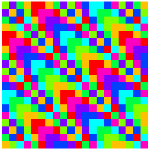
Le problème de Prouhet
(et la suite de Thue–Morse. . .)

Michel Rigo

http://www.discmath.ulg.ac.be/
http://orbi.ulg.ac.be/handle/2268/129326

Congrès de la SBPMef, 22 août 2012

UNIVERSITÉ de Liège



L'idée de cet exposé fait suite à l'article :

J.-P. Allouche, J. Shallit, The ubiquitous Prouhet-Thue-Morse sequence. *Sequences and their applications* (Singapore, 1998), 1-–16, Springer Ser. Discrete Math. Theor. Comput. Sci., Springer, London, 1999.

- Des équations Diophantiennes
- Un automate pour construire les ensembles A_∞ et B_∞
- Un exercice d'étude de signe
- Un peu de combinatoire des mots
- Miscellanées

Des équations Diophantiennes

Aux alentours de 1750, L. Euler et C. Goldbach remarquèrent que

$$A = \{a, b, c, a+b+c\} \text{ et } B = \{a+b, a+c, b+c\}$$

sont tels que

$$a + b + c + (a+b+c) = (a+b) + (a+c) + (b+c)$$

$$a^2 + b^2 + c^2 + (a+b+c)^2 = (a+b)^2 + (a+c)^2 + (b+c)^2$$

Eugène Prouhet (1817–1867)

MÉMOIRES PRÉSENTÉS.

THÉORIE DES NOMBRES. — *Mémoire sur quelques relations entre les puissances des nombres; par* **M. E. Prouhet.** (Extrait par l'auteur.)

(Commissaires, MM. Sturm, Lamé, Binet.)

« n et m étant deux nombres entiers quelconques, il existe une infinité de suites de n^m nombres, susceptibles de se partager en n groupes de n^{m-1} termes chacun et tels que la somme des puissances k des termes soit la même pour tous les groupes, k étant un nombre entier inférieur à m.

» n^m nombres en progression arithmétique jouissent de la propriété précédente. Pour opérer le partage de ces nombres en groupes, on écrira en cercle les indices 0, 1, 2,..., $n-1$; on lira ces indices en suivant le cercle et en ayant soin d'en passer un à chaque tour; deux, tous les n tours; trois, tous les n^2 tours, et ainsi de suite. Ces indices, écrits à mesure qu'on les lit sous les termes de la progression, apprendront à quel groupe appartient chaque terme.

» Si l'on applique la règle et le théorème précédents aux 27 premiers nombres de la suite naturelle, on arrive aux identités suivantes :

$$1+6+8+12+14+16+20+22+27=2+4+9+10+15+17+21+23+25=3+5+7+11+13+18+19+24+26$$
$$1^2+6^2+8^2+\dots\dots=2^2+4^2+9^2+\dots\dots=3^2+5^2+7^2+\dots\dots$$

» Lorsque $n=10$ et que la progression commence à 0, tous les nombres dont la somme des chiffres, divisée par 10, laisse le même reste, appartiennent à la même classe. »

Mémoire sur quelques relations entre les puissances de nombres, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I* **33** (1851), 225.

Une cinquantaine d'années plus tard…

Le problème de Prouhet–Tarry–Escott

Soient k, n deux entiers. Trouver deux ensembles *distincts* d'entiers (que l'on pourra supposer *disjoints*)

$$A = \{a_1, \ldots, a_n\} \text{ et } B = \{b_1, \ldots, b_n\}$$

tels que $\{a_1, \ldots, a_n\} =_k \{b_1, \ldots, b_n\}$, i.e.,

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{n} b_i, \quad \sum_{i=1}^{n} a_i^2 = \sum_{i=1}^{n} b_i^2, \quad \cdots, \sum_{i=1}^{n} a_i^k = \sum_{i=1}^{m} b_i^k$$

Souvent, on cherche une solution de *taille* n minimale pour un *degré* k donné.

Remarque : on généralise à une partition en q ensembles de q^k nombres.

Exemple, $k = 1$

$$\begin{array}{cccccccc} \{0,1\} & \{2,3\} & \{4,5\} & \{6,7\} & \{8,9\} & \{10,11\} & \{12,13\} & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots \end{array}$$

$$(2n+1) - 2n = 1$$

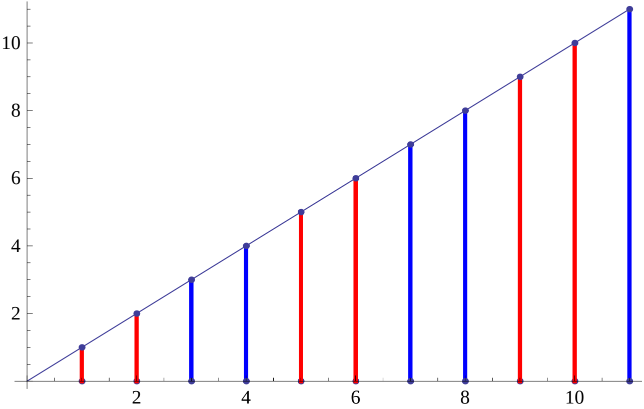
$$\begin{array}{|cc|cc|cc|c|cc|} 0 & 3 & 4 & 7 & 8 & 11 & \cdots & \color{blue}{4n} & \color{blue}{4n+3} \\ \hline 1 & 2 & 5 & 6 & 9 & 10 & \cdots & \color{red}{4n+1} & \color{red}{4n+2} \end{array}$$

$$\begin{array}{|cc|cc|cc|c|cc|} 0 & 3 & 5 & 6 & 8 & 11 & \cdots & \color{blue}{4n+1} & \color{blue}{4n+2} \\ \hline 1 & 2 & 4 & 7 & 9 & 10 & \cdots & \color{red}{4n} & \color{red}{4n+3} \end{array}$$

On trouve des solutions pour $n = 2, 4, 6, 8, \ldots$

$$A = \{0, 3, 4, 7, 8, 11\}$$

$$B = \{1, 2, 5, 6, 9, 10\}$$



la somme des longueurs des segments bleus égale la somme des longueurs des segments rouges.

Exemple, $k = 2$

$$\begin{array}{cccccccc} \{0,1\} & \{2,3\} & \{4,5\} & \{6,7\} & \{8,9\} & \{10,11\} & \{12,13\} & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots \\ 1 & 5 & 9 & 13 & 17 & 21 & 25 & \cdots \end{array}$$

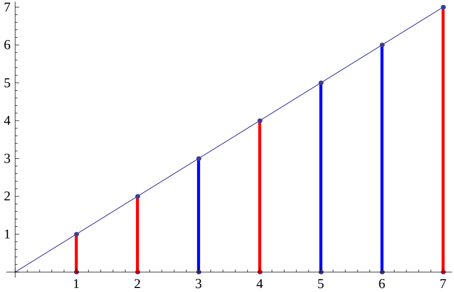
$$(2n+1) - 2n = 1 \qquad (2n+1)^2 - (2n)^2 = 4n+1$$

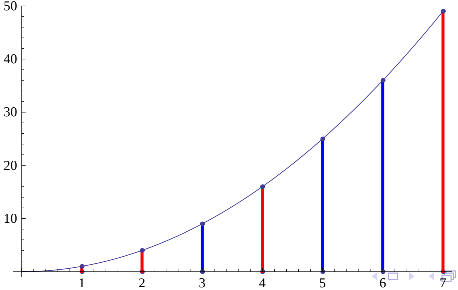
$$\left|\begin{array}{cccc|c|cccc} 0 & 3 & 5 & 6 & \cdots & \color{blue}{8n} & \color{blue}{8n+3} & \color{blue}{8n+5} & \color{blue}{8n+6} \\ \hline 1 & 2 & 4 & 7 & \cdots & \color{red}{8n+1} & \color{red}{8n+2} & \color{red}{8n+4} & \color{red}{8n+7} \end{array}\right|$$

$$\left|\begin{array}{cccc} \color{blue}{8n+1} & \color{blue}{8n+2} & \color{blue}{8n+4} & \color{blue}{8n+7} \\ \hline \color{red}{8n} & \color{red}{8n+3} & \color{red}{8n+5} & \color{red}{8n+6} \end{array}\right|$$

On trouve des solutions pour $n = 4, 8, 12, \ldots$

$$A = \{0, 3, 5, 6\}$$
$$B = \{1, 2, 4, 7\}$$





Quelques généralités

- Si $\{a_1, \ldots, a_n\} =_k \{b_1, \ldots, b_n\}$, alors, pour $N \geq 1$, $\{N\,a_1+M, \ldots, N\,a_n+M\} =_k \{N\,b_1+M, \ldots, N\,b_n+M\}$. $\rightarrow$ Si on dispose d'une solution, on en obtient une infinité.
- Pour tout degré k fixé, si l'on dispose d'une solution de taille n, alors $n \geq k+1$.
- Pour tout degré k fixé, il existe une solution de taille

$$n \leq \frac{k(k+1)}{2} + 1.$$

cf. P. Borwein, C. Ingalls, The Prouhet-Tarry-Escott problem revisited , *Enseign. Math.* **40** (1994), 3–27.

retro.seals.ch/digbib/view?rid=ensmat-001:1994:40::10

- Si $\{a_1, \ldots, a_n\} =_k \{b_1, \ldots, b_n\}$, alors $\{Na_1 + M, \ldots, Na_n + M\} =_k \{Nb_1 + M, \ldots, Nb_n + M\}$.

Preuve par récurrence sur k.

Si $\sum_{i=1}^n a_i = \sum_{i=1}^n b_i$, alors $\sum_{i=1}^n (Na_i + M) = \sum_{i=1}^n (Nb_i + M)$.

Hypothèse de récurrence : si $\{a_1, \ldots, a_n\} =_k \{b_1, \ldots, b_n\}$, alors $\{Na_1 + M, \ldots, Na_n + M\} =_k \{Nb_1 + M, \ldots, Nb_n + M\}$, avec $k \geq 1$.

- Supposons que $\{a_1, \ldots, a_n\} =_{k+1} \{b_1, \ldots, b_n\}$.

On a $\{Na_1 + M, \ldots, Na_n + M\} =_k \{Nb_1 + M, \ldots, Nb_n + M\}$,
il reste à vérifier que

$$\sum_{i=1}^{n} (Na_i + M)^{k+1} = \sum_{i=1}^{n} (Nb_i + M)^{k+1}$$

or, si on applique le binôme de Newton,

$$\sum_{i=1}^{n} (Na_i + M)^{k+1} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=0}^{k+1} \mathrm{C}_{k+1}^{j} \, N^j \, a_i^j \, M^{k+1-j}$$

$$= \sum_{j=0}^{k+1} \mathrm{C}_{k+1}^{j} \, N^j \, M^{k+1-j} \sum_{i=1}^{n} a_i^j$$

Un polynôme de degré $n \geq 1$ possède n zéros ($\in \mathbb{C}$) comptés avec leur multiplicité.

Formules de Viète

$$\prod_{i=1}^{n}(X - a_i) = \sum_{j=0}^{n}(-1)^j \; C_j \; X^{n-j} \quad \text{avec} \quad C_0 = 1$$

$$C_1 = a_1 + \cdots + a_n, \quad C_2 = \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_i a_j, \; \ldots, \; C_n = a_1 \cdots a_n$$

Exemples

$$(X-a)(X-b) = X^2 - (a+b)X + ab$$

$$(X-a)(X-b)(X-c) = X^3 - (a+b+c)X^2 + (ab+ac+bc)X - abc$$

Notation : $S_j = a_1^j + \cdots + a_n^j$

$\star$ Avec un peu de théorie des polynômes symétriques...

Girard (1629) – Newton (1666) : exprimer la somme des j-ièmes puissances des zéros d'un polynôme à partir des sommes des i-ièmes puissances, $i < j$, et des coefficients du polynôme.

$$\begin{aligned}
S_1 &= C_1 \\
S_2 &= C_1 S_1 - 2C_2 \\
S_3 &= C_1 S_2 - C_2 S_1 + 3C_3 \\
S_4 &= C_1 S_3 - C_2 S_2 + C_3 S_1 - 4C_4 \\
&\vdots
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
C_1 &= S_1 \\
C_2 &= (-S_2 + C_1 S_1)/2 \\
C_3 &= (S_3 - C_1 S_2 + C_2 S_1)/3 \\
C_4 &= (-S_4 + C_1 S_3 - C_2 S_2 + C_3 S_1)/4 \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Lemme (P. Borwein, C. Ingalls)

Soient n, k tels que $n \geq k$. On a $\{a_1, \ldots, a_n\} =_k \{b_1, \ldots, b_n\}$ si et seulement si

$$\deg\left(\prod_{i=1}^{n}(X - a_i) - \prod_{i=1}^{n}(X - b_i)\right) \leq n - (k+1)$$

$$S_j = a_1^j + \cdots + a_n^j, \quad \prod_{i=1}^{n}(X - a_i) = \sum_{j=0}^{n}(-1)^j\, C_j\, X^{n-j}$$

$$S'_j = b_1^j + \cdots + b_n^j, \quad \prod_{i=1}^{n}(X - b_i) = \sum_{j=0}^{n}(-1)^j\, C'_j\, X^{n-j}$$

$$\begin{aligned}\{a_1, \ldots, a_n\} =_k \{b_1, \ldots, b_n\} \quad &\Leftrightarrow \quad S_1 = S'_1, \ldots, S_k = S'_k \\ &\Leftrightarrow \quad C_1 = C'_1, \ldots, C_k = C'_k\end{aligned}$$

- Pour tout degré k, si l'on dispose d'une solution de taille n, alors $n \geq k+1$.

Supposons disposer d'une solution de taille $n \leq k$.
Quitte à compléter, on peut supposer avoir deux ensembles différents de taille k tels que

$$\{a_1, \ldots, a_k\} =_k \{b_1, \ldots, b_k\}$$

Vu le lemme précédent, les deux polynômes unitaires

$$\prod_{i=1}^{k}(X-a_i) = \sum_{j=0}^{k}(-1)^j\ C_j\ X^{k-j} \text{ et } \prod_{i=1}^{k}(X-b_i) = \sum_{j=0}^{k}(-1)^j\ C'_j\ X^{k-j}$$

ont exactement les mêmes coefficients. Ils sont donc égaux et ont les mêmes zéros. De là $\{a_1, \ldots, a_k\} = \{b_1, \ldots, b_k\}$. Absurde!

Soit k fixé. Prouhet donne une solution pour $n = 2^k$.

$k = 1,\ n = 2,\ A \cup B = \{0, 1, 2, 3\}$

$$A = \{0, 3\} \text{ et } B = \{1, 2\}$$

$$0 + 3 = 1 + 2$$

$k = 2,\ n = 4,\ A \cup B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

$$A = \{0, 3, 5, 6\} \text{ et } B = \{1, 2, 4, 7\}$$

$$0 + 3 + 5 + 6 = 14 = 1 + 2 + 4 + 7$$

$$0^2 + 3^2 + 5^2 + 6^2 = 70 = 1^2 + 2^2 + 4^2 + 7^2$$

(*et c'est l'unique solution, vérification informatique*)

Soit k fixé. Prouhet donne une solution pour $n = 2^k$.

$k = 1,\ n = 2,\ A \cup B = \{0, 1, 2, 3\}$

$$A = \{0, 3\} \text{ et } B = \{1, 2\}$$

$$0 + 3 = 1 + 2$$

$k = 2,\ n = 4,\ A \cup B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

$$A = \{0, 3, 5, 6\} \text{ et } B = \{1, 2, 4, 7\}$$

$$0 + 3 + 5 + 6 = 14 = 1 + 2 + 4 + 7$$

$$0^2 + 3^2 + 5^2 + 6^2 = 70 = 1^2 + 2^2 + 4^2 + 7^2$$

(*et c'est l'unique solution, vérification informatique*)

Soit k fixé. Prouhet donne une solution pour $n = 2^k$.

$k = 1, \ n = 2, \ A \cup B = \{0, 1, 2, 3\}$

$$A = \{0, 3\} \text{ et } B = \{1, 2\}$$

$$0 + 3 = 1 + 2$$

$k = 2, \ n = 4, \ A \cup B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

$$A = \{{\color{blue}0, 3}, 5, 6\} \text{ et } B = \{{\color{red}1, 2}, 4, 7\}$$

$$0 + 3 + 5 + 6 = 14 = 1 + 2 + 4 + 7$$

$$0^2 + 3^2 + 5^2 + 6^2 = 70 = 1^2 + 2^2 + 4^2 + 7^2$$

(*et c'est l'unique solution, vérification informatique*)

$k = 3,\ n = 8,\ A \cup B = \{0, \dots, 15\}$

$$A = \{0, 3, 5, 6, 9, 10, 12, 15\} \text{ et } B = \{1, 2, 4, 7, 8, 11, 13, 14\}$$

$$0+3+5+6+9+10+12+15 = 60 = 1+2+4+7+8+11+13+14$$

$$0^2+3^2+5^2+6^2+9^2+10^2+12^2+15^2 = 620 = 1^2+2^2+4^2+\cdots+14^2$$

$$0^3+3^3+5^3+6^3+9^3+10^3+12^3+15^3 = 7200 = 1^3+2^3+4^3+\cdots+14^3$$

(*et c'est l'unique solution, vérification informatique*)

Regardons d'un peu plus près

Pour les ensembles

$$A = \{0, 3, 5, 6, 9, 10, 12, 15\} \text{ et } B = \{1, 2, 4, 7, 8, 11, 13, 14\}$$

écrits en base 2, on obtient

$$A = \{0, 11, 101, 110, 1001, 1010, 1100, 1111\}$$

et

$$B = \{1, 10, 100, 111, 1000, 1011, 1101, 1110\}$$

Remarque

Pour les entiers $0, \ldots, 2^{k+1} - 1$, exactement la moitié (i.e., 2^k) des écritures en base 2 contiennent un nombre pair de 1.

$$
\begin{array}{r}
0 \\
1 \\
\hline
10 \\
11 \\
\hline
100 \\
101 \\
110 \\
111 \\
\hline
\vdots
\end{array}
$$

Théorème (Prouhet)

Soit $k \geq 1$. Soient $A_k \subset \{0, \dots, 2^{k+1} - 1\}$ l'ensemble des entiers dont l'écriture en base 2 a un nombre pair de 1 et $B_k = \{0, \dots, 2^{k+1} - 1\} \setminus A_k$. On a

$$\boxed{A_k =_k B_k.}$$

Il est conjecturé qu'il s'agit de l'unique solution exacte (i.e., $A_k =_k B_k$ et $A_k \neq_k B_k$) pour l'ensemble $\{0, \dots, 2^{k+1} - 1\}$.

$\sigma_2(n)$ = somme des chiffres de l'écriture en base 2 de n

n	0	1	2	3	4	5	6	7
	0	1	10	11	100	101	110	111
$\sigma_2(n)$	0	1	1	2	1	2	2	3
	A	B	B	A	B	A	A	B

Preuve du théorème (N. Pytheas Fogg, Lect. Notes in Math. **1794**, V. Berthé *et al.* Eds.).

$$\text{thèse : } \forall r \in \{0, \ldots, k\}, \ \sum_{a \in A_k} a^r = \sum_{b \in B_k} b^r.$$

Il est équivalent de montrer que

$$\sum_{a \in A_k} a^r - \sum_{b \in B_k} b^r = 0$$

ou encore que

$$\sum_{n=0}^{2^{k+1}-1} (-1)^{\sigma_2(n)} n^r = 0.$$

voir aussi R. Honsberger, *Mathematical Diamonds*, The Math. Association of America (2003).

L'écriture d'un nombre en base 2 étant (essentiellement) unique, on a

$$F_k(X) = \sum_{n=0}^{2^{k+1}-1} (-1)^{\sigma_2(n)} X^n = \prod_{j=0}^{k} (1 - X^{2^j})$$

Exemple, $k = 1, 2$

$$1 - X - X^2 + X^3 = (1 - X)(1 - X^2)$$

$$1 - X - X^2 + X^3 - X^4 + X^5 + X^6 - X^7 = (1 - X)(1 - X^2)(1 - X^4)$$

puisque $1 - X^n = (1 - X)(1 + X + X^2 + \cdots + X^{n-1})$, on en conclut que

$$F_k(X) = (1 - X)^{k+1} G_k(X) \text{ avec } G_k \in \mathbb{Z}[X].$$

L'écriture d'un nombre en base 2 étant (essentiellement) unique, on a

$$F_k(X) = \sum_{n=0}^{2^{k+1}-1} (-1)^{\sigma_2(n)} X^n = \prod_{j=0}^{k} (1 - X^{2^j})$$

Exemple, $k = 1, 2$

$$1 - X - X^2 + X^3 = (1 - X)(1 - X^2)$$

$$1 - X - X^2 + X^3 - X^4 + X^5 + X^6 - X^7 = (1 - X)(1 - X^2)(1 - X^4)$$

puisque $1 - X^n = (1 - X)(1 + X + X^2 + \cdots + X^{n-1})$, on en conclut que

$$F_k(X) = (1 - X)^{k+1} G_k(X) \text{ avec } G_k \in \mathbb{Z}[X].$$

L'écriture d'un nombre en base 2 étant (essentiellement) unique, on a

$$F_k(X) = \sum_{n=0}^{2^{k+1}-1} (-1)^{\sigma_2(n)} X^n = \prod_{j=0}^{k} (1 - X^{2^j})$$

Exemple, $k = 1, 2$

$$1 - X - X^2 + X^3 = (1 - X)(1 - X^2)$$

$$1 - X - X^2 + X^3 - X^4 + X^5 + X^6 - X^7 = (1 - X)(1 - X^2)(1 - X^4)$$

puisque $1 - X^n = (1 - X)(1 + X + X^2 + \cdots + X^{n-1})$, on en conclut que

$$F_k(X) = (1 - X)^{k+1} G_k(X) \text{ avec } G_k \in \mathbb{Z}[X].$$

L'écriture d'un nombre en base 2 étant (essentiellement) unique, on a

$$F_k(X) = \sum_{n=0}^{2^{k+1}-1} (-1)^{\sigma_2(n)} X^n = \prod_{j=0}^{k} (1 - X^{2^j})$$

Exemple, $k = 1, 2$

$$1 - X - X^2 + X^3 = (1 - X)(1 - X^2)$$

$$1 - X - X^2 + X^3 - X^4 + X^5 + X^6 - X^7 = (1 - X)(1 - X^2)(1 - X^4)$$

puisque $1 - X^n = (1 - X)(1 + X + X^2 + \cdots + X^{n-1})$, on en conclut que

$$F_k(X) = (1 - X)^{k+1} G_k(X) \text{ avec } G_k \in \mathbb{Z}[X].$$

L'écriture d'un nombre en base 2 étant (essentiellement) unique, on a

$$F_k(X) = \sum_{n=0}^{2^{k+1}-1} (-1)^{\sigma_2(n)} X^n = \prod_{j=0}^{k} (1 - X^{2^j})$$

Exemple, $k = 1, 2$

$$1 - X - X^2 + X^3 = (1 - X)(1 - X^2)$$

$$1 - X - X^2 + X^3 - X^4 + X^5 + X^6 - X^7 = (1 - X)(1 - X^2)(1 - X^4)$$

puisque $1 - X^n = (1 - X)(1 + X + X^2 + \cdots + X^{n-1})$, on en conclut que

$$F_k(X) = (1 - X)^{k+1} G_k(X) \text{ avec } G_k \in \mathbb{Z}[X].$$

De cette factorisation, pour tout $j \in \{0, \ldots, k\}$, on a

$$(\mathrm{D}^j F_k)(1) = 0$$

c'est-à-dire, puisque $\mathrm{D}^j X^n = n(n-1)\cdots(n-j+1)X^{n-j}$,

$$\sum_{n=0}^{2^{k+1}-1} (-1)^{\sigma_2(n)}\, n(n-1)\cdots(n-j+1) = 0.$$

Pour rappel, il faut démontrer, pour tout $r \in \{0, \ldots, k\}$,

$$\sum_{n=0}^{2^{k+1}-1} (-1)^{\sigma_2(n)}\, n^r = 0.$$

On procède par récurrence sur r. Cas $r = 0$, OK.

Au vu de la remarque, pour les entiers $0, \ldots, 2^{k+1} - 1$, exactement la moitié (i.e., 2^k) des écritures en base 2 contiennent un nombre pair de 1.

Supposons que pour tout $r \in \{0, \dots, j-1\}$,

$$\sum_{n=0}^{2^{k+1}-1} (-1)^{\sigma_2(n)}\, n^r = 0.$$

A-t-on encore cette relation pour $r = j$? On sait que

$$\sum_{n=0}^{2^{k+1}-1} (-1)^{\sigma_2(n)}\, \underbrace{n(n-1)\cdots(n-j+1)}_{=n^j+\sum_{t=0}^{j-1}\alpha_t\, n^t} = 0.$$

$$\sum_{n=0}^{2^{k+1}-1} (-1)^{\sigma_2(n)}\, n^j + \sum_{t=0}^{j-1} \alpha_t \underbrace{\sum_{n=0}^{2^{k+1}-1} (-1)^{\sigma_2(n)}\, n^t}_{=0} = 0$$

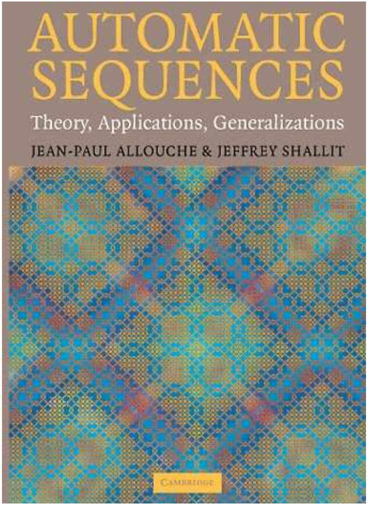
$$\forall r \in \{0, \ldots, k\}, \ \sum_{a \in A_k} a^r = \sum_{b \in B_k} b^r$$

Corollaire

Pour tout polynôme P de degré $\leq k$, on a

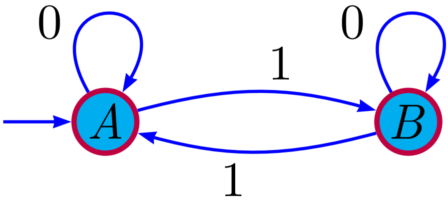
$$\sum_{a \in A_k} P(a) = \sum_{b \in B_k} P(b)$$

Un automate pour construire les ensembles A_∞ et B_∞



J.-P. Allouche, J. Shallit, Cambridge Univ. Press, 2003.

L'*automate* suivant permet de décider si un nombre, écrit en base 2, appartient à A_∞ ou B_∞



$A_\infty = \{0, 3, 5, 6, 9, 10, 12, 15, \ldots\}$ et $B_\infty = \{1, 2, 4, 7, 8, 11, 13, 14, \ldots\}$

On peut définir une suite $(x_n)_{n\geq 0}$ sur l'alphabet $\{a, b\}$ telle que

$$x_n = a \Leftrightarrow \sigma_2(n) \text{ est pair.}$$

$$a|b|ba|baab|baababba|baababbaabbabaab|\cdots$$

$$\text{Si } x_n = a, \text{ alors }, x_{2n} = a, \ x_{2n+1} = b$$

$$\text{Si } x_n = b, \text{ alors }, x_{2n} = b, \ x_{2n+1} = a$$

Moyen de construction de suites

La suite est engendrée à partir des écritures en base 2 des entiers fournies à un automate, i.e., pour obtenir le n-ième terme de la suite $(x_n)_{n\geq 0}$, on fournit à l'automate précédent l'écriture en base 2 de n.

$$\text{Si } x_n = a, \text{ alors }, x_{2n} = a, \; x_{2n+1} = b$$

$$\text{Si } x_n = b, \text{ alors }, x_{2n} = b, \; x_{2n+1} = a$$

Corollaire

La suite de Thue-Morse n'est pas périodique.

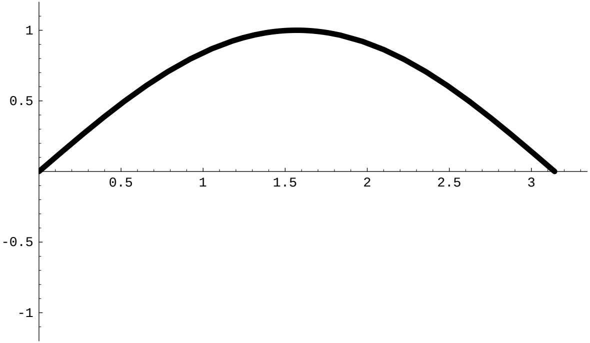
Supposons que $n+1$ est une période, dès lors, $x_n = x_{2n+1}$!

Un exercice d'étude de signe

Exercice pour vos élèves (J.-P. Allouche'99)

Etudier le signe, sur l'intervalle $[0, \pi]$ de la fonction

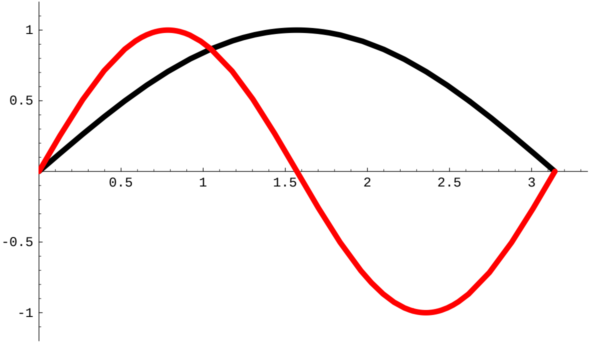
$$F_n(x) = \sin(x)\sin(2x)\sin(4x)\cdots\sin(2^n x)$$



Exercice pour vos élèves (J.-P. Allouche'99)

Etudier le signe, sur l'intervalle $[0, \pi]$ de la fonction

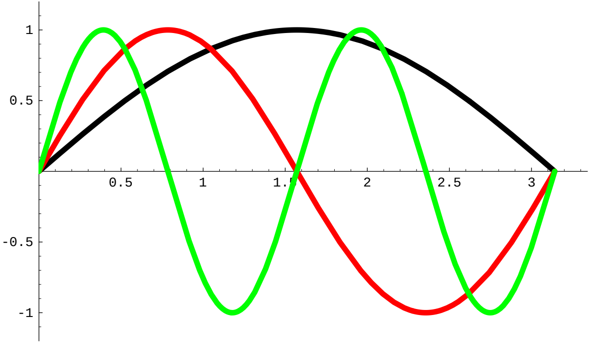
$$F_n(x) = \sin(x)\sin(2x)\sin(4x)\cdots\sin(2^n x)$$



Exercice pour vos élèves (J.-P. Allouche'99)

Etudier le signe, sur l'intervalle $[0, \pi]$ de la fonction

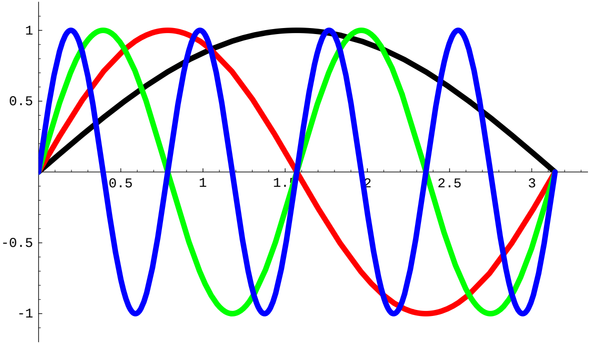
$$F_n(x) = \sin(x)\sin(2x)\sin(4x)\cdots\sin(2^n x)$$



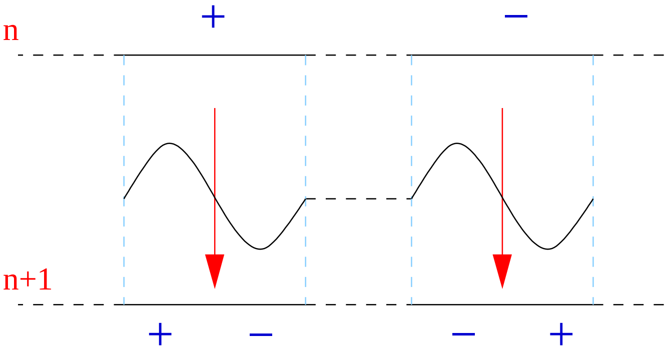
Exercice pour vos élèves (J.-P. Allouche'99)

Etudier le signe, sur l'intervalle $[0, \pi]$ de la fonction

$$F_n(x) = \sin(x)\sin(2x)\sin(4x)\cdots\sin(2^n x)$$



$n=0$	$+$							
$n=1$	$+$	$-$						
$n=2$	$+$	$-$	$-$	$+$				
$n=3$	$+$	$-$	$-$	$+$	$-$	$+$	$+$	$-$



$$\boxed{+ \mapsto +-, \quad - \mapsto -+}$$

On peut définir une suite en *itérant un morphisme* (convenable)

$$a \mapsto ab$$

$$b \mapsto ba$$

$$\begin{array}{rcl} f(a) & = & ab \\ f^2(a) & = & abba \\ f^3(a) & = & abbabaab \\ f^4(a) & = & abbabaabbaababba \\ f^5(a) & = & abbabaabbaababbabaababbaabbabaab \end{array}$$

Moyen de construction de suites (2)

Avec un minimum de topologie, on peut dire que cette suite de mots $(f^n(a))_{n\geq 0}$ converge vers un mot infini (ou suite infinie) limite.

Sous des hypothèses "raisonnables", un théorème dû à A. Cobham stipule qu'il est équivalent de construire une suite

- en itérant un morphisme (on autorise un recodage),
- en nourrissant un automate d'écritures en base entière.

A. Cobham, Uniform tag sequences, *Math. Systems Theory* **6** (1972), 164-–192.

Un peu de combinatoire des mots

MATH0470-1 Combinatoire des mots

(30h Th, 10h Pr, 20h TD) Master en sciences mathématiques, à finalité approfondie

Contenus du cours : D'une manière générale, la combinatoire est la branche des mathématiques qui étudie les "configurations" d'un ensemble "discret" (et généralement fini). On s'intéresse alors au dénombrement ou à l'énumération effective des objets de cet ensemble, à la structure (éventuellement algébrique) de celui-ci ou encore à ses propriétés extrémales (éléments maximaux, ...). Comme son nom l'indique, la combinatoire des mots s'intéresse plus spécialement aux mots (finis ou infinis), i.e., aux suites de symboles ou de lettres appartenant à un alphabet fini.

Cette suite, qui fournit une solution au problème de Prouhet,

$$abbabaabbaababbabaababbaabbabaab\cdots$$

est aussi appelée suite de Thue–Morse

Axel Thue (1863–1922)

Marston Morse (1892-1977)

Des exemples de carré : `bonbon`, `baba`, `tartare`, ...

Théorème

Avec un alphabet de deux lettres, tout mot de longueur ≥ 4 contient un carré.

aba

Applications

- Algorithmique du texte (*e.g.*, recherche d'un mot dans un texte, compression de données,...),
- Bio-informatique (séquence génétique).

Des exemples de carré : `bonbon`, `baba`, `tartare`, ...

Théorème

Avec un alphabet de deux lettres, tout mot de longueur ≥ 4 contient un carré.

aba

Applications

- Algorithmique du texte (*e.g.*, recherche d'un mot dans un texte, compression de données,...),
- Bio-informatique (séquence génétique).

Des exemples de carré : `bonbon`, `baba`, `tartare`, ...

Théorème

Avec un alphabet de deux lettres, tout mot de longueur ≥ 4 contient un carré.

aba

Applications

- Algorithmique du texte (*e.g.*, recherche d'un mot dans un texte, compression de données,...),
- Bio-informatique (séquence génétique).

Des exemples de carré : `bonbon`, `baba`, `tartare`, ...

Théorème

Avec un alphabet de deux lettres, tout mot de longueur ≥ 4 contient un carré.

aba

Applications

- Algorithmique du texte (*e.g.*, recherche d'un mot dans un texte, compression de données,...),
- Bio-informatique (séquence génétique).

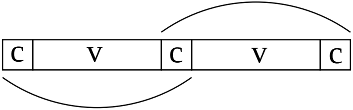
- Sur 3 lettres, peut-on éviter les carrés ?

$$abacabcacb\cdots$$

- Sur 2 lettres, quelles configurations/motifs sont (in)évitables ?

Théorème

Le mot de Thue–Morse est sans chevauchement. Donc, en particulier, il est sans cube et n'est pas (ultimement) périodique.



Puisque le mot de Thue–Morse est sans chevauchement, il se factorise de manière unique à l'aide de $\{a, ab, abb\}$. En effet, il ne contient jamais bbb.

$$abb|ab|a|abb|a|ab|abb|ab|a|ab|abb|a|abb|ab|a|\ a\cdots$$

$$g : \begin{cases} 1 \mapsto abb \\ 2 \mapsto ab \\ 3 \mapsto a \end{cases}$$

On considère le mot infini $123132123213123\cdots$
Ce mot est sans carré car s'il en contenait un, le mot de Thue-Morse contiendrait un chevauchement !

Une troisième définition de la suite de Thue–Morse
(1. par automate, 2. par morphisme itéré)

$$X_0 = a, \quad X_{n+1} = X_n \overline{X_n}$$

où $\overline{abbaa} = baabb$

$$\begin{array}{lcl} X_0 & = & a \\ X_1 & = & ab \\ X_2 & = & abba \\ X_3 & = & abbabaab \\ X_4 & = & abbabaabbaababba \\ X_5 & = & abbabaabbaababbabaababbaabbabaab \end{array}$$

Idée de la preuve (par récurrence) : X_n correspond aux entiers $\{0, 1, \ldots, 2^n - 1\}$ et $\overline{X_n}$ correspond aux entiers $\{2^n, \ldots, 2^{n+1} - 1\}$ dont l'écriture débute par un 1 supplémentaire.

A. Engel, Problem-Solving Strategies, Springer (1997).

35. *Morse–Thue Sequence*. Start with 0; to each initial segment append its complement: $0, 01, 0110, 01101001, \ldots$.

(a) Let the digits of the sequence be $x(0),\ x(1),\ x(2), \ldots$. Prove that $x(2n) = x(n)$, $x(2n+1) = 1 - x(2n)$.

(b) Prove that $x(n) = 1 - x(n - 2^k)$, where 2^k is the largest power of 2 which is $\leq n$. Find the $1993rd$ digit of the sequence.

(c) Prove that the sequence is not periodic.

(d) Write the nonnegative integers in base 2: 0, 1, 10, 11, ... Now replace each number by the sum of its digits mod 2. You get the Morse–Thue sequence. Prove this.

Miscellanées

Une structure “fractal”

$$abbabaabbaababbabaababbaabbabaab$$

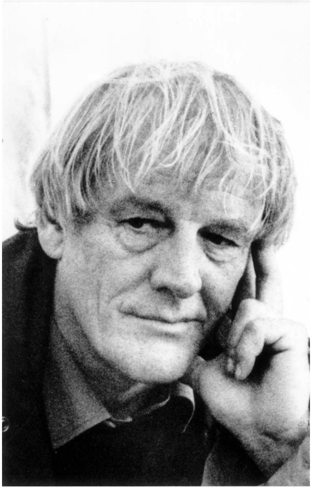
$$a \cdot b \cdot b \cdot a \cdot b \cdot a \cdot a \cdot b \cdot b \cdot a \cdot a \cdot b \cdot a \cdot b \cdot b \cdot a \cdot$$

$$b \cdot a \cdot a \cdot b \cdot a \cdot b \cdot b \cdot a \cdot a \cdot b \cdot b \cdot a \cdot b \cdot a \cdot a \cdot b \cdot$$

$$\boxed{\#\{(x_{2^t n+r})_{n\geq 0} \mid t \geq 0, r < 2^t\} = 2.}$$

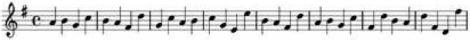
Si $x_n = a,$ alors $, x_{2n} = a,\ x_{2n+1} = b$

Si $x_n = b,$ alors $, x_{2n} = b,\ x_{2n+1} = a$



Per Nørgård

http://pernoergaard.dk/



Uendelighedsrækken

$c_0 = 0$, $c_{2n} = -c_n$ et $c_{2n+1} = c_n + 1$

En particulier, $c_n = t_n$ modulo 2

This site is supported by donations to The OEIS Foundation.

Integer Sequences

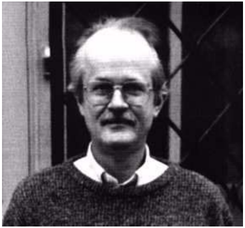
Search Hints

(Greetings from The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences!)

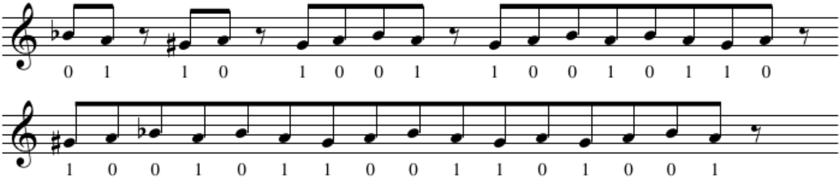
A004718 The Danish composer Per Norgard [Nørgård]'s "infinity sequence", invented in an attempt to unify in a perfect way repetition and variation: a(2n) = -a(n), a(2n+1) = a(n) + 1, a(0)=0. 4

0, 1, -1, 2, 1, 0, -2, 3, -1, 2, 0, 1, 2, -1, -3, 4, 1, 0, -2, 3, 0, 1, -1, 2, -2, 3, 1, 0, 3, -2, -4, 5, -1, 2, 0, 1, 2, -1, -3, 4, 0, 1, -1, 2, 1, 0, -2, 3, 2, -1, -3, 4, -1, 2, 0, 1, -3, 4, 2, -1, 4, -3, -5, 6, 1, 0, -2, 3, 0, 1, -1, 2, -2, 3, 1, 0, 3, -2, -4, 5, 0, 1, -1, 2, 1, 0 (list; graph; refs; listen; history; text; internal format)

http://www.youtube.com/watch?v=FA7m7anh2xg



Tom Johnson



Machgielis Euwe (1901-1981).

Aux échecs : une partie est déclarée nulle, si la même séquence de coups apparaît trois fois d'affilée ("German Rule"). Max Euwe (1929) utilise la suite de Thue–Morse (sans cube) pour montrer qu'avec cette règle, une partie infinie peut encore exister.

$$a \mapsto Ng1 - f3, Ng8 - f6, Nf3 - g1, Nf6 - g8$$

$$b \mapsto Nb1 - c3, Nb8 - c6, Nc3 - b1, Nc6 - b8$$

Problème

Partitionner $\mathbb{N}$ en deux ensembles disjoints A et B de telle sorte que toute entier possède le même nombre de décompositions comme somme de deux éléments distincts de A et comme somme de deux éléments distincts de B.

Théorème (Lambek–Moser 1959, R. Honsberger)

La suite de Thue–Morse fournit l'unique solution à ce problème.

$$A = \{0, 3, 5, 6, 9, 10, 12, 15, \ldots\} \text{ et } B = \{1, 2, 4, 7, 8, 11, 13, 14, \ldots\}$$

$$12 = 0 + 12 = 3 + 9, \quad 12 = 1 + 11 = 4 + 8$$

J. Lambek, L. Moser, On some two way classifications of integers, *Canad. Math. Bull.* **2** (1959), 85–89.

Elementary Problems: E2692. *Amer. Math. Monthly* **85** (1978), 47-–48

E 2692. *Proposed by Donald R. Woods, Stanford University*

Show that the sequence of increasingly complex fractions

$$\frac{1}{2},\ \left(\frac{1}{2}\right)\Big/\left(\frac{3}{4}\right),\ \frac{\left(\frac{1}{2}\right)\Big/\left(\frac{3}{4}\right)}{\left(\frac{5}{6}\right)\Big/\left(\frac{7}{8}\right)},\quad \frac{\left(\frac{1}{2}\right)\Big/\left(\frac{3}{4}\right)}{\left(\frac{5}{6}\right)\Big/\left(\frac{7}{8}\right)}\ \Bigg/\ \frac{\left(\frac{9}{10}\right)\Big/\left(\frac{11}{12}\right)}{\left(\frac{13}{14}\right)\Big/\left(\frac{15}{16}\right)},\ \ldots,$$

approaches a limit, and find that limit.

$$\frac{\sqrt{2}}{2}$$

D. Robbins, Solution to Problem E2692, *Am. Math. Monthly* **86** (1979), 394–395.

Elementary Problems: E2692. *Amer. Math. Monthly* **85** (1978), 47-–48

E 2692. *Proposed by Donald R. Woods, Stanford University*

Show that the sequence of increasingly complex fractions

$$\frac{1}{2},\ \left(\frac{1}{2}\right)\Big/\left(\frac{3}{4}\right),\ \frac{\left(\frac{1}{2}\right)\Big/\left(\frac{3}{4}\right)}{\left(\frac{5}{6}\right)\Big/\left(\frac{7}{8}\right)},\quad \frac{\left(\frac{1}{2}\right)\Big/\left(\frac{3}{4}\right)}{\left(\frac{5}{6}\right)\Big/\left(\frac{7}{8}\right)}\Bigg/\frac{\left(\frac{9}{10}\right)\Big/\left(\frac{11}{12}\right)}{\left(\frac{13}{14}\right)\Big/\left(\frac{15}{16}\right)},\ \ldots,$$

approaches a limit, and find that limit.

$$\frac{\sqrt{2}}{2}$$

D. Robbins, Solution to Problem E2692, *Am. Math. Monthly* **86** (1979), 394–395.

Transcendance

La constante de Thue–Morse

$$\frac{0}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{0}{16}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sigma_2(n) \bmod 2}{2^{n+1}} \simeq 0,4124540336\cdots$$

est un nombre transcendant.

F. M. Dekking, Transcendence du nombre de Thue-Morse, *Comptes Rendus de l'Academie des Sciences de Paris* **285** (1977), 157–160.

Transcendance II

Soient $a, b > 0$ des entiers. Le réel

$$x = a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{a + \ddots}}}$$

est transcendant.

M. Queffélec, Transcendance des fractions continues de Thue-Morse, *J. Number Theory* **73** (1998), 201-–211.

B. Adamczewski, Y. Bugeaud, A short proof of the transcendence of Thue-Morse continued fractions, *Amer. Math. Monthly* **114** (2007), 536-–540.

Un problème de Gelfond

$$\lim_{N\to+\infty} \frac{\#\{n \in \mathcal{P} \mid n \leq N \text{ and } \sigma_2(n) \equiv 0 \bmod 2\}}{\#\{n \in \mathcal{P} \mid n \leq N\}} = \frac{1}{2}.$$

C. Mauduit, J. Rivat, Sur un problème de Gelfond: la somme des chiffres des nombres premiers, *Ann. of Math.* **171** (2010), 1591-–1646.