Société Belge
des Professeurs
de Mathématique
d'expression française

Proclamation des lauréats de la 36e Olympiade Mathématique Belge

Université de Liège

21 mai 2011

La cérémonie de proclamation des résultats de l'Olympiade Mathématique Belge prend traditionnellement ses quartiers dans l'un des centres universitaires de la Communauté française de Belgique. La SBPMef y voit une marque de soutien importante pour le travail inlassable de ses membres — tous bénévoles — au service de l'enseignement des mathématiques.

La SBPMef remercie Monsieur le Professeur Benoît Rittaud, qui a bien voulu honorer la partie académique de la cérémonie en nous parlant de

Le pari de la foi — Pascal et les probabilités

La SBPMef remercie l'Université de Liège pour sa disponibilité et son accueil et en particulier Mme Gentiane Haesbroeck.

SBPMef... Renseignements pratiques

Siège administratif :	SBPMef, Rue du Onze novembre, 24, 7000 Mons.
Secrétariat :	Cristina Carruana, Tél/Fax : 065/31.91.80 Courriel : sbpm@sbpm.be
Compte financier :	000-0728014-29 IBAN BE26 0000 7280 1429 - BIC BPOTBEB1
Site Internet	http://www.sbpm.be
Site de l'OMB	http://omb.sbpm.be/

La SBPMef ... vous connaissez ?

La mathématique est un des facteurs de l'essor économique, technique, scientifique et culturel des sociétés. Son implication croissante dans le développement de toutes les activités humaines, la place qu'elle prend par le truchement de l'informatique, en font un outil indispensable à la compréhension du monde.

La mathématique n'est pas seulement un outil au service des autres disciplines. Elle est aussi un art qui a sa vie propre et son histoire, avec les problèmes épistémologiques qu'elle suscite. Par là, elle a une valeur culturelle incontestable. D'où l'importance de l'objectif que s'est fixé la SBPMef.

La Société Belge des Professeurs de Mathématique d'expression française est née en 1974 à la suite d'une restructuration linguistique de la Société Belge des Professeurs de Mathématique créée elle-même en 1953. Son but principal est de contribuer à la promotion et à l'amélioration de l'enseignement de la mathématique.

Cette société s'est constituée en une a.s.b.l. qui tend à représenter l'ensemble des professeurs de mathématique de la partie francophone du pays. Elle rassemble en effet des enseignants de tous les réseaux (officiel, libre, communal et provincial), et de tous les niveaux d'enseignement (instituteurs, régents, licenciés, professeurs d'écoles supérieures, universitaires ou non universitaires).

Des inspecteurs, des conseillers pédagogiques et des chercheurs participent régulièrement à ses activités. Regroupant ainsi différentes forces de l'enseignement de la mathématique, la SBPMef peut s'affirmer comme un représentant privilégié des professeurs de mathématique auprès du (ou des) Ministère(s) qui ont en charge l'Education, la Recherche et la Formation dans notre Communauté française de Belgique ainsi qu'auprès de divers organismes concernés par l'enseignement des mathématiques. Elle peut ainsi promouvoir, et le cas échéant, défendre valablement sa conception d'un enseignement assurant une large place au développement des capacités créatrices des élèves.

La SBPMef compte plus de 700 membres, professeurs de mathématique en Communauté française de Belgique. Son conseil d'administration comprend 24 membres élus qui se partagent l'organisation des activités principales de la société.

La SBPMef a participé à la création de la *Coordination des Associations Pluralistes de Professeurs* (la CAPP) en Communauté française de Belgique. Elle tient également sa place au niveau de la Communauté mathématique internationale ; elle est membre fondateur de la *Fédération Européenne des Associations de Professeurs de Mathématiques* (la FEAPM).

Épinglons un important travail de publications, certaines périodiques, d'autres, plus ponctuelles, notamment des dossiers d'exploration didactique destinés à aider à la conception et à l'animation de l'enseignement de la mathématique.

L'organisation de l'Olympiade Mathématique pour 26865 étudiants en Communauté française, (éliminatoires dans les établissements, demi-finales régionales et finale communautaire) ne serait possible sans la participation bénévole d'équipes régionales particulièrement dynamiques. Nos meilleurs étudiants participent à l'Olympiade Mathématique Internationale ainsi qu'à l'Olympiade du Bénélux.

Enfin, la Société organise chaque année un Congrès qui se réunit 3 jours fin août alternativement dans des locaux de l'un de nos trois principaux réseaux d'enseignement : conférences, exposés, ateliers et expositions sont au menu.

Depuis 2004, la Société facilite la participation de classes de l'enseignement fondamental et du premier degré au *Rallye Mathématique*.

Les brochures OMB

Les recueils des anciennes questions des Olympiades ont été régulièrement publiés par la SBPMef. Actuellement les brochures *Olympiades Mathématiques Belges — Tome 6 et Tome 7*, collationnées par Pascal Dupont, Benoit Baudelet et Brigitte Bonnewyn sont encore disponibles. Elles reprennent toutes les questions posées lors des deux premières étapes des Olympiades Belges des années 2003 à 2010, ainsi que les questions des finales.

Que ce soit pour les Mini, les Midi ou les Maxi, les questions ont été regroupées par matière et classées selon un ordre de difficulté croissante. On y trouve : Arithmétique et Algèbre, Géométrie, Logique, Analyse combinatoire et Probabilités et Problèmes divers.

La SBPMef vous invite à acquérir ces livres à la fois comme textes de référence pour une préparation à l'Olympiade elle-même, mais également comme recueils d'exercices non triviaux d'application des notions mathématiques enseignées dans les classes.

Le tome 6 est vendu au prix de 6 € (4 € pour les membres), le tome 7 est vendu au prix de 8 € (5 € pour les membres). Les deux tomes sont vendus ensemble au prix de 12 € (7€ pour les membres).

Pour les frais de port ou pour les conditions particulières d'achat par quantité, consultez notre secrétaire Cristina au 065.31.91.80 ou par courrier électronique à l'adresse `sbpm@sbpm.be`.

L'Olympiade Mathématique Belge

C'est en 1976 que la SBPMef a créé une épreuve annuelle : l'Olympiade Mathématique Belge (OMB). Cette extraordinaire aventure s'est poursuivie grâce au formidable travail fourni par l'importante équipe de bénévoles qui gèrent cette compétition - tout à fait amicale - aussi bien sur le plan administratif que sur le plan scientifique, ainsi que grâce à l'enthousiasme des élèves participants et de leurs professeurs qui les incitent à s'inscrire et qui les motivent.

Elle est ouverte à tous les élèves de l'enseignement secondaire francophone belge ou luxembourgeois (tous réseaux, tous niveaux). Dès 1977, elle se subdivise en deux catégories « Mini » et « Maxi » respectivement réservées aux élèves des trois classes inférieures et des trois classes supérieures. En 1996, une catégorie intermédiaire a été créée et désormais, l'Olympiade est subdivisée en 3 catégories : « Mini », « Midi » et « Maxi », destinées respectivement aux élèves des 1^{er}, 2^{e} et 3^{e} degrés de l'enseignement secondaire. Les participants trouvent ainsi dans le questionnaire qui leur est destiné une source de matières qui les ciblent au mieux.

Le jury national est composé de professeurs des enseignements secondaire, supérieur et universitaire ainsi que d'inspecteurs et de conseillers pédagogiques. Il a en charge la responsabilité générale de l'organisation de l'Olympiade et est secondé matériellement par le secrétariat de la SBPMef qui se charge des expéditions. Le jury a plus particulièrement la lourde charge de la création et de la rédaction précise des questions des diverses compétitions.

L'*éliminatoire* se déroule dans chaque école inscrite sous la responsabilité d'un professeur qui réceptionne, début janvier, les questionnaires ; il est chargé de la bonne organisation de l'éliminatoire au sein de son école. Le grand nombre d'inscrits impose de recourir à des questionnaires à choix multiples pour cette éliminatoire (actuellement, une réponse valable à trouver parmi cinq proposées). Le Jury s'efforce néanmoins de donner aux questions un caractère « peu scolaire » de façon à obliger les élèves à faire preuve de leur capacité à appliquer leurs connaissances et à les transposer à des situations nouvelles. La durée de l'épreuve, 90 minutes pour répondre à 30 questions, les oblige à traiter d'abord les questions les plus accessibles. Afin d'éviter les choix au hasard, une réponse erronée à une question est pénalisée par rapport à une absence de réponse. De plus, le Jury prévoit toujours que quelques questions ne soient pas à choix multiples, mais nécessitent une réponse qui est un nombre entier compris entre zéro et mille. Aidé de grilles de correction extrêmement précises, le professeur responsable organise dans son établissement la correction de cette première épreuve. Il envoie les résultats à son secrétaire régional.

Il y a actuellement dix secrétaires régionaux (Arlon, Bruxelles, Charleroi, Liège, Louvain-La-Neuve, Luxembourg, Marche-en-Famenne, Mons, Namur et Tournai) qui ont en charge de lourdes responsabilités. Ce sont eux qui sélectionnent les demi-finalistes sur base des résultats communiqués par les écoles. Ils rédigent les statistiques année par année pour leur région et expédient ces données dans les écoles. Ils convoquent les demi-finalistes et organisent les demi-finales.

Les épreuves de la *demi-finale* sont du même type (la plupart des questions à choix multiples et quelques questions dont la réponse est un nombre entier compris entre 0 et 999) que lors des éliminatoires, mais les questions présentent un degré de difficulté légèrement supérieur. Enfin, les responsables régionaux et leurs équipes corrigent les épreuves et transmettent les résultats au secrétariat national.

C'est ensuite au jury national qu'il appartient de déterminer quels seront les *finalistes*. Ceux-ci sont invités en un lieu central (la plupart du temps à Namur) et travaillent pendant 3 à 4 heures à la résolution de problèmes difficiles. Il est conseillé aux finalistes de mettre par écrit toutes les démarches qu'ils entreprennent car le jury valorise les idées intéressantes, y compris celles dont il n'était pas évident a priori qu'elles n'aboutiraient pas. Le jury national corrige ces épreuves finales et choisit les lauréats. Si la compétition a ainsi successivement un caractère local, puis régional et enfin communautaire, tous les élèves sont néanmoins confrontés aux mêmes difficultés puisque toutes les questions sont préparées par le même jury national.

Depuis quelques années, tous les finalistes sont invités à la proclamation solennelle des résultats et y reçoivent un diplôme de participation ainsi que de nombreux prix. La SBPMef est à ce niveau aidée par les nombreux sponsors qui soutiennent la compétition.

Des prix spéciaux sont en outre attribués aux élèves de 1$^{\text{re}}$, 3$^{\text{e}}$ et 5$^{\text{e}}$ années parvenus en finale et ayant fait montre d'un talent mathématique précoce et prometteur. Le prix Willy Vanhamme récompense la démonstration jugée la plus élégante, toutes catégories confondues.

Le but poursuivi par la SBPMef en organisant l'Olympiade est triple :

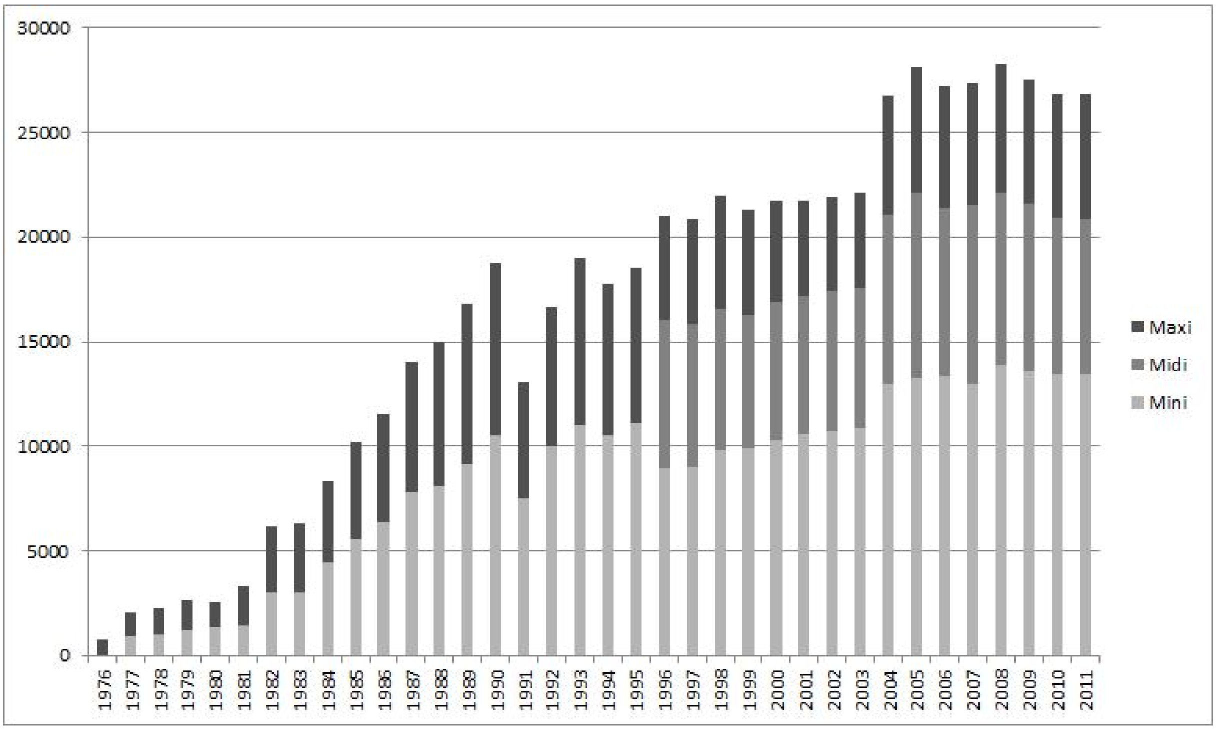
– intéresser les élèves à l'activité mathématique par le biais d'une compétition, d'un grand jeu qui les passionne ;
– mettre l'accent sur l'importance des problèmes dans la formation mathématique des élèves en proposant des problèmes qui font appel à la créativité, à l'imagination, aux capacités réelles de raisonnement ;
– fournir aux professeurs un choix d'exercices non élémentaires, originaux, d'un type différent de ceux figurant dans la plupart des manuels.

L'impact de l'Olympiade sur l'enseignement n'est pas négligeable. On constate en effet que nombre d'enseignants réutilisent des questions posées à l'Olympiade dans le cadre de leurs cours.

En 2011, les chiffres de participation s'établissent comme suit :

	Éliminatoires	Demi-finales	Finales	Lauréats
Mini	13436	1038	42	18
Midi	7421	679	38	13
Maxi	6008	688	33	13
Total	26727	2405	113	44

Évolution de la participation depuis la création des Olympiades.



Commission Olympiade

Responsable général et Secrétariat national : Benoit Baudelet

Trésorier : Francis Buekenhout

Trésorier adjoint : Marc De Neef

Secrétariats régionaux :

Arlon :	Bernadette Petit
Bruxelles :	Brigitte Bonnewyn
Charleroi :	Benoît Steinier
Liège :	Pierre Paquay
Louvain-la-Neuve :	Jean-Pierre Turpin
Luxembourg :	Martine Deprez
Marche-en-Famenne :	Madeleine Lefebvre
Mons :	Henri Pools et Stéphanie Bridoux
Namur :	Pascal Henry
Tournai :	Pierre Dufrasne

Jury national :

Président du Jury : Jean-Paul Doignon.

Secrétaire du Jury : Pascal Dupont.

Membres du Jury : Benoit Baudelet, Brigitte Bonnewyn, Francis Buekenhout, Sylvain Courtois, Géry Debongnie, Marc De Neef, Andrée De Neef-Bogaerts, Pascal Dupont, Nicolas Franco, Charles Leytem, Vincent Malmédy, Nicole Miéwis, Philippe Niederkorn, Lise Ponselet, Marianne Potvliege, Michel Sebille, Émilie Verheylewegen, Pascal Zeihen.

Membres correspondants : Dominique Buset, Yolande Noël, Simone Trompler, Monique Wilmet.

Olympiade Internationale (Belgique) : Gérald Troessaert, avec l'aide de Philippe Niederkorn (sélection et accompagnement).

Olympiade mathématique du Bénélux : Philippe Niederkorn.

Olympiade Internationale (Grand-Duché de Luxembourg) : Charles Leytem

Préparation de la proclamation : Benoit Baudelet, Cristina Carruana, Mady Frémal, Monique Wilmet.

Palmarès : Benoit Baudelet avec le concours de Pascal Dupont et de Mady Frémal.

Contact avec l'Olympiade Néerlandophone (VWO) : Paul Igodt.

Palmarès de la 36e OMB

Lauréats de la Mini-Olympiade 2011

Ont obtenu un premier prix

1	Vlaeminck, J.-Martin	2	CS ND de la Sagesse	Bruxelles
2	Delhez, Louis	2	CS St Benoît-St Servais	Liège

Ont obtenu un deuxième prix

3	Gheeraert, France	2	CS St Benoît-St Servais	Liège
4	Pantalos, Georges	2	École européenne Bxl I	Bruxelles
5	Gouverneur, Amaury	2	Institut Notre-Dame	Arlon

Ont obtenu un troisième prix

6	Bodart, Corentin	2	Collège Sainte Gertrude	Nivelles
	Hoxha, Jean-Luc	2	CS St Benoît-St Servais	Liège
8	Jacquet, Simon	2	Collège du Christ-Roi	Ottignies
9	Kaschten, Vincent	2	CS St Benoît-St Servais	Liège
10	Van Overstraeten, Julien	1	Collège Cardinal Mercier	Braine-l'Alleud

Ont obtenu un quatrième prix

11	Dehombreux, Charles	2	Collège St Stanislas	Mons
	Lardinois, François	2	Athénée Royal de Huy	Huy
	Nothomb, Nicolas	2	Institut Sainte Anne	Florenville
14	Lannoy, Christophe	2	Lycée Emile Jacqmain	Bruxelles
15	Bacq, Noélie	2	Athénée Robert Catteau	Bruxelles
	Bustillo, Pablo	2	Athénée Robert Catteau	Bruxelles
	Carpentier, Romain	2	Athénée Royal	Waterloo
	Galant, Damien	1	Athénée Provincial	La Louvière

Ont obtenu un prix spécial en tant qu'élève de 1re année

Billot, Louis	Collège N-D Bon Secours	Binche
Choi, Yonwoo	British School of Brussel	Tervuren
Galant, Damien	Athénée Provincial	La Louvière
Quaranta, Roberto	Collège Saint Augustin	Enghien
Rigaud, Jérôme	Athénée Royal	Binche
Van Overstraeten, Julien	Collège Cardinal Mercier	Braine-l'Alleud

Ont également participé à la finale

Bernard, Simon	1	CS St Benoît-St Servais	Liège
Compere, Estelle	2	Collège Saint Pierre	Bruxelles
Delhaye, Simon	2	Institut Sainte Marie	Huy
Doyen, Annaelle	2	Collège Sainte Marie	Saint-Ghislain
Fraselle, Justin	2	CS St Benoît-St Servais	Liège
Gasos, Antonio	1	École Européenne Bxl II	Bruxelles
Klinkenberg, Quentin	1	Athénée Royal Thil Lorrain	Verviers
Lambrechts, Gaspard	1	Collège Ste Croix	Hannut
Lejeune, Louis	2	Collège Cardinal Mercier	Braine-l'Alleud
Malherbe, Antoine	1	Athénée Royal Ch. Rogier	Liège
Moskovkina, Mikhail	1	Institut Saint Louis	Namur
Petit, Simon	1	Athénée Royal Chênée	Chênée
Petit Jean, Gilles	2	Lycée Maria Assumpta	Bruxelles
Neve, Gauthier	2	Centre scolaire Saint Michel	Bruxelles
Rauw, Arthur	2	Collège N-D de la Paix	Erpent
Schyns, Bertrand	2	Collège de la Providence	Herve
Spronck Laurine	1	Collège de la Providence	Herve
Sole Gilles	1	Lycée Emile Jacqmain	Bruxelles
Tran, Van Dan	1	Centre scolaire Saint Michel	Bruxelles

Palmarès de la 36e OMB

Lauréats de la Midi-Olympiade 2011

A obtenu un premier prix

1	LECOMTE, VICTOR	4	Lycée Martin V	Louvain-la-Neuve

Ont obtenu un deuxième prix

2	DELHEZ, ELISE	4	CS St Benoît-St Servais	Liège
	IONESCU, ANDREI	4	British School of Brussels	Tervuren
4	HUANG, THOMAS	4	Athénée Royal de Spa	Spa

Ont obtenu un troisième prix

5	NIMAL, GUILLAUME	4	Institut Saint Louis	Namur
6	DEPREZ, XAVIER	4	Athénée Royal	Waremme
7	VERNIER, BENOIT	4	École Européenne Bxl III	Bruxelles

Ont obtenu un quatrième prix

8	MEYER, CHRISTINA	3	Athénée	Luxembourg
9	FUJIHARA, AYAKO	4	British School of Brussels	Tervuren
10	GRUWE, ELISABETH	4	Athénée des Pagodes	Bruxelles
11	DUPUIS, ANTOINE	3	Lycée Français	Bruxelles
12	MIRGAIN, BEN	4	Athénée	Luxembourg
13	SINNER, ERIC	4	Athénée	Luxembourg

Ont obtenu un prix spécial en tant qu'élève de 3e année

Meyer, Christina	Athénée	Luxembourg
Dupuis, Antoine	Lycée Français	Bruxelles
Fabri, Laetitia	Centre scolaire Saint Michel	Bruxelles
Englebert, Gilles	Athénée	Luxembourg
Vandenhove, Pierre	Collège Notre-Dame	Tournai
Bastian, Alain	LMRL	Luxembourg
Piron, François	Athénée Royal	Waremme
Weinand, Bob	Athénée	Luxembourg

Ont également participé à la finale

Belliere, Alice	3	Collège Ste Gertrude	Nivelles
Blondiau, Sébastien	3	Athénée Royal Air Pur	Seraing
Brode-Roger, Ghislain	4	Lycée Français	Bruxelles
Costa, Joël	4	LCE	Luxembourg
Darmstaedter, Alphone	4	C.E.S. ND des Champs	Bruxelles
Delchevalerie, Jérôme	3	Collège St André	Auvelais
Dossogne, Bertrand	4	Athénée Royal Hannut	Hannut
Etienne, Thibault	4	Collège ND de la Paix	Erpent
Gaban, Renaud	3	Lycée Maria Assumpta	Bruxelles
Gueben, Renaud	3	Athénée Royal Spa	Spa
Guedira, Ismaël	3	Institut St Louis	Namur
Hautecoeur, Cécile	4	Collège du Christ-Roi	Ottignies
Leclercq, J.-Baptiste	4	Institut Ste Marie	Huy
Lejeune, Marie	4	Athénée Royal Chênée	Chênée
Marchandise, Antoine	4	DIC Collège	Liège
Radelet, Florian	4	Collège Ste Croix	Hannut
Rubio, Alvaro	4	École européenne	Luxembourg
Thomas, Alexandre	4	Institut de l'Enfant-Jésus	Nivelles

Palmarès de la 36^{e} OMB

Lauréats de la Maxi-Olympiade 2011

Ont obtenu un premier prix

1	Vandenschrick, Adrien	5	Collège Saint Augustin	Enghien
2	Fisch, Alexander	5	École Européenne Bxl III	Bruxelles
	Legat, Benoit	6	Lycée Martin V	Louvain-la-Neuve

A obtenu un deuxième prix

4	Staelens, François	6	Institut Saint-Louis	Namur

Ont obtenu un troisième prix

5	Duvieusart, Arnaud	6	Collège Saint Pierre	Bruxelles
	Genest, Grégoire	6	LAML	Luxembourg
7	Schopen Luca	5	St John's Intern. School	Waterloo
8	Peng-Casavecchia, Sophie	5	Lycée Français de Belgique	Bruxelles

Ont obtenu un quatrième prix

9	Salerno, Jérémy	6	Athénée Royal	Jodoigne
10	Gonissen, Amélie	6	Institut Ste Marie	Arlon
	Urhausen, Jérôme	6	Athénée	Luxembourg
12	Mercenier, Adrien	6	Athénée Royal H^{tes} Fagnes	Malmedy
13	Swaminathan, Krithika	5	St John's Intern. School	Waterloo

Ont obtenu un prix spécial en tant qu'élève de 5^{e} année

Vandenschrick, Adrien	Collège Saint Augustin	Enghien
Fisch, Alexander	École Européenne Bxl III	Bruxelles
Schopen Luca	St John's Intern. School	Waterloo
Peng-Casavecchia, Sophie	Lycée Français de Belgique	Bruxelles
Swaminathan, Krithika	St John's Intern. School	Waterloo
Fabri, Arnaud	Centre scolaire Saint Michel	Bruxelles
Roisin, Arnaud	Collège Sainte Marie	Mouscron

Ont également participé à la finale

Atten, Nicolas	5	Athénée	Luxembourg
Burtin, Elodie	6	Athénée Royal Ch. Rogier	Liège
De Bluts, Donovan	5	Collège Saint Hubert	Bruxelles
De Splentere, Chris	5	Institut SS Pierre et Paul	Florennes
Duhr, Pol	5	Athénée	Luxembourg
Fuentes, Lucas	6	CS St Louis	Waremme
Hoeltgen, Line	5	LAML	Luxembourg
Sanchez Falcon, Alexandre	6	Collège du Christ-Roi	Ottignies
Sedda, Mélanie	6	Centre scolaire Saint Michel	Bruxelles
Simon, Thierry	6	Collège du Christ-Roi	Ottignies
Steyaert, Thomas	5	Lycée Emile Jacqmain	Bruxelles
Tsishyn, Matvei	5	Athénée Robert Catteau	Bruxelles
Van De Wyngaert, Caroline	6	Collège St Stanislas	Mons
Van der Vorst, Thomas	6	Athénée Royal d'Uccle I	Bruxelles
Wilson, Marc	6	LRSL	Luxembourg
Zhang, Jie-Fang	6	Centre scolaire Saint Michel	Bruxelles

Prix Willy Vanhamme

Ce prix récompense la démonstration jugée la plus élégante, toutes catégories confondues.

La lauréate est

Gonissen, Amélie

élève de 6^{e} à l'Institut Sainte Marie d'Arlon.

L'Olympiade Mathématique Internationale

Astana, capitale du Kazakhstan, a accueilli du 2 au 14 juillet 2010 la 51e Olympiade Mathématique Internationale (OMI). Un total de 517 étudiants issus de 97 pays ont participé à l'épreuve.

Comme c'est le cas depuis plusieurs années maintenant, l'équipe belge était composée de six étudiants (trois néerlandophones et trois francophones), sous la conduite de Bart Windels (leader) et de Philippe Nierderkorn (deputy leader).

L'épreuve consiste en la résolution de six problèmes, chaque problème est coté sur sept points. Lorsque les corrections sont terminées, le jury de l'OMI définit les seuils d'attribution des médailles de la façon suivante : la moitié des participants au plus sont médaillés. Parmi les médaillés, un tiers au plus obtiennent une médaille d'argent et un sixième au plus une médaille d'or. Cette clé de répartition a donné les seuils suivants : médaille de bronze 15/42, médaille d'argent 21/42 et médaille d'or 27/42. De plus, une mention honorable est accordée au concurrent non médaillé ayant obtenu le maximum à une question au moins.

Voici les résultats des participants belges :

Stijn Cambie (nl) : 14 points – mention honorable,

Antoine Dujardin (f) : 14 points – mention honorable,

Loïc Burger (f) : 11 points – mention honorable,

Thiebout Delabie (nl) : 10 points – mention honorable,

Tim Seynaeve (nl) : 8 points – mention honorable,

Alexander Fisch (f) : 7 points – mention honorable.

La tradition veut que l'épreuve comporte deux problèmes dits « faciles », deux problèmes de difficulté moyenne et deux problèmes difficiles pour départager les meilleurs. Cette année, les seuils des médailles d'argent et d'or étaient nettement plus bas que l'année passée ce qui semble dire que les problèmes moyens et difficiles étaient plus ardus, tandis que le seuil de la médaille de bronze était plus élevé et donc que les problèmes faciles étaient plus accessibles. Il s'ensuit qu'il fallait les réussir pour entrer dans les médaillés. Si les étudiants belges ont très bien négocié le premier problème (sept maximums), seul Antoine Dujardin a répondu parfaitement au quatrième problème. Pour être médaillé, il fallait bien réussir les problèmes 1 et 4 et grappiller quelques points dans les autres problèmes. Malheureusement, aucun étudiant belge n'a pu réaliser les deux objectifs simultanément.

Un seul étudiant, issu de la République Populaire de Chine, a réalisé le score parfait.

Bien que l'épreuve soit individuelle, il est inévitable de s'intéresser aux résultats globaux des différents pays. La Belgique avec son total de 64 points sur 242 se classe au 60^{e} rang (sur 97) d'un officieux classement inter-nations, ce qui correspond à un net recul (26 places). Le trio de tête est composé de la Chine (197 points), de la Russie (169 points) et des Etats-Unis (168 points). Remarquons que l'année passée, les trois meilleurs résultats dépassaient les 200 points ce qui souligne la difficulté des problèmes proposés.

Nos amis luxembourgeois alignaient une équipe composée de trois étudiants et obtiennent deux mentions honorables : Philippe Schram (14 points, H), Grégoire Genest (10 points, H) et Jérôme Urhausen (7 points).

De nombreuses photos et informations complémentaires peuvent être obtenues en consultant le site `www.imo2010org.kz/`.

L'olympiade internationale 2011 aura lieu à Amsterdam du 12 au 24 juillet 2011.

BxMO 2011 L'Olympiade Mathématique du Bénélux

Depuis 2009 est organisée chaque année une olympiade de mathématiques du Benelux, plus connue sous l'acronyme anglais BxMO (Benelux Mathematical Olympiad). Comme la majorité des autres olympiades « régionales » organisées en Europe et ailleurs, elle a pour but de favoriser les contacts entre les pays participants, tout en offrant à quelques étudiants de chacun d'eux la possibilité d'acquérir, dans le cadre d'une compétition internationale, une expérience qui pourra se révéler précieuse pour une éventuelle participation à l'Olympiade Mathématique Internationale (OMI). L'épreuve proprement dite dure 4h30 et comporte quatre problèmes, notés chacun sur 7 points. Le niveau de difficulté est plus élevé que celui des olympiades nationales des pays participants, mais le questionnaire reste plus abordable que celui d'une OMI. Chaque pays peut envoyer une délégation de 10 candidats et de 3 accompagnateurs.

L'édition 2011 s'est tenue à Luxembourg du 06 au 08 mai. La délégation belge était composée de 5 étudiants francophones (Alexander Fisch, Benoît Legat, François Staelens, Victor Lecomte et Adrien Vandenschrick), de 5 étudiants néerlandophones (Stijn Cambie, Victor De Baere, Tim Seynnaeve, Elias Moons et Dieter Plessers) et de trois accompagnateurs.

Le samedi matin se tenait l'épreuve proprement dite. Ensuite, les étudiants pouvaient se divertir alors que le travail des accompagnateurs commençait : évaluation des copies des étudiants le samedi, puis coordination avec les correcteurs locaux le dimanche afin de fixer les notes obtenues par les participants sur chaque problème. Après une cérémonie de remise des prix en fin d'après-midi, il était déjà temps de rentrer après un week-end bien chargé mais d'autant plus enrichissant.

La Belgique a décroché une médaille d'or (Tim Seynnaeve), une médaille d'argent (Alexander Fisch), deux médailles de bronze (François Staelens et Benoît Legat) ainsi que trois mentions honorables (Stijn Cambie, Victor De Baere et Victor Lecomte).

Voici les quatre problèmes qui ont été posés cette année.

Problème 1.

Un couple d'entiers (m, n) avec $1 < m < n$ est un *couple Benelux* si les deux conditions suivantes sont satisfaites : m a les mêmes diviseurs premiers que n, et $m + 1$ a les mêmes diviseurs premiers que $n + 1$.

(a) Trouver trois couples Benelux (m, n) avec $m \leqslant 14$.

(b) Montrer qu'il existe une infinité de *couples Benelux*.

Problème 2.

Soit ABC un triangle dont I est le centre du cercle inscrit. Les bissectrices AI, BI et CI coupent $[BC]$, $[CA]$ et $[AB]$ en D, E et F, respectivement. La médiatrice du segment $[AD]$ coupe les droites BI et CI en M et N, respectivement. Démontrer que A, I, M et N appartiennent à un même cercle.

Problème 3.

Pour k un nombre entier, soit $c(k)$ le plus grand cube parfait inférieur ou égal à k. Déterminer tous les entiers strictement positifs p tels que la suite suivante est bornée :

$$a_0 = p \qquad \text{et} \quad a_{n+1} = 3a_n - 2c(a_n) \quad \text{pour } n > 0.$$

(Une suite a_0, a_1, ... de réels est dite bornée s'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $n > 0$, $|a_n| \leqslant M$.)

Problème 4.

Abby et Brian jouent au jeu suivant : ils choisissent d'abord un entier positif N. Ensuite, ils écrivent, l'un après l'autre, des nombres sur un tableau. Abby entame le jeu en écrivant le nombre 1. Par après, si l'un vient d'écrire le nombre n, l'autre écrit soit $n + 1$, soit $2n$, pourvu que le nombre ne soit pas plus grand que N. Le joueur qui écrit N au tableau gagne le jeu.

(a) Déterminer quel joueur a une stratégie gagnante pour $N = 2011$.

(b) Trouver le nombre d'entiers positifs $N \leqslant 2011$ pour lesquels Brian a une stratégie gagnante.

Pour plus d'informations : `http://www.wiskundeolympiade.nl/bxmo/`.

AIME

American Invitational Mathematics Examination

La SBPMef a organisé ce jeudi 28 avril 2011 la vingt-neuvième édition de l'American Invitational Mathematics Examination grâce à la collaboration du professeur Steven Dunbar de l'Université de Nebraska, membre de l'American Mathematics Competition, qui a bien voulu nous communiquer les questions. Cette collaboration qui dure depuis de nombreuses années offre à nos meilleurs demi-finalistes l'opportunité de mettre au défi leur talent mathématique.

L'AIME est une compétition sur invitation qui rassemble chaque année aux USA plus de 10000 participants. En Belgique, la SBPMef invite les étudiants ayant obtenu les meilleurs résultats à la demi-finale maxi ainsi que les étudiants de quatrième année ayant obtenu les meilleurs résultats à la demi-finale midi. Cette année, 39 étudiants ont été invités et 37 ont relevé le défi. Il s'agit de 15 questions à résoudre en 3 heures, chaque réponse étant un entier compris entre 0 et 999. Les mathématiques nécessaires à la résolution de ces questions ne dépassent pas le niveau du secondaire ; cependant, elles sont assez difficiles et le hasard ne permet certainement pas de fournir une réponse correcte.

Le meilleur résultat est l'œuvre de Victor Lecomte, élève de quatrième année au Lycée Martin V de Louvain-la-Neuve. Il a résolu correctement neuf problèmes et se voit remettre le prix Claudine Festraets. Claudine Festraets, ancienne présidente de la SBPMef, secrétaire du jury de l'Olympiade, nous a quittés en août 2009. Elle était une « Problem solver » très talentueuse qui a marqué l'histoire des compétitions mathématiques en Belgique.

Vient ensuite Benoît Legat (Lycée Martin V, Louvain-la-Neuve) avec huit réponses correctes.

Quant à Alexander Fisch (École Européenne de Bruxelles III), Alexandre Sanchez Falcon (Collège du Christ-Roi, Ottignies) et Krithika Swaminathan (St John's International School, Waterloo), ils ont obtenu sept points sur quinze.

Voici les quinze problèmes qui leur avaient été proposés :

1. Gary a acheté une grande boisson, mais n'en a bu que $\frac{m}{n}$ où m et n sont des entiers strictement positifs premiers entre eux. Si Gary en avait acheté seulement la moitié et bu deux fois plus, il aurait réduit son gaspillage à $\frac{2}{9}$ de ce qu'il était. Trouver $m+n$.

2. Sur le carré $ABCD$, le point E se trouve sur le côté $\overline{AD}$ et le point F se trouve sur le côté $\overline{BC}$, de sorte que $BE = EF = FD = 30$. Trouver l'aire du carré $ABCD$.

3. Les mesures en degrés des angles d'un polygone convexe de 18 côtés forment une suite arithmétique croissante à valeurs entières. Trouver la mesure en degrés du plus petit angle.

4. Dans le triangle ABC, $AB = \frac{20}{11} AC$. La bissectrice de l'angle A croise $\overline{BC}$ au point D et le point M est le milieu de $\overline{AD}$. Soit P le point d'intersection de $\overline{AC}$ et de la droite BM. Le rapport de CP à PA peut s'exprimer sous la forme $\dfrac{m}{n}$ où m et n sont des entiers strictement positifs premiers entre eux. Trouver $m+n$.

5. La somme des 2011 premiers termes d'une série géométrique est de 200. La somme des 4022 premiers termes de la même série est de 380. Trouver la somme des 6033 premiers termes de la série.

6. On définit un quadruplet ordonné d'entiers (a, b, c, d) comme étant *intéressant* si $1 \leq a < b < c < d \leq 10$ et $a + d > b + c$. Combien y a-t-il de quadruplets ordonnés intéressants ?

7. Ed a cinq billes vertes identiques et une grande quantité de billes rouges identiques. Il dispose les billes vertes et quelques-unes des billes rouges en une rangée et constate que le nombre de billes dont la voisine de droite est de la même couleur qu'elles est égal au nombre de billes dont la voisine de droite est de l'autre couleur. Exemple d'une telle disposition : $VVRRRVVRV$. Soit m le nombre maximal de billes rouges avec lesquelles Ed peut obtenir une telle disposition et soit N le nombre de façons dont Ed peut disposer les $m+5$ billes pour satisfaire à l'exigence. Trouver le reste de la division de N par 1000.

8. Soit z_1, z_2, z_3, ..., z_{12} les 12 zéros du polynôme $z^{12} - 2^{36}$. Pour chaque j, soit w_j, l'un de z_j où $i\,z_j$. Alors la valeur maximale de la partie réelle de $\sum_{j=1}^{12} w_j$ peut s'écrire comme $m + \sqrt{n}$, où m et n sont des entiers positifs. Trouver $m+n$.

9. Soit x_1, x_2, ..., x_6 des nombres réels non négatifs tels que $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6 = 1$ et $x_1x_3x_5 + x_2x_4x_6 \geq \dfrac{1}{540}$. Soit p et q des entiers strictement positifs premiers entre eux tels que $\dfrac{p}{q}$ est la valeur maximale de $x_1x_2x_3 + x_2x_3x_4 + x_3x_4x_5 + x_4x_5x_6 + x_5x_6x_1 + x_6x_1x_2$. Trouver $p+q$.

10. Le rayon d'un cercle de centre O est de 25. La corde $\overline{AB}$ de longueur 30 et la corde $\overline{CD}$ de longueur 14 se coupent au point P. La distance entre les milieux des deux cordes est de 12. La quantité OP^2 peut être représentée par $\dfrac{m}{n}$, où m et n sont des entiers strictement positifs premiers entre eux. Trouver le reste de la division de $m+n$ par 1000.

11. Soit M_n la matrice $n \times n$ dont les éléments sont définis comme suit : pour $1 \leq i \leq n$, $m_{i,i} = 10$, pour $1 \leq i \leq n-1$, $m_{i+1,i} = m_{i,i+1} = 3$; tous les autres éléments de M_n

sont nuls. Soit D_n le déterminant de la matrice M_n. Alors la somme $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{8\,D_n+1}$ peut être représenté par $\dfrac{p}{q}$, où p et q sont des entiers strictement positifs premiers entre eux. Trouver $p+q$.

12. Trois pays différents envoient chacun trois délégués à une réunion internationale. Les neufs délégués choisissent au hasard des chaises autour d'une table ronde permettant d'asseoir neuf personnes. Posons que la probabilité que chaque délégué s'assoit à côté d'au moins un délégué d'un autre pays est $\dfrac{m}{n}$, où m et n sont des entiers strictement positifs premiers entre eux. Trouver $m+n$.

13. Le point P se trouve sur la diagonale AC du carré $ABCD$ avec $AP > CP$. Soit O_1 et O_2 les centres des cercles circonscrits aux triangles ABP et CDP respectivement. Etant donné que $AB = 12$ et $\angle O_1PO_2 = 120°$, alors $AP = \sqrt{a}+\sqrt{b}$ où a et b sont des entiers strictement positifs. Trouver $a+b$.

14. Il existe N permutations $(a_1, a_2, ..., a_{30})$ de $1, 2, ..., 30$ telles que, pour $m \in \{2, 3, 5\}$, m divise $a_{n+m} - a_n$ pour tous les entiers n tels que $1 \leq n < n+m \leq 30$. Trouver le reste de la division de N par 1000.

15. Soit $P(x) = x^2 - 3x - 9$. On choisit au hasard un nombre réel x dans l'intervalle défini par $5 \leq x \leq 15$. La probabilité que $\lfloor\sqrt{P(x)}\rfloor = \sqrt{P(\lfloor x\rfloor)}$ soit égale à $\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}-d}{e}$, où a, b, c, d, e sont des entiers strictement positifs et aucun des nombres a, b, c n'est divisible par le carré d'un nombre premier. Trouver $a+b+c+d+e$.

Conseil d'administration de la SBPMef

Conseil d'administration

Benoit Baudelet, Micheline Denis-Pecheur, Éric Deridiaux, Pascal Dupont, Dimitri Foucart, Mady Frémal, Christine Ginoux, Renée Gossez-Ketels, Valérie Henry, Michel Herman, Jean-Paul Houben, Dany Legrand, Martine Machtelings, Christian Michaux, Jules Miéwis, Nicole Miéwis, Chantal Randour, René Scrève, Philippe Skilbecq, Gérald Troessaert, Yolande Vankaster, Sébastien Verspecht, Thierry Veyt, Monique Wilmet.

Bureau exécutif de la Société

Président de la SBPMef :	Gérald Troessaert
Vice-Présidents :	Benoit Baudelet
	René Scrève
Administrateur délégué :	Christian Michaux
Secrétaire :	Mady Frémal
Trésorier :	Dimitri Foucart

Responsables d'activités

Directeur de *Losanges* :	Michel Herman
Directeur de *SBPM-Infor* :	Renée Gossez
Responsable Olympiade Nationale :	Benoit Baudelet
Responsable Olympiade Internationale :	Gérald Troessaert
Responsable Test AIME :	Gérald Troessaert
Responsable Rallye Mathématique :	Philippe Skilbecq
Présidente de la Commission Congrès :	Micheline Denis-Pecheur
Représentant de la SBPMef à la CAPP :	René Scrève
Responsable des Relations publiques :	René Scrève

37e Congrès de la SBPMef

Nous avons le plaisir de vous inviter au 37e Congrès de la SBPMef qui se tiendra du mardi 23 au jeudi 25 août 2011 à Bastogne, dans les locaux de l'Athénée Royal de Bastogne-Houffalize (Avenue de la Gare 12, 6600 Bastogne), sur le thème

« Les mathématiques font voyager ».

Comme lors des années précédentes, ce 37e congrès est ouvert à tous les enseignants intéressés par l'apprentissage des mathématiques, quel que soit le niveau où ils enseignent, depuis le fondamental jusqu'au supérieur.

Ces rencontres leur offrent l'occasion de s'exprimer et de transmettre leur point de vue sur des sujets divers, liés ou non aux programmes de mathématique.

La participation au Congrès de la SBPMef peut être reconnue comme journée(s) de formation interréseaux par l'Institut de la Formation en cours de Carrière (IFC).

Le programme détaillé de ces journées, les indications sur les contenus des interventions, les niveaux auxquels elles se rapportent, les prix des repas et du logement éventuel pourront être consultés prochainement sur le site de la SBPMef.

http://www.sbpm.be

Questions de la finale Mini 2011

Question 1

Sur cette petite ile vivent trois populations de canards : des fuligules milouinans, des garrots sonneurs et des harles huppés ; ci-dessous, il ne sera question que des femelles. Chaque année, en avril, les fuligules pondent 5 œufs, les garrots 3 œufs et les harles 1 œuf. Cette année, le nombre de harles vaut les deux tiers de la somme du nombre de fuligules et du nombre de garrots ; en outre, il y a un total de 495 fuligules et garrots, qui ont pondu 2011 œufs.
Combien y a-t-il de femelles de chaque espèce avant l'éclosion des œufs ?

Solution de Louis Delhez :

Soit f le nombre de fuligules milouinans, g le nombre de garrots sonneurs et h le nombre de harles huppés.

$$\left.\begin{aligned} h &= \tfrac{2}{3}\cdot(f+g) \\ f+g &= 495 \end{aligned}\right\} \Longrightarrow h = \frac{2}{3}\ .\ 495 = 2\ .\ 165 = 330$$

Il y a 330 harles.

$$\left.\begin{array}{l} f+g=495 \\ \text{les fuligules et garrots ont pondu 2011 œufs} \\ \text{les fuligules pondent 5 œufs, les garrots pondent 3 œufs} \end{array}\right\} \Longrightarrow 5f+3g=2011$$

$f+g=495 \Longleftrightarrow g=495-f$
Si on remplace dans $5f+3g=2011$

$$\begin{aligned} \Longrightarrow\quad & 5f+3(495-f)=2011 \\ & 5f+1485-3f=2011 \\ & 2f=2011-1485 \\ & 2f=526 \\ & f=263 \end{aligned}$$

Il y a 263 fuligules.

$$\left.\begin{aligned} f &= 263 \\ f+g &= 495 \end{aligned}\right\} \Longrightarrow g = 495-263 = 232$$

Il y a 232 garrots.
Il y a 330 harles huppés, 263 fuligules milouinans et 232 garrots sonneurs avant l'éclosion des œufs.

Question 2

(a) Le nombre 999 est multiplié par 198, puis tous les chiffres de ce produit sont additionnés. Quelle est leur somme ?

(b) Le nombre 9999 est multiplié par 198, puis tous les chiffres de ce produit sont additionnés. Quelle est leur somme ?

(c) Le nombre $\underbrace{99\ldots999}_{2011 \text{ chiffres } 9}$ est multiplié par 198, puis tous les chiffres de ce produit sont additionnés. Quelle est leur somme ?

Solution inspirée de celle d'Amaury Gouverneur

(a) Le produit de 999 par 198 vaut $198 \times 999 = 197802$. La somme des chiffres de ce produit vaut donc $1 + 9 + 7 + 8 + 0 + 2 = 27$.

(b) Le produit de 9999 par 198 vaut $198 \times 9999 = 1979802$. La somme de ses chiffres est $1 + 9 + 7 + 9 + 8 + 0 + 2 = 36$.

(c) Le produit de $\underbrace{99\ldots999}_{2011 \text{ chiffres } 9}$ par 198 vaut

$$\begin{aligned}\underbrace{99\ldots999}_{2011 \text{ chiffres } 9} \times 198 &= 1\underbrace{00\ldots000}_{2011 \text{ chiffres } 0} \times 198 - 198\\ &= 198\underbrace{00\ldots000}_{2011 \text{ chiffres } 0} - 198\\ &= 197\underbrace{99\ldots999802}_{\substack{2011 \text{ chiffres différents}\\ \text{et } 2011-3 \text{ chiffres } 9,\\ \text{soit } 2008 \text{ chiffres } 9}}\end{aligned}$$

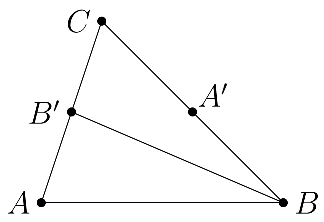
La somme de tous les chiffres est donc égale à

$$1 + 9 + 7 + (2008 \times 9) + 8 + 0 + 2 = 27 + 2008 \times 9 = 27 + 18072 = 18099.$$

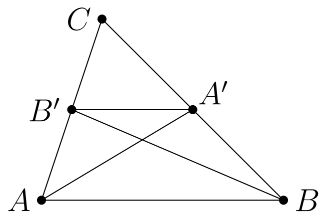
Question 3

1. Le milieu du côté $[BC]$ est nommé A' et celui du côté $[AC]$, B'. Comparer les aires des triangles $AA'B$ et $AB'B$. En déduire une propriété des droites AB et $A'B'$. Enoncer de manière générale la propriété ainsi établie.
2. Soit encore C' le milieu de $[AB]$. La parallèle AA' menée par C' coupe $A'B'$ en P. Comparer les longueurs des côtés du triangle CPC' aux longueurs des médianes du triangle ABC.

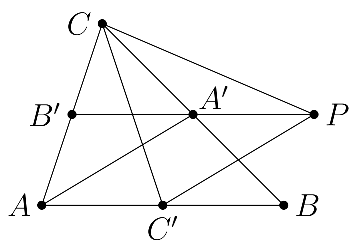
Solution inspirée des réponses de Louis Delhez et Christophe Lannoy

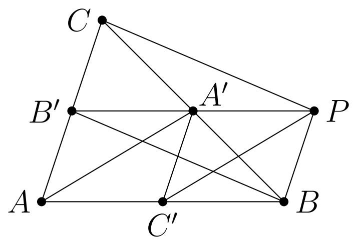


a) Le triangle ABB' a même hauteur issue de B que celle du triangle ABC et une base égale à la moitié de celle du triangle ABC. Ainsi l'aire du triangle ABB' vaut la moitié de l'aire du triangle ABC. De même, l'aire du triangle ABA' vaut la moitié de l'aire du triangle ABC. Les triangles ABB' et ABA' ont donc même aire.
Ces deux triangles ont même base $[AB]$. Leurs hauteurs, c.-à-d. les distances de A' à AB et de B' à AB, sont donc égales. Il en résulte que $A'B'$ est parallèle à AB. La propriété ainsi déduite s'énonce : La droite qui joint les milieux de deux côtés d'un triangle est parallèle au troisième côté.



b) Soit le triangle $CC'P$ où P est l'intersection de $A'B'$ avec la parallèle à AA' par C'. Montrons que les longueurs des médianes du triangle ABC sont égales aux longueurs des côtés du triangle $CC'P$.
C'est évident pour CC' (première médiane).
Par la propriété a) nous avons $PA' \,//\, C'A$ et par hypothèse $C'P \,//\, AA'$. Donc $AA'PC'$ est un parallélogramme. D'où $|AA'| = |C'P|$ (deuxième médiane).
Le parallélogramme $AA'PC'$ donne aussi $|C'A| = |PA'|$. D'autre part, par la propriété a), il vient $C'A' \,//\, AB'$ et $A'B' \,//\, C'A$, d'où $A'C'AB'$ est un parallélogramme et $|A'B'| = |C'A| = |PA'|$. Par conséquent A' est milieu de $[PB']$. D'autre part, A' est milieu de $[BC]$. Le quadrilatère $BPCB'$ est donc un parallélogramme puisque ses diagonales se coupent en leur milieu. D'où $|BB'| = |PC|$ (troisième médiane).





Question 4

Si n est un naturel non nul, $n!$ désigne le produit $1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times n$.

(a) Que vaut $5!$? Par combien de zéros se termine l'écriture décimale de ce nombre ?

(b) Par combien de zéros se termine l'écriture décimale de $25!$?

(c) Existe-t-il un naturel n pour lequel l'écriture décimale de $n!$ se termine par 5 zéros exactement ?

(d) Par combien de zéros se termine l'écriture décimale de $2011!$?

Solution de Jean-Martin Vlaeminck :

(a) $5! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 = 120$. L'écriture décimale de $5!$ se termine donc par un zéro.

(b) $25! = 1 \times 2 \times \ldots \times 24 \times 25$. Il suffit de compter combien il y a de facteurs 5 (puisque le nombre de facteurs 2 est supérieur) : il y en a 6 : un pour le facteur 5, un pour le facteur 10, un pour le facteur 15, un pour le facteur 20 et deux pour le facteur 25.

(c) Dans le raisonnement précédent, on a montré que l'écriture décimale de $25!$ se termine par 6 zéros. Un raisonnement identique montre que l'écriture décimale de $24!$ se termine par 4 zéros (les deux facteurs 5 du facteur 25 étant absents). Il n'y a donc pas de nombre naturel n dont l'écriture décimale de $n!$ se termine par 5 zéros exactement.

(d) Les facteurs 2 étant plus nombreux que les facteurs 5 dans le calcul de $2011!$, il suffit de compter le nombre de facteurs 5. Il y a dans ce produit 402 facteurs qui sont multiples de 5. Parmi ces facteurs,
   - 80 sont multiples de 25, chacun d'entre eux engendre un zéro supplémentaire à la fin de l'écriture décimale de $2011!$;
   - 16 sont multiples de 125, chacun d'entre eux engendre un zéro supplémentaire à la fin de l'écriture décimale de $2011!$;
   - 3 sont multiples de 625, chacun d'entre eux engendre un zéro supplémentaire à la fin de l'écriture décimale de $2011!$.

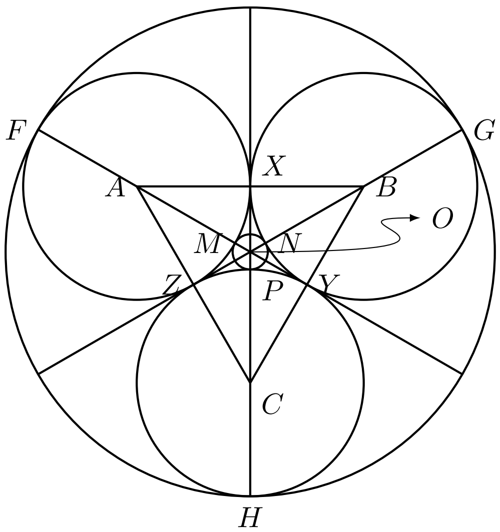
   Au final, l'écriture décimale de $2011!$ se termine donc par $402 + 80 + 16 + 3 = 501$ zéros.

Questions de la finale Midi 2011

Question 1

Soit C_1, C_2 et C_3 trois cercles de même rayon r, tangents deux à deux. Combien existe-t-il de cercles tangents à ces trois cercles ? Quels sont leurs rayons ?

La plupart des candidats ont choisi la même méthode de résolution ; c'est cette méthode qui est décrite ci-dessous.



Citons d'abord un résultat préliminaire ; puisque le rayon issu d'un point de tangence à un cercle est perpendiculaire à la tangente en ce point et que deux cercles tangents ont la même tangente en ce point, les centres des cercles et le point de tangence sont alignés. Le triangle ABC est donc équilatéral de côté $2r$ et les points X, Y et Z en sont les milieux des côtés. Les droites AY, BZ et CX sont donc à la fois les hauteurs, médianes, médiatrices et bissectrices du triangle ABC. Par le résultat préliminaire, le centre d'un cercle tangent aux cercles donnés est équidistant à leur centre ; c'est donc O. Par un point donné, il existe deux cercles tangents à un cercle donné et par symétrie, ces deux cercles sont tangents aux trois de départ et les points de tangence des deux cercles avec chacun des trois cercles de départ ainsi que les centres concernés sont alignés. Le petit sera de rayon r_1 et le grand de rayon r_2. Une médiane d'un triangle équilatéral de côté c mesurant $\frac{c\sqrt{3}}{2}$, $|AY| = |BZ| = |CX| = r\sqrt{3}$. Puisque les médianes se coupent aux deux tiers de leur longueur, $|OB| = \frac{2r\sqrt{3}}{3}$ et $OB = r_1 + r$. De plus, $|OG| = r_2 = r_1 + 2r$. Ces deux équations nous donnent $r_1 = \frac{2r\sqrt{3}}{3} - r$ et $r_2 = \frac{2r\sqrt{3}}{3} + r$.

Question 2

Déterminer tous les couples (x, y) d'entiers tels que $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{2011}$.

Solution de Huang Shihong :

Les conditions d'existence sont : $x \neq 0$ et $y \neq 0$. Si ni x ni y n'est nul,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{2011} \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{x+y}{xy} = \frac{1}{2011} \\
&\Leftrightarrow \quad (x+y) \cdot 2011 = xy \\
&\Leftrightarrow \quad 0 = xy - 2011x - 2011y \\
&\Leftrightarrow \quad xy - 2011x - 2011y + 2011^2 - 2011^2 = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad (x - 2011)(y - 2011) = 2011^2.
\end{aligned}$$

Comme 2011 est un nombre premier, la dernière égalité se décompose en les six cas suivants :

$$S_1 : \begin{cases} x - 2011 = 2011 \\ y - 2011 = 2011 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4022 \\ y = 4022 \ ; \end{cases}$$

$$S_2 : \begin{cases} x - 2011 = 1 \\ y - 2011 = 2011^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2012 \\ y = 2011^2 + 2011 = 2012 \cdot 2011 = 4\,046\,132 \ ; \end{cases}$$

$$S_3 : \begin{cases} x - 2011 = 2011^2 \\ y - 2011 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4\,046\,132 \\ y = 2012 \ ; \end{cases}$$

$$S_4 : \begin{cases} x - 2011 = -2011 \\ y - 2011 = -2011 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \ ; \end{cases} \qquad \text{ceci est impossible}\,;$$

$$S_5 : \begin{cases} x - 2011 = -1 \\ y - 2011 = -2011^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2010 \\ y = -4\,042\,110 \ ; \end{cases}$$

$$S_6 : \begin{cases} x - 2011 = -2011^2 \\ y - 2011 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -4\,042\,110 \\ y = 2010. \end{cases}$$

En conclusion, cinq couples (x, y) conviennent : $(4022, 4022)$, $(2012, 4\,046\,132)$, $(4\,046\,132, 2012)$, $(2010, -4\,042\,110)$ et $(-4\,042\,110, 2010)$.

Question 3

Soit a et b deux réels non nuls de somme strictement positive. Montrer que

$$\frac{a}{b^2}+\frac{b}{a^2}\geqslant\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$$

et déterminer dans quels cas il est vrai que

$$\frac{a}{b^2}+\frac{b}{a^2}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$$

Solution de Andreï Ionescu :

En réduisant

$$\frac{a}{b^2}+\frac{b}{a^2}\geqslant\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$$

au même dénominateur, on a

$$\frac{a^3+b^3}{a^2b^2}\geqslant\frac{a+b}{ab}$$

D'où

$$\frac{a^3+b^3-(a+b)ab}{a^2b^2}\geqslant 0$$

ou encore

$$a^3+b^3-(a+b)ab\geqslant 0$$

puisque $a^2b^2>0$. En factorisant, on obtient

(1) $$(a+b)(a^2-ab+b^2)-(a+b)ab\geqslant 0 \iff (a+b)(a-b)^2\geqslant 0$$

Puisque par hypothèse $a+b>0$, cette dernière inégalité est vraie.

Pour que l'inégalité devienne égalité, il faut que dans (1), on ait

$$(a+b)(a-b)^2=0 \iff (a-b)^2=0 \quad \text{car } a+b>0$$

et donc $a=b$.

Question 4

Dans un triangle ABC, la bissectrice de l'angle B coupe $[AC]$ en D. Le cercle circonscrit au triangle ADB coupe $[BC]$ en F et le cercle circonscrit au triangle BDC coupe $[AB]$ en E. Démontrer que $|AE| = |CF|$.

Solution de Elise Delhez :

$[BD$ étant la bissectrice de l'angle $\widehat{ABC}$, on peut dire que $\widehat{ABD} = \widehat{DBC} = \alpha$.

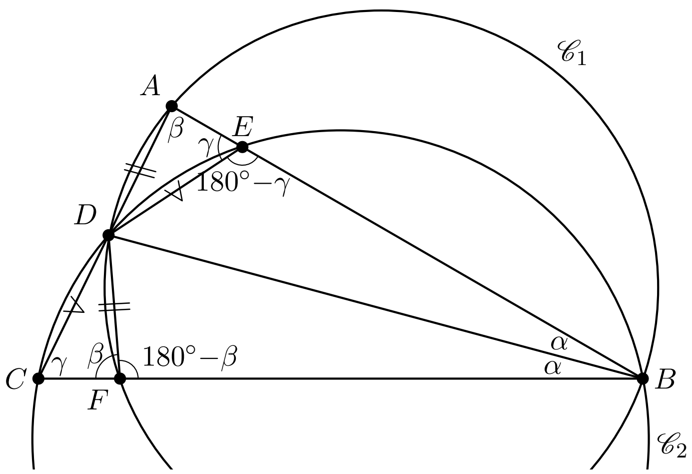
Ce sont des angles inscrits. Or, on sait que les angles de même amplitude inscrits dans un même cercle interceptent des arcs de même longueur et que des arcs de même longueur soutiennent des cordes de même longueur. Dans $\mathscr{C}_2$, on a donc $\overline{CD} = \overline{DE}$, et dans $\mathscr{C}_1$, on a $\overline{FD} = \overline{AD}$.

Si on pose $\widehat{CAB} = \beta$, on peut dire que $\widehat{DFB} = 180° - \beta$ car A, B, F et D sont cocycliques (ils appartiennent à $\mathscr{C}_1$) et donc que $\widehat{DFC} = \beta$ (supplément de $\widehat{DFB}$).

Si on pose $\widehat{ACB} = \gamma$, on peut dire que $\widehat{DEB} = 180° - \gamma$ car C, D, E et B sont cocycliques (ils appartiennent à $\mathscr{C}_2$) et donc que $\widehat{AED} = \gamma$ (supplément de $\widehat{BED}$).

Dans les triangles DCF et DEA, on a $\widehat{DCF} = \widehat{DEA} = \gamma$, $\widehat{DFC} = \widehat{DAE} = \beta$ et donc $\widehat{FDC} = \widehat{EDA} = 180° - \beta - \gamma$, ainsi que $\overline{DC} = \overline{DE}$.

Les triangles DCF et DEA sont isométriques et donc $\overline{AE} = \overline{CF}$.



Questions de la finale Maxi 2011

Question 1

(a) Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que, pour tous réels x et y,

$$f(x+y) = 2011^y \cdot f(x) + 2012^x \cdot f(y).$$

(b) Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que, pour tous réels x, y et z,

$$f(x+y+z) = 2010^y \cdot f(x) + 2011^z \cdot f(y) + 2012^x \cdot f(z).$$

Solution de Arnaud Duvieusart

(a) Il est évident que $x + y = y + x$

$$\Longrightarrow \; f(x+y) = f(y+x)$$

$$\Longleftrightarrow 2011^y f(x) + 2012^x f(y) = 2011^x f(y) + 2012^y f(x)$$

$$\Longleftrightarrow (2012^x - 2011^x) f(y) = (2012^y - 2011^y) f(x)$$

En posant $y = 1$:

$$f(x)(2012 - 2011) = (2012^x - 2011^x) f(1)$$

$$\Longrightarrow \; f(x) = \lambda(2012^x - 2011^x) \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad (\lambda \in \mathbb{R})$$

On peut vérifier que cette solution respecte l'énoncé :

$$2011^y \,.\, \lambda(2012^x - 2011^x) + 2012^x \,.\, \lambda(2012^y - 2011^y)$$

$$= \lambda(2011^y \,.\, 2012^x - 2011^x \,.\, 2011^y + 2012^x \,.\, 2012^y - 2012^x \,.\, 2011^y)$$

$$= \lambda(2012^{x+y} - 2011^{x+y}) = f(x+y)$$

(b) Si on pose $z = y = 0$, on a :

$$f(x) = f(x) + f(0) + 2012^x f(0)$$

$$\Longleftrightarrow (2012^x + 1) f(0) = 0$$

$$\text{or} \quad 2012^x > 0 \;\Longrightarrow\; 2012^x \neq -1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Longrightarrow \; f(0) = 0$$

Si on a $z = 0$:

$$\begin{aligned} f(x+y) &= 2010^y f(x) + f(y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R} \\ &= f(y+x) = 2010^x f(y) + f(x) \\ \Longrightarrow\ & f(x)(2010^y - 1) = f(y)(2010^x - 1) \end{aligned}$$

En posant $y = 1$:

$$f(x) = \frac{2010^x - 1}{2009} f(1) \quad \forall x \in \mathbb{R} \tag{1}$$

Mais si l'on prend $y = 0$:

$$\begin{aligned} f(x+z) &= f(x) + 2012^x f(z) \quad \forall x, z \in \mathbb{R} \\ &= f(z+x) = f(z) + 2012^z f(x) \\ \Longrightarrow\ & f(x)(2012^z - 1) = f(z)(2012^x - 1) \end{aligned}$$

En posant $z = 1$:

$$f(x) = \frac{2012^x - 1}{2011} f(1) \quad \forall x \in \mathbb{R} \tag{2}$$

Si on compare les égalités (1) et (2), on a :

$$\frac{2010^x - 1}{2009} f(1) = \frac{2012^x - 1}{2011} f(1) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Longrightarrow\ f(1) = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{2010^x - 1}{2009} = \frac{2012^x - 1}{2011} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Or, pour $x = 2$, cette dernière égalité donne :

$$\frac{2010^2 - 1}{2009} = \frac{2012^2 - 1}{2011} \Longleftrightarrow 2011 = 2013$$

ce qui est faux.
Donc, $f(1) = 0$, ce qui implique que $f(x) = 0\ \forall x \in \mathbb{R}$.
On vérifie aisément que cette fonction respecte la condition :

$$f(x+y+z) = 2010^y f(x) + 2011^z f(y) + 2012^x f(z) \quad \forall x, y, z \in \mathbb{R}$$

$$\Longleftrightarrow 0 = 0(2010^y + 2011^z + 2012^x)$$

ce qui est juste.

Question 2

Soit $ABCD$ un rectangle. Les points K, L, M et N sont respectivement choisis sur les côtés $]AB[$, $]BC[$, $]CD[$ et $]DA[$. Le point d'intersection de KM et LN est noté P.

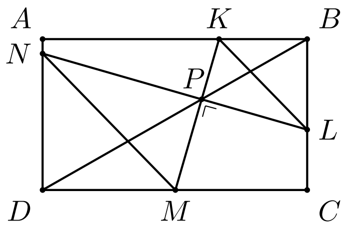
(a) $KM \perp LN$ et $P \in BD$ entrainent-ils que $KL \parallel MN$?

(b) $P \in BD$ et $KL \parallel MN$ entrainent-ils que $KM \perp LN$?

(c) $KL \parallel MN$ et $KM \perp LN$ entrainent-ils que $P \in BD$?

Solution d'Amélie Gonissen :

(a) Oui.

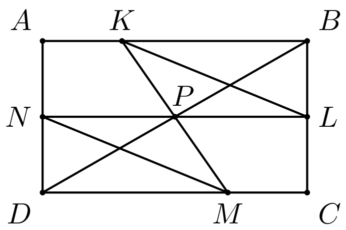


Le quadrilatère $NDMP$ est inscriptible puisque $\widehat{NDM} = \widehat{NPM} = 90°$, donc $\widehat{PNM} = \widehat{PDM}$ puisqu'ils interceptent le même arc.

Le quadrilatère $KBLP$ est inscriptible puisque $\widehat{KBL} = \widehat{KPL} = 90°$, donc $\widehat{KBP} = \widehat{KLP}$ puisqu'ils interceptent le même arc.

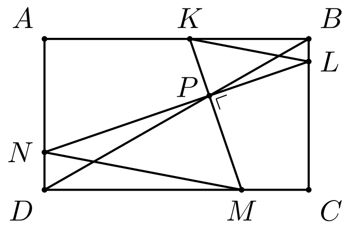
De plus, $\widehat{KBP} = \widehat{PDM}$ (angles alternes internes), et il en résulte que $\widehat{KLP} = \widehat{PNM}$; donc $KL \parallel NM$ puisque ce sont des droites qui forment un même angle avec une même troisième droite.

(b) Non.



Si on fixe P au centre du rectangle, N au milieu de $[AD]$ et L au milieu de $[BC]$, il existe une infinité de droites KM telles que $KL \parallel NM$ puisque les triangles KBL et NDM seront toujours isométriques ($|PK| = |PM|$, $|PN| = |PL|$ et $\widehat{KPL} = \widehat{NPM}$). Or, il n'y a qu'une de ces droites qui est perpendiculaire à NL.

(c) Oui.



$KBLP$ est inscriptible puisque $\widehat{KBL} = \widehat{KPL} = 90°$, donc $\widehat{KBP} = \widehat{KLP}$ (ils interceptent le même arc).

$NPMD$ est inscriptible puisque $\widehat{NPM} = \widehat{NDM} = 90°$, donc $\widehat{PNM} = \widehat{PDM}$ (ils interceptent le même arc).

Or, $\widehat{KLP} = \widehat{PNM}$ (angles alternes internes), donc $\widehat{KBP} = \widehat{PDM}$.

Puisque BP et DP forment des angles égaux avec des droites parallèles, D, B et P sont alignés, donc $P \in [DB]$.

Question 3

Onze concurrents (Alexandre, Bérénice, …, Knud) participent à un tournoi où ils s'affrontent par joutes à cinq, de manière que, à la fin du tournoi, chacun ait affronté exactement deux fois chacun de ses dix adversaires.

(a) A combien de joutes participe un concurrent ?

(b) De combien de joutes est constitué ce tournoi ?

(c) Peut-il se faire que trois concurrents se soient trouvés ensemble dans plusieurs joutes ?

(d) Indiquer une organisation pour les joutes d'un tel tournoi.

Solution d'Adrien Mercenier et Adrien Vandenschrick :

(a) Un concurrent doit affronter 2 fois ses 10 adversaires, il aura donc 20 affrontements à effectuer. Sachant qu'il en affronte 4 par joute, il devra donc en faire 5.

(b) Il y a $2 \cdot \binom{11}{2} = 110$ affrontements de deux concurrents à organiser. Chaque joute permet d'effectuer $\binom{5}{2} = 10$ affrontements. Il faut donc organiser $110/10 = 11$ joutes.

(c) Supposons que trois concurrents C_1, C_2, C_3 se soient trouvés ensemble dans 2 joutes. Il reste donc 9 joutes et chacun doit encore participer à 3 joutes, mais il ne peuvent plus se rencontrer. Ils participeront donc chacun à 3 joutes différentes parmi les 9 restantes. Choisissons un 4^{e} concurrent C_4 ayant participé à une des joutes où participaient C_1, C_2 et C_3. Il lui reste donc 4 joutes à disputer. Le concurrent C_4 ne peut participer à la deuxième joute effectuée par C_1, C_2, C_3 car il lui resterait alors trois joutes à effectuer parmi les 9 restantes, mais quelles que soient celles qu'il choisit, il rencontrera une troisième fois C_1, C_2 ou C_3. Mais s'il ne participe pas à la deuxième joute effectuée par C_1, C_2, C_3, il doit effectuer 4 joutes parmi les 9 restantes. Quoi qu'il arrive, il devra donc participer à deux joutes où participe un même concurrent C_1, C_2 ou C_3. Cela signifie qu'il affronte au moins 3 fois ce concurrent, ce qui est contraire au règlement.

Trois concurrents ne peuvent donc se trouver ensemble dans deux joutes.

(d) Voici un exemple d'organisation de tournoi, dans lequel chaque joute est représentée par les initiales des 5 participants : ABCDE, ABFGH, ACFIJ, ADGIK, AEHJK, BCHIK, BDFJK, BEGIJ, CGDHJ, CGEFK, DEIHF.

Question 4

Soit x un réel.

a Il existe trois entiers distincts a, b et c tels que $a+x$, $b+x$ et $c+x$ soient trois termes consécutifs d'une suite géométrique ; cela entraine-t-il que le nombre x est rationnel ?

b Si le nombre x est rationnel, existe-t-il trois entiers distincts a, b et c tels que $a+x$, $b+x$ et $c+x$ soient trois termes consécutifs d'une suite géométrique ?

Solution inspirée de celle d'Arnaud Duvieusard.

(a) Puisque $a+x$, $b+x$ et $c+x$ sont en progression géométrique, on a que $(b+x)^2 = (a+x)(c+x)$. Cette équation en x est du premier degré et se simplifie en $(2b-a-c)x = ac-b^2$. Si $2b = a+c$, on a trois termes consécutifs d'une suite arithmétique qui ne peut donc être géométrique. Dès lors, puisque $2b-a-c \neq 0$,

$$x = \frac{ac-b^2}{2b-a-c}$$

qui est rationnel puisque a, b et c sont des entiers.

(b) Montrons que si $x = \frac{y}{z}$ ($y \in \mathbb{Z}$ et $z \in \mathbb{N}_0$), alors $a = 1$, $b = z+y+1$ et $c = z^2+yz+2z+2y+1$ forment une solution.

$$a+x = 1+\frac{y}{z}$$

$$b+x = z+y+1+\frac{y}{z} = (1+\frac{y}{z})(z+1)$$

$$c+x = z^2+yz+2z+2y+1+\frac{y}{z} = (1+\frac{y}{z})(z+1)^2$$

Comme $z+1$ satisfait aux conditions d'existence d'une raison de suite géométrique, $a+x$, $b+x$ et $c+x$ forment une telle suite de raison $z+1$.

Liste des donateurs

Au nom des lauréats, la Commission Olympiade tient à remercier chaleureusement les Ministres, les Institutions, les Associations ainsi que les Sociétés commerciales qu'elle a l'honneur de compter parmi les donateurs de cette 36e édition de l'OMB. L'intérêt et le soutien, sans cesse renouvelés, que ces mécènes portent à l'organisation de l'OMB est un gage du sérieux de celle-ci. Qu'ils trouvent ici l'expression de notre plaisir de récompenser en leurs noms nos finalistes.

M. Rudy Demotte, Ministre-président de la Région wallonne et de la Communauté française
M. Jean-Claude Marcourt, Ministre de l'enseignement supérieur
Mme Annie Taulet, Députée provinciale du Hainaut
M. Claude Durieux, Gouverneur de la Province du Hainaut
Mme Marie-Josée Laloy, Gouverneur de la Province du Brabant Wallon
M. Denis Mathen, Gouverneur de la Province de Namur
M. Bernard Caprasse, Gouverneur de la Province du Luxembourg
M. Michel Foret, Gouverneur de la Province de Liège.

L'Université Libre de Bruxelles, la Faculté des sciences de l'Université Catholique de Louvain, l'Université de Liège, l'Université de Mons, les Facultés Universitaires Notre-Dame de la Paix de Namur.

La Société Mathématique de Belgique, la Société Belge des Professeurs de Mathématique d'expression française, la Loterie Nationale, les Voies d'eau du Hainaut, le Pass, la librairie Scientia, l'Euro Space Center de Redu, le Muséum des Sciences naturelles, l'Archéoforum de Liège, Colruyt SA, les éditions du Kangourou, les éditions Casterman, les éditions du Lombard, les éditions du Pommier.

Et tout particulièrement, la firme

CASIO

qui offre une clé USB et une calculatrice à tous les participants des trois finales.

Le jour de la finale. . .

Avec le soutien de la
Communauté française

CASIO

n° 1 du calcul

félicite et encourage

tous les participants de cette

36e Olympiade Mathématique Belge.