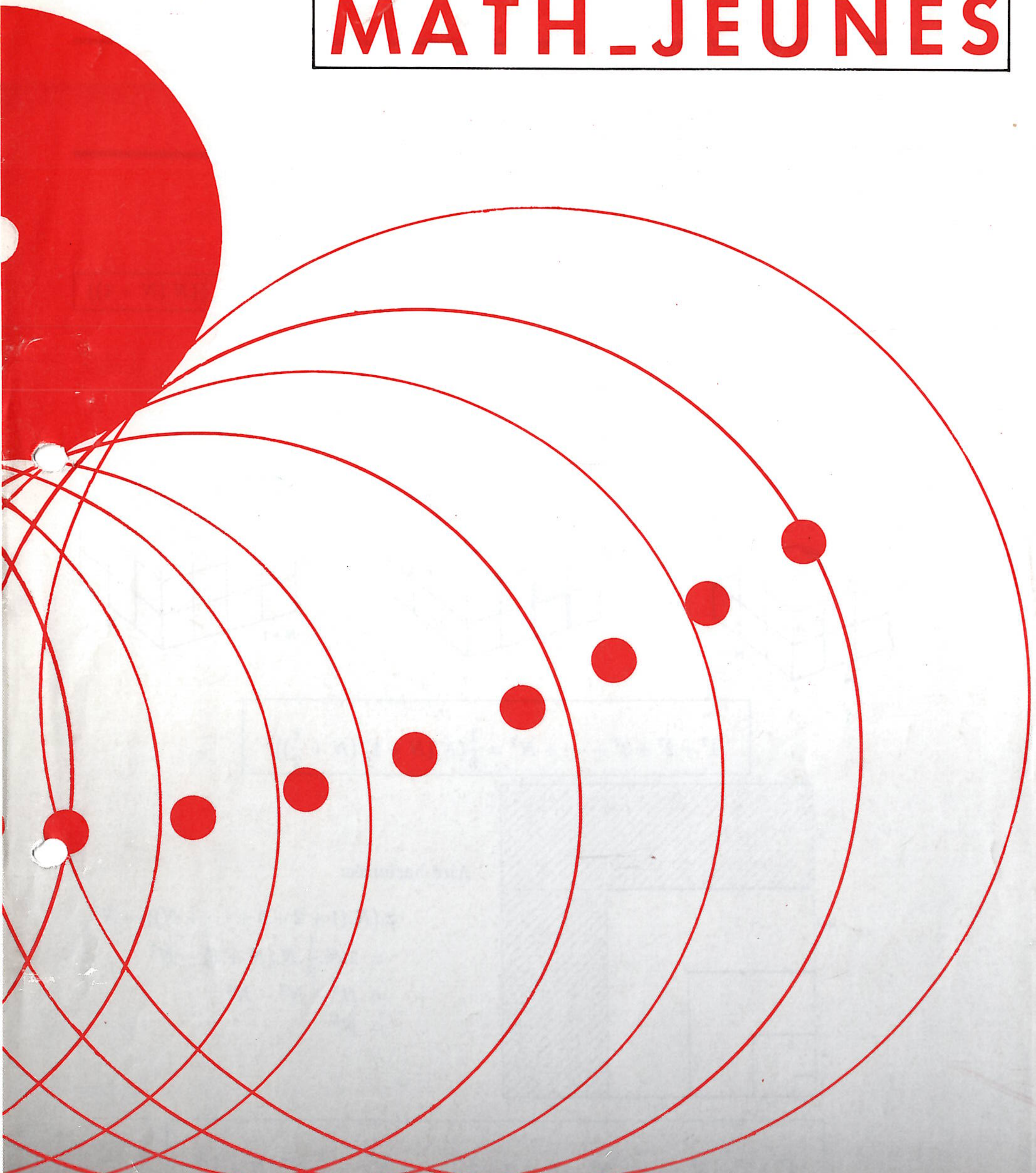
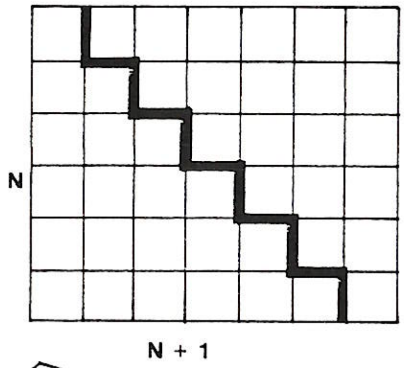
MATH_JEUNES



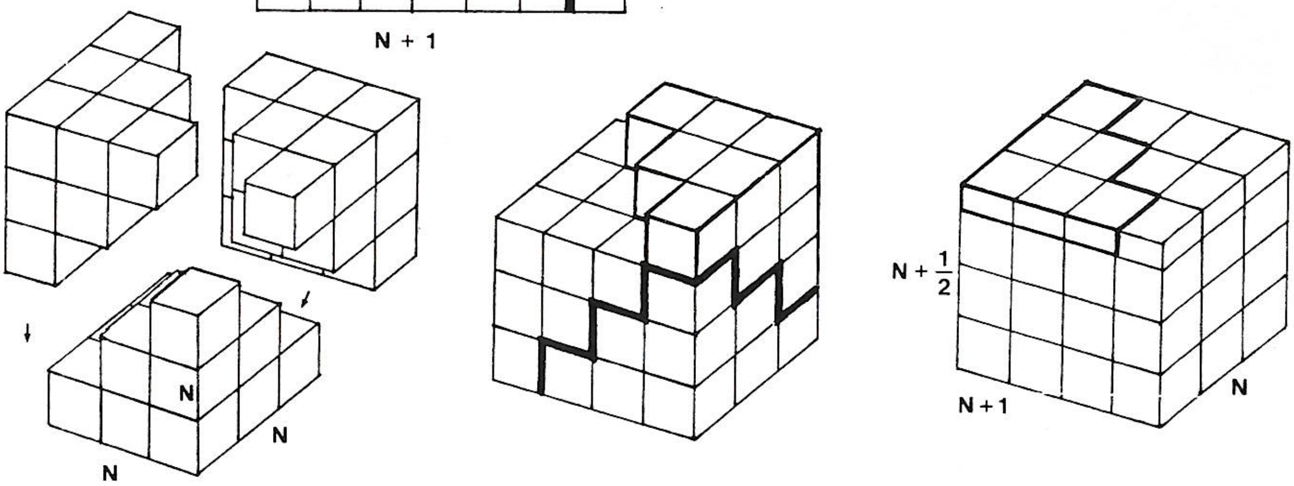
Périodique trimestriel - 12ème année
Octobre 1990 - N° spécial
Bureau de dépôt Mouscron 1

Démonstrations sans paroles

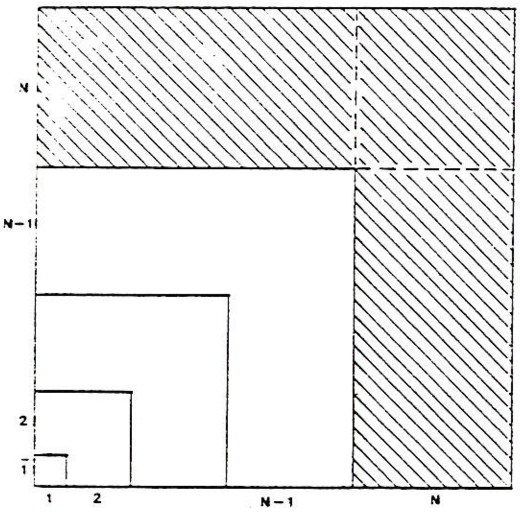
Extrait de Math-Jeunes n ° 36, 1987



$$\boxed{1 + 2 + 3 + \cdots + N = \tfrac{1}{2}(N.(N+1))}$$



$$\boxed{1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + N^2 = \frac{1}{3}(N.(N+1).(N+\frac{1}{2}))}$$



Aire hachurée:

$$\begin{aligned} & 2.(N.(1+2+3+\cdots+N)) - N^2 \\ &= 2.N.\frac{1}{2}.N.(N+1) - N^2 \\ &= N^3 + N^2 - N^2 \\ &= N^3 \end{aligned}$$

$$\boxed{1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + N^3 = (1+2+3+\cdots+N)^2 = \frac{1}{4}.N^2.(N+1)^2}$$

Manières farfelues mais historiques de calculer 3×5

Extrait de Math-Jeunes n ° 35, 1987

La plus ancienne méthode a été retrouvée sur des tablettes babyloniennes. Elle consiste à se servir de tables de carrés. Cette méthode était toujours utilisée par GAUSS dans les années 1800. Elle est basée sur la remarquable (?) formule:

$$a.b = \frac{1}{2}(\frac{1}{2}((a+b)^2 - (a-b)^2))$$

C'est ainsi, que pour calculer 3×5, on écrivait

$a = 3$
$b = 5$
$a + b = 8$ dont le carré (donné par une table) vaut 64
$a - b = 2$ dont le carré est 4
la différence vaut: $64 - 4 = 60$
la moitié de 60 vaut 30
la moitié de 30 vaut 15
donc $3 \times 5 = 15$ (Youpee!)

Datant du premier siècle, une seconde méthode se servait d'une table des cosinus. Cette méthode était toujours à l'honneur dans la première moitié du dix-huitième siècle quand un certain SIMPSON les utilisait (et allait laisser son nom à ces formules de goniométrie). Les mathématiciens arabes l'utilisaient aux alentours de l'an 1000, sous le nom grec de *Prostapherese* (du grec *prosten* (en avant) et *apheresis* (soustraction)). L'astronome danois TYCHO BRAHÉ parle de cette méthode avec beaucoup de respect. Elle est basée sur la relation goniométrique:

$$\cos\alpha.\cos\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha+\beta) + cos(\alpha-\beta))$$

Pour effectuer 3×5, on écrivait:

$3 \times 5 = 0,3 \times 0,5 \times 100$
si $\cos\alpha = 0,3$ alors $\alpha = 72\,°\,32'33"$ (lu dans la table)
si $\cos\beta = 0,5$ la table donne $\beta = 60\,°$
$\alpha + \beta = 132\,°\,32'33"$ dont le cosinus est $-0,67613$
$\alpha - \beta = 12\,°\,32'33"$ dont le cosinus est $0,97614$
la somme algébrique donne :
$-0,67613 + 0,97614 = 0,3000$
la moitié de $0,3$ est $0,15$
$0,15 \times 100 = 15$
donc $3 \times 5 = 15$ (Hoo Kaïdi, hoo kaïda!!)

La troisième technique utilisée pour multiplier date de l'invention des logarithmes et de la rédaction d'une table des logarithmes dits vulgaires (en base 10) par BRIGGS en 1617. On se base ici sur la formule:

$$\log(a.b) = \log a + \log b$$

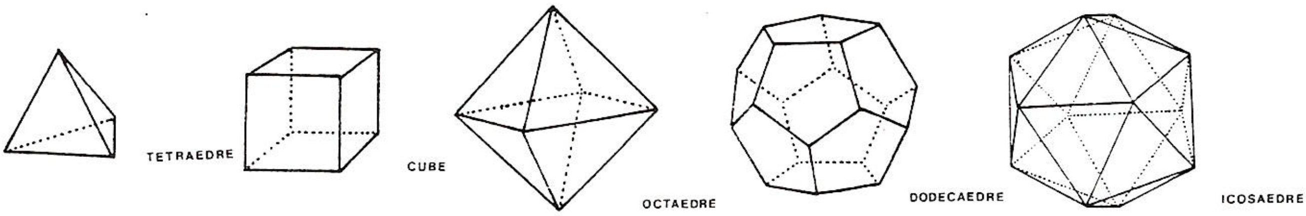
Pour effectuer 3×5, on écrivait:

$\log 3 = 0,47712$
$\log 5 = 0,69897$
$\log(ab) = 0,47712 + 0,69897 = 1,17609$
et la table, lue dans l'autre sens, affirmait que c'était $\log 15$ qui valait $1,17609$
donc $3 \times 5 = 15$. (Waouahhh!!!)

Regardez votre professeur ...s'il a plus de 35 ans, eh bien, il a utilisé cette méthode pour multiplier des grands nombres lorsqu'il était assis à votre place.

Aujourd'hui, vos confortables calculettes utilisent la même stratégie pour calculer le ridicule 3×5 ou pour multiplier deux nombres de 8 chiffres. Mais si 3×5 ne s'est jamais calculé comme nous venons de vous l'exposer, de nombreuses générations ont appris ainsi à multiplier des grands nombres.

Les polyèdres réguliers de Platon

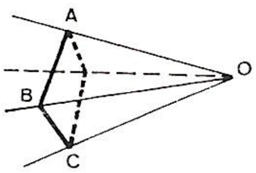


Extrait de Math-Jeunes n ° 11, 1981

Polyèdre: Solide limité par un ensemble fini E de polygones plans, appelés faces, tels que chaque côté d'un polygone quelconque de E soit commun avec un côté d'un autre polygone de E. Les sommets et les arêtes de ces polygones sont les sommets et les arêtes du polyèdre.

Régulier: Un polyèdre est régulier si ses faces sont des polygones réguliers isométriques et si ses angles polyèdres sont égaux.

Angle polyèdre: Angle solide de sommet O



dont une section plane est un polygone ABC... Les angles plans AOB, ..., sont les angles des faces de l'angle polyèdre. La somme des angles des faces d'un angle polyèdre ne peut excéder 360 ° .

5: Pourquoi y a-t-il au moins 5 polyèdres réguliers? Supposons que nous voulions former un polyèdre régulier avec des triangles équilatéraux. Les angles d'un tel triangle valent 60 ° et trois faces au moins sont nécessaires pour créer un angle polyèdre. Il est possible d'en prendre 3, 4, ou 5 mais pas plus. Ainsi existent le tétraèdre, l'octaèdre et l'icosaèdre (respectivement 3, 4 et 5 triangles par angle polyèdre).
Formons à présent nos polyèdres avec des carrés (angle 90 °). La seule possibilité: 3 faces par sommet. Le cube existe (3 carrés par angle polyèdre).
Le polygone suivant est le pentagone dont les angles valent 108 ° : 3 angles de 108 ° forment les faces d'un angle polyèdre et c'est la seule possibilité: voici le dodécaèdre. Les polygones réguliers convexes à 6 côtés et plus, ont un angle égal ou supérieur à 120 ° et ne peuvent donc être les faces d'un polyèdre régulier. Voilà pourquoi PLATON concluait à l'existence de cinq polyèdres réguliers.
Mais les définitions données n'excluent pas la possible existence de polyèdres réguliers dont les faces soient des polygones réguliers étoilés. KEPLER (1571–1630) et POINSOT (1777–1859) devaient trouver et décrire chacun deux autres polyèdres réguliers. Ces découvertes portaient à 9 le nombre des polyèdres réguliers. Pour s'y retrouver, les cinq premiers reçurent le nom de polyèdres réguliers platoniciens et les quatre derniers devinrent les polyèdres de Kepler-Poinsot. On peut prouver que toutes les possibilités sont ainsi épuisées, mis à part les solides composés.
Trois des quatre polyèdres de Kepler-Poinsot sont le petit dodécaèdre étoilé, le grand dodécaèdre et le grand dodécaèdre étoilé, tous trois composés de 12 pentacles. Le quatrième est le grand icosaèdre composé de 20 pentacles.
Terminons pour cette fois ce sujet en signalant qu'Euler (1707-1783) a montré que le nombre de faces d'un polyèdre platonicien, augmenté du nombre de sommets dépassait toujours de deux unités le nombre des arêtes. (Ce résultat étant d'ailleurs vérifié pour tous les polyèdres convexes).
Sur une idée et une traduction de Jean Masai.

Equations Diophantiennes

Extrait de Math-Jeunes n ° 22, 1984

DIOPHANTE d'Alexandrie est un mathématicien grec qui vécut au quatrième siècle de notre ère. De ses écrits subsistent les **Arithmétiques** et le traité des **Nombres polygones**, traduits pour la première fois, du grec en français en 1926, par l'Anversois Paul VER EECKE. Du huitième problème de son livre II: "Partager un nombre carré en deux carrés" naîtra au dix-septième siècle, le "grand théorème" de Fermat.

D'une manière générale, on appelle **équation diophantienne** toute équation de la forme

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$$

où f est un polynôme à coefficients entiers en les variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ dont on recherche les solutions entières (éléments de $\mathbb{Z}$).

Nous allons nous intéresser ici aux plus simples d'entre elles, les équations de la forme

$$ax + by = c$$

avec $a \neq 0$ et $b \neq 0$ et $a, b, c \in \mathbb{Z}$, dont on recherche les solutions entières.

1. Remarquons en premier lieu que si l'on trouve une solution $\begin{cases} x = m \\ y = n \end{cases}$, on en a une infinité $\begin{cases} x = m - bt \\ y = n + at \end{cases}$ où t est un élément quelconque de $\mathbb{Z}$. En effet:

$$ax + by = am - abt + bn + abt = am + bn = c$$

2. Si a, b, et c ne sont pas premiers entre eux, on obtient une équation équivalente (ayant les mêmes solutions) si on divise les deux membres de l'équation par le plus grand commun diviseur de a, b, c.

Nous ne considérerons donc que les cas où a, b, c sont premiers entre eux.

3. Si a et b ne sont pas premiers entre eux, l'équation n'admettra pas de solution en nombres entiers, car un diviseur commun de a et b diviserait ax et by et donc aussi leur somme; il devrait donc diviser c.

4. Plaçons-nous donc dans la situation

a, b, c sont premiers entre eux

a, b sont premiers entre eux.

Si b divise c, on trouve facilement une solution particulière $\begin{cases} x = 0 \\ y = c/b \end{cases}$

5. On peut, sans nuire à la généralité, supposer $a > b$. Si b ne divise pas c, divisons a par b. Soient q le quotient entier et r le reste de la division:

$$a = bq + r \text{ avec } r < b$$

L'équation peut s'écrire

$$(bq + r)x + by = c$$

ou encore

$$b(qx + y) + rx = c$$

Remarquons que b et r sont également premiers entre eux et que b est plus grand que r. En posant

$$\begin{cases} x_1 = qx + y \\ y_1 = x \end{cases} \qquad (1)$$

on obtient une équation du même type que celle à résoudre, mais avec des coefficients plus petits

$$bx_1 + ry_1 = c.$$

Si r divise c, on peut trouver une solution particulière de cette dernière équation. En remplaçant x_1 et y_1 par leurs valeurs dans (1), on pourra déterminer x et y.

Si r ne divise pas c, on recommence.

Ce processus nous conduit nécessairement à rencontrer un reste qui divise c. Vous avez,

en effet, certainement reconnu dans celui-ci le processus de recherche du plus grand commun diviseur de a et b. Comme a et b sont premiers entre eux, 1 est un des restes successifs que l'on rencontrera (si on n'a pas eu la chance de pouvoir s'arrêter avant).
L'équation

$$kx_i + hy_i = c \text{ avec } h \text{ divise } c$$

admet la solution particulière $\begin{cases} x_i = 0 \\ y_i = c/h \end{cases}$
En remontant de proche en proche les changements de variables du type (1) on obtiendra une solution particulière $\begin{cases} x = m \\ y = n \end{cases}$ et donc la solution générale $\begin{cases} x = m - bt \\ y = n + at \end{cases}$

Evolution du nombre de participants à l'Olympiade mathématique depuis 1976 (entre parenthèses, le nombre de demi-finalistes).

	MINI	MAXI
1976		760
1977	893	1130
1978	1012	1271
1979	1204	1447
1980	1390	1778
1981	1482	1849
1982	3021 (570)	3164 (693)
1983	3010 (664)	3292 (689)
1984	4424 (871)	3933 (782)
1985	5563 (926)	4621 (836)
1986	6339 (981)	5146 (871)
1987	7779 (1249)	6285 (1088)
1988	8149 (1125)	6834 (1086)
1989	9140 (1250)	7632 (1140)
1990	10488 (1151)	8236 (1031)

Lauréats belges de l'Olympiade Internationale:
1979 (Londres) X. Gonze (3e prix), 1980 (Luxembourg) B. Steenis (3e prix), 1981 (Washington) B. Steenis et I. Deman (2e prix), 1982 (Budapest) I. Deman (3e prix), 1984 (Prague) M. Lesoinne (3e prix), 1985 (Helsinki) Ph. Alphonse (1er prix) et C. Lion (3e prix), 1986 (Varsovie) F. Van der Plancke (2e prix), C. Blomme et M. Bultreys (3e prix), 1987 (La Havane) V. Lombard (3e prix), 1988 (Canberra) M.-O. Coppens, M. Dekeyser et N. Maskens (3e prix), 1989 (Brunswick) M. Ruiz-Lopez, J. Sax et Ph. Masson (3e prix)

OMB
OLYMPIADE MATHEMATIQUE BELGE

P. Van Elsuwé

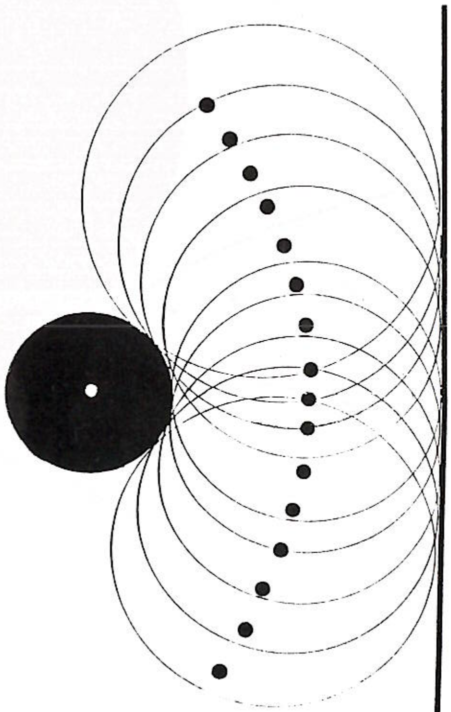
Cette rubrique a pour but d'informer élèves et professeurs sur tout ce qui concerne les Olympiades Mathématiques, belge et internationale. Les abonnés à Math-Jeunes trouveront des renseignements concernant les dates, les statistiques relatives à la participation, les questions et les réponses des éliminatoires et des demi-finales, les critères de sélection pour la finale, les questions et les résultats des finales. Des conseils et des solutions à quelques problèmes seront également proposés. Pour 1991, les dates importantes sont les suivantes:

- Jeudi 15 novembre 1990 : date limite d'inscription
- Mercredi 23 janvier 1991 : éliminatoire
- Mercredi 27 février 1991 : demi-finale
- Mercredi 17 avril 1991 : finale
- Samedi 4 mai 1991 : proclamation des résultats.

La S.B.P.M. publie deux manuels qui reprennent les questions et les réponses des olympiades précédentes :
Olympiades Mathématiques Belges 1 (1976–1981) (120 F)
Olympiades Mathématiques Belges 2 (1982–1987) (200 F)
Les deux fascicules: 260 F (CCP 000-0728014-29).
L'Olympiade Mathématique Internationale a été créée en 1959. La Belgique y participa pour la première fois en 1979. A la suite des événements de la Place Tien An Men, elle ne s'est pas rendue en Chine, pays organisateur de l'Olympiade 1990.

N ° spécial Douzième année 1990

MATH-JEUNES



Math-Jeunes est publié par la Société Belge des Professeurs de Mathématique d'expression française
Rédaction, administration: 14bis Rue des Fontaines, 7061 CASTEAU.

Le courrier et les projets d'articles doivent être envoyés à la rédaction (adresse ci-dessus).

Abonnements:

- Belgique:
  — Groupés (5 exemplaires au moins) : 80 FB
  — Isolés: 120 FB
- Etranger :
  — Par paquet de 5 abonnements: 800 FB
  — Isolés: 240 FB

Anciens numéros encore disponibles:

- Années complètes: 86-87, 87-88, 88-89, 89-90
  Par année: 50 FB
- Numéros isolés: 23, 24, 25, 26, 27, 32,
  Par numéro: 10 FB
  (Etranger: 20 FB)

Les abonnements destinés aux élèves de l'enseignement secondaire sont de préférence pris par l'intermédiaire d'un professeur.
Effectuez vos paiements:

- pour la Belgique: par virement au Compte n ° 001-0828109-96 de *Math-Jeunes*, rue de Trazegnies 87, 6230 Pont-à-Celles
- pour l'étranger: par virement international au Compte n ° 000-0728014-29 de la *S.B.P.M.e.f.*, rue de Trazegnies 87, B 6230 Pont-à-Celles, Belgique, ou par mandat postal international à la même adresse. (Tout chèque bancaire non encaissable en Belgique devra être majoré de 200 FB pour frais d'encaissement.)

Editeur responsable: J.Humier, Clos des Cailles 13, 7700 Mouscron