LE CALCUL ECRIT :

TOUTE UNE HISTOIRE

Patricia Wantiez & Céline Santis

Haute-Ecole de Bruxelles
Institut Pédagogique Defré

wantiez.patricia@gmail.com

Plan de l’exposé

- Introduction
- De la manipulation des quantités en base 10 aux algorithmes de calcul écrit
- A la découverte d’autres techniques de multiplication
- Expérience des « baguettes chinoises » dans une classe de 5^{e} primaire

INTRODUCTION

« Pour diviser 852 par 3, je dispose les deux nombres d'une certaine manière. Puis, je commence par regarder combien de fois 3 rentre dans 8 : la réponse est 2, je l'écris sous le diviseur, puis je refais le produit 2 x 3, ce qui fait 6, et j'inscris ce 6 sous le 8 ; je fais alors 8 – 6, je trace la barre et j'inscris le résultat de la soustraction, 2, en dessous. Ensuite, j'abaisse le 5 de 852, ce qui avec mon 2 fait 25. Je regarde maintenant combien de fois 3 va dans 25 : la réponse est 8, que j'écris à côté du 2 obtenu précédemment, … »

Les motivations

- Offrir aux futurs instituteurs primaire des outils pour une méthodologie efficace des leçons de calcul écrit
- Redonner du sens à des procédures automatisées
- Favoriser la découverte du lien profond entre les algorithmes de calcul écrit et les principes de notre système de numération
- Encourager l’utilisation d’une verbalisation réfléchie des procédures, basée sur les mots de la numération (unités, dizaines,…, échange, groupement,…)

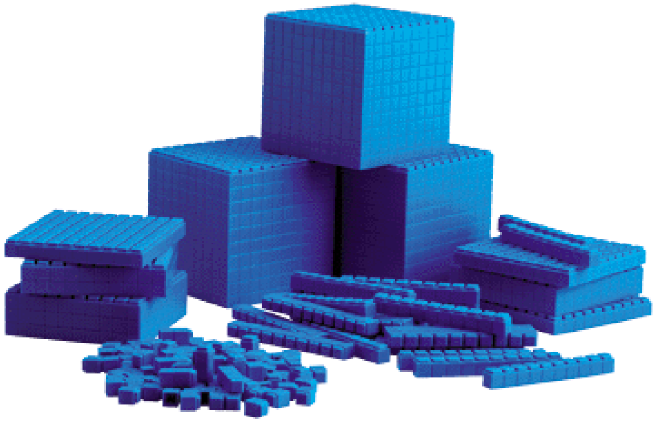
Deux approches sont envisagées

- Utiliser un matériel adéquat afin de mettre en évidence le sens des algorithmes de calcul écrit :
  - Verbaliser et schématiser l'action
  - Associer la manipulation à l'algorithme chiffré
  - Utiliser les mots de la numération
  - Raconter l'*histoire* du calcul écrit
- Découvrir des techniques variées de multiplication écrite :
  - Approche culturelle des mathématiques, science vivante
  - Comprendre les techniques pour approfondir le lien avec la numération
  - Confronter les méthodes, argumenter pour consolider les acquis
  - Rencontre avec l'*Histoire* des mathématiques

DE LA MANIPULATION DES QUANTITES EN BASE 10 AUX ALGORITHMES DE CALCUL ECRIT

Ou comment redonner du sens à une procédure que l'on applique de manière automatique ?

Quel est le sens caché des différentes opérations que l'on effectue avec les nombres écrits dans une certaine disposition ?



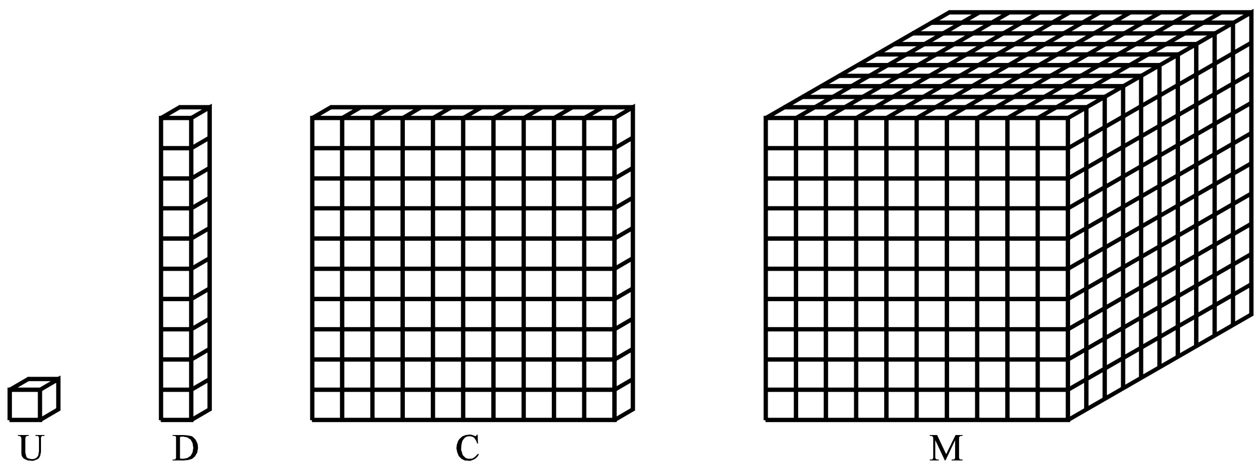
Prérequis pour une approche efficace

- Maîtriser les principes de notre système de numération en base 10 : décomposer les nombres en unités, dizaines, … ; placer les nombres dans l’abaque ; maîtriser les équivalences.
- Connaître le sens des différentes opérations
- Connaître des résultats mémorisés : table d’addition des nombres de 1 à 10 ; table de multiplication des nombres de 1 à 10.
- Avoir rencontré des techniques de calcul mental : décomposer des nombres pour faciliter le calcul ; pratiquer la compensation ; utiliser la commutativité lorsque cela s’avère pertinent ; etc.

Choix d'un matériel

Le support d'un matériel adéquat qui concrétise les différentes unités de notre système de numération permet d'installer des procédures efficaces.

Matériel choisi : matériel de type géométrique « Base 10 »



Méthodologie adoptée

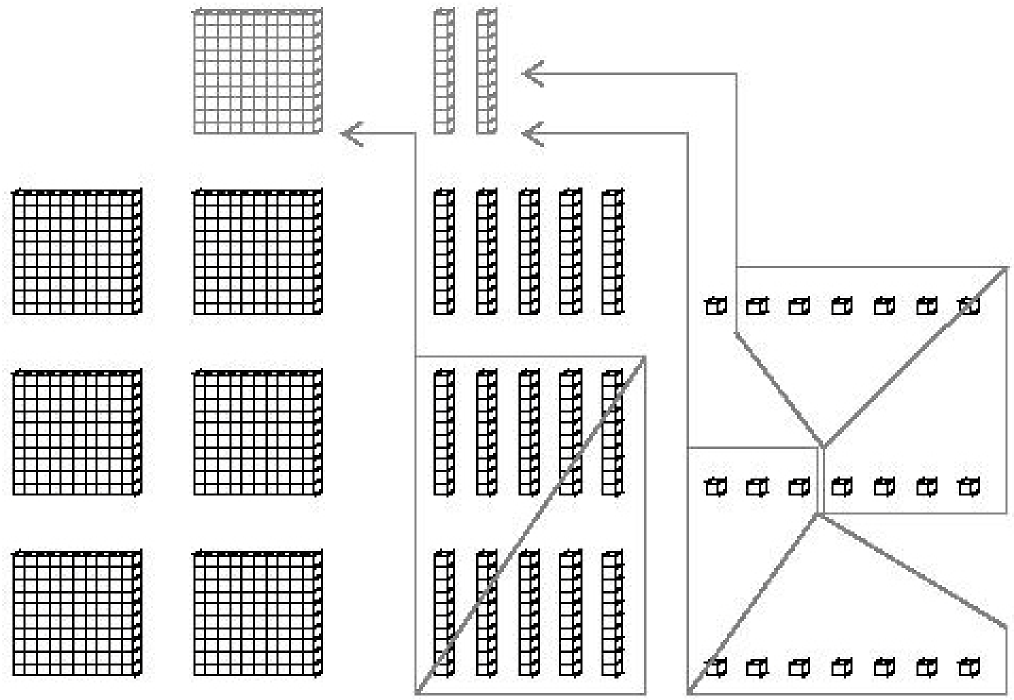
- Utiliser le matériel pour représenter les nombres impliqués dans une opération et utiliser le sens de l’opération pour obtenir son résultat.
- Schématiser les manipulations effectuées
- En parallèle avec la schématisation, verbaliser la procédure en utilisant les mots de la numération : unités, dizaines, …, échange, groupement, …
- Comprendre le passage de la manipulation à l’algorithme chiffré, en expliquant les différentes étapes de la technique. Pour cela, l’algorithme chiffré sera d’abord écrit avec le support d’un abaque.

Un premier exemple : « 257 x 3 »

Action : réaliser 3 fois la quantité 257 représentée en base 10

Schéma :

En gris : les échanges-retenues



Un premier exemple : « 257 x 3 »

Observations :

- La retenue ne peut s'ajouter au chiffre correspondant du premier nombre : on voit bien sur le schéma qu'on a 3 fois 5 dizaines plus encore une dizaine de retenue qui s'ajoute ensuite.

- L'utilisation du matériel se fait essentiellement avec des multiplicateurs à 1 chiffre. Le passage à des multiplicateurs à plus d'un chiffre, et donc le principe du décalage, se fera par *décomposition*. Par exemple :

  436 x 23 = (436 x 20) + (436 x 3) = (436 x 2) x10 + (436 x 3)

  → 2 multiplications partielles (par 2 et 3), et la multiplication par 10 justifie l'ajout du « 0 » ou encore le décalage.

Un deuxième exemple : « 852 : 3 »

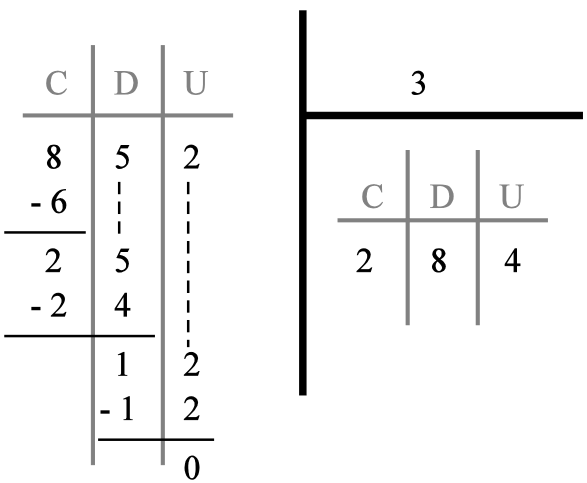
Action : partager en 3 paquets équivalents la quantité 852 représentée en base 10

Verbalisons :

J’ai 8 C, 5 D et 2 U : je peux donc distribuer 2 C et 1 D à chacun, et il me reste 2 C, 2 D et 2 U.
Pour pouvoir continuer, j’**échange** mes 2 C contre 10 D chacune, j’ai donc maintenant 22 D et 2 U.
Je peux distribuer 7 D à chacun, et il me reste 1 D et 2 U.
Je fais à nouveau un **échange** : 1 D contre 10 U, j’ai donc maintenant 12 U.
Je peux enfin distribuer 4 U à chacun.
Au total, chacun a reçu 2 C, 8 D et 4 U, donc 852 : 3 = 284.

Un deuxième exemple : « 852 : 3 »

L'algorithme chiffré devient alors un simple « codage » de la procédure :



Observations :

- La verbalisation tiendra compte de la manipulation : il s'agit ici d'une *division-partage*…
- L'algorithme chiffré implique un ordre dans le calcul, alors que la manipulation permet des allers et retours : des exemples bien choisis montrent que cet ordre implique l'écriture mathématique la plus simple…

Une redécouverte…

L'utilisation de notre numération de position est maintenant confortée par une verbalisation bien choisie !

Nous pouvons raconter l'*histoire* cachée derrière le calcul écrit !

A LA DECOUVERTE D’AUTRES TECHNIQUES DE MULTIPLICATION

« Ce qui est pour nous une évidence : écrire un calcul, effectuer directement les opérations avec l’écriture des nombres, se révèle une pratique tardive et exceptionnelle dans l’histoire des hommes. Ce calcul par l’écrit, et par l’écrit seul, n’a pu se réaliser pleinement que par la numération indienne de position munie d’un zéro, vers le V^{e} siècle de notre ère. Dix figures seulement pour représenter tous les nombres du monde. »

Denis Guedj

Choix de la multiplication

- Existence d’un grand nombre de procédures variées
- Opération suffisamment complexe et ayant de bonnes propriétés (commutativité, associativité, distributivité)
- Les procédés sont suffisamment variés pour permettre une argumentation et une confrontation riche s’appuyant sur des outils variés.
- Aspect ludique de la découverte d’autres procédés, et des procédés en eux-mêmes
- Approche *historique* dans le contexte de différentes cultures

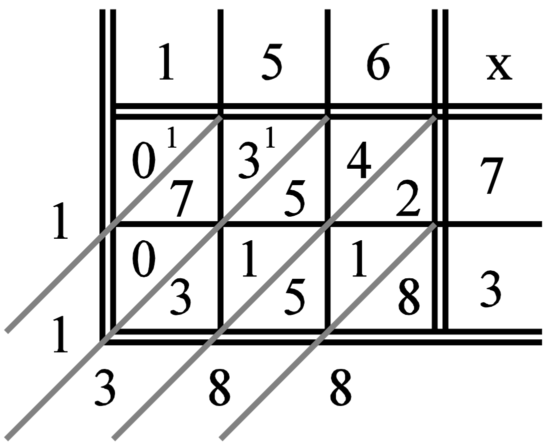
Méthodologie adoptée

Sur base de 6 techniques différentes de multiplication écrite :

- Comprendre une technique particulière sur base de deux exemples résolus
- Vérifier sa compréhension en résolvant deux exemples supplémentaires
- Expliquer la méthode découverte, tout en la justifiant en utilisant des arguments mathématiques précis
- Confronter les différentes techniques présentées, dégager des similitudes et des différences.

Multiplication *per gelosia*

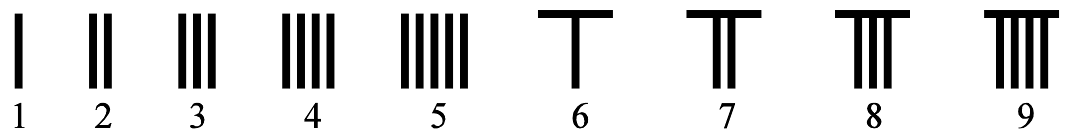
Procédé inventé par les Arabes vers le XIII^{e} siècle, et transmis dès la fin du Moyen-Âge à l’Europe Occidentale



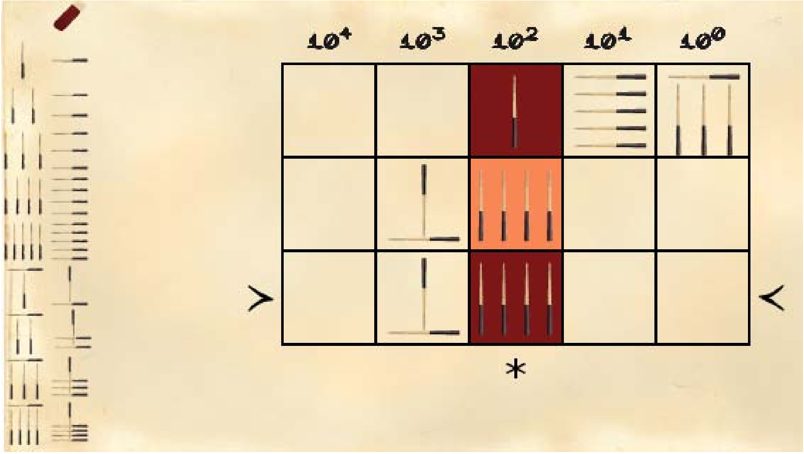
156 x 73 = 11388

Multiplication avec les « baguettes chinoises »

Dès le II^{e} siècle avant notre ère, les chinois utilisaient un système de numération positionnelle, mais ont longtemps ignoré le « 0 ».

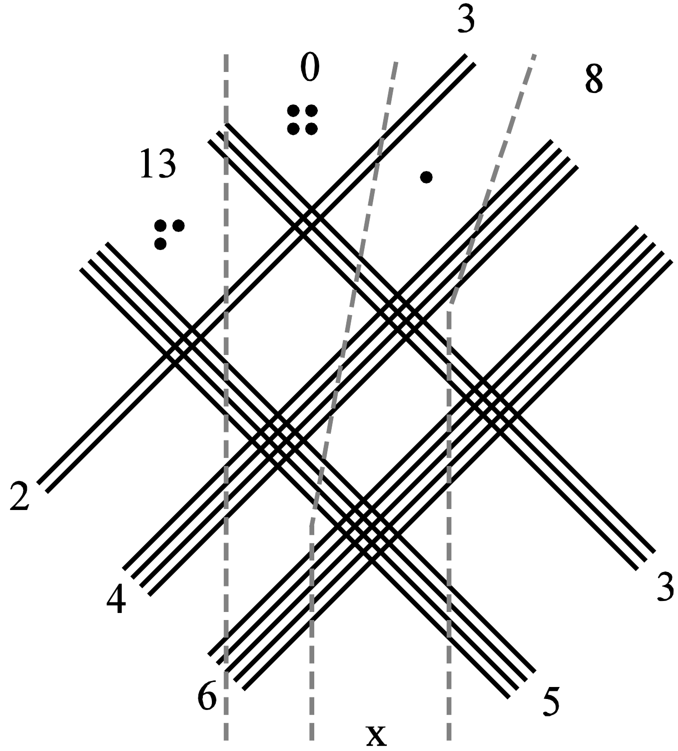


Le calcul se faisait cependant à l’aide de bâtonnets d’ivoire ou de bambou disposés sur une sorte d’échiquier :



Multiplication avec les « baguettes chinoises »

La technique utilisée ici est plutôt « graphique » mais s'inspire de l'idée d'utilisation des baguettes :



246 x 53 = 13038

Multiplication par découpage décimal

La technique est basée sur la décomposition des nombres en base 10, et sur une organisation dans un tableau à double entrée :

x	200	50	8	
400	80000	20000	3200	103200
70	14000	3500	560	18060
3	600	150	24	774
	94600	23650	3784	122034

Il suffit ici de connaître ses tables de multiplication, et de savoir multiplier par 10, 100, …

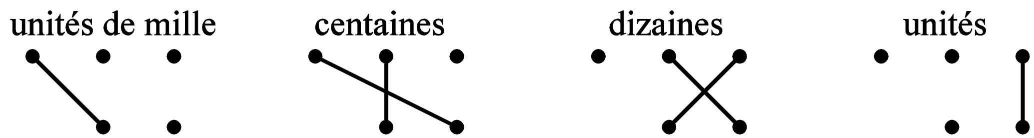
Effectuer les sommes dans les deux sens n'est pas nécessaire mais donne une méthode de vérification.

Multiplication par la méthode « de Fourier »

Du nom du mathématicien français Joseph Fourier (1768-1830) :

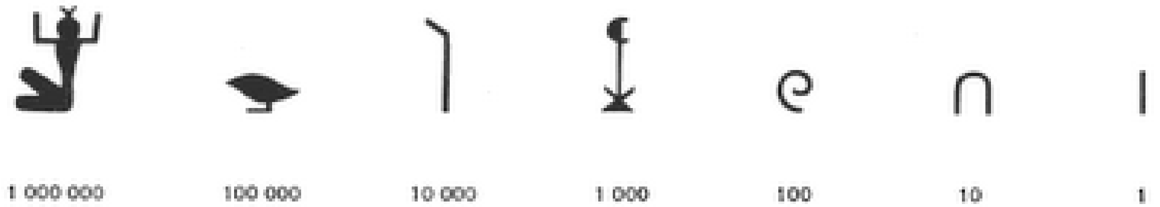
		4	3	7
	x		4	3
			2	1
		2	8	
			9	
	1	2		
	1	2		
1	6			
1	8	7	9	1

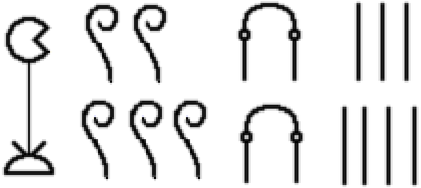
La difficulté consiste à bien placer les différents produits.
Une aide est apportée par le schéma mnémotechnique de Fourier :



Multiplication égyptienne

Le système de numération égyptien était de type « *additif* », et comprenait un symbole pour l’unité, et pour chacune des puissances de 10 jusqu’au million.





Multiplication égyptienne

Le système égyptien permet de facilement additionner ou soustraire deux nombres, et de multiplier un nombre par 10, 100, …

Pour multiplier deux nombres, ils procédaient par duplications successives :

–	1	163	/
–	2	326	/
–	4	652	/
–	8	1304	/
	16	2608	
–	32	5216	/

163 x 47 = 5216 + 1304 + 652 + 326 + 163
= 7661

Multiplication russe

Il s’agit d’une variante de la méthode égyptienne, qui semble avoir été utilisée par les paysans peu lettrés de Russie jusqu’au début du XX^{e} siècle :

*	236	37
	472	18
*	944	9
	1888	4
	3776	2
*	7552	1

236 x 37 = 236 + 944 + 7552 = 8732

Ou encore :

236 x 37 = (236 x 36) + 236
= (472 x 18) + 236
= (944 x 9) + 236
= (944 x 8) + 944 + 236
= (1888 x 4) + 944 + 236
= (3776 x 2) + 944 + 236
= 7552 + 944 + 236

Comparaison des procédés

Deux familles de procédés :

- Techniques reposant sur la décomposition canonique des nombres en base 10, et sur une combinaison astucieuse des produits de nombres-chiffres :
  → traditionnelle, gelosia, chinoise, découpage décimal, Fourier
- Techniques reposant uniquement sur l’addition et la duplication :
  → égyptienne et russe

Comparaison des procédés

Notre algorithme traditionnel est le seul qui utilise l'idée de *retenues*.

L'absence de retenues dans les autres procédés permet de plus facilement s'arrêter en cours de calcul, et de plus facilement repérer les erreurs.

L'organisation en tableau à double entrée apparaît dans 3 techniques : gelosia, chinoise, découpage décimal

→Cette organisation peut être ré-exploitée en début de secondaire pour les produits de polynômes

Comparaison des procédés

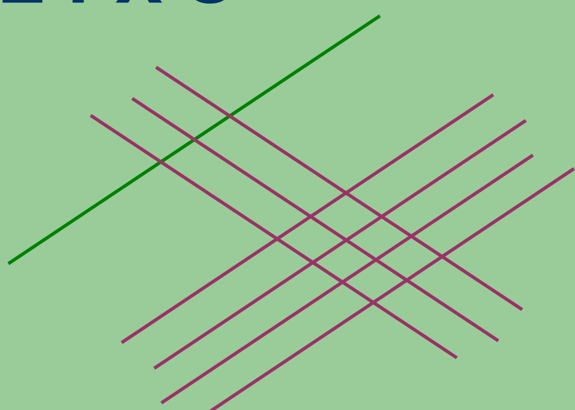
Les méthodes égyptienne et russe permettent de multiplier deux nombres sans connaître ses tables de multiplication !

Toutes les méthodes reposent cependant sur une *décomposition* bien choisie des nombres, et donc sur la *distributivité* de la multiplication sur l’addition.

N’oublions pas l’aspect ludique de certaines procédures, et plus généralement de la découverte de procédés originaux…

La technique des baguettes chinoises

14 x 3



Plan de la présentation

- Introduction
- Cadre de l’expérimentation
- Un matériel et une technique
- Étapes et choix méthodologiques
- Bilan et perspectives

Introduction

- Une nouvelle technique de multiplication
- Introduction ou prolongation du calcul écrit
- Utilisation du vocabulaire adéquat

Cadre de l'expérimentation

- École du Longchamp,
  de la commune d'Uccle
- 21 enfants de 5^{e} primaire
- Séance de découverte d'environ 50 minutes avec prolongements envisageables

Un matériel

→ Baguettes mauves (10) = Unités

→ Baguettes vertes (10) = Dizaines

→ Baguettes turquoises (2) = Centaines

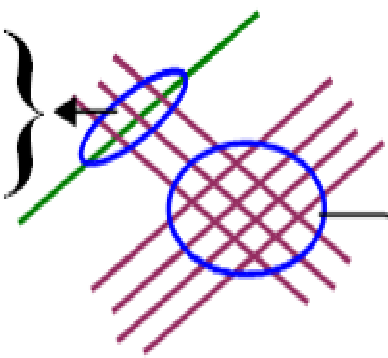
Une technique

14 x 3

D x U

1D x 3U = 3D

= 30U



U x U

4U x 3U = 12U

$\Rightarrow$ 30 + 12 = 42

Étapes et choix méthodologiques

1. Situation historique de la technique
2. Découverte d’un calcul simple
3. Un calcul plus complexe
4. Observation de calculs

Situation historique de la technique

Ouverture culturelle par la présentation d’un court historique et de la manière dont les Chinois représentaient les nombres au IIIe millénaire ACN.

Découverte d’un calcul simple

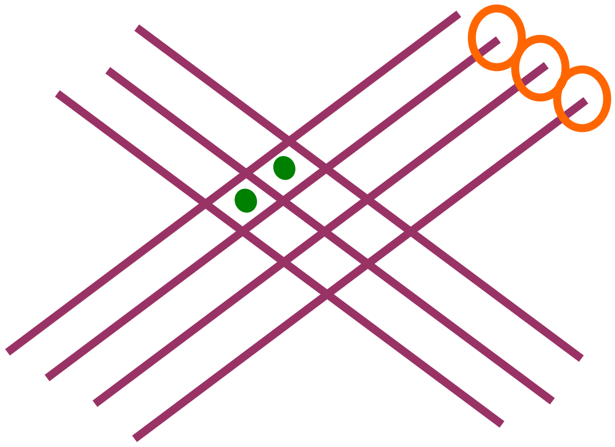
Faire déterminer aux enfants comment les Chinois parvenaient à donner le résultat d’un calcul en ayant comme outil uniquement le dessin des baguettes.

Comment savez-vous donner le résultat en exploitant le dessin?

Découverte d’un calcul simple

Réponses des enfants :

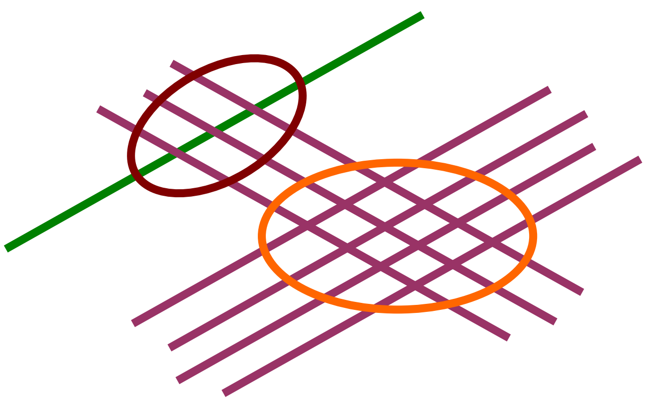
- On compte les bouts des baguettes
- On compte les carrés ou losanges à l’intérieur



Un calcul plus complexe

Découvrir la signification de la couleur des baguettes et la sémantique de leur placement.

Réponse des enfants : Il y a une zone **UxU** et une zone **UxD**



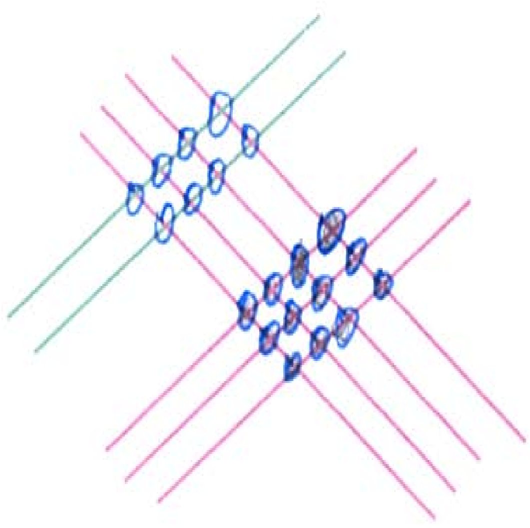
Observation de calculs

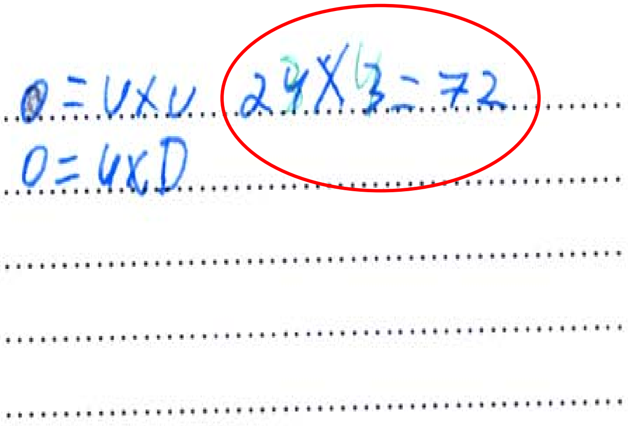
- Observer des calculs représentés par les baguettes.
- Identifier le calcul et les zones de croisements.
- Exécuter le calcul

Observation de calculs

Une erreur rencontrée

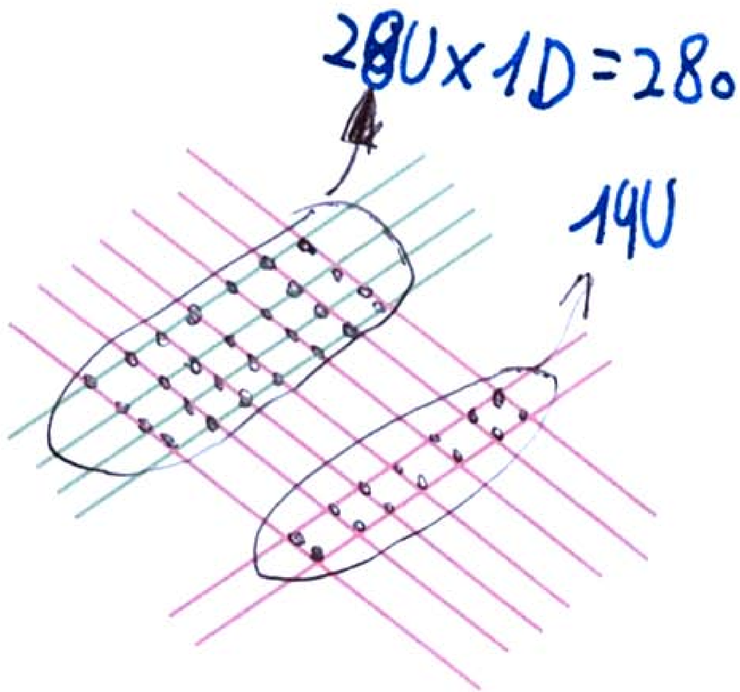
→ 24 x 3 au lieu de 23 x 4





Observation de calculs

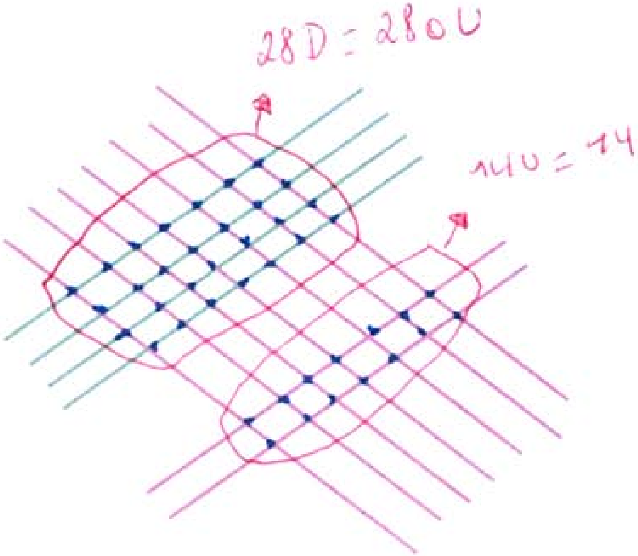
Une autre technique de calcul



42 x 7 = 294

Observation de calculs

Une méthode très structurée



7U x 4D = 280 U
7U X 2U = 14 u
14u   280U
(7U x 2U) + (7u X 4 D)
14U + 280 u = 294 U

Bilan et perspectives

- Bon investissement des enfants
- La verbalisation était le maître mot
- Exploitable dans une 4e année

- Intégration dans un cadre plus global
  → Mise en parallèle avec la technique de calcul écrit traditionnel
- Schématisation et verbalisation des deux techniques

Références utiles

- http://www.segec.be/salledesprofs/

  → site sur lequel on trouve plusieurs séquences de leçons en lien avec le sujet

- Cerquetti-Aberkane F., Rodriguez A., Johan P., « *Les maths ont une histoire - activités pour le cycle 3* », éd. Hachette Education, 1997
- Gaggero A., « *Les réglettes de Neper* », dans *Mathématiques et Pédagogie*, pp. 45-53, SBPMef, 2005
- Guedj D., « *L'empire des nombres* », éd. Gallimard 1996
- Ifrah G., « *Histoire universelle des chiffres* », éd. Robert Laffont, 1994
- Warusfel A., « *Les nombres et leurs mystères* », éd. Seuil, 1961