



Un compas ancien

Introduction

En mer, se situer et se diriger est toujours une question vitale, et les instruments associés prennent une importance considérable. Lorsque les côtes ne sont plus visibles, il ne reste plus guère que la mer et le ciel à observer. L'amélioration des techniques de navigation a ainsi suscité de nombreux progrès de l'astronomie et des instruments permettant de « faire le point » (se situer) et de « prendre le cap » (se diriger). Donc, en particulier, de la cartographie.

Comme toujours lorsqu'il est question d'imaginer et réaliser des instruments, les mathématiques ne sont pas loin... Pourquoi et comment ces progrès ont-ils été obtenus, et quel rôle y ont joué les cartographes et les mathématiciens ? Pour tenter de répondre à cette question, concentrons-nous sur le cas de la fameuse « carte de Mercator » et suivons quelques épisodes de l'Histoire.

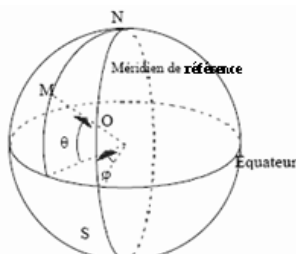
Mercator, les marins et les mathématiciens

Hugues Masy

Les Grecs instaurent le repérage des lieux par la latitude et la longitude.

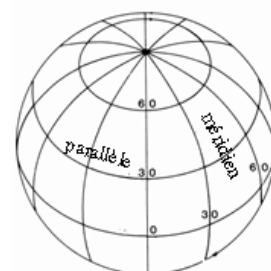
Au III^e siècle av. J.-C., ERATOSTHÈNE, reprenant une idée de DI-CÉARQUE (IV^e siècle av. J.-C.), réalise une carte organisée à partir d'un axe passant par les « Colonnes d'Hercule » (Gibraltar) et Rhodes. Il trace des parallèles à cet axe et constitue un quadrillage rectangulaire régulier. Son « méridien » de référence est celui qui passe par Rhodes.

Au II^e siècle. av. J.-C., HIPPARQUE, grand astronome et fondateur de la trigonométrie, impose que le repérage des lieux terrestres se fasse en fonction d'éléments astronomiques : la latitude et la longitude. Les endroits où la durée du jour le plus long de l'année est la même auront la même latitude. Sur la sphère terrestre, ils se trouvent en général sur un petit cercle (un « parallèle »). Les endroits qui ont leur midi au même instant auront la même longitude. Sur la sphère terrestre, ils se trouvent sur un demi grand cercle (un « méridien »).

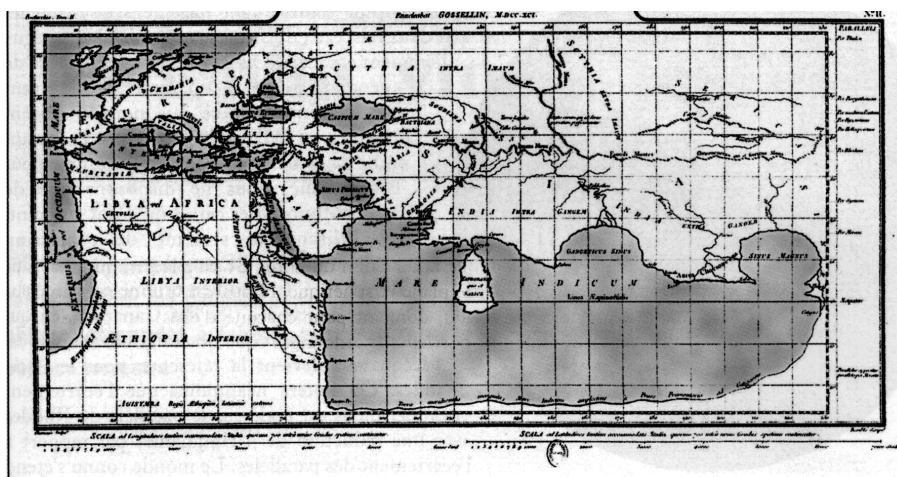


Un point M à la surface de la terre (assimilée à une sphère) est repéré par ses coordonnées géographiques :

- φ : longitude (Est - Ouest, à partir du méridien de référence) ;
- θ : latitude (Nord - Sud, à partir de l'équateur).



Au I^{er} siècle av. J.-C., MARIN DE TYR construit une carte basée sur un quadrillage rectangulaire régulier respectant les exigences de Hipparque : le parallèle de référence est l'équateur, et le méridien de référence est celui des « Isles Fortunées » (les Canaries).



Carte reconstituée de MARIN DE TYR

I^{er} siècle ap. J.-C. : PTOLÉMÉE réalise une synthèse des travaux de ses prédécesseurs. Critiquant la carte de MARIN DE TYR, mais se conformant aux exigences d'HIPPARQUE, il conçoit et réalise des représentations cartographiques nouvelles qui nous parviendront et qui feront autorité en éclipsant l'approche de MARIN DE TYR.

Le Moyen Age

Dans nos régions, le savoir Grec disparaît dans cette époque dominée par la religion et les guerres. Les croisades, dont le but est précisément de délivrer Jérusalem, commencent en 1095 et se terminent en 1270 avec la mort de Louis IX (Saint-Louis). Au XV^e siècle, l'Europe trouve en Orient (Inde, Chine, Japon, les Moluques) des produits de très grande valeur : la soie et les épices (essentielles pour le goût de la viande que l'on mangeait souvent avariée). Mais la route terrestre est contrôlée par les Ottomans et la route maritime (via la Mer Noire et la Méditerranée) par les Italiens (Gênes et Venise). Après la prise de Constantinople par les Ottomans en 1453, le commerce devient de plus en plus difficile.

Les grands voyages de découverte

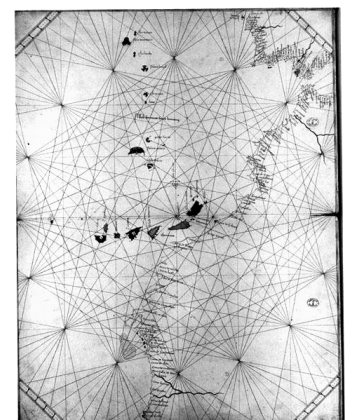
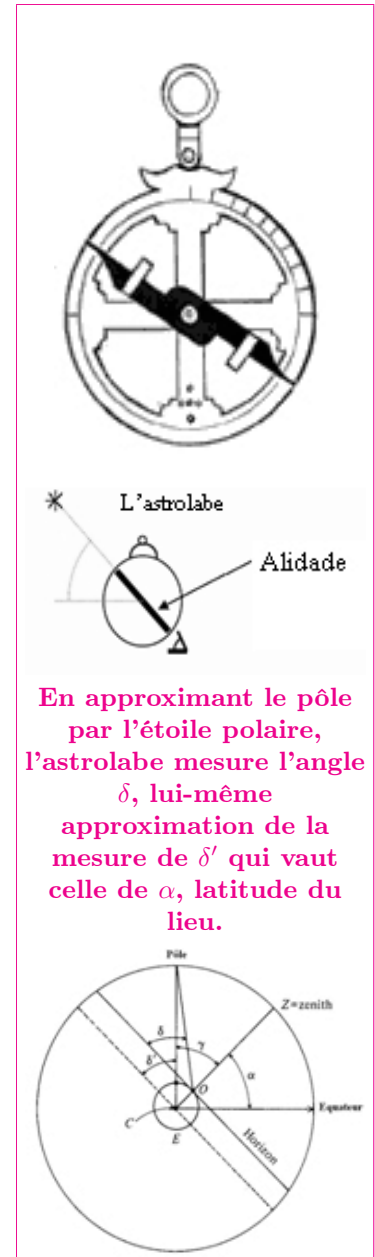
Contourner l'Afrique par l'Océan est-il une solution ? Au XV^e siècle, les Portugais (monarchie, noblesse et bourgeoisie) vont concevoir une véritable politique nationale d'expansion outre-mer et mettre sur pied une entreprise de découverte systématique et de longue haleine. Pour la concrétiser, ils doivent faire face à d'immenses défis techniques et humains.

L'adaptation des techniques à la navigation sur l'Atlantique

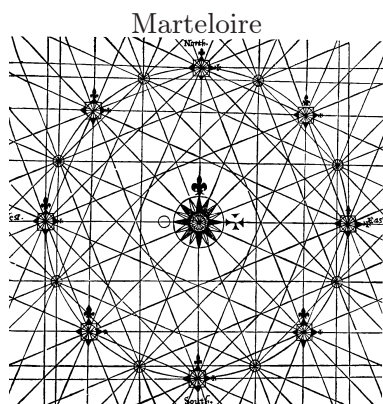
Concrètement, ils vont mettre au point le navire approprié : la caravelle. Ce sont aussi les Portugais qui vont établir les rudiments du calcul de la latitude en mer à l'aide de l'astrolabe (1470-1480). Le problème de la longitude en mer reste, lui, catastrophiquement mal maîtrisé. Les Portugais vont aussi s'appuyer sur les progrès de la navigation méditerranéenne. L'introduction de la boussole (connue depuis longtemps des Chinois) dans nos contrées aux environs du XII^e siècle est évidemment une étape importante. Les cartes farfelues du Moyen Age ne leur apportant aucune aide, l'usage de la boussole va mener les marins de Gênes, Venise, Majorque et Catalogne à développer une représentation plus adaptée.

Les cartes-portulans

Tracées au début sur des peaux de moutons pour représenter le bassin méditerranéen, ces cartes seront donc naturellement orientées avec le Nord (magnétique) vers le haut. Et lorsque le cap est maintenu constant au départ de lieux bien déterminés, l'itinéraire était tracé par une droite. Les points bien déterminés sont répartis en réseau : la carte est recouverte de cercles tangents ; seize points sont marqués sur chacun, correspondant aux seize directions d'une rose des vents. Les points sont alors reliés entre eux par des droites.



Côtes occidentales de l'Afrique, Portulan de 1467



Le réseau s'appelle un « marteloire ». Les éléments permettant de situer un lieu par rapport à un autre sont le cap et la durée de navigation.

L'extension des cartes-portulans hors de la Méditerranée.

Ainsi, les besoins des navigateurs ont suscité la conception de cartes précises. En 1443, les Portugais arrivent aux côtes du Sénégal, ils franchissent l'équateur en 1469, contournent l'extrémité de l'Afrique en 1488 (B. DIAZ). Les Espagnols atteignent les Caraïbes en 1492 (Christophe COLOMB). Les Portugais atteignent l'Inde en 1498 (VASCO DE GAMA) et découvrent le Brésil en 1500 (CABRAL). Et de 1519 à 1522, le premier tour du monde est effectué par les Espagnols (MAGELLAN). Au rythme de la progression des Grandes Découvertes, les cartes-portulans étaient complétées des renseignements rapportés par les voyageurs. D'où la nécessité d'étendre la zone couverte par les portulans. Et durant cette période, Portugais et Espagnols, via des bulles papales ou en signant des traités, se répartissent le monde, le divisant selon un méridien de l'Atlantique : l'Ouest à l'Espagne, l'Est au Portugal. La géo-politique a ainsi, à cette époque, également ressenti vivement le besoin d'une cartographie précise.

Au service du savoir : l'imprimerie et l'Université

À cette époque, l'essor de l'imprimerie permet la diffusion des œuvres d'Euclide et de Ptolémée. Ainsi que la diffusion des cartes en général.

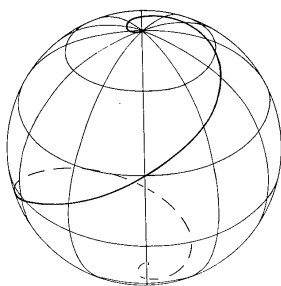
D'autre part, les Universités se détachent des idées pures coupées de la réalité (très critiquées par les « praticiens » parmi lesquels les marins) pour apporter leur contribution à ces grands projets concrets.

Du plan à la sphère pour revenir au plan

Du plan à la sphère

À l'Université de Coimbra (Portugal)

C'est ainsi que le roi Jean III du Portugal crée le poste de Cosmographe Royal à l'Université de Coimbra, avec la mission explicite d'améliorer les techniques de navigation, et y nomme le mathématicien Pedro NUNES. Comment celui-ci va-t-il s'y prendre ?



Une loxodromie

Les cartes-portulans, conçues au départ pour représenter localement le bassin méditerranéen, sont construites sur le modèle d'une Terre rendue plate. Lorsqu'on étend leur usage hors de ce bassin pour suivre les Grandes Découvertes, les difficultés s'accroissent donc. Que se passe-t-il si on essaye de transférer un portulan sur un globe ? Que devient le marteloire sur le globe ? Cela pose la question du transfert sur la sphère de la route à cap constant, représentée par une droite sur le portulan. En 1537, Pedro NUNES annonce la découverte : sur la sphère, une route à cap constant (qui ne suit pas un méridien ou un parallèle) est une courbe en forme de spirale, qui va s'enrouler autour des pôles ! Elle sera nommée plus tard « loxodromie ».

À l'Université de Louvain (Pays-Bas)



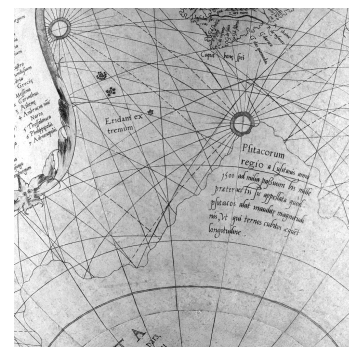
Mercator 1541

En 1530, Gérard MERCATOR (de son vrai nom KREMER) arrive à l'Université de Louvain, très active dans le développement des instruments. Il y est l'élève de GEMMA FRISIUS, conseiller de Charles Quint. De plus, MERCATOR est un grand admirateur de NUNES. Il réalise donc en 1541 le premier globe terrestre représentant des loxodromies. Il effectue ainsi le transfert du marteloire à la sphère. Et il le réalise

lui-même, brisant ainsi la division du travail qui régnait à l'Université entre les concepteurs et les réalisateurs.

Toujours sur la sphère, à l'Université de Coimbra (Portugal).

NUNES poursuit ses recherches. La méthode de navigation de SAGRES, qui consiste à suivre un parallèle jusqu'à la latitude voulue, puis suivre le méridien du lieu, n'est évidemment pas efficace. Au lieu de parcourir deux côtés d'un « triangle » rectangle n'est-il pas bien plus indiqué de prendre la route directe en prenant dès le départ le cap de la destination et en le maintenant jusque là ?



Loxodromies du globe de Mercator

Les travaux de NUNES montraient qu'en général, on suit ainsi une loxodromie. Et le même NUNES, en 1546, démontre que le chemin le plus court entre deux points de la sphère s'obtient en suivant un grand cercle passant par les deux points (un « grand cercle » est un cercle de la sphère dont le centre est le centre de la sphère). La plupart du temps, ce n'est donc pas en maintenant le cap de la destination !

Les résultats des recherches de Nunes ne seront pas facilement acceptés par les marins ni par les savants. (Pourtant, Mercator, lui, les a compris et même concrétisés lui-même !) Une immense polémique s'ensuivit, au terme de laquelle NUNES, se sentant calomnié, déclara même vouloir abandonner les mathématiques.

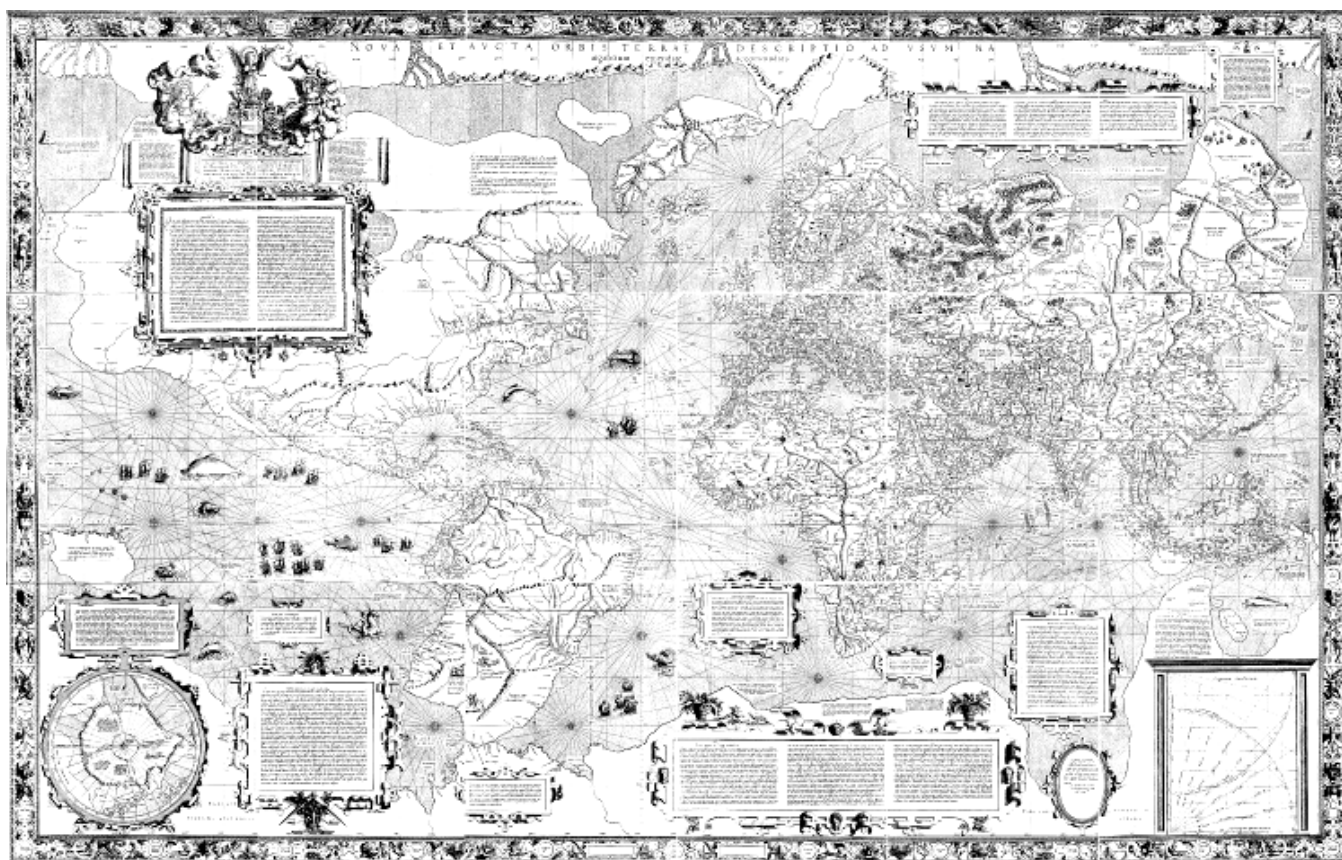
De la sphère au plan, à Duisbourg

MERCATOR, en réalisant son globe terrestre de 1541, était bien placé pour constater deux choses. D'une part, les globes ne sont pas une solution de remplacement des cartes : outre les difficultés de construction, un globe représentant 1852 m réels (1 minute d'arc) par 1 mm devrait avoir un diamètre de 6,88 m ! Encombrant dans la cabine du capitaine ! Mais d'autre part, les cartes-portulans n'indiquent pas vraiment, dans de nombreux cas, le cap à suivre pour naviguer « directement » d'un point à l'autre suivant la loxodromie ! De manière générale, la droite joignant deux points de la carte-portulan n'indique pas exactement ce cap. MERCATOR se pose alors le problème de modifier le procédé de construction des cartes-portulans afin que toute droite tracée sur la carte représente la loxodromie passant par deux quelconques de ses points, et que la rose des vents, placée en un point quelconque de la carte, indique les directions exactes. En repassant ainsi de son globe à une carte-portulan améliorée, MERCATOR va augmenter considérablement la précision des cartes marines, en supprimant des causes d'erreurs liées à leur procédé de construction lui-même. C'est en 1569, à Duisbourg où il s'est établi, qu'il réalise ce chef d'œuvre.

En concevant cette carte, MERCATOR s'inspire de la carte plus ancienne de MARIN DE TYR, pourtant critiquée par PTOLÉMÉE, mais plus proche des cartes-portulans que celles de PTOLÉMÉE. Ainsi, MERCATOR combine de façon géniale les cartes-portulans, fondées sur le cap et la durée de navigation, et les cartes des Grecs, fondées sur la latitude et la longitude. MERCATOR n'a pas laissé de description précise de son procédé de construction.

Cette carte détermine ce qu'on appelle aujourd'hui la « projection de Mercator », qui est toujours d'usage intensif et important de nos jours ! Méridiens et parallèles se croisent perpendiculairement, et les méridiens sont des droites parallèles régulièrement réparties.

Et pourtant, l'accueil des marins sera très réservé, la méfiance (à l'égard d'un terrien prétendant réformer les outils élaborés par les marins eux-mêmes) étant augmentée par le mystère de son procédé précis de construction. MERCATOR meurt en 1594, cartographe déjà très célèbre de son temps ; mais pas pour cette carte-là !



De la représentation graphique au tableau numérique puis à la formule

Alors, comment la « projection de Mercator » a-t-elle été adoptée? Si la carte de Mercator a été accueillie froidement par les marins auxquels elle était destinée, elle a au contraire été bien accueillie par les milieux académiques. Parmi les savants intéressés, on trouve Edward WRIGHT, ancien navigateur, mathématicien à l'Université de Cambridge et conseiller à la Compagnie des Indes Orientales anglaise (compagnie de navigation exploitant les richesses des Grandes Découvertes). Il établit un procédé de construction de la carte en 1592.

De la carte au tableau numérique

Edward WRIGHT établit une table fournissant, minute d'arc par minute d'arc, les distances à la droite-équateur des droites-parallèles, de la latitude 0° à la latitude 75° .

A ce moment, WRIGHT collabore avec un Hollandais nommé HONDIUS, qui se trouve en Angleterre. WRIGHT lui prête son manuscrit, que Hondius recopie. . . Et l'année suivante, HONDIUS retourne en Hollande pour aider aux premières explorations hollandaises, et il obtient un an plus tard le privilège d'être le seul à imprimer et vendre un nouveau type de cartes. . . qui seront donc disponibles au cours des explorations hollandaises.

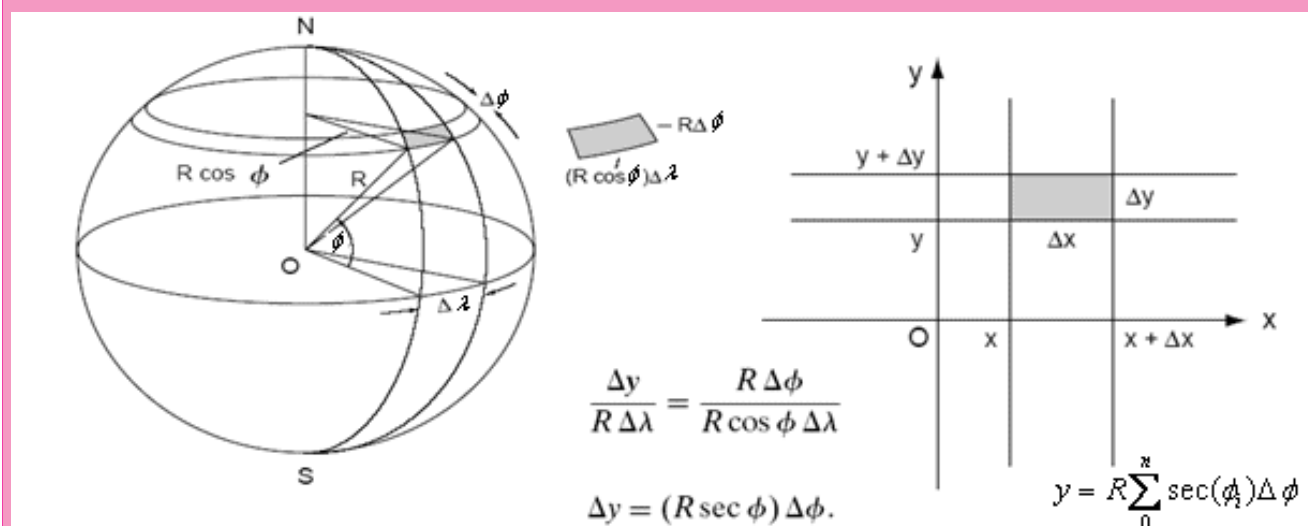
Quant aux Anglais, Edward WRIGHT publie en 1599 un livre qui décrit et explique la carte de Mercator. Il donne la table de construction des droites-parallèles.

Le livre de Wright sera largement diffusé aux capitaines de navires anglais, que les explications claires d'un ancien navigateur mettent en confiance.

Intermède : la création des logarithmes

En 1614, John NAPIER présente les logarithmes dans un livre écrit en latin. Les logarithmes permettent de remplacer le calcul du produit de deux nombres par le calcul de la somme des deux nombres correspondants dans une table, puis une dernière lecture de table en sens inverse. Si le logarithme d'un nombre x est noté $\ln(x)$, la propriété essentielle est que $\ln(a.b) = \ln(a) + \ln(b)$. C'est un progrès considérable pour les techniques de calculs, tels ceux des astronomes comme KEPLER. En 1616, Edward WRIGHT publie une traduction en anglais du livre de NAPIER et, en 1620, Edmund GUNTER, mathématicien anglais, publie une table des logarithmes de tangentes.

La construction de WRIGHT



Le point de longitude λ et de latitude ϕ étant représenté par (x, y) sur la carte, le « rectangle » grisé associé aux points repérés par (λ, ϕ) et $(\lambda + \Delta\lambda, \phi + \Delta\phi)$ doit devenir un rectangle associé à (x, y) et $(x + \Delta x, y + \Delta y)$. Les « rectangles » homologues sont semblables si leur rapport hauteur/longueur est le même. Partant de l'équateur, et prenant un « pas » $\Delta\phi$ correspondant à 1 minute d'arc, WRIGHT peut ainsi placer les droites-parallèles de proche en proche. Si on envisage le cas limite pour $\Delta\phi$, on obtient alors la formule $y = R \int_0^{\phi} \sec(\phi) d\phi$.

De la table numérique à la formule.

En 1640, l'anglais Henry BOND, mathématicien et conseiller en navigation, est frappé par la ressemblance entre les valeurs qu'il trouve dans la table de WRIGHT et la table de logarithmes de tangentes de GUNTER ! Il publie sa conjecture en 1645 : la droite-parallèle de latitude x doit être à distance $\ln(\tan(x/2 + \pi/4))$ de la droite-équateur.

Cette formule présente l'avantage, par rapport aux tables, de ne plus dépendre du « pas » de construction de la table (le « pas » était de 1 minute d'arc chez WRIGHT). Avec les tables, réduire le « pas » à $\frac{1}{2}$ minute nécessitait la reconstruction complète de la table, et chaque tentative d'améliorer la précision provoquait le même problème. Avec la formule de BOND, le procédé de construction n'est plus un frein à la précision de la carte ! Il faut noter que la fonction logarithme, nécessaire pour décrire précisément la « projection de Mercator », n'existait pas du vivant de MERCATOR !

Un prix pour la formule !

La ressemblance détectée par BOND n'est-elle que pur hasard ? Les progrès de la cartographie sont importants pour les mathématiciens qui offrent un prix, en 1666, à celui qui démontrera la formule. C'est James GREGORY, en 1668, qui y réussit. BARROW, en 1670, en fournira une démonstration plus intelligible (première intégration par « décomposition des fractions rationnelles »). A l'aube de la création du calcul différentiel et intégral, cette question issue de la cartographie et de la navigation figure parmi les grands problèmes de l'époque et donne plus de poids encore à ces méthodes nouvelles ! James GREGORY et BARROW, qui figurent parmi les tout premiers mathématiciens qui ont découvert le lien entre intégrale et dérivation, ne se sont pourtant pas contentés de dériver $\ln(\tan(x/2 + \pi/4))$ pour obtenir $\sec(x)$. C'aurait été un peu l'œuf de Colomb...

Les mathématiques inspirent les cartographes ; la cartographie inspire les mathématiciens.

Nous avons vu qu'en 1569, MERCATOR, cartographe génial, s'est inspiré des mathématiques de son temps pour concevoir sa carte. C'est aussi MERCATOR qui a institué l'usage du terme « Atlas »

pour désigner un recueil de cartes. Et réciproquement ? Vers 1850, RIEMANN, mathématicien génial, prolongeant les travaux de GAUSS étudiant les surfaces, définit la notion mathématique de « variété ».

Pour la décrire, on s'appuie sur la notion de carte locale : elle consiste à représenter un voisinage d'un point sur le plan. Et un Atlas de la surface, c'est un ensemble de cartes locales compatibles deux à deux qui recouvrent la surface. C'est ainsi que se définissent, depuis les années 1930, les notions fondamentales de la géométrie différentielle qui étudie les surfaces, les courbes et leurs généralisations. Mais ceci est une autre (longue) histoire.

La démonstration de BARROW

Voici, en présentation actualisée, l'approche de Barrow pour intégrer $\sec \theta$ sur un intervalle autour de 0. Pour établir la formule de répartition des parallèles sur la carte de Mercator, Barrow effectue ainsi la première intégration par « décomposition des fractions rationnelles »

$$\begin{aligned}
 \int \sec \theta \, d\theta &= \int \frac{1}{\cos \theta} d\theta \\
 &= \int \frac{\cos \theta}{\cos^2 \theta} d\theta \\
 &= \int \frac{\cos \theta}{1 - \sin^2 \theta} d\theta \\
 &= \int \frac{\cos \theta}{(1 - \sin \theta)(1 + \sin \theta)} d\theta \\
 &= \frac{1}{2} \int \left(\frac{\cos \theta}{1 - \sin \theta} + \frac{\cos \theta}{1 + \sin \theta} \right) d\theta
 \end{aligned}
 \quad \left| \quad
 \begin{aligned}
 &= \frac{1}{2} (-\ln |1 - \sin \theta| + \ln |1 + \sin \theta|) + c \\
 &= \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1 + \sin \theta}{1 - \sin \theta} \right| + c \\
 &= \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1 + \sin \theta}{1 - \sin \theta} \cdot \frac{1 + \sin \theta}{1 + \sin \theta} \right| + c \\
 &= \frac{1}{2} \ln \left| \frac{(1 + \sin \theta)^2}{1 - \sin^2 \theta} \right| + c \\
 &= \frac{1}{2} \ln \left| \frac{(1 + \sin \theta)^2}{\cos^2 \theta} \right| + c \\
 &= \ln \left| \frac{1 + \sin \theta}{\cos \theta} \right| + c \\
 &= \ln |\sec \theta + \tan \theta| + c
 \end{aligned}$$

Gerardus MERCATOR (1512-1595)

MERCATOR est né à Rupelmonde, dans une famille de peu de moyens. Son oncle Gisberg le prend en charge et lui fait faire des études. A sept ans, il parle et lit le latin couramment. Son vrai nom était Gerard Kremer, nom qui signifie marchand en allemand : il le traduira en latin : mercator.

Il entre à l'Université de Louvain à 18 ans et y suit des cours presque entièrement basés sur la philosophie d'ARISTOTE. Cela lui pose des problèmes, notamment parce qu'il ne voit pas comment concilier les vues d'ARISTOTE sur l'origine du monde avec celles de la Bible. Il renonce à ses études au bout de deux ans et se met à voyager. Il prend alors goût à la géographie. Il retourne à Louvain et se consacre aux mathématiques, à la géographie et à l'astronomie. Il apprend aussi à graver et à fabriquer des instruments, il gagne sa vie en donnant des leçons de mathématiques.

En 1535, il commence à construire un globe terrestre, commandé par Charles-Quint, avec le géographe GEMMA FRISIUS. La gravure du papier qui recouvre la sphère se faisait pour la première fois en cuivre et les informations reproduites dépassaient largement celles des globes terrestres précédents.

En 1537, il confectionne sa première carte, celle de la Palestine, ensuite vient en 1540 celle des Flandres. Il projette de produire de nombreuses cartes, mais les renseignements sur lesquels il se base sont parfois incorrects et contradictoires. Il se rend compte qu'une cause d'erreur est due aux marins qui pensent que le chemin suivi en gardant le cap est une géodésique. Il s'agit au contraire d'une loxodromie, découverte par Pedro NUNES.

Accusé d'hérésie, il est arrêté en 1544 et passe sept mois en prison ; il est ensuite relâché grâce au soutien de l'Université de Louvain. Il part à Duisburg en 1552 et y construit une très grande carte d'Europe. Il est désormais le plus célèbre cartographe de l'époque. De nombreuses cartes lui sont commandées par différents pays. La « projection de Mercator » est utilisée pour la première fois en 1569. C'est Mercator qui crée le mot « atlas », pour un ensemble de cartes. Il meurt en 1595.

S. Trompler