Les mathématiques de l'Égypte ancienne

Philippe Cara

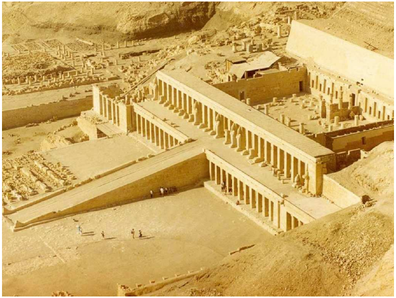
Vrije Universiteit Brussel

pcara@vub.ac.be

39e Congrès de la SBPMef

27 août 2013

La civilisation antique en Égypte



La nécessité (d'une forme) de mathématique

- calendrier
- mesure de terrains cultivables
- administration (taxes)
- construction de pyramides, temples, ...

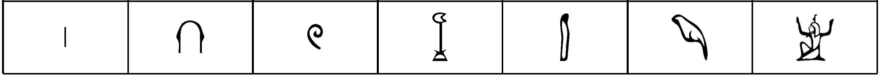
Mesure de la terre

Documents historiques

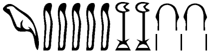
- écriture sur papyrus
- conservation difficile
- hiéroglyphes et peintures murales
- les Babyloniens avaient des tablettes d'argile
- surtout des problèmes “de la vie quotidienne”, pas de méthode générale !

Écriture des nombres

1	10	100	1000	10000	100000	1000000



 $=$ 275

 $=$ 152023

Pas besoin de zéro !

Le papyrus de Rhind

Introduction

Exemple de calcul pour sonder les choses et connaître tout ce qui est obscur [. . .] et ainsi percer tous les secrets.

Introduction

Exemple de calcul pour sonder les choses et connaître tout ce qui est obscur [. . .] et ainsi percer tous les secrets.
C'est dans ce but, en effet, que ce rouleau a été copié en l'an 33, durant le quatrième mois de la saison d'innondation [. . .] sous la majesté du Roi de Haute et de Basse Égypte A-a-ouser-Rê, doué de vie.

Introduction

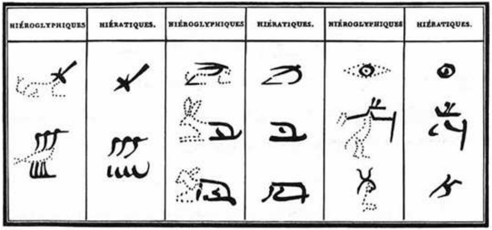
Exemple de calcul pour sonder les choses et connaître tout ce qui est obscur [. . .] et ainsi percer tous les secrets.
C'est dans ce but, en effet, que ce rouleau a été copié en l'an 33, durant le quatrième mois de la saison d'innondation [. . .] sous la majesté du Roi de Haute et de Basse Égypte A-a-ouser-Rê, doué de vie.
Conformément aux écrits des temps anciens, qui ont été faits au temps [du roi Ny-ma] ât-Rê.

Introduction

Exemple de calcul pour sonder les choses et connaître tout ce qui est obscur [. . .] et ainsi percer tous les secrets.
C'est dans ce but, en effet, que ce rouleau a été copié en l'an 33, durant le quatrième mois de la saison d'innondation [. . .] sous la majesté du Roi de Haute et de Basse Égypte A-a-ouser-Rê, doué de vie.
Conformément aux écrits des temps anciens, qui ont été faits au temps [du roi Ny-ma] ât-Rê.
C'est le scribe Ahmose qui a copié cet ouvrage.

Le papyrus de Rhind

- Le plus important papyrus mathématique (RMP)
- originalement 543 cm de long sur 33 cm de large
- 525 cm au British Museum (pBM 10058)
- belle écriture hiératique



- Henry Rhind (1833–1863)
- -1650
- 87 problèmes avec solution
- Verso : table de fractions
- Scribe Ahmose
- Rouleau de cuir mathématique (26 additions de fractions unitaires)

Verso du papyrus de Rhind

$$\begin{aligned}
2/5 &= 1/3 + 1/15 \\
2/7 &= 1/4 + 1/28 \\
2/9 &= 1/6 + 1/18 \\
2/11 &= 1/6 + 1/66 \\
2/13 &= 1/8 + 1/52 + 1/104 \\
2/15 &= 1/10 + 1/30 \\
&\vdots \\
2/101 &= 1/101 + 1/202 + 1/303 + 1/606
\end{aligned}$$

Petit théorème

Tout nombre rationnel peut être écrit comme somme de fractions unitaires, avec tous les dénominateurs différents.

Petit théorème

Tout nombre rationnel peut être écrit comme somme de fractions unitaires, avec tous les dénominateurs différents.

Soit p/q une fraction (p, q positifs) avec $1 \neq p < q$.

Petit théorème

Tout nombre rationnel peut être écrit comme somme de fractions unitaires, avec tous les dénominateurs différents.

Soit p/q une fraction (p, q positifs) avec $1 \neq p < q$. Algoritme : on soustrait la plus grande fraction unitaire $1/n \leqslant p/q$ possible.

Petit théorème

Tout nombre rationnel peut être écrit comme somme de fractions unitaires, avec tous les dénominateurs différents.

Soit p/q une fraction (p, q positifs) avec $1 \neq p < q$. Algoritme : on soustrait la plus grande fraction unitaire $1/n \leqslant p/q$ possible. Et on répète...

Petit théorème

Tout nombre rationnel peut être écrit comme somme de fractions unitaires, avec tous les dénominateurs différents.

Soit p/q une fraction (p, q positifs) avec $1 \neq p < q$. Algoritme : on soustrait la plus grande fraction unitaire $1/n \leqslant p/q$ possible. Et on répète...

$$\frac{p}{q} - \frac{1}{n} = \frac{np - q}{nq}$$

On démontre que le numérateur de la fraction restante est plus petit que p (mais encore positif).

Petit théorème

Tout nombre rationnel peut être écrit comme somme de fractions unitaires, avec tous les dénominateurs différents.

Soit p/q une fraction (p, q positifs) avec $1 \neq p < q$. Algoritme : on soustrait la plus grande fraction unitaire $1/n \leqslant p/q$ possible. Et on répète...

$$\frac{p}{q} - \frac{1}{n} = \frac{np - q}{nq}$$

On démontre que le numérateur de la fraction restante est plus petit que p (mais encore positif).

Supposons que $np - q \geqslant p$, alors $np - p \geqslant q \Leftrightarrow (n-1)p \geqslant q$

Petit théorème

Tout nombre rationnel peut être écrit comme somme de fractions unitaires, avec tous les dénominateurs différents.

Soit p/q une fraction (p, q positifs) avec $1 \neq p < q$. Algoritme : on soustrait la plus grande fraction unitaire $1/n \leqslant p/q$ possible. Et on répète...

$$\frac{p}{q} - \frac{1}{n} = \frac{np - q}{nq}$$

On démontre que le numérateur de la fraction restante est plus petit que p (mais encore positif).

Supposons que $np - q \geqslant p$, alors $np - p \geqslant q \Leftrightarrow (n-1)p \geqslant q$ et donc

$$\frac{1}{n} < \frac{1}{n-1} \leqslant \frac{p}{q},$$

contradiction.

L'algorithme donne donc une suite de fractions à numérateur strictement décroissant. De plus, la fraction restante est plus petite que $1/n$ et donc le dénomnateur suivant devra être plus grand.

Remarque

Il peut y avoir plusieurs façons d'écrire une fraction comme somme de fractions unitaires.

$$\frac{1}{n} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n(n+1)}$$

Multiplication 1

$$7 \times 22 = ?$$

Multiplication 1

$$7 \times 22 = ?$$

$$\begin{array}{c|c} 1 & 7 \end{array}$$

Multiplication 1

$$7 \times 22 = ?$$

$$\begin{array}{r|r} 1 & 7 \\ 2 & 14 \end{array}$$

Multiplication 1

$$7 \times 22 = ?$$

$$\begin{array}{c|c} 1 & 7 \\ 2 & 14 \\ 4 & 28 \end{array}$$

Multiplication 1

$$7 \times 22 = ?$$

1	7
2	14
4	28
8	56

Multiplication 1

$$7 \times 22 = ?$$

$$\begin{array}{r|c} 1 & 7 \\ 2 & 14 \\ 4 & 28 \\ 8 & 56 \\ 16 & 112 \\ \hline \end{array}$$

Multiplication 1

$$7 \times 22 = ?$$

	1	7
✓	2	14
✓	4	28
	8	56
✓	16	112

Multiplication 1

$$7 \times 22 = ?$$

	1	7
✓	2	14
✓	4	28
	8	56
✓	16	112
22		154

Division

$$154 \div 7 = ?$$

Division

$$154 \div 7 = ?$$

$$\begin{array}{c|c} 1 & 7 \end{array}$$

Division

$$154 \div 7 = ?$$

$$\begin{array}{c|c} 1 & 7 \\ 2 & 14 \end{array}$$

Division

$$154 \div 7 = ?$$

$$\begin{array}{c|c} 1 & 7 \\ 2 & 14 \\ 4 & 28 \end{array}$$

Division

$$154 \div 7 = ?$$

$$\begin{array}{c|c} 1 & 7 \\ 2 & 14 \\ 4 & 28 \\ 8 & 56 \end{array}$$

Division

$$154 \div 7 = ?$$

1	7
2	14
4	28
8	56
16	112

Division

$$154 \div 7 = ?$$

1	7	
2	14	✓
4	28	✓
8	56	
16	112	✓

Division

$$154 \div 7 = ?$$

1	7	
2	14	✔
4	28	✔
8	56	
16	112	✔
22		154

Division

$$19 \div 8 = ?$$

Division

$$19 \div 8 = ?$$

$$\begin{array}{c|c} 1 & 8 \\ 2 & 16 \end{array}$$

Division

$$19 \div 8 = ?$$

$$\begin{array}{c|c}
1 & 8 \\
2 & 16 \\
1/2 & 4 \\
1/4 & 2 \\
1/8 & 1 \\
\hline
\end{array}$$

Division

$$19 \div 8 = ?$$

2	16	✔
1	8	
1/2	4	
1/4	2	✔
1/8	1	✔

Division

$$19 \div 8 = ?$$

2	16	✓
1	8	
1/2	4	
1/4	2	✓
1/8	1	✓
2+1/4+1/8		19

Multiplcation 2

$$(5 + 7/8) \times (12 + 2/3) = ?$$

Multiplcation 2

$$(5 + 7/8) \times (12 + 2/3) = ?$$

$$\begin{array}{c|c} 1 & 12+2/3 \\ 2 & 25+1/3 \\ 4 & 50+2/3 \end{array}$$

Multiplcation 2

$$(5 + 7/8) \times (12 + 2/3) = ?$$

$$\begin{array}{c|c} 1 & 12{+}2/3 \\ 2 & 25{+}1/3 \\ 4 & 50{+}2/3 \\ 1/2 & 6{+}1/3 \end{array}$$

Multiplcation 2

$$(5 + 7/8) \times (12 + 2/3) = ?$$

1	12+2/3
2	25+1/3
4	50+2/3
1/2	6+1/3
1/4	3+1/6

Multiplcation 2

$$(5 + 7/8) \times (12 + 2/3) = ?$$

1	12+2/3
2	25+1/3
4	50+2/3
1/2	6+1/3
1/4	3+1/6
1/8	1+1/2+1/12

Multiplcation 2

$$(5+7/8)\times(12+2/3) = ?$$

✓	1	12+2/3
	2	25+1/3
✓	4	50+2/3
✓	1/2	6+1/3
✓	1/4	3+1/6
✓	1/8	1+1/2+1/12

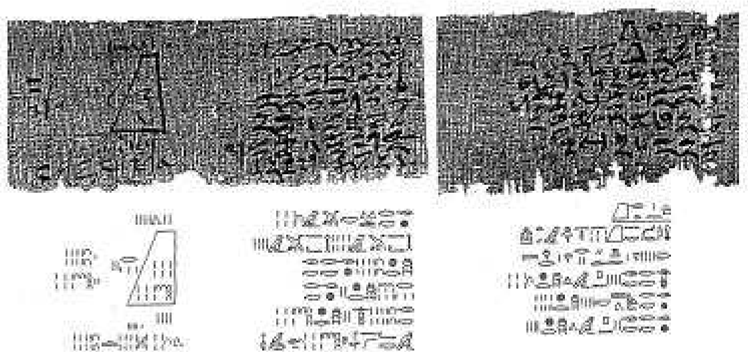
Multiplcation 2

$$(5 + 7/8) \times (12 + 2/3) = ?$$

✓	1	12+2/3
	2	25+1/3
✓	4	50+2/3
✓	1/2	6+1/3
✓	1/4	3+1/6
✓	1/8	1+1/2+1/12
5+7/8		99+1/2+1/4

Le papyrus de Moscou

Le problème numéro 14.



Le papyrus de Moscou

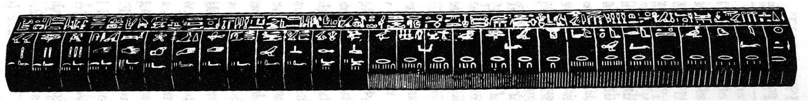
- -1850
- Vladimir Golenischev (1856–1947)
- 5 mètres de long, 8 centimètres de large
- 25 problèmes
- très mal écrit
- volume de la pyramide tronquée
- surface d'une demi-sphère

Autres papyrus

- papyrus de Reisner (-1880)
- papyrus de Kahun (-1800)
- papyrus de Rollin (-1350)
- papyrus de Harris (-1167)

Unités de mesure

- la coudée (royale/sacrée) = 52.5 cm
- grandes distances : cordes à nœuds
- petites distances : règle graduée

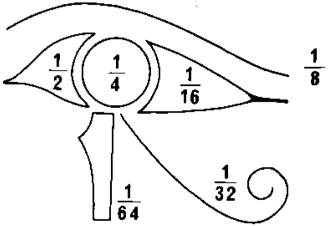


Autres unités

- 1 paume = 1/7 de coudée
- 1 doigt = 1/4 de paume
- (5 doigts = 1 main, 6 doigts = 1 poing, ...)
- 1 hayt = 1 khet = 100 coudées
- 1 coudée-remen = demi-longueur de la diagonale d'un carré de côté 1 coudée = $\frac{\sqrt{2}}{2}$ coudée. Utile pour mesure de terres.
- 1 aroure = 1 setat = surface d'un carré de côté 100 coudées = 2750 m^2.

Poids et volumes

- 1 héquat $= 1/30$ de coudée cube de blé
- 1 henou $= 1/10$ d'héquat $= 0.48$ litre
- 1 ra $= 1/320$ d'héquat (pour la cuisine)
- Œil d'Horus pour noter les fractions d'héquat :



La bière et le pesou

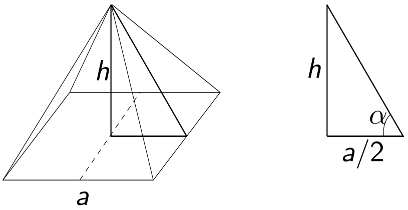
- Le pesou donne la concentration de la bière (aussi qualité du pain)
- Si 1 héqat de blé étaient utilisés pour produire 5 henou de bière, on disait que cette bière avait un pesou égal à 5.
- Au plus petit le pesou, au plus la bière était forte !

Le problème R76

Si tu veux échanger 1000 *henou de bière de pesou* 10 *contre de la bière de pesou* 20*, combien de henous prendras-tu ?*

Le seked d'une pyramide

Donne l'inclinaison des faces triangulaires d'une pyramide.



$$\text{seked} = \frac{a}{2h}$$

C'est la *cotangente* de l'angle α.

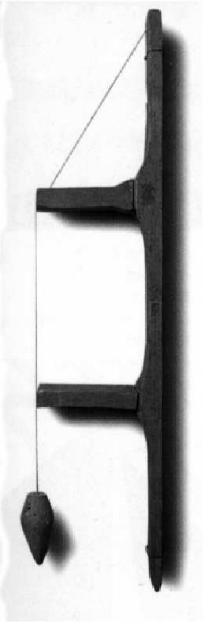
Le problème R57

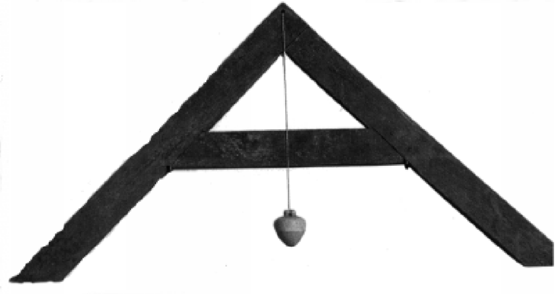
Le seked d'une pyramide vaut 5 paumes et 1 doigt. Le côté de la pyramide a une longueur de 140 coudées. Quelle est sa hauteur ?

Seked de quelques pyramides célèbres

Nom	*Seked*
Chephren, Ouserkaf	3/4 de coudée
Neferirka-Re, Teti, Pepi	21 doigts
Cheops, Snofru	11/14 de coudée
Neouser-Re	22 doigts
Sesostris	6/7 de coudée
Amenemhat III	9/14 de coudée

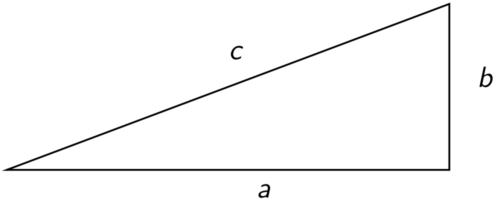
Instruments et aides à la construction





Théorème de Pythagore

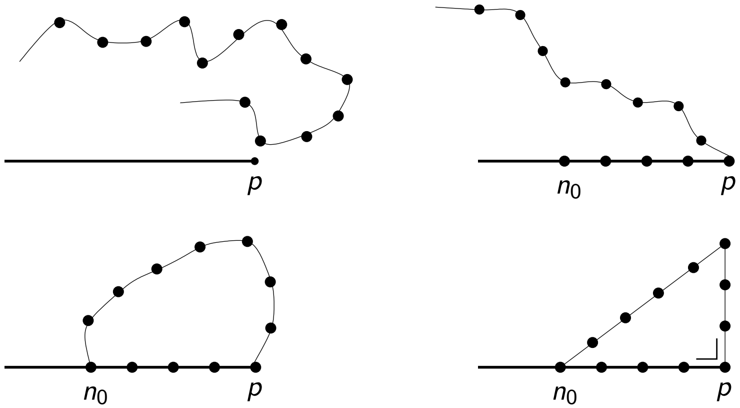
- Dans un triangle rectangle, le carré de la longueur de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des longueurs des deux autres côtés.



$$a^2 + b^2 = c^2$$

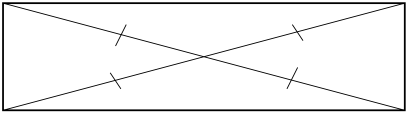
- . . . et inversement.

Angle droit avec corde à nœuds



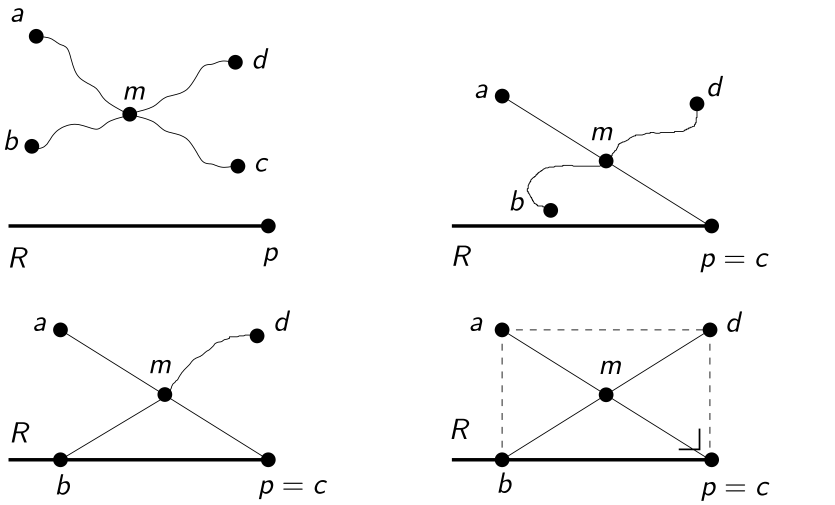
Méthode alternative

- Les diagonales d'un rectangle ont la même longueur et se coupent dans leur milieu.



- Un quadrilatère avec cette propriété est un rectangle.

Angle droit avec cordes nouées au milieu



Aire d'un triangle

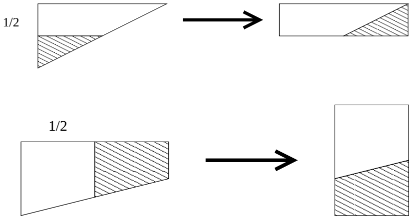
Problème R51 : *Si on te dit : un triangle a* 10 *khet pour hauteur, et* 4 *khet pour base, quelle est sa surface ?*
Tu calculeras la moitié de 4*, qui fait* 2*, pour en faire un rectangle.*
Tu multiplieras le 10 *avec ce* 2*. Ceci est sa surface.*

Aire d'un triangle

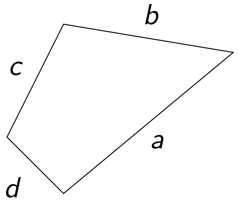
Problème R51 : *Si on te dit : un triangle a* 10 *khet pour hauteur, et* 4 *khet pour base, quelle est sa surface ?*
Tu calculeras la moitié de 4*, qui fait* 2*, pour en faire un rectangle.*
Tu multiplieras le 10 *avec ce* 2*. Ceci est sa surface.*

Aire d'un triangle

Problème R51 : *Si on te dit : un triangle a* 10 *khet pour hauteur, et* 4 *khet pour base, quelle est sa surface ?*
Tu calculeras la moitié de 4*, qui fait* 2*, pour en faire un rectangle.*
Tu multiplieras le 10 *avec ce* 2*. Ceci est sa surface.*



Aire d'un quadrilatère



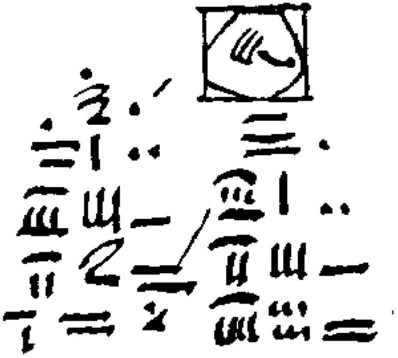
$\frac{a+c}{2} \cdot \frac{b+d}{2}$

Aire du cercle

Problème R41 : *Exemple de calcul d'un grenier rond de [diamètre]* 9 *[et de hauteur]* 10.
Tu soustrairas 1/9 *de* 9. *Il reste* 8. *Multiplie* 8 *par* 8. *Il vient* 64. *Tu multiplieras* 64 *par* 10. *Il vient* 640.

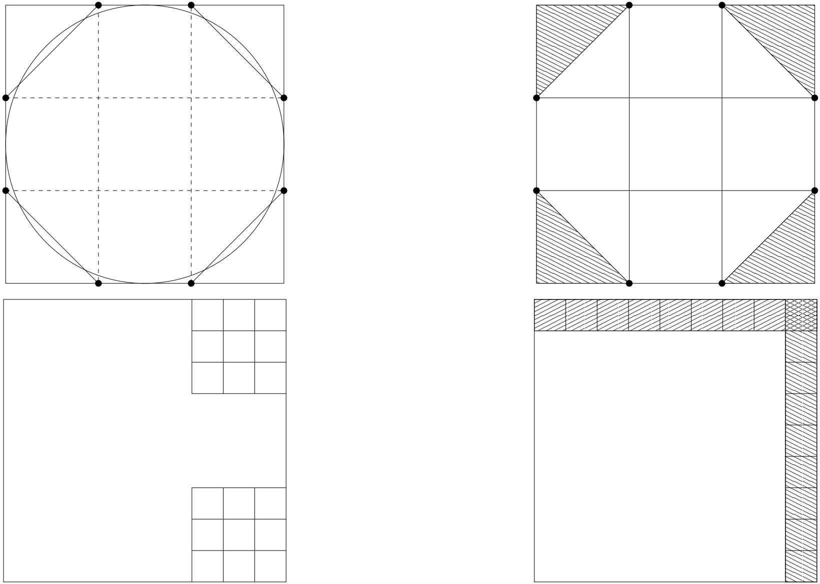
$$V = h \cdot (d - \frac{d}{9})^2$$

Le problème R48



$$S = (d - \frac{d}{9})^2$$

Aire du cercle

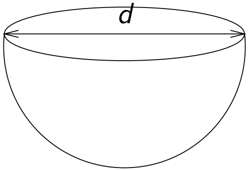


Le nombre π

- π représente le rapport entre la surface d'un cercle et le carré de son rayon.
- $$\pi \frac{d^2}{4} \approx \frac{64}{81} d^2$$
  $$\pi \approx 4 \frac{64}{81} = \frac{256}{81} = 3.1604938\ldots$$
- Babyloniens : $\pi \approx 3.125$
- la bible : $\pi \approx 3$

Surface d'une demi-sphère

Problème M10 : *Trouver la surface d'un panier d'ouverture d.*



Il utilisent la formule

$$S = 2\frac{64}{81}d^2$$

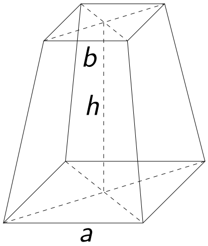
ou bien

$$S = 2\frac{256}{81}r^2$$

et comme $\pi \approx \frac{256}{81}$ on trouve bien

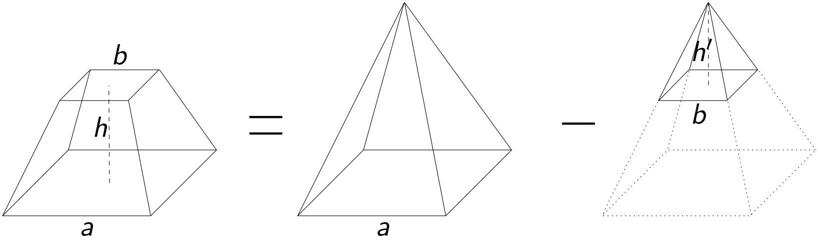
$$S = 2\pi r^2.$$

Volume d'une pyramide tronquée (M14)



$$V = \frac{1}{3}h(a^2 + ab + b^2)$$

Comment ont-ils fait ?



$$V = V'' - V'$$

On a besoin du produit remarquable
$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$.

Détail

Le seked s de la grande et de la petite pyramide est $\frac{a-b}{2h}$.

Détail

Le seked s de la grande et de la petite pyramide est $\frac{a-b}{2h}$. On en tire $h' = \frac{b}{2s}$,

Détail

Le seked s de la grande et de la petite pyramide est $\frac{a-b}{2h}$. On en tire $h' = \frac{b}{2s}$, ce qui nous permet de calculer V' et V''.

$$V' = \frac{1}{3}h'b^2 = \frac{1}{3}\frac{b}{2s}b^2 = \frac{1}{3}\frac{hb^3}{a-b}$$

pour la petite pyramide et

$$V'' = \frac{1}{3}(h+h')a^2 = \frac{1}{3}(h+\frac{hb}{a-b})a^2$$

pour la grande.

Détail

Le seked s de la grande et de la petite pyramide est $\frac{a-b}{2h}$. On en tire $h' = \frac{b}{2s}$, ce qui nous permet de calculer V' et V''.

$$V' = \frac{1}{3}h'b^2 = \frac{1}{3}\frac{b}{2s}b^2 = \frac{1}{3}\frac{hb^3}{a-b}$$

pour la petite pyramide et

$$V'' = \frac{1}{3}(h+h')a^2 = \frac{1}{3}(h+\frac{hb}{a-b})a^2$$

pour la grande. Le volume V de la pyramide tronquée est donc

$$V'' - V' = \frac{1}{3}h\frac{a^3-b^3}{a-b} = \frac{1}{3}h(a^2+ab+b^2)$$

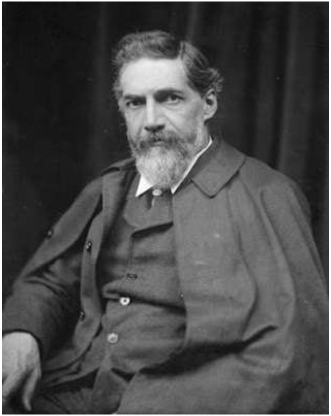
Pyramidologie

- “Le rapport entre 2 fois le côté de la grande pyramide et sa hauteur est π”
- Dans les dimensions de la grande pyramide on retrouve le rayon de la terre, la densité de la terre, la distance au soleil, . . .
- Il y a aussi le nombre d’or,
- ainsi que toutes les dates importantes de l’histoire de l’humanité !

Charles Piazzi Smyth

- 1819–1900
- astronome
- professeur à l'université d'Edimbourg
- Fellow of the Royal Society

Vérification : W.M.F. Petrie (1853–1942)



Autres pyramidologistes

- John Taylor
- Charles Lagrange
- David Davidson
- Georges Barbarin
- Robert Bauval
- ...