Quelques belles enveloppes

congrès SBPM 28 août 2013

Michel Roelens

- formation des professeurs pour le secondaire

Katholieke Hogeschool Limburg, Diepenbeek

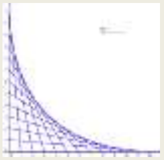
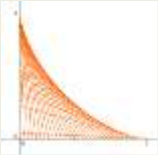
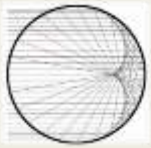
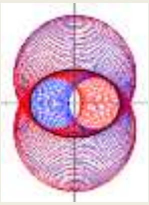
- Maria Boodschaplyceum, Brussel

- rédaction UITWISKELING, bientôt 30 ans!

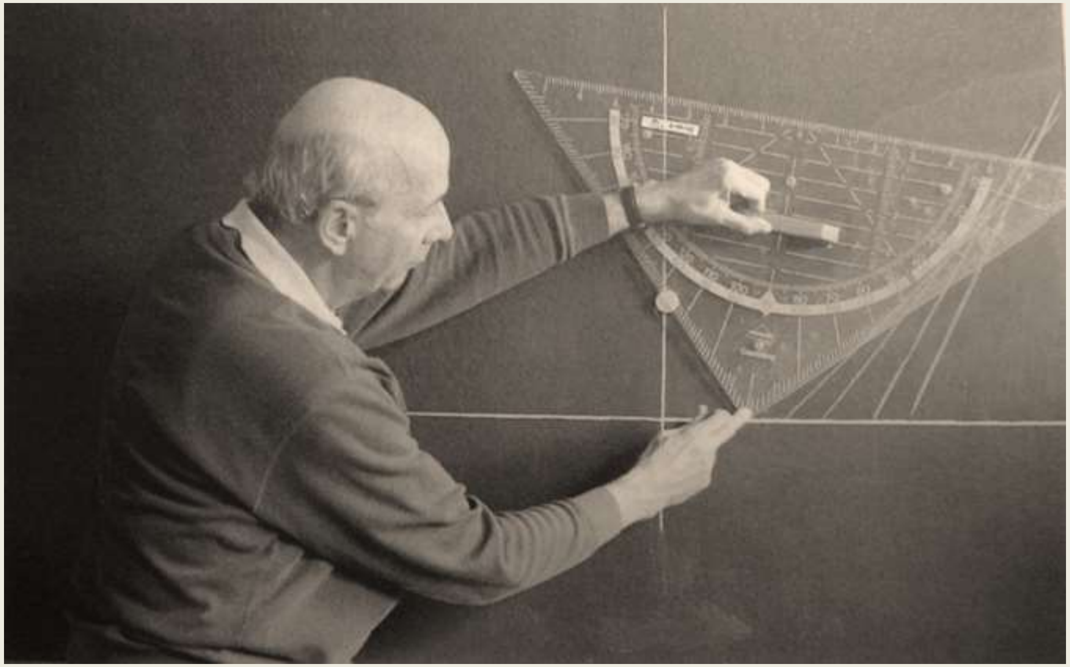
Oudergem, 1986-1992

Oudergem, 1986-1992

Aperçu belles enveloppes

1. Belle photo 
2. Beau dessin 
3. Belle échelle 
4. Beau café 
5. Belle fontaine 
6. ~~Belle~~ théorie ? 

Belle photo

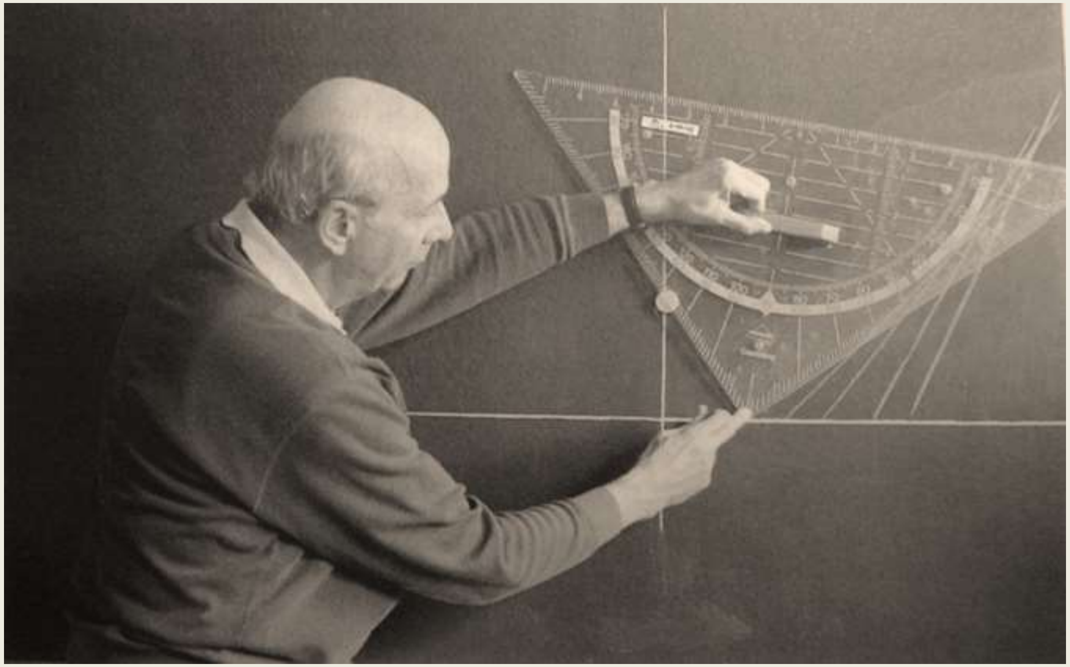


Pourquoi est-ce une belle photo?

C’est qui?

Günther Steinberg, 1933-2011

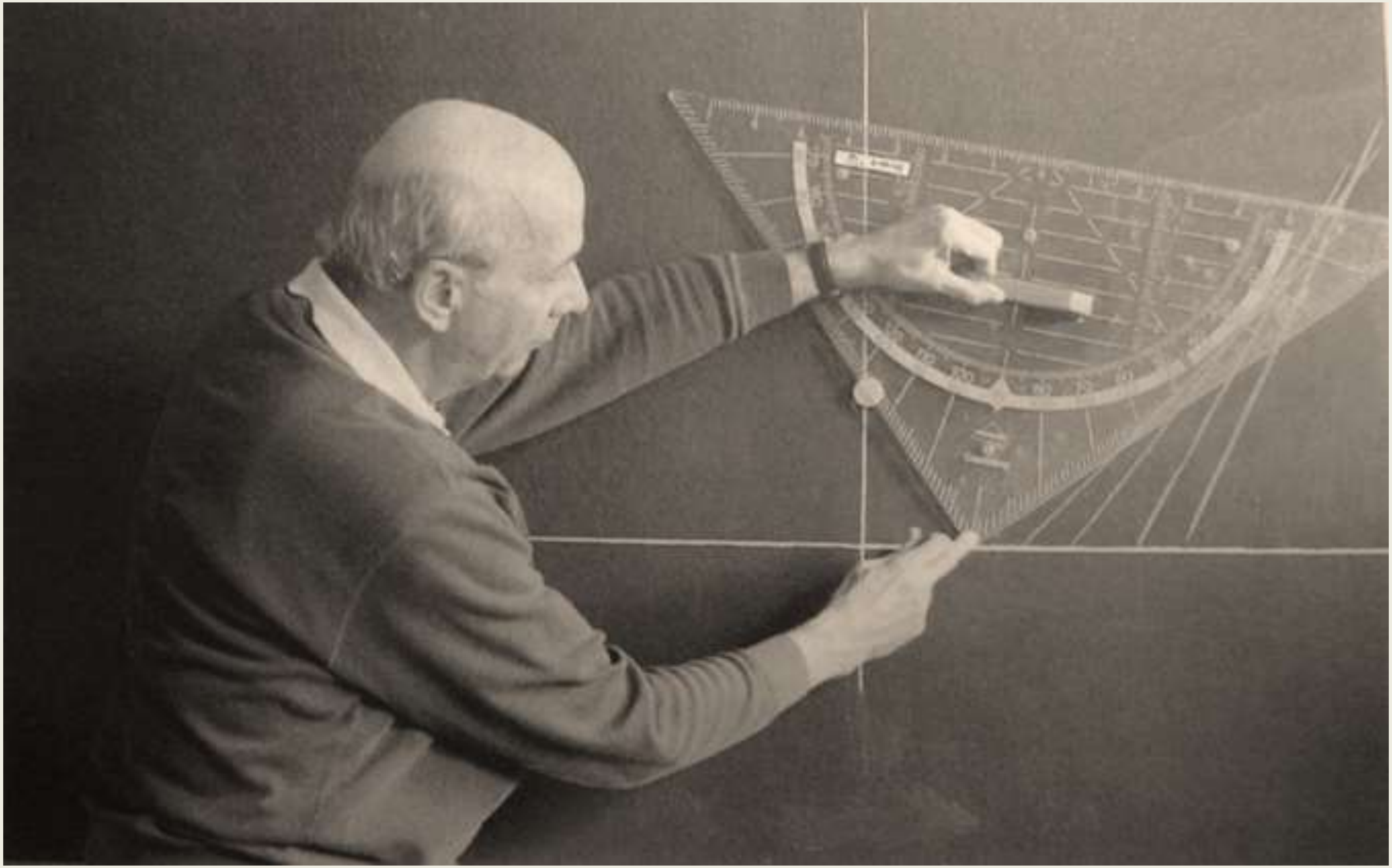
Belle photo



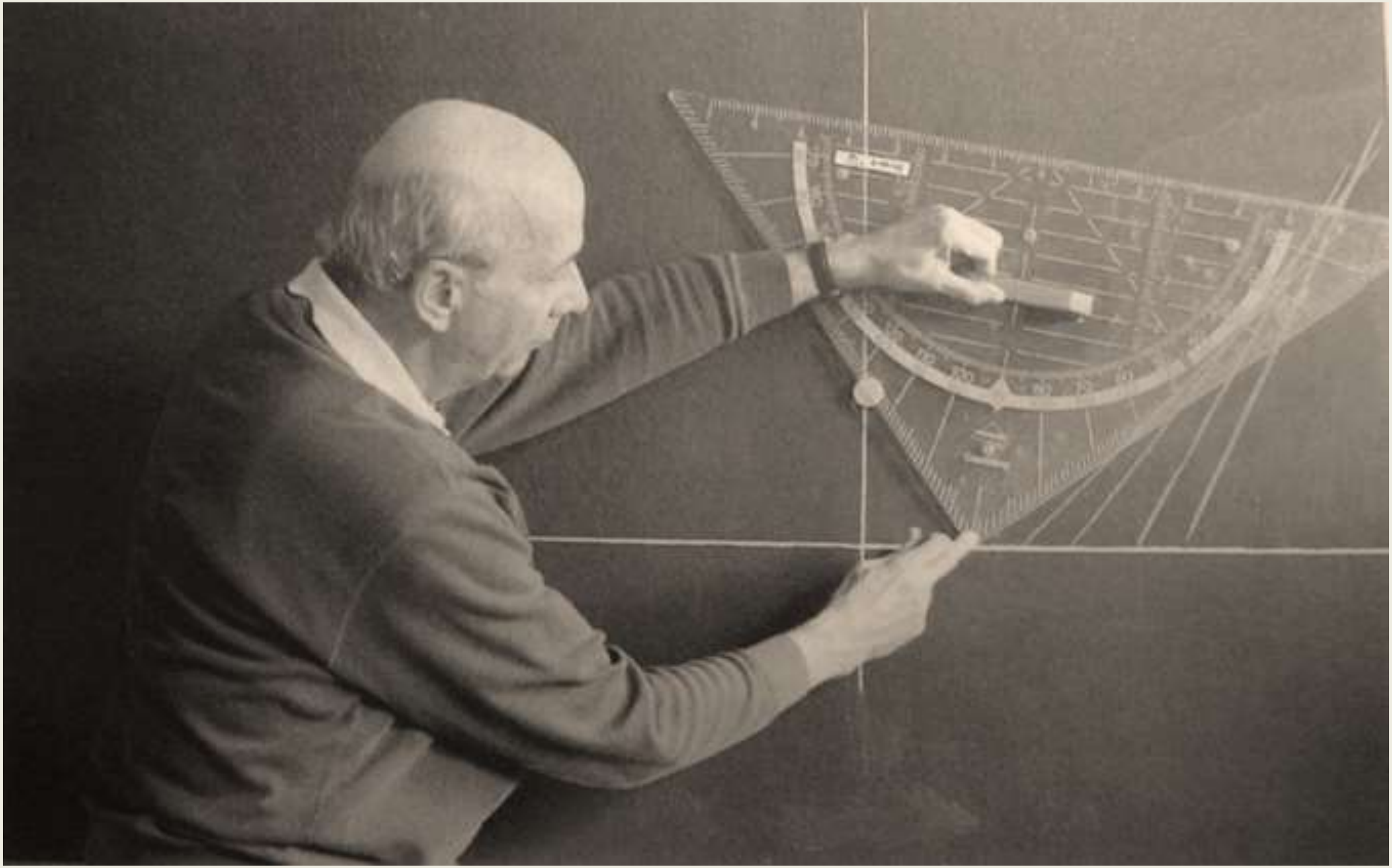
Répétez son dessin sur papier.

Où veut-il en venir ?

Belle photo



Belle photo



Belle photo: équation des droites

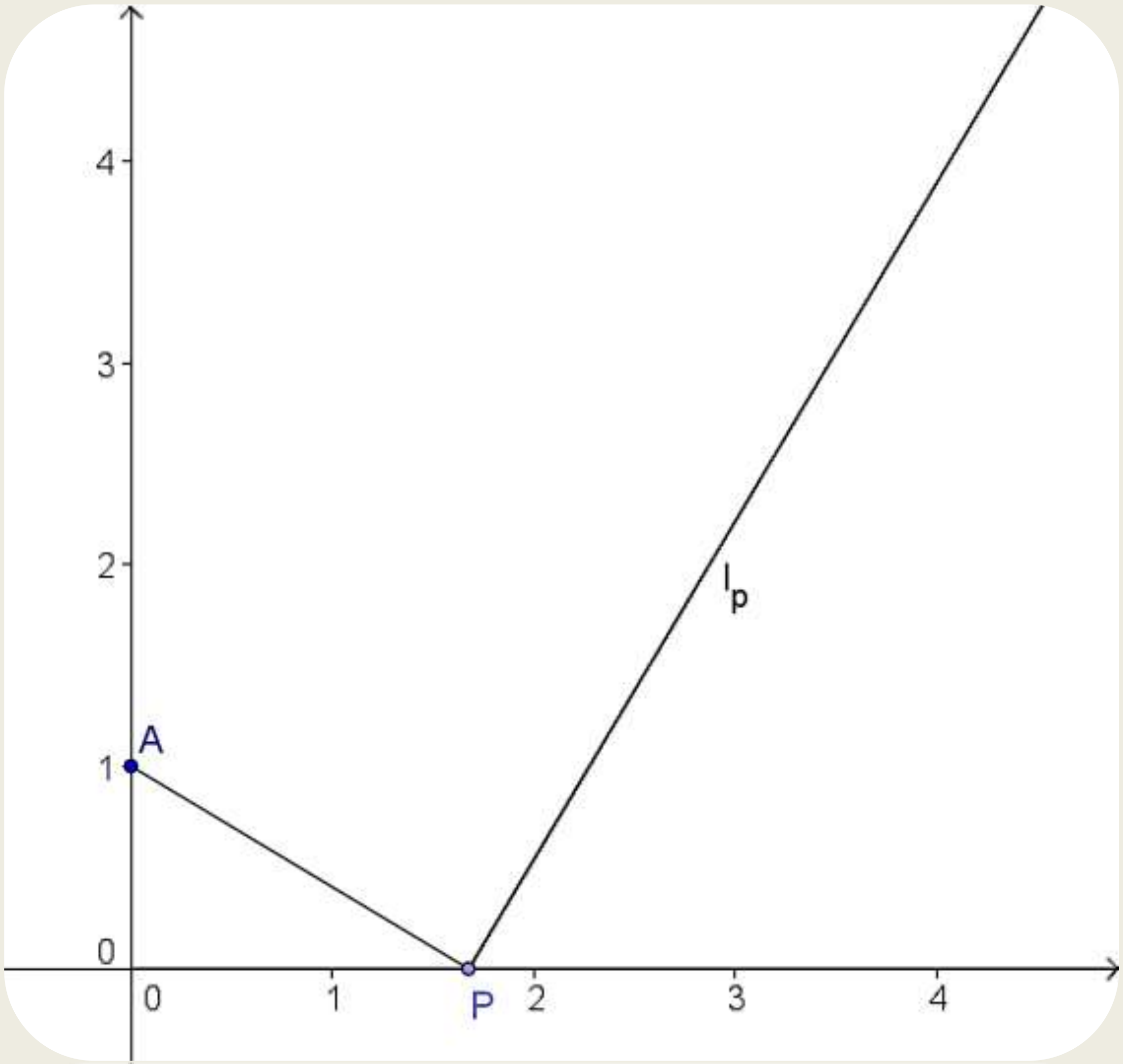
$A\,(0,1)$

$P(p,0)$

Coeff. ang. de AP : $-\frac{1}{p}$

Coeff. ang. de l_p : p

$\boxed{l_p\colon\ y = p(x-p)}$



Belle photo: équation des droites

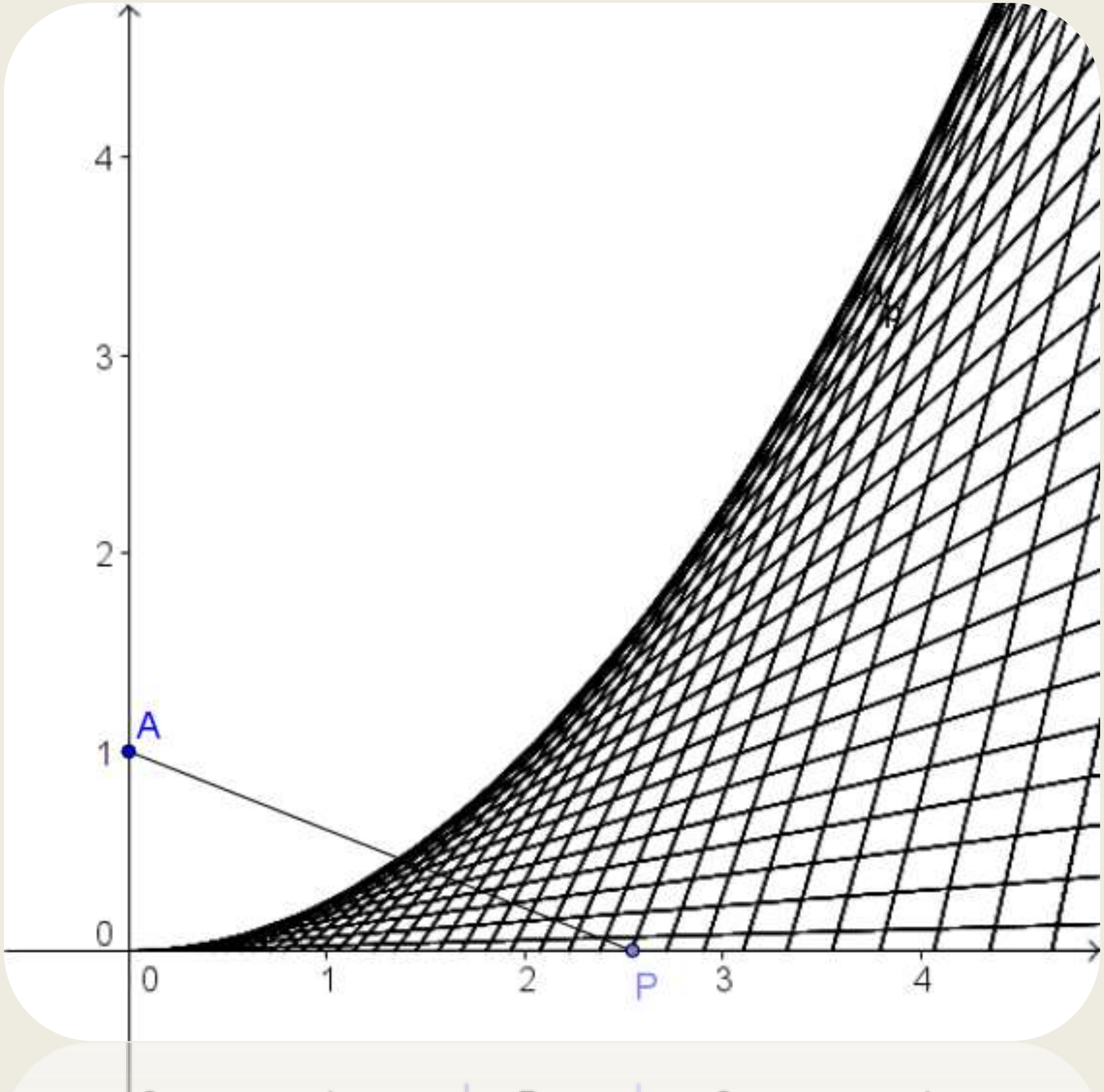
$A\ (0,1)$

$P(p,0)$

Coeff. ang. de AP : $-\frac{1}{p}$

Coeff. ang. de l_p : p

$\boxed{l_p\colon\ y = p(x-p)}$



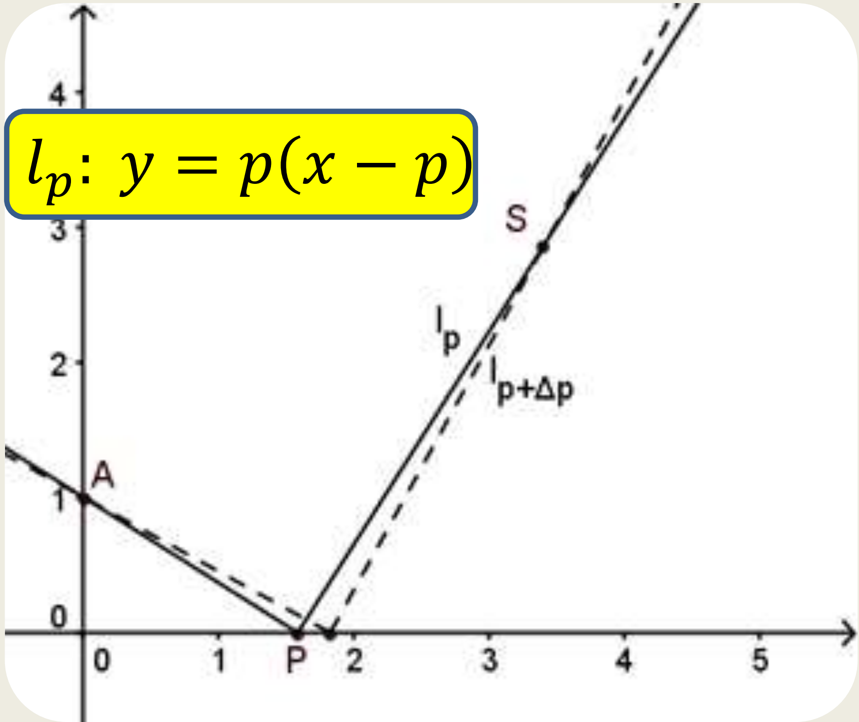
Belle photo: équation de l'enveloppe ?

- **Première idée : points d'intersection de droites 'voisines'**

Mais : la famille de droites n'est pas 'discrète'.

Donc : point d'intersection de l_p et $l_{p+\Delta p}$

puis prendre la limite pour $\Delta p \to 0$



$$l_p\colon\ y = p(x-p)$$

Belle photo: équation de l'enveloppe ?

$$S_{p,\Delta p}: \begin{cases} y = p(x-p) \\ y = (p+\Delta p)\big(x-(p+\Delta p)\big) \end{cases}$$

Résoudre ce système d'équations en x et y :

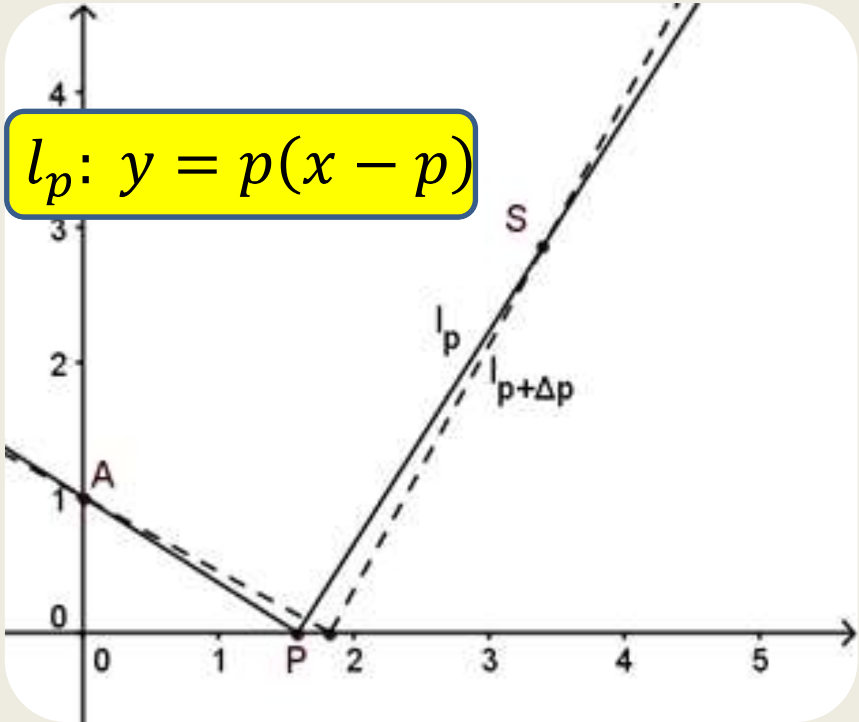
$$S_{p,\Delta p}: \begin{cases} x = 2p + \Delta p \\ y = p^2 + p\Delta p \end{cases}$$

Dans la limite pour $\Delta p \to 0$:

$$T_p: \begin{cases} x = 2p \\ y = p^2 \end{cases}$$

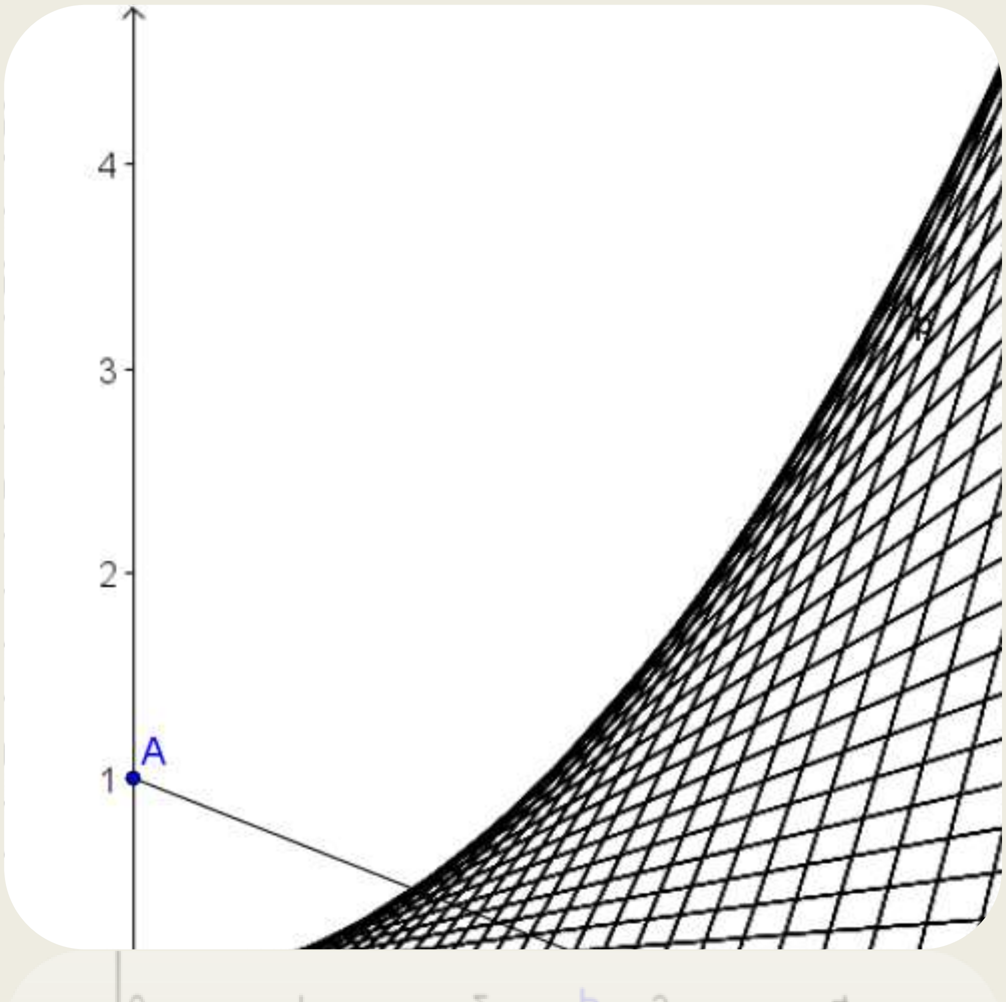
Éliminer p :

$$y = \frac{1}{4}x^2$$



Belle photo: équation de l’enveloppe ?

(Demi) parabole!



Belle photo: équation de l'enveloppe ?

- **Deuxième idée : fenêtre étroite verticale**

Point x_0 sur l'axe des x

La tangente en (x_0, y_0), c'est la droite $l_p\colon y = f(x,p)$ pour laquelle $f(x_0,p)$ est maximal.

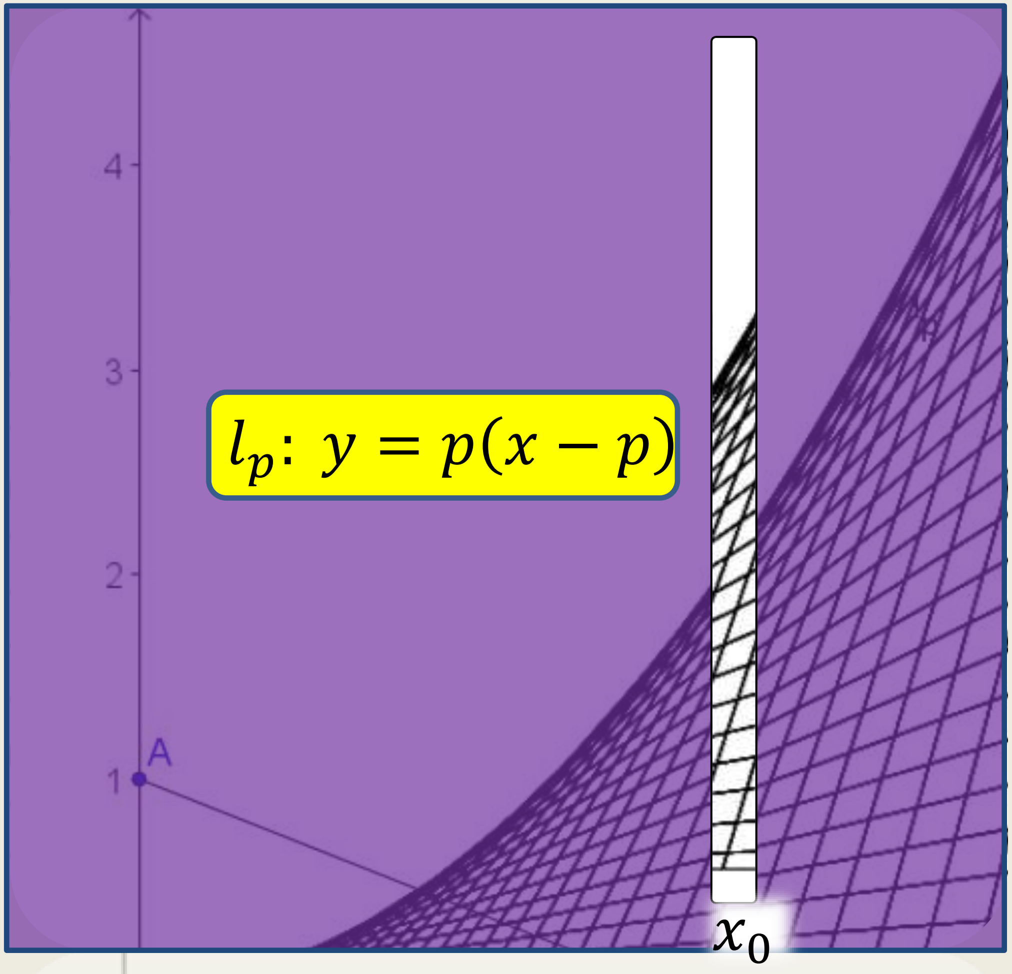
Donc:

$$\frac{\partial f}{\partial p}(x_0,p) = 0$$

$$(x_0 - p) + p(-1) = 0$$

$$x_0 - 2p = 0$$

$$p = \frac{x_0}{2}$$



Belle photo: équation de l’enveloppe ?

- **Deuxième idée : fenêtre étroite verticale**

$$p = \frac{x_0}{2}$$

Valeur de la tangente en x_0

$=$ valeur de l’enveloppe en x_0

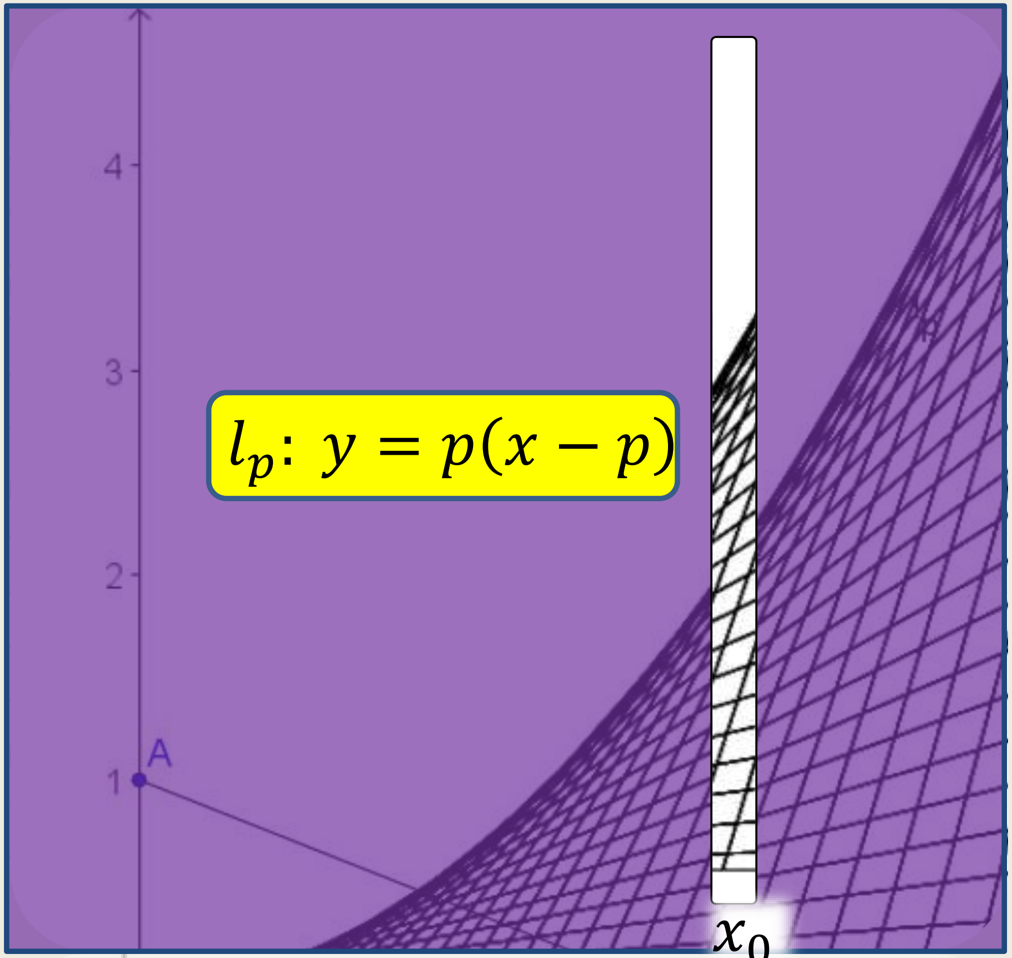
$$= f\left(x_0, \frac{x_0}{2}\right)$$

$$= \frac{x_0}{2}\left(x_0 - \frac{x_0}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{4}{x_0}^2$$

L’enveloppe:

$$y = \frac{x^2}{4}$$



Comparons les deux idées

- $\begin{cases} f(x,p) = f(x,p+\Delta p) \\ y = f(x,p) \end{cases} \longrightarrow \Delta p \to 0 \longrightarrow$ éliminer p

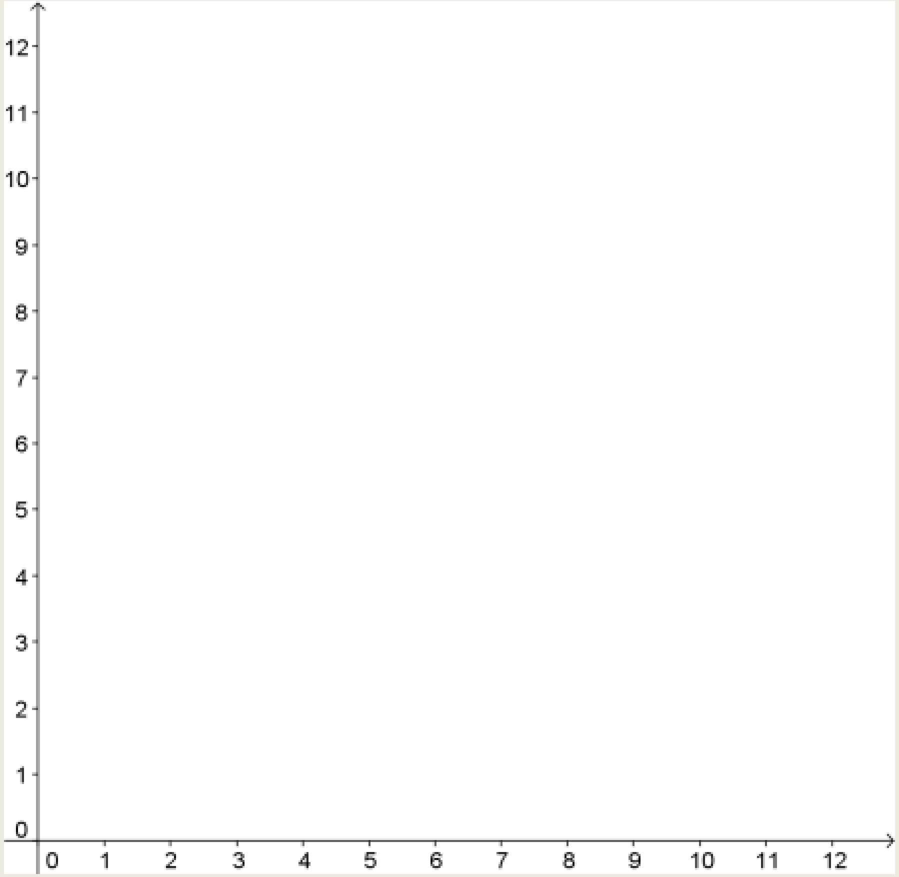
- $\begin{cases} \frac{\partial}{\partial p} f(x,p) = \lim\limits_{\Delta p \to 0} \frac{f(x,p+\Delta p) - f(x,p)}{\Delta p} = 0 \\ y = f(x,p) \end{cases} \longrightarrow$ éliminer p

Est-ce la même chose?

Rapport entre les deux?

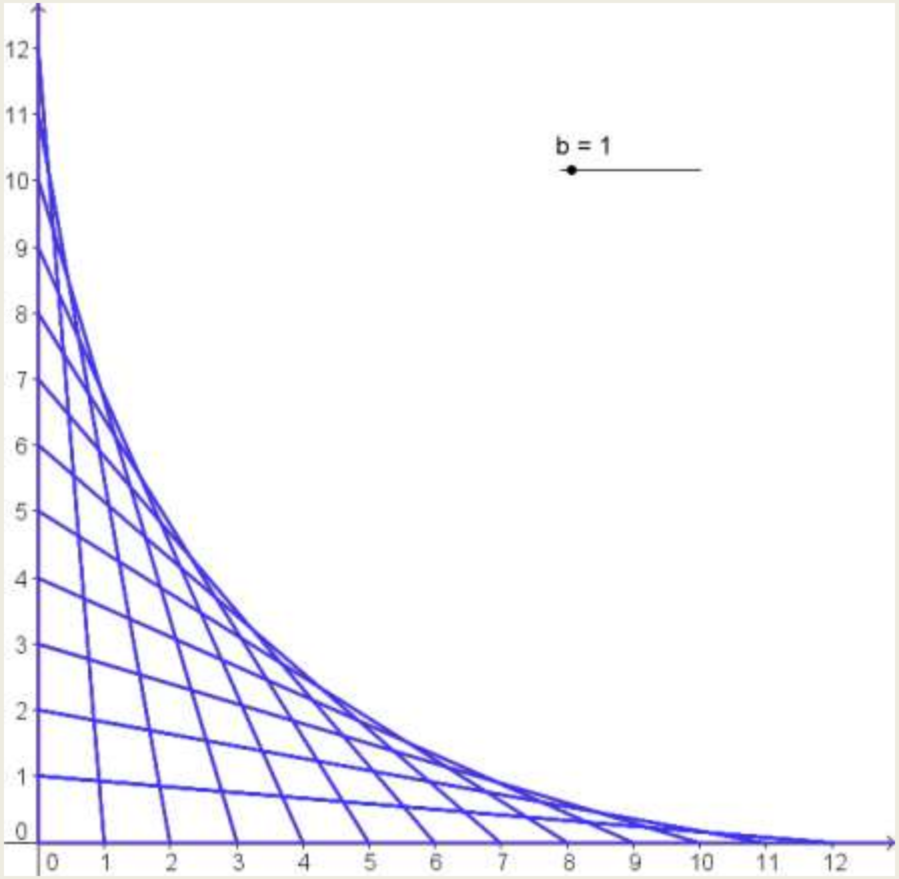
Beau dessin

Reliez le premier point (1) d'un axe avec le dernier (12) de l'autre, le deuxième (2) avec l'avant-dernier (11), etc.



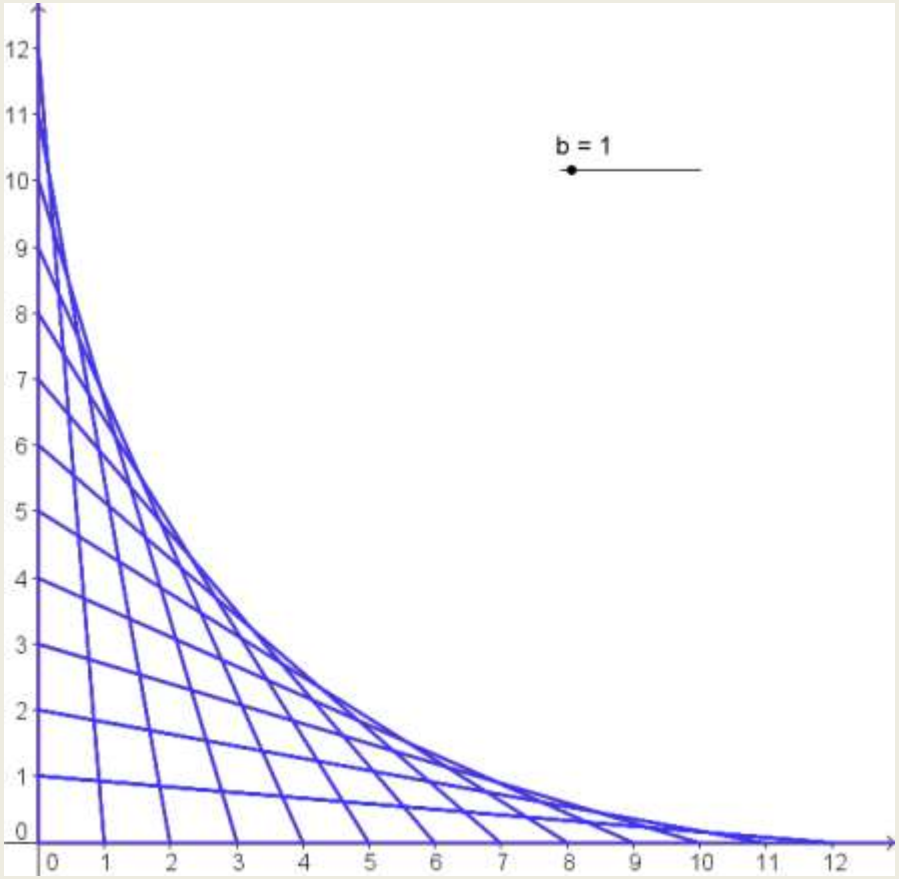
Beau dessin

On relie $(n, 0)$ avec $(0, 13 - n)$, pour $n = 0, 1, \dots, 13$.



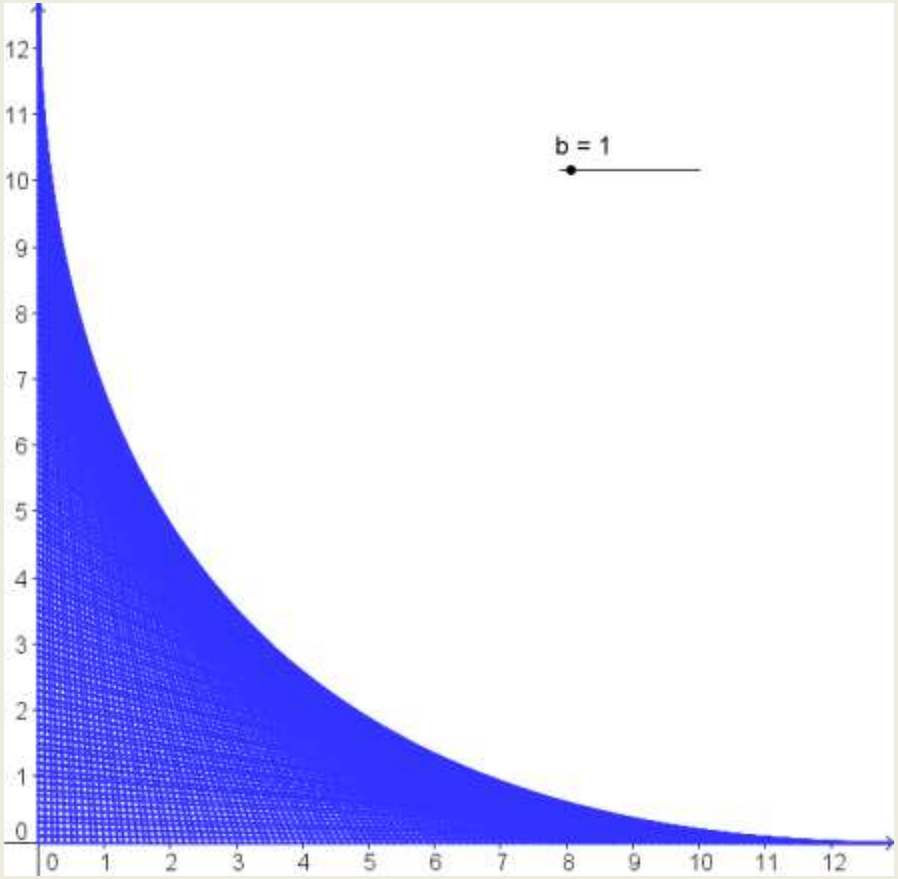
Beau dessin

Ne pas confondre avec l'échelle



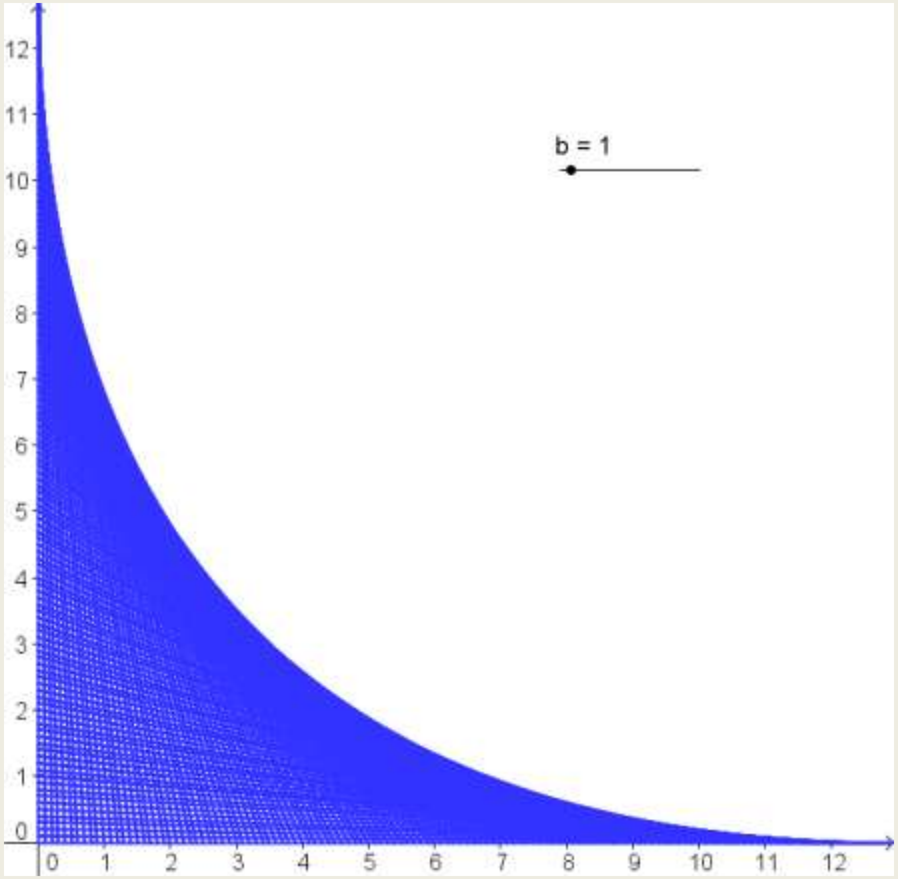
Beau dessin

Pour avoir vraiment l'enveloppe: nombre infini de droites



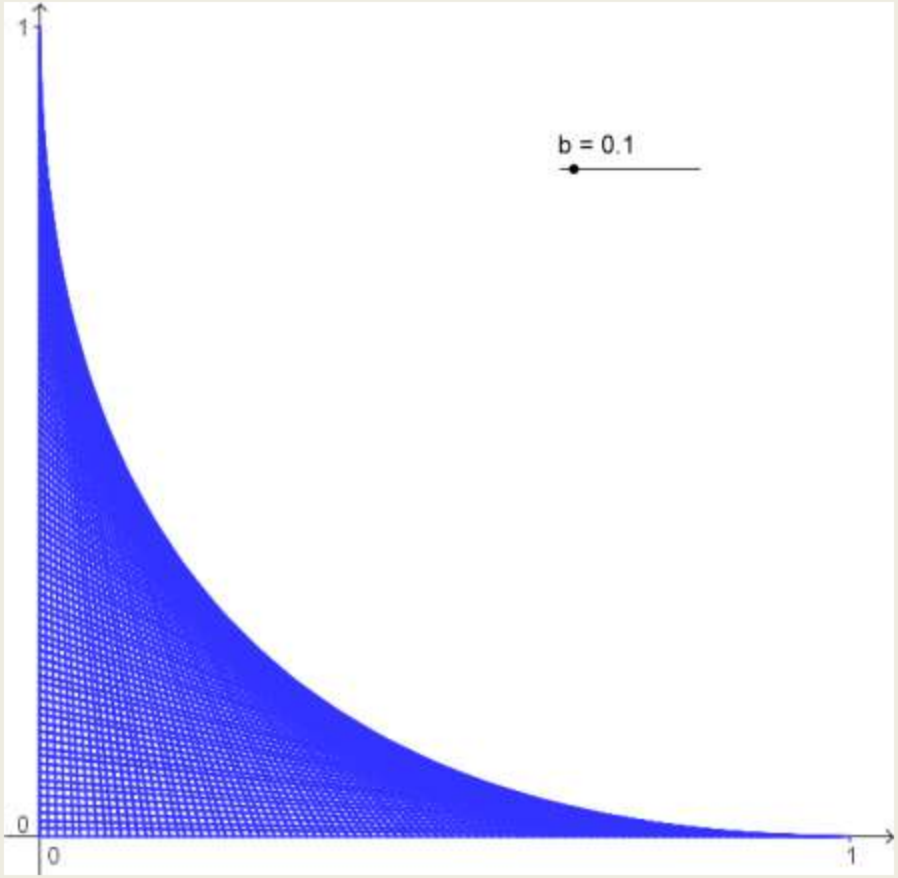
Beau dessin

On relie $(x, 0)$ avec $(0, 13 - x)$ pour $x \in [0, 13]$. Pourquoi 13 ?



Beau dessin

On relie $(a, 0)$ avec $(0, b)$ pour $a, b \in [0, 1]; a + b = 1$



Beau dessin : équation de l'enveloppe ?

$$y = -\frac{b}{a}x + b \qquad (bx + ay = ab)$$

$$y = -\frac{1-a}{a}x + 1 - a$$

$$y = \left(1 - \frac{1}{a}\right)x + 1 - a$$

$$\frac{\partial y}{\partial a} = 0$$

$$\frac{1}{a^2}x - 1 = 0$$

$$a = \sqrt{x}$$

et donc, par symétrie, $b = \sqrt{y}$ (fenêtre horizontale).

Comme $a + b = 1$ on a: $\boxed{\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1}$.

Beau dessin : quelle courbe ?

Nous avons supposé que $a, b \geq 0$.

Comment est le dessin si on laisse tomber cette supposition ?

Prenons donc $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$ ou $\sqrt{x} - \sqrt{y} = 1$ ou $-\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$.

(Cela suffit !)

Mettons au carré (deux fois):

$$x + y \pm 2\sqrt{xy} = 1$$

$$\pm 2\sqrt{xy} = 1 - x - y$$

$$4xy = 1 + x^2 + y^2 + 2xy - 2x - 2y$$

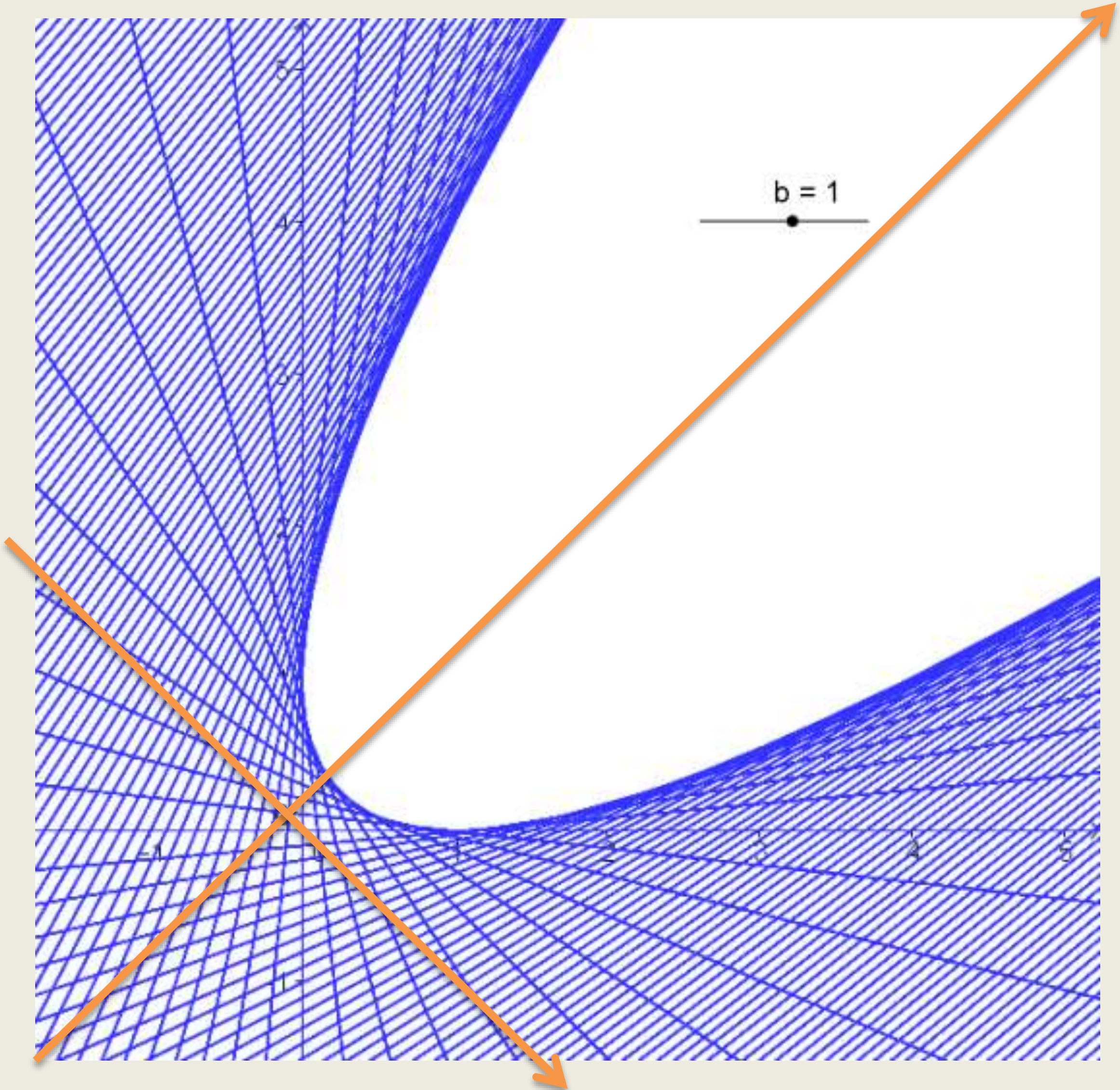
$$2x + 2y = x^2 - 2xy + y^2 + 1$$

$$2(x + y) = (x - y)^2 + 1$$

$$\boxed{2v = u^2 + 1}$$

Parabole!

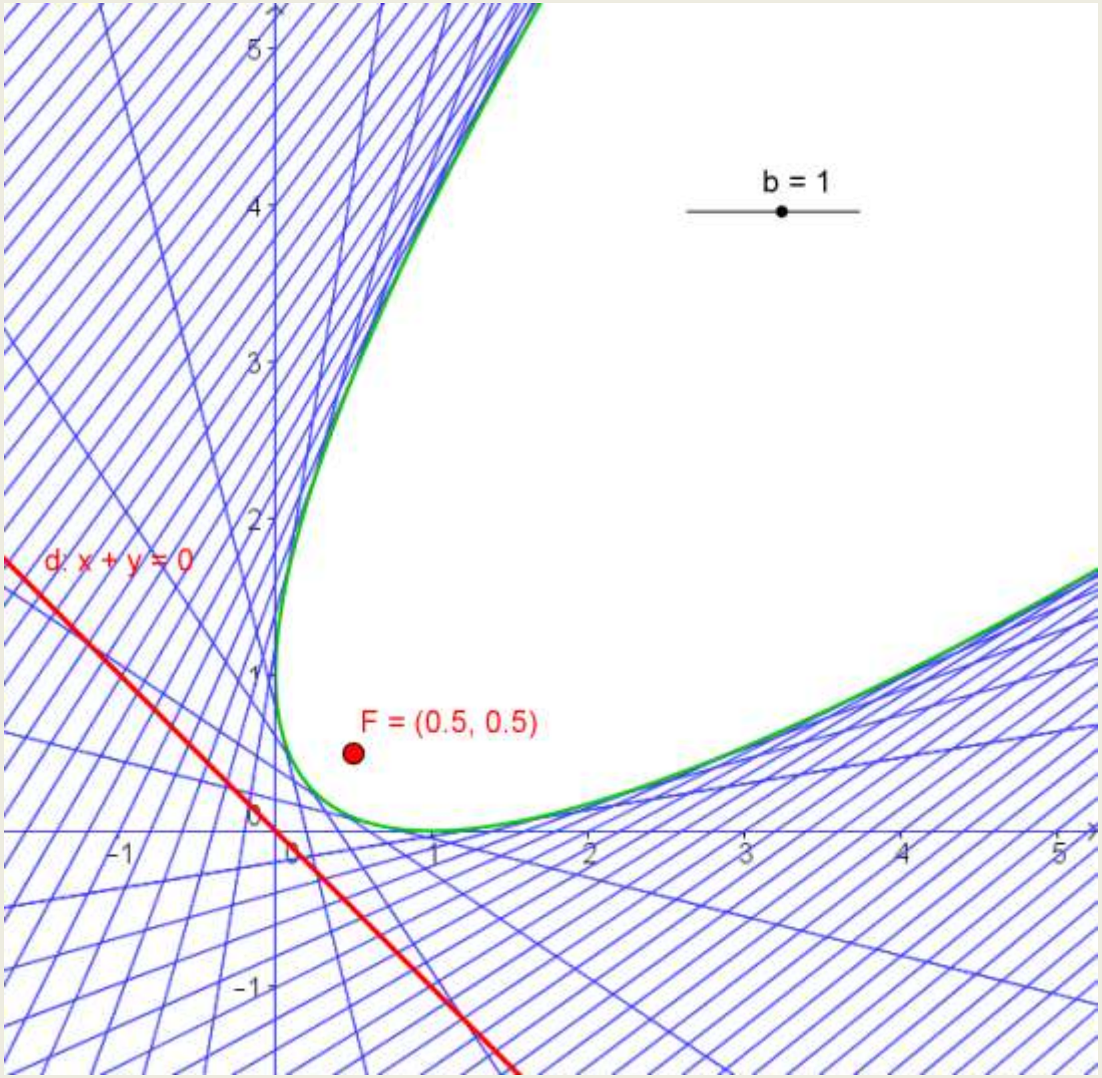
Beau dessin : quelle courbe ?



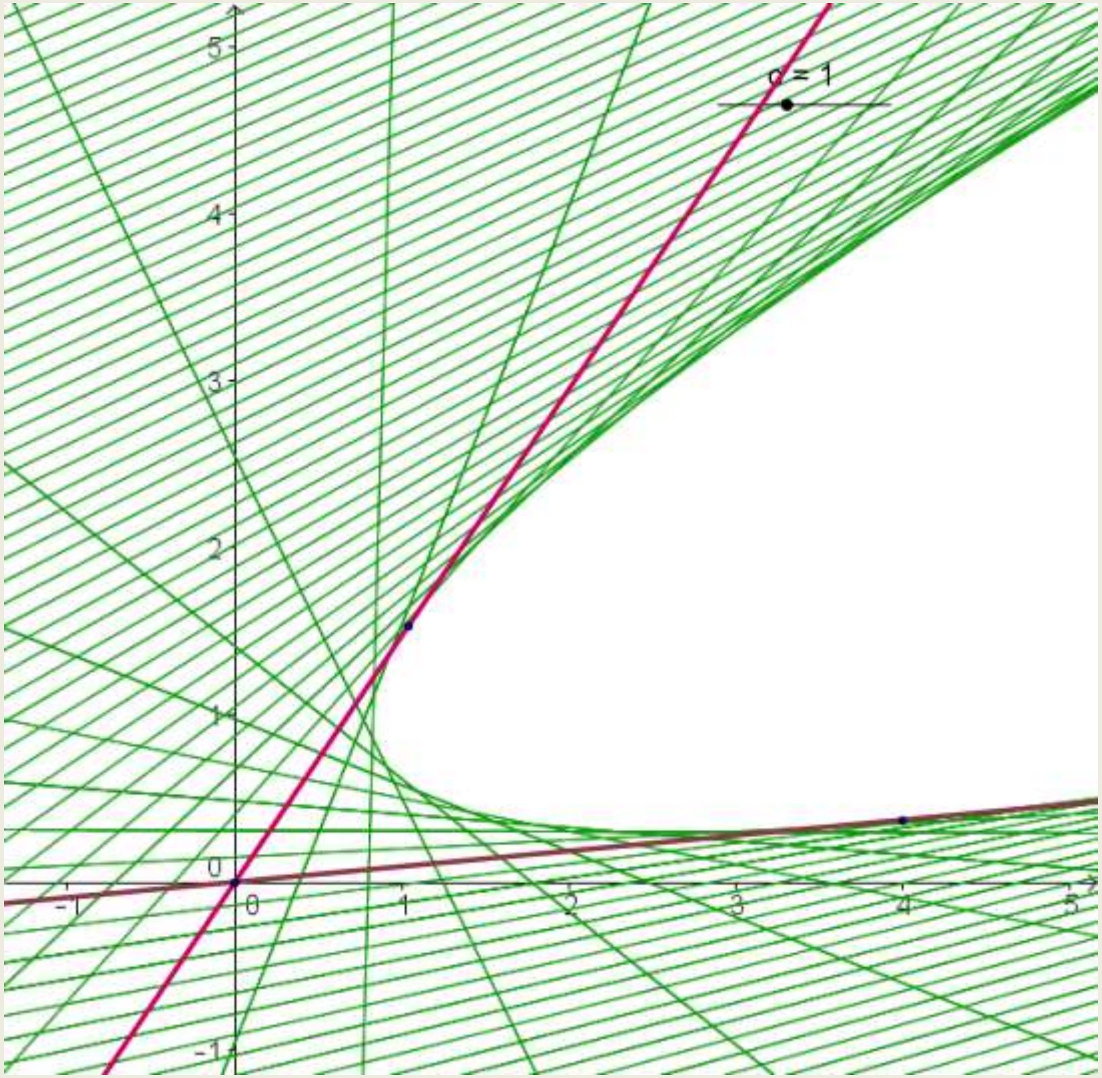
Beau dessin : quelle courbe ?

Plier F

sur d

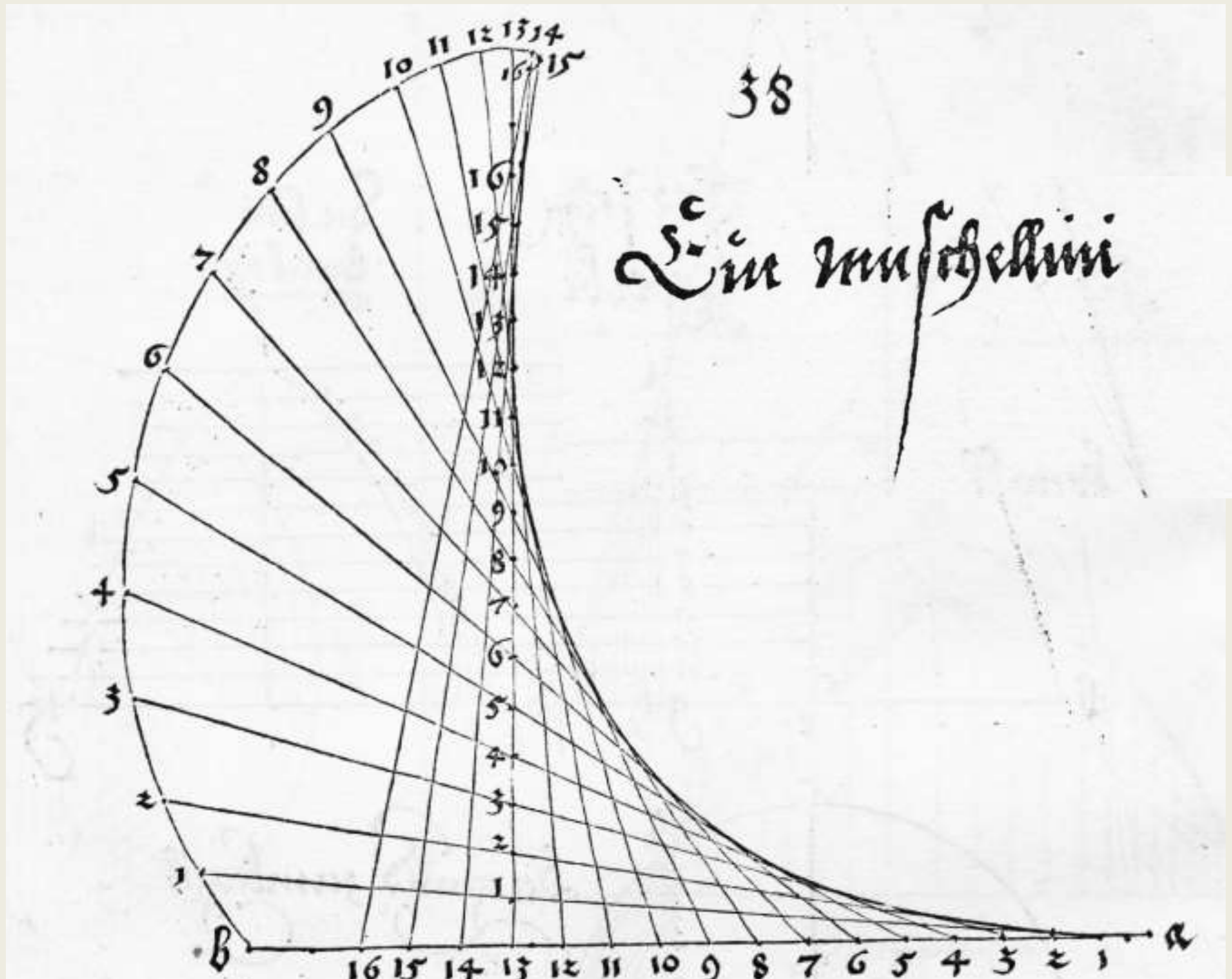


Beau dessin : transformation affine

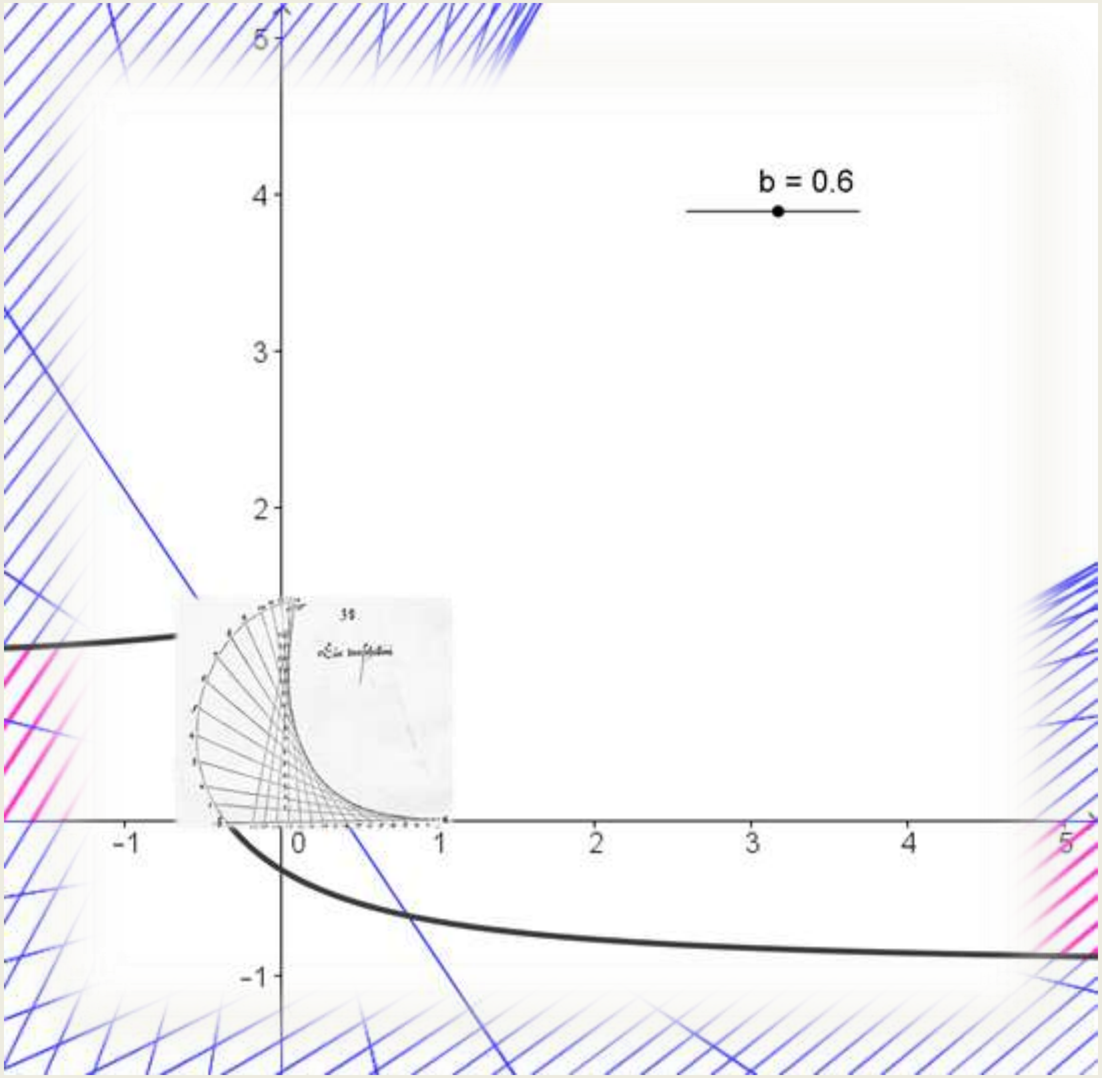


Beau dessin : version Dürer

Dürer 1525

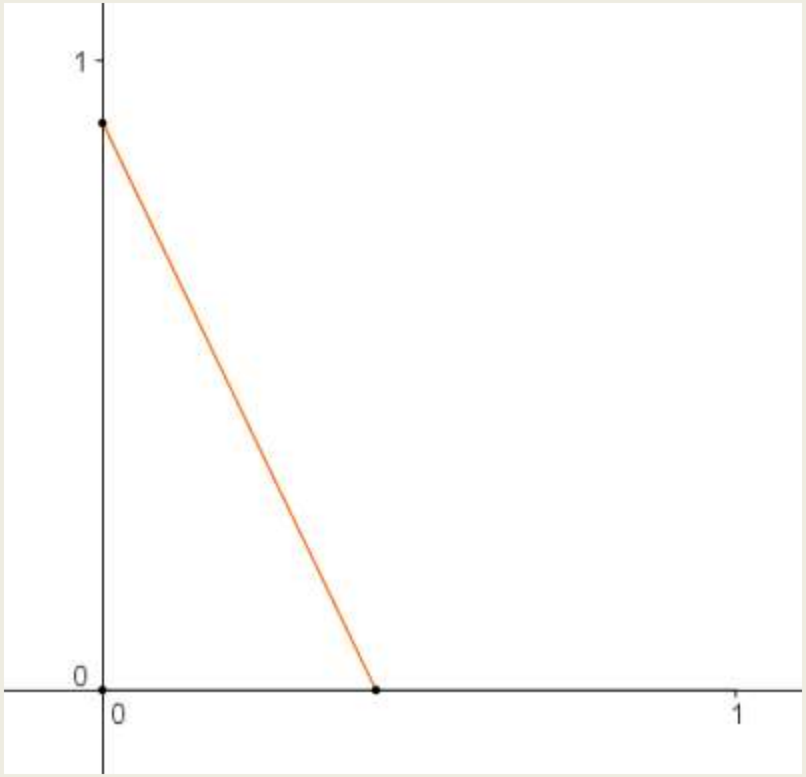


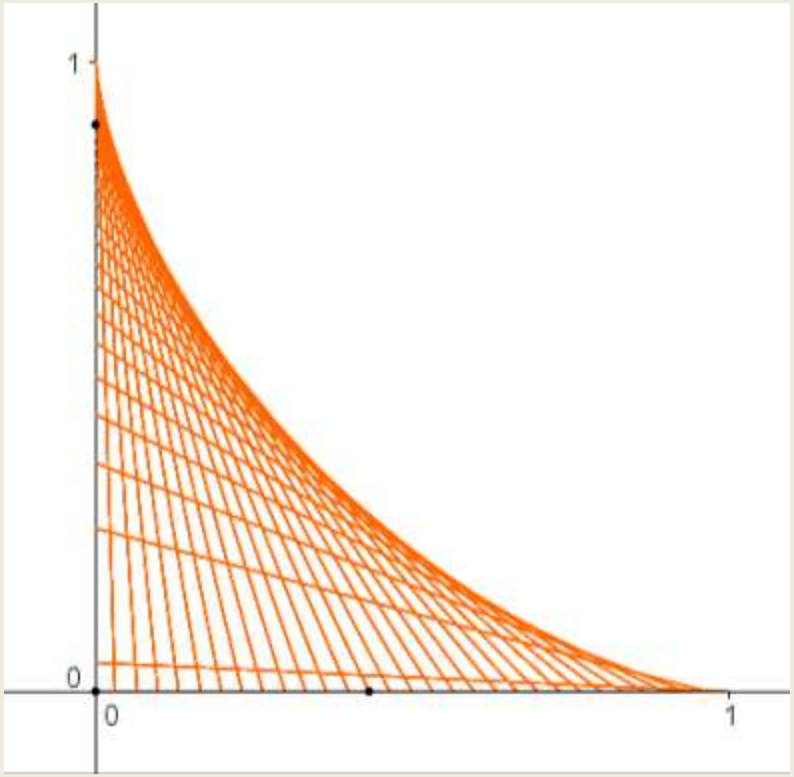
Beau dessin : version Dürer



L'échelle

On relie $(a, 0)$ avec $(0, b)$ tel que $a^2 + b^2 = 1$.





L'échelle : équation de l'enveloppe ?

$$y = -\frac{\sqrt{1-a^2}}{a}x + \sqrt{1-a^2}$$

$$\frac{\partial y}{\partial a} = 0$$

$$-\frac{-\frac{a}{\sqrt{1-a^2}}a - \sqrt{1-a^2}}{a^2}x - \frac{a}{\sqrt{1-a^2}} = 0$$

$$\frac{x-a^3}{a^2\sqrt{1-a^2}} = 0$$

$$a = \sqrt[3]{x}$$

et par symétrie $b = \sqrt[3]{y}$.

Enveloppe : $\boxed{x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 1}$

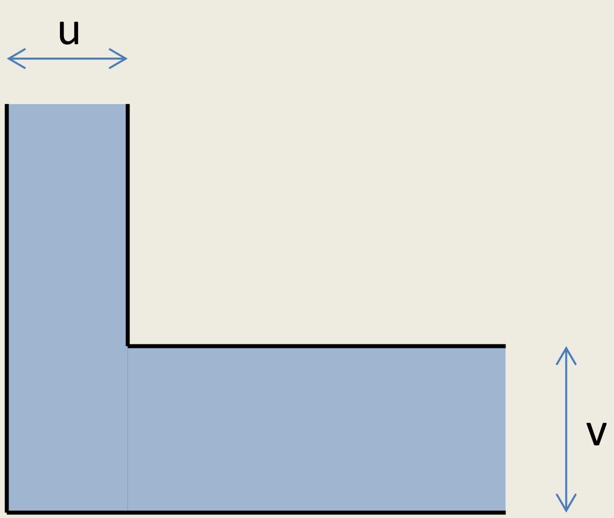
L'échelle : équation de l'enveloppe ?

Pour une échelle de longueur L :

enveloppe $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = L^{\frac{2}{3}}$.

Exercice

Longueur de la plus longue échelle que l'on peut transporter horizontalement par un coin entre deux couloirs de largeurs u en v ?



Le point (u, v) *doit être sur l'enveloppe*

$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = L^{\frac{2}{3}}$

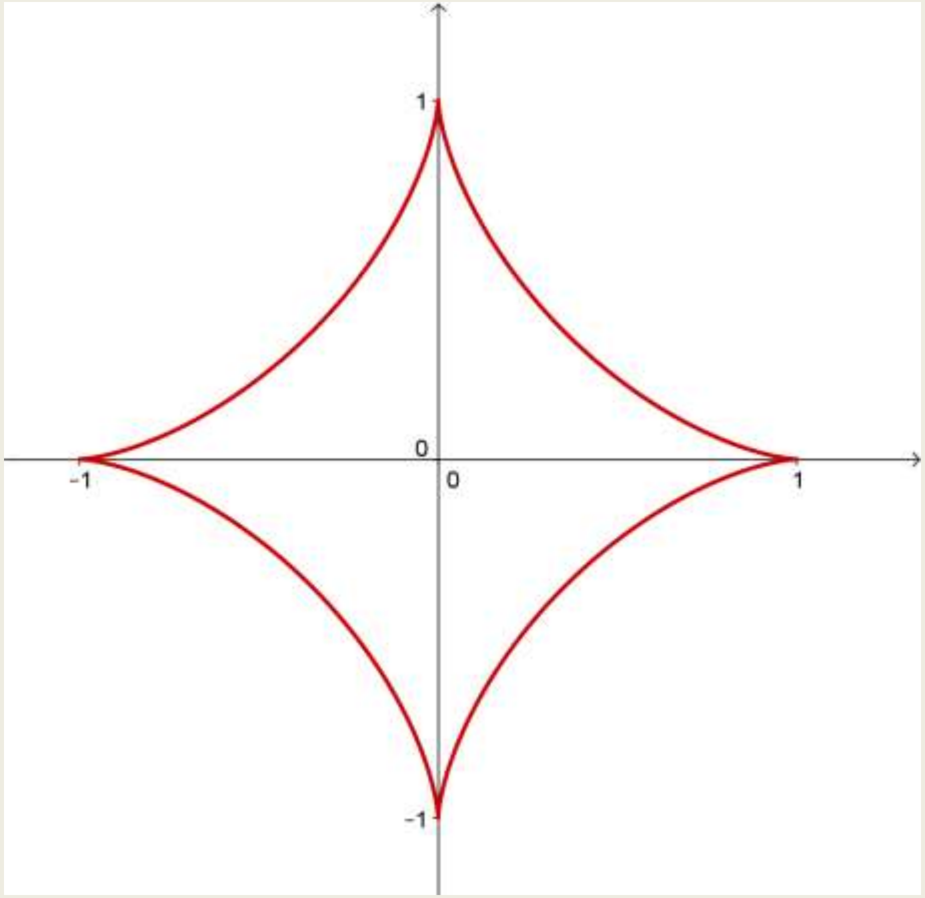
donc $L = \left(u^{\frac{2}{3}} + v^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}$.

L'échelle : quelle courbe?

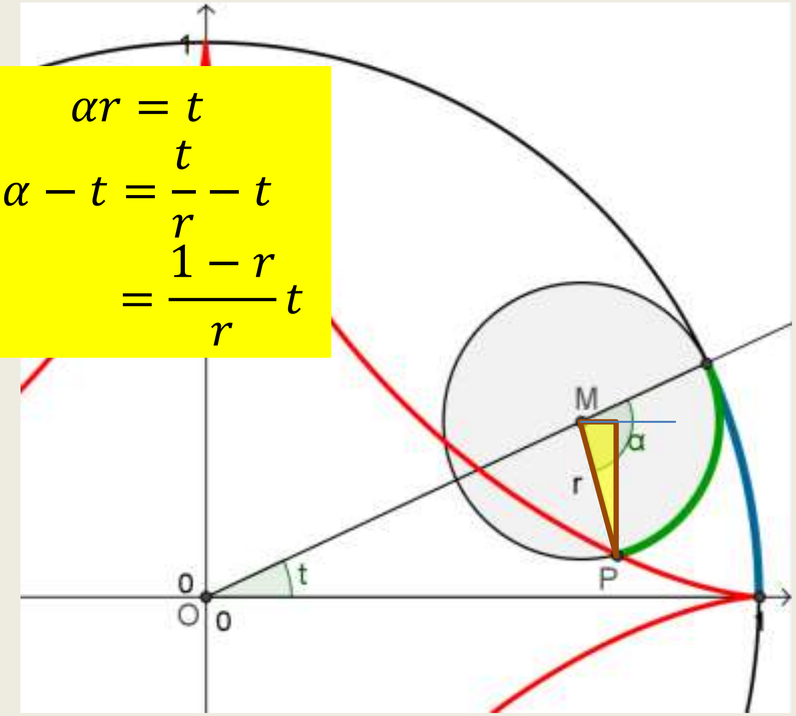
$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 1$

Paramétrisons

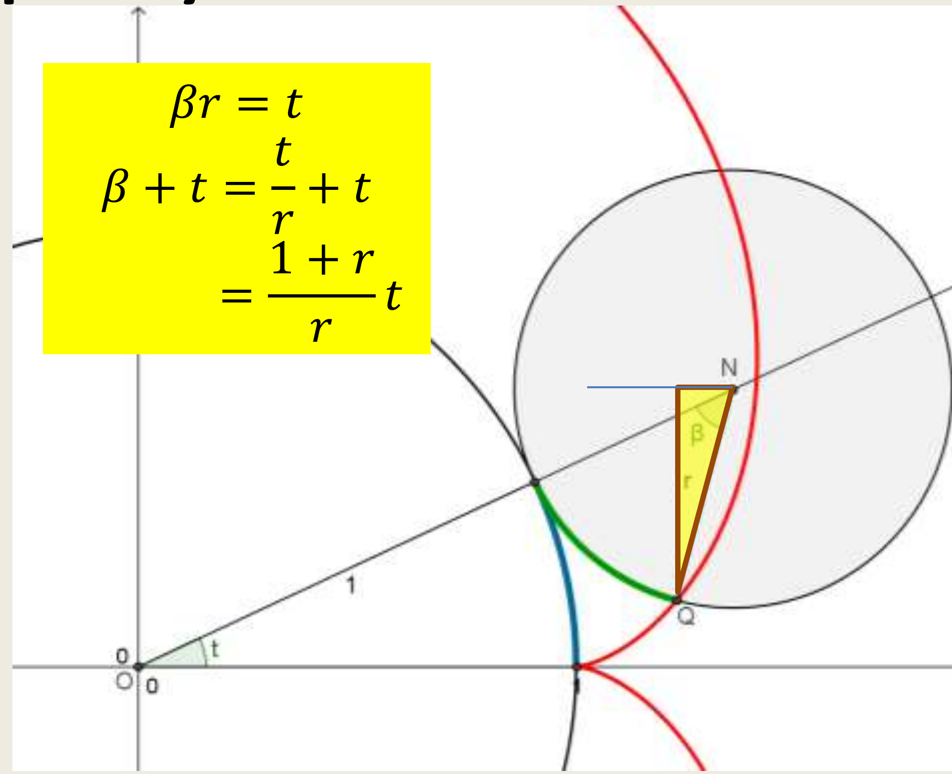
$$\begin{cases} x^{\frac{1}{3}} = \cos t \\ y^{\frac{1}{3}} = \sin t \end{cases} \quad \begin{cases} x = \cos^3 t \\ y = \sin^3 t \end{cases}$$



Epi- et hypocycloïde



$$\alpha r = t$$
$$\alpha - t = \frac{t}{r} - t = \frac{1-r}{r} t$$



$$\beta r = t$$
$$\beta + t = \frac{t}{r} + t = \frac{1+r}{r} t$$

$$M \begin{cases} x = (1-r)\cos t \\ y = (1-r)\sin t \end{cases}$$

$$N \begin{cases} x = (1+r)\cos t \\ y = (1+r)\sin t \end{cases}$$

$$P \begin{cases} x = (1-r)\cos t + r\cos \frac{1-r}{r} t \\ y = (1-r)\sin t - r\sin \frac{1-r}{r} t \end{cases}$$

$$Q \begin{cases} x = (1+r)\cos t - r\cos \frac{1+r}{r} t \\ y = (1+r)\sin t - r\sin \frac{1+r}{r} t \end{cases}$$

Hypocycloïde $r = \frac{1}{4}$

$$P\begin{cases} x = (1-r)\cos t + r\cos\frac{1-r}{r}t \\ y = (1-r)\sin t - r\sin\frac{1-r}{r}t \end{cases}$$

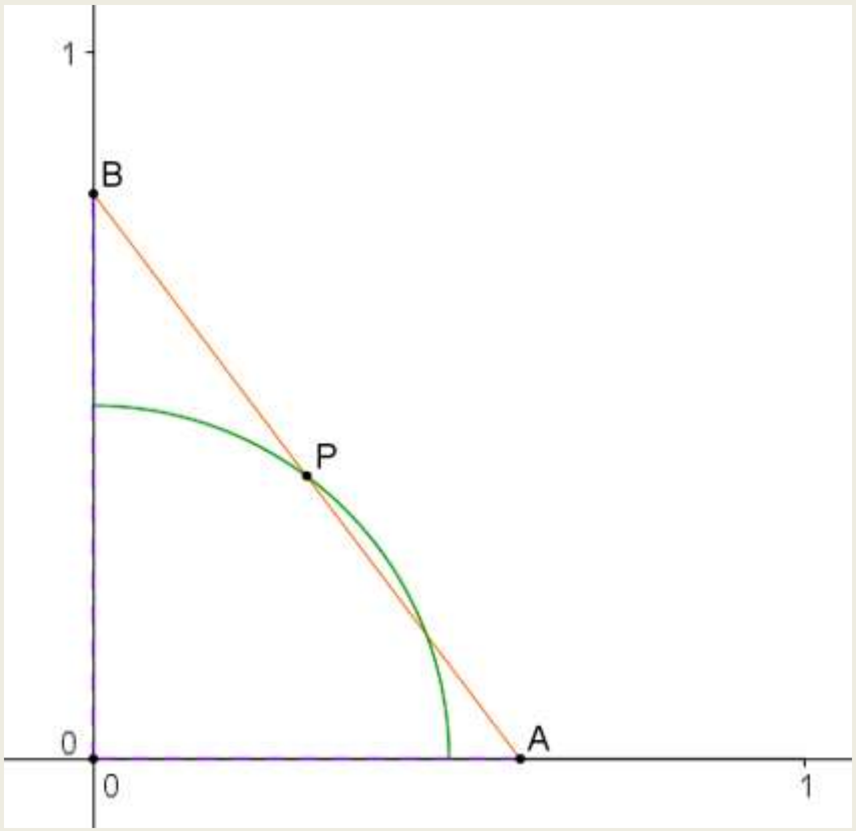
$$P\begin{cases} x = \dfrac{3}{4}\cos t + \dfrac{1}{4}\cos 3t \\ y = \dfrac{3}{4}\sin t - \dfrac{1}{4}\sin 3t \end{cases}$$

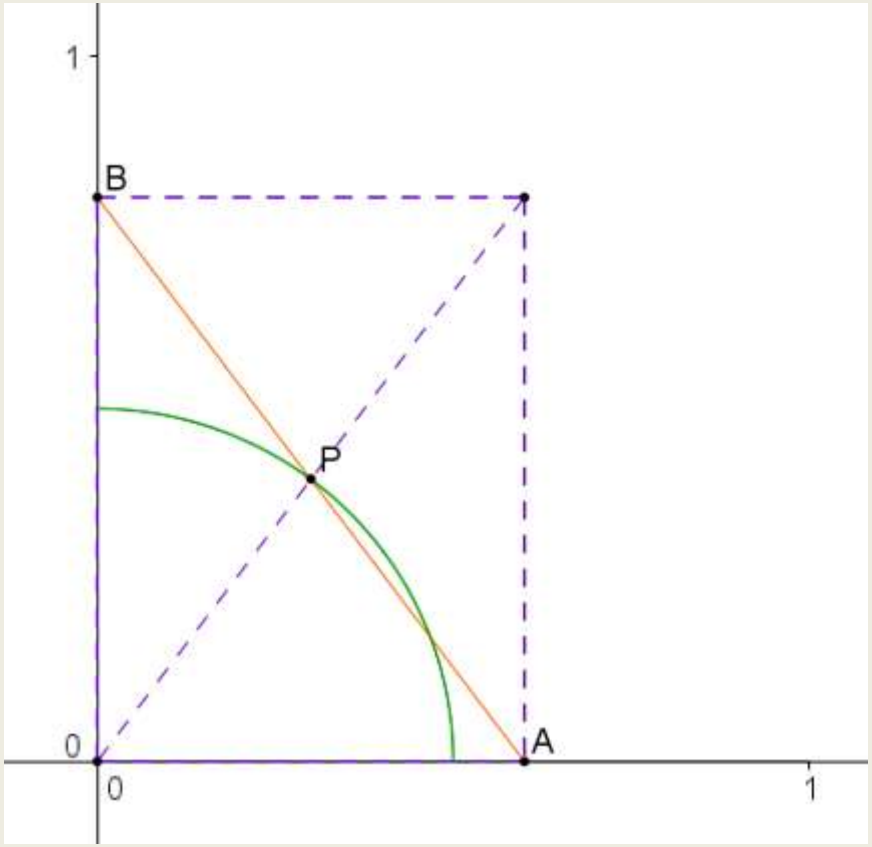
Raté ?

- $\frac{3}{4}\cos t + \frac{1}{4}\cos 3t = \frac{3}{4}\cos t + \frac{1}{4}(4\cos^3 t - 3\cos t) = \cos^3 t$
- $\frac{3}{4}\sin t - \frac{1}{4}\sin 3t = \frac{3}{4}\sin t - \frac{1}{4}(3\sin t - 4\sin^3 t) = \sin^3 t$

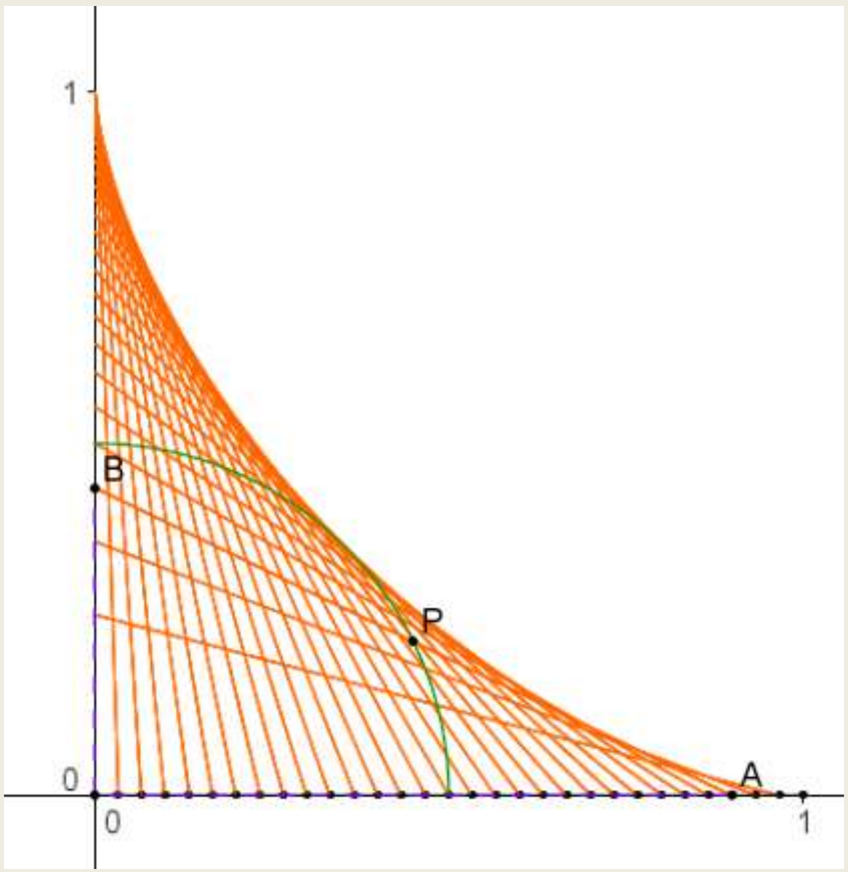
Non, c'était bon.

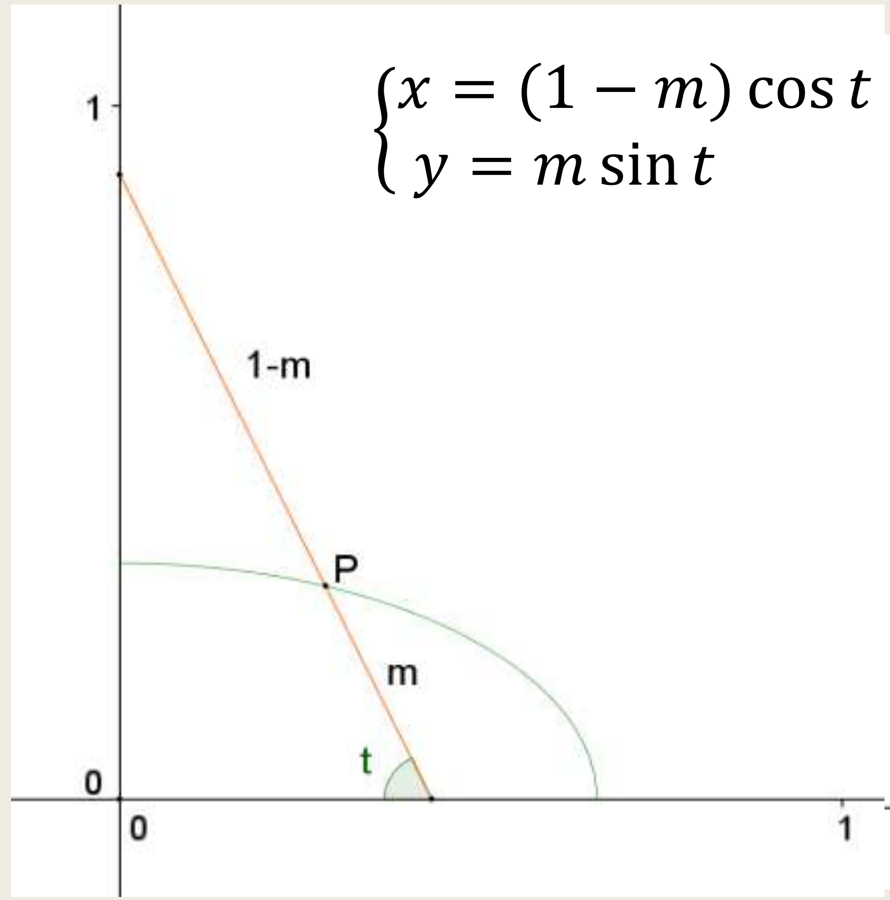
Le milieu de l'échelle





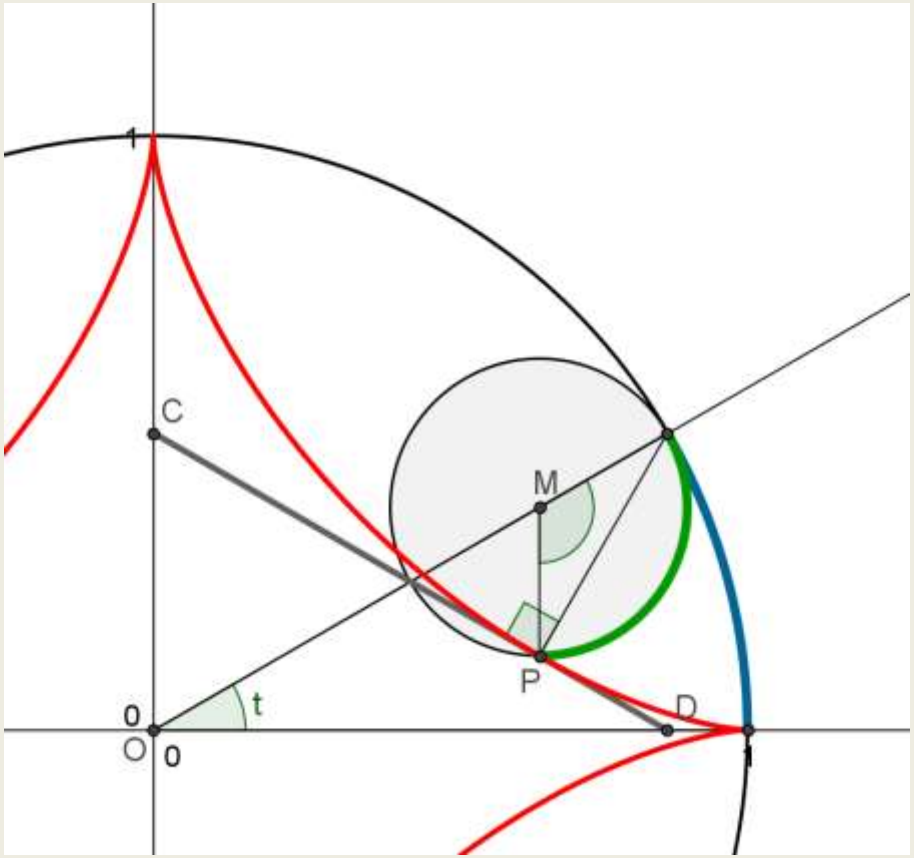
Double enveloppe



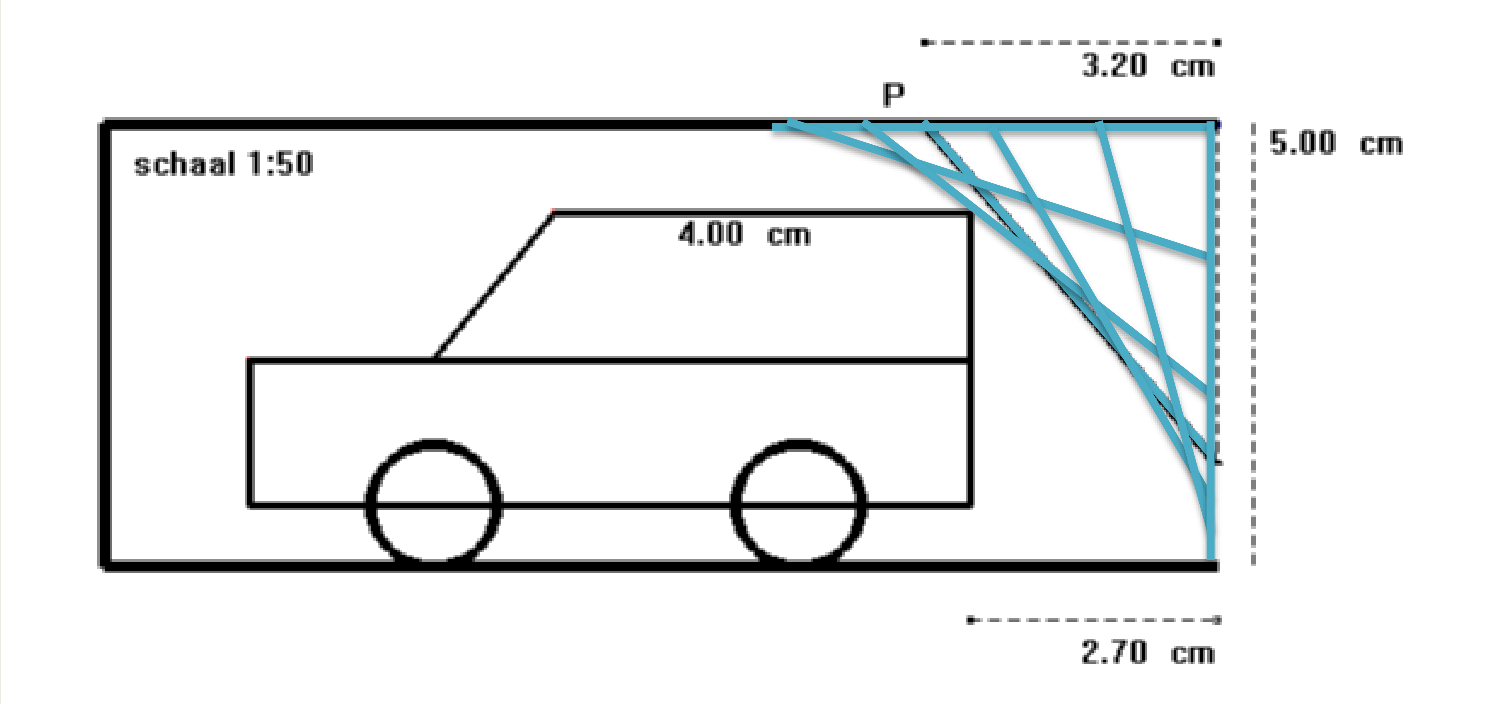


Calculer ou voir le mouvement?

Mouvement instantané

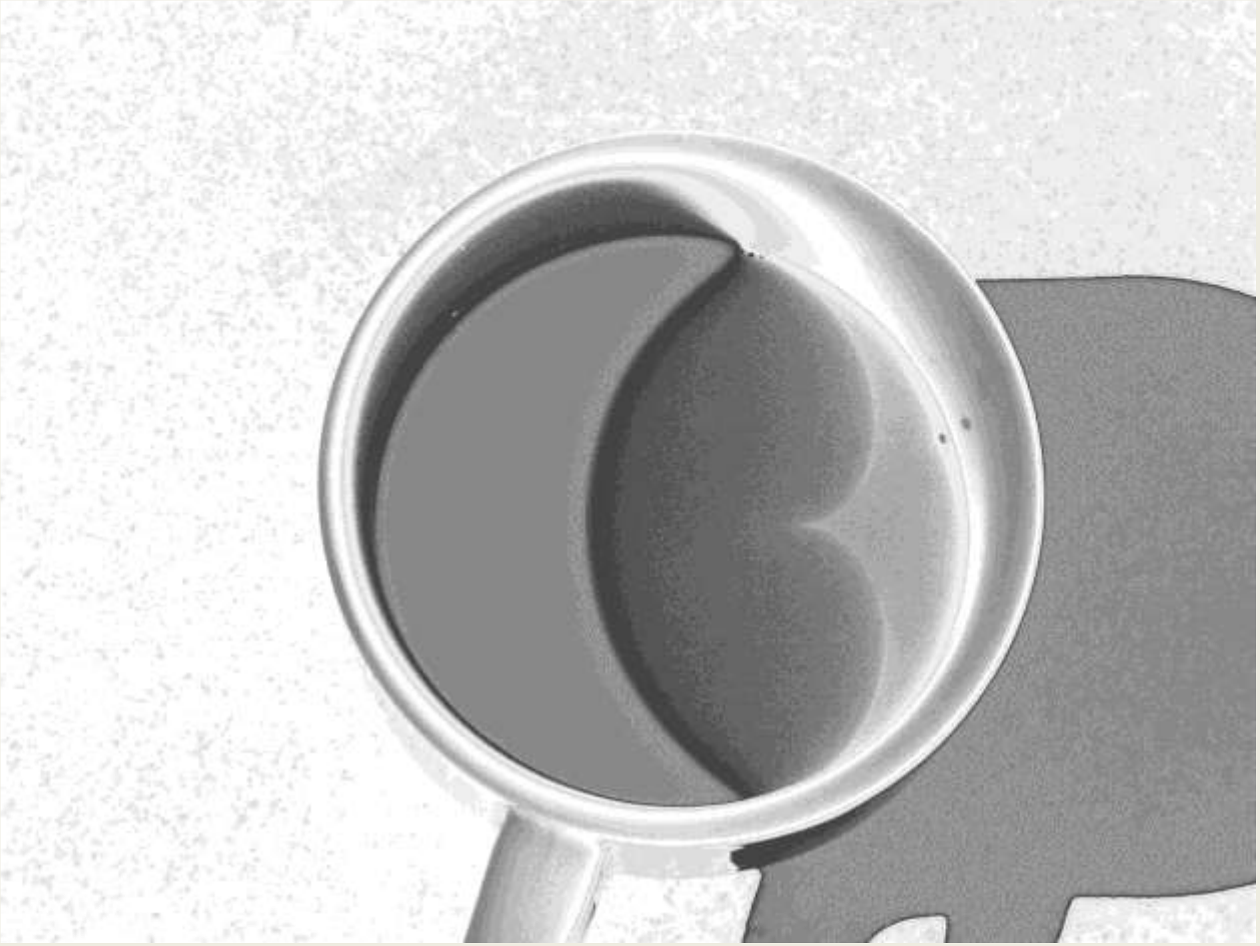


La porte du garage



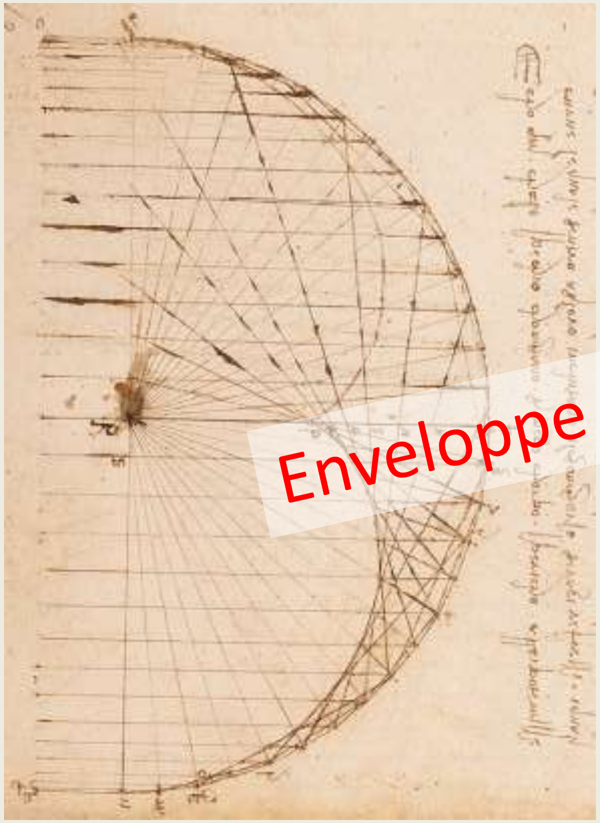
La tasse de café: regardez !

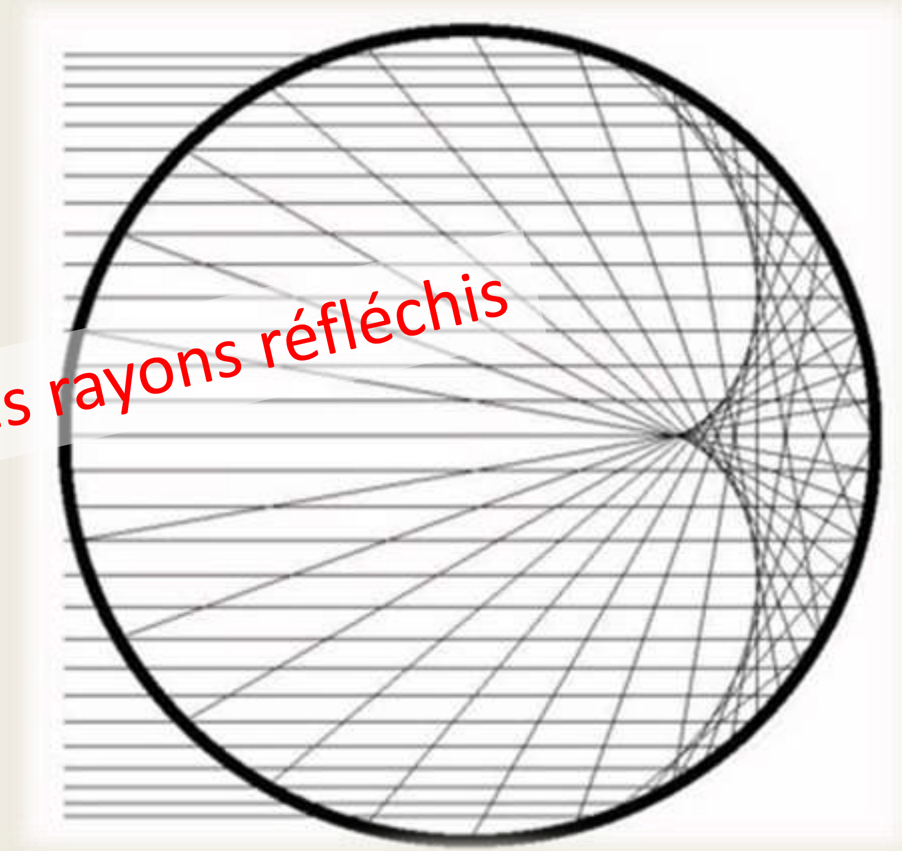
La tasse de café: regardez !



Caustique

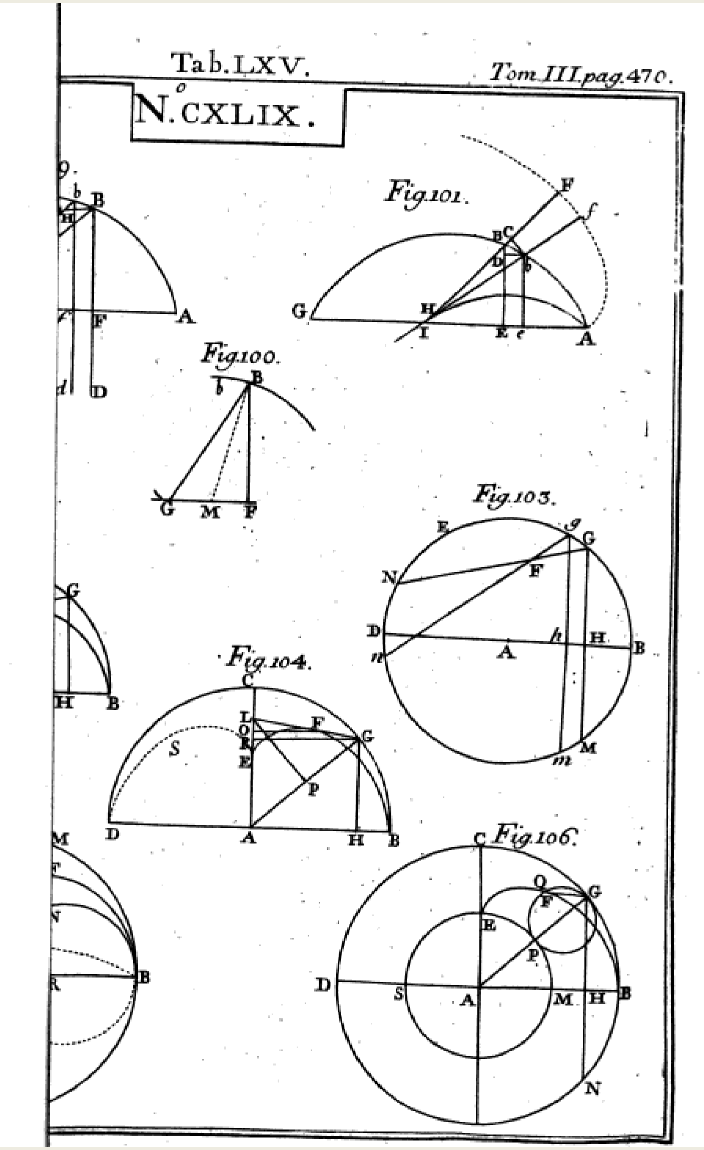
Leonardo da Vinci (16e siècle), Christiaan Huygens (17e siècle), Joh. Bernoulli (fin 17e siècle)...





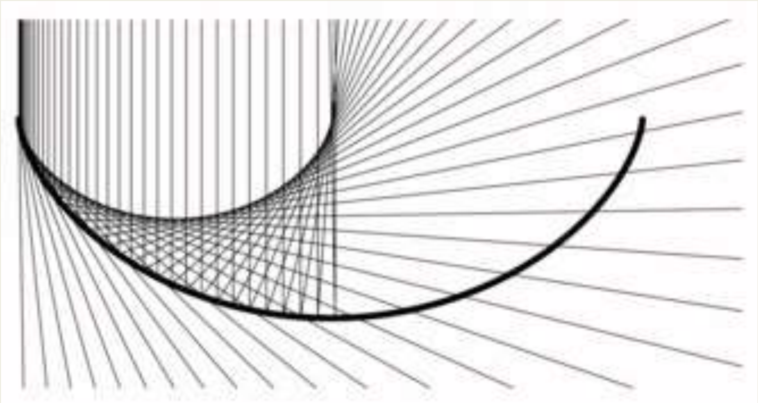
Enveloppe des rayons réfléchis

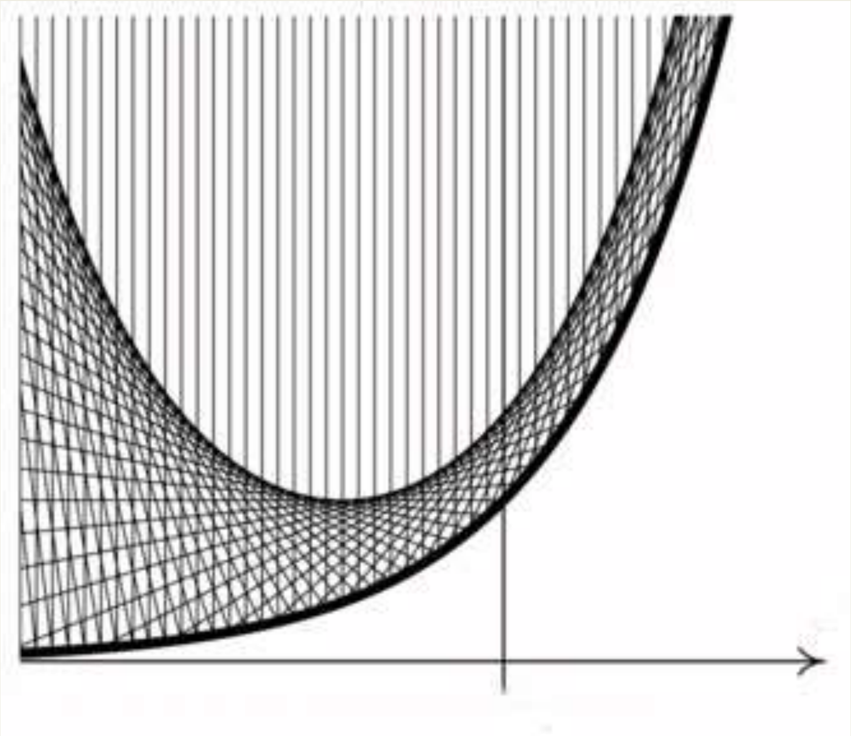
Caustique



Joh. Bernoulli, *Caustica circularis radiorum parallelorum*

Autres caustiques

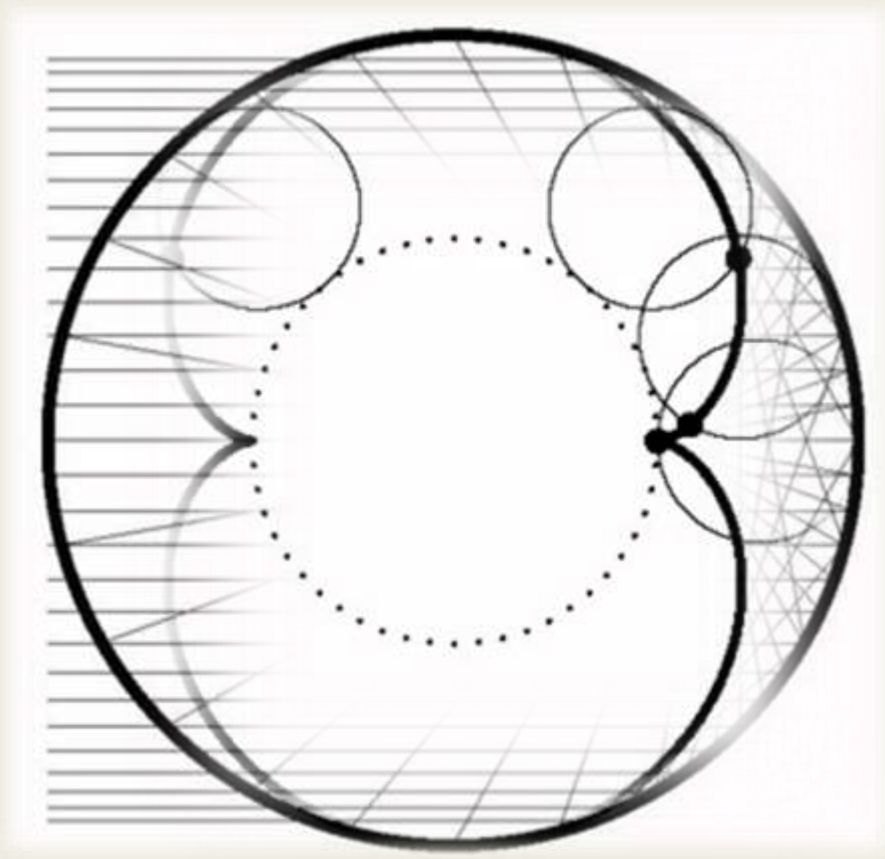




La tasse de café : quelle courbe ?

Epicycloïde ($r = 1/2$)

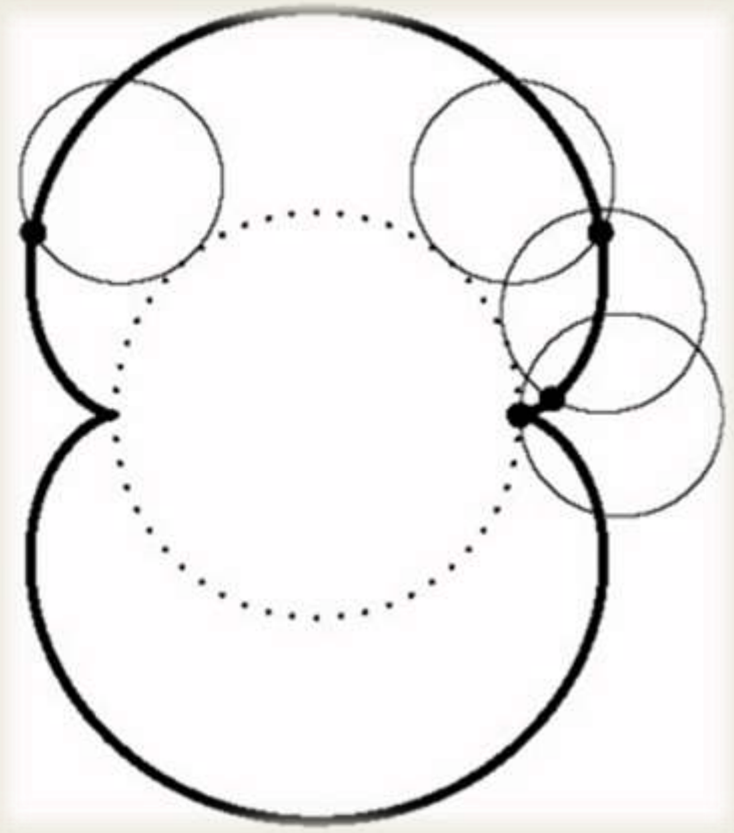
« néphroïde »



La tasse de café : quelle courbe ?

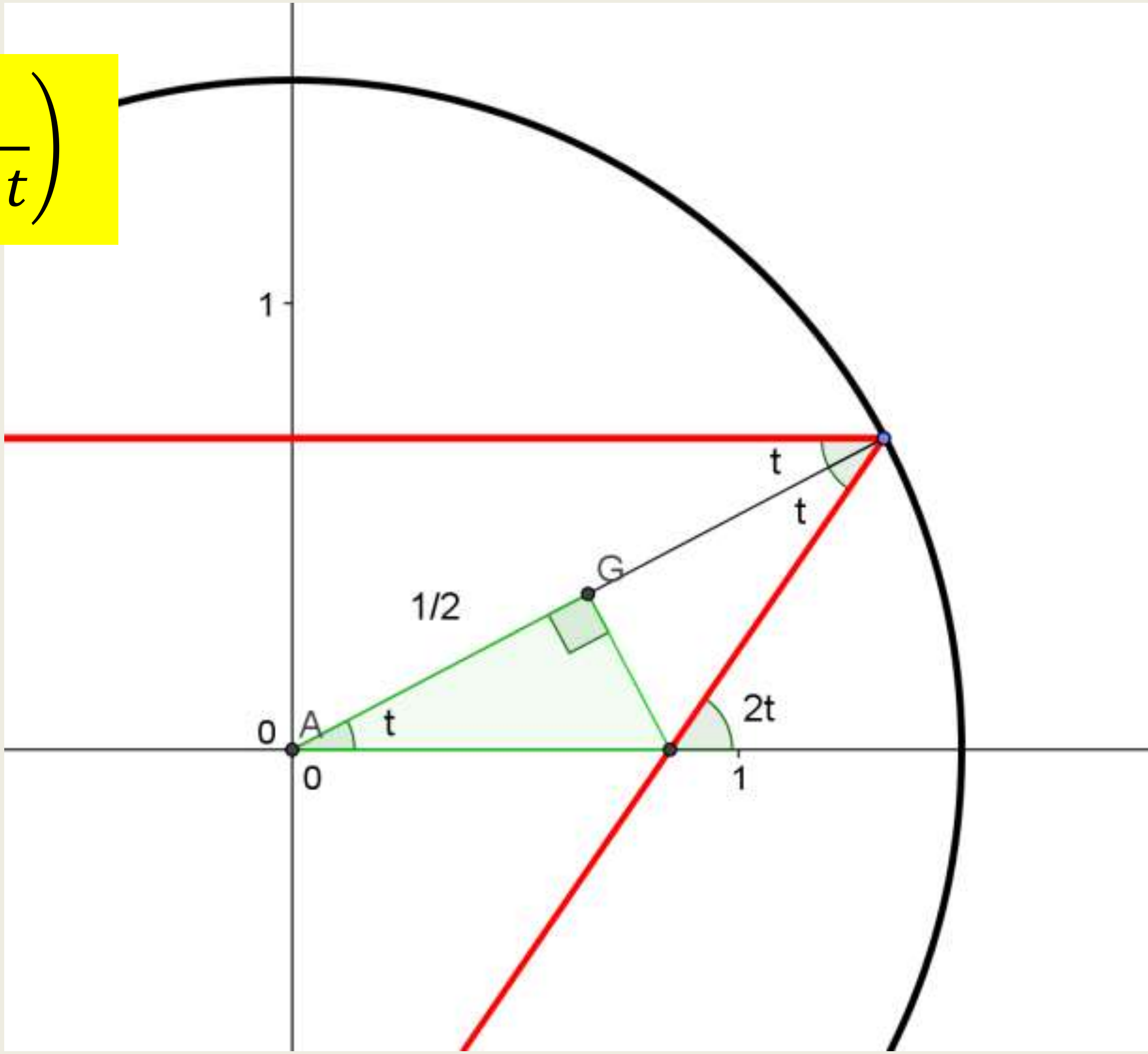
Epicycloïde ($r = 1/2$)

« néphroïde »



L'équation de l'enveloppe?

$$y = \tan 2t\left(x - \frac{1}{2\cos t}\right)$$



L’équation de l’enveloppe?

$$y = \tan 2t \left(x - \frac{1}{2\cos t} \right)$$

Dans l’autre sens

$$x = \frac{1}{\tan 2t} y + \frac{1}{2\cos t}$$

$$\frac{\partial x}{\partial t} = 0$$

$$y = \sin^3 t$$

$$x = \frac{1}{\tan 2t} \sin^3 t + \frac{1}{2\cos t}$$

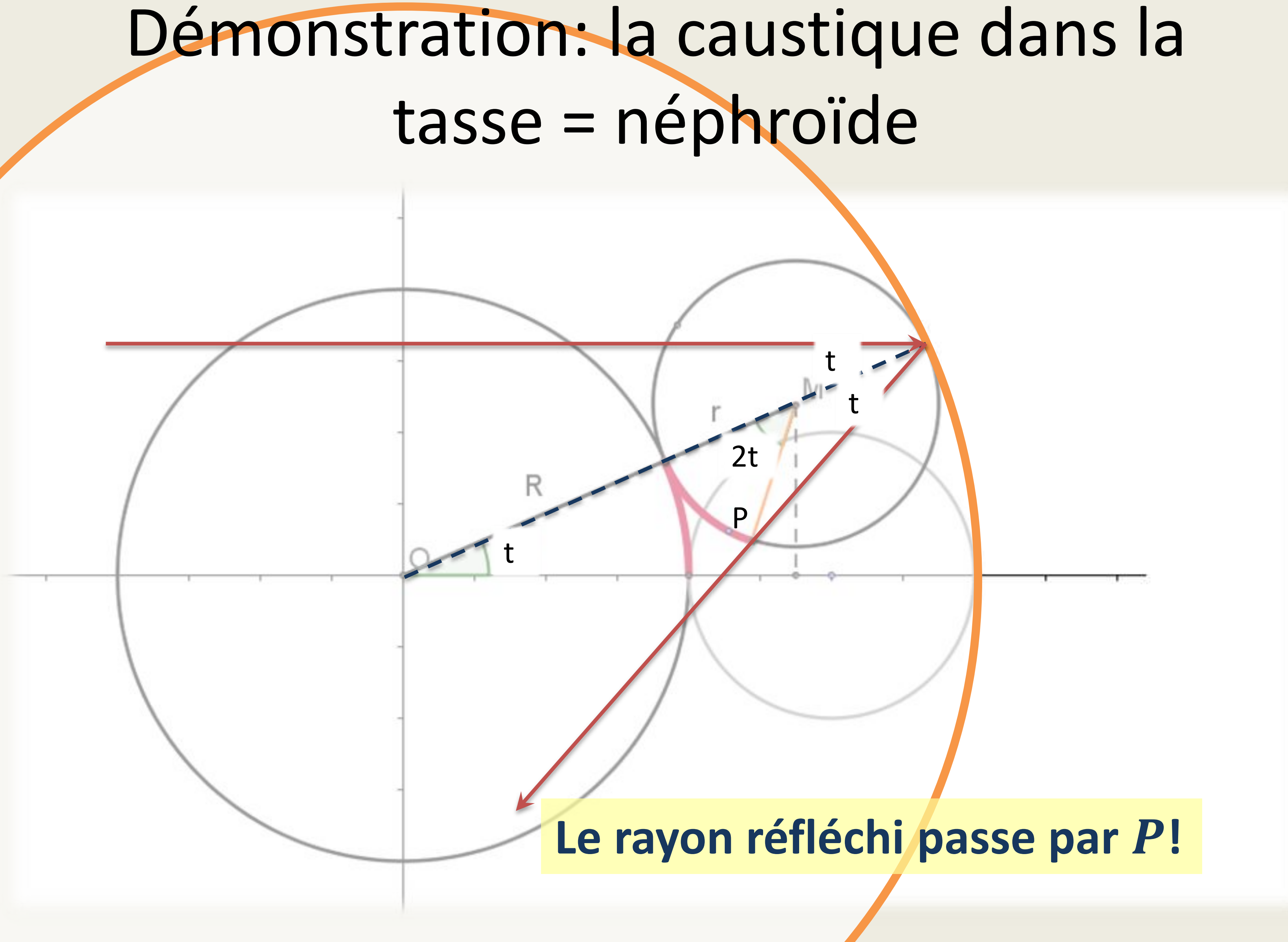
$$= \cdots = \cos t \left(\frac{1}{2} - \cos^2 t \right)$$

La tasse de café : néphroïde ?

$$\begin{cases} x = (1+r)\cos t - r\cos\dfrac{1+r}{r}t \\ y = (1+r)\sin t - r\sin\dfrac{1+r}{r}t \end{cases}$$

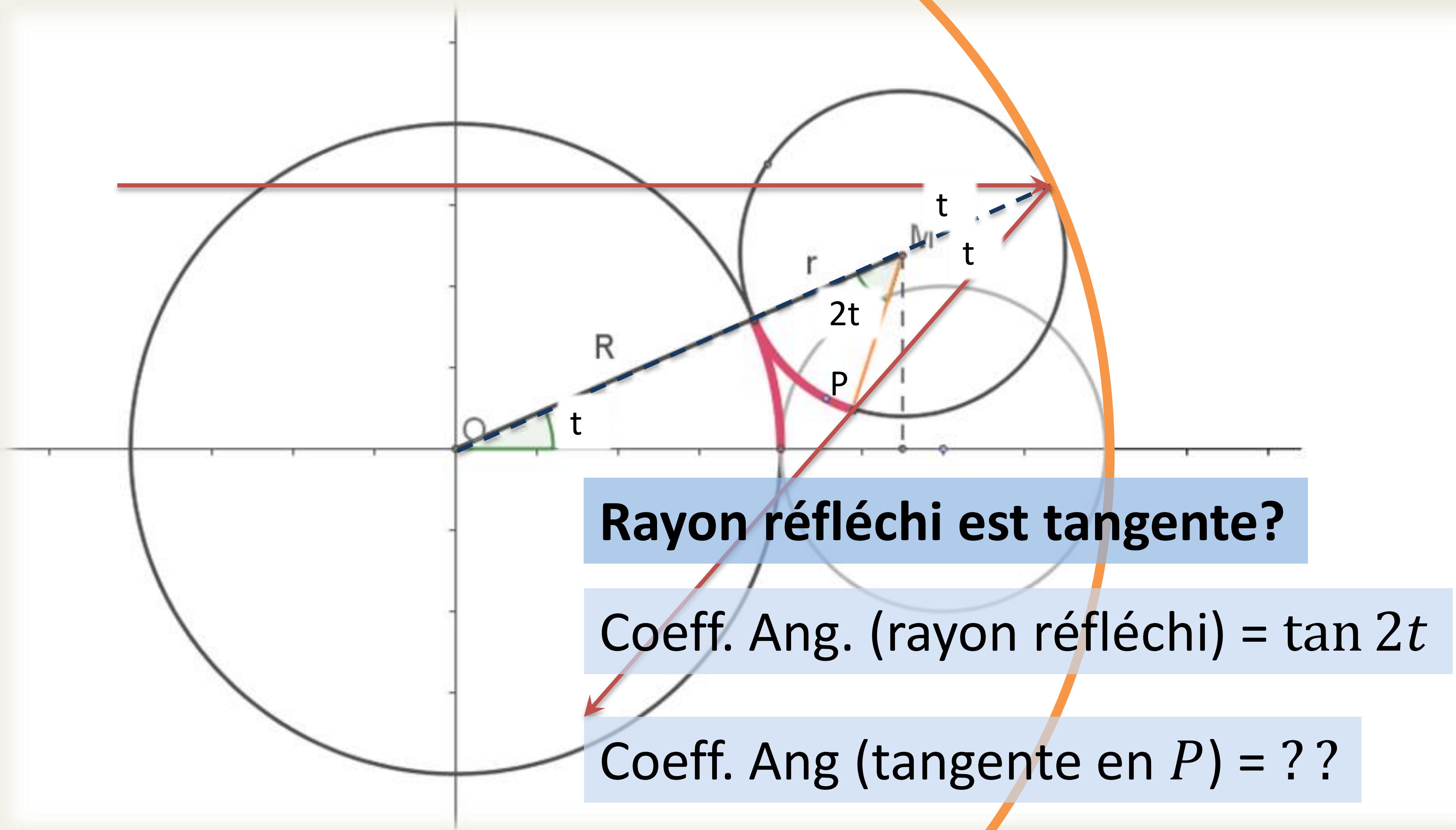
$$\begin{cases} x = 1{,}5\cos t - 0{,}5\cos 3t \\ y = 1{,}5\sin t - 0{,}5\sin 3t \end{cases}.$$

Démonstration: la caustique dans la tasse = néphroïde



Le rayon réfléchi passe par P!

Démonstration: la caustique dans la tasse = néphroïde



Rayon réfléchi est tangente?

Coeff. Ang. (rayon réfléchi) = $\tan 2t$

Coeff. Ang (tangente en P) = ? ?

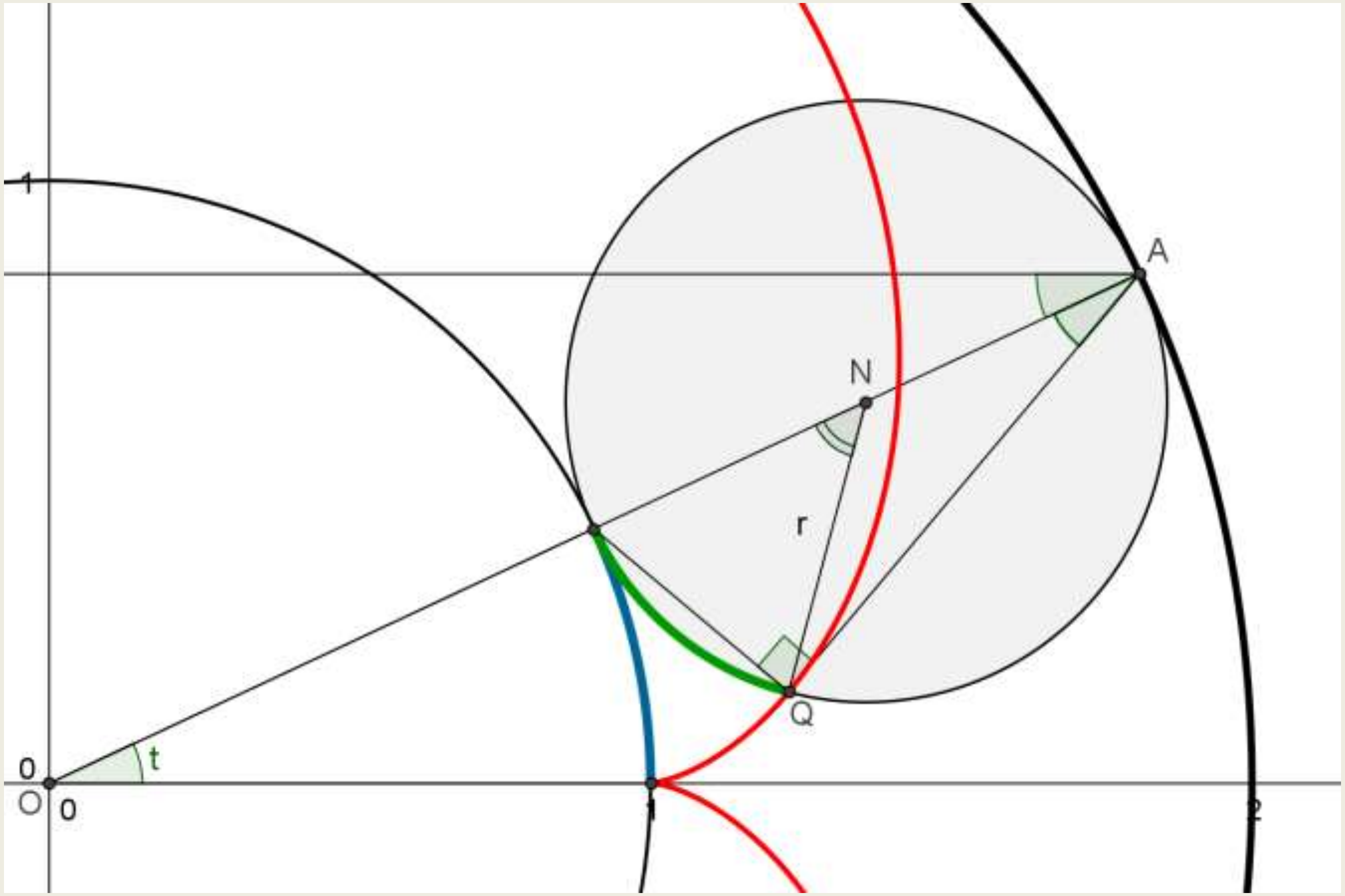
Démonstration: la caustique dans la tasse = néphroïde

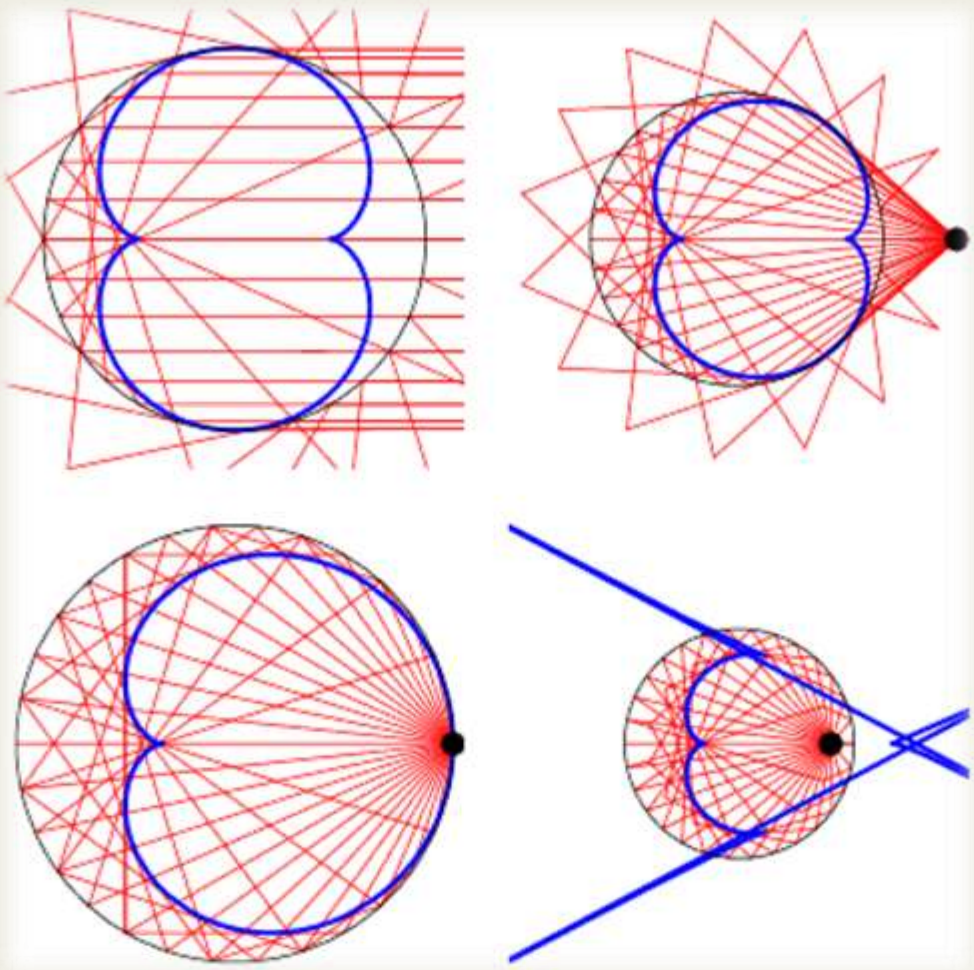
$$\begin{cases} x = 1{,}5\cos t - 0{,}5\cos 3t \\ y = 1{,}5\sin t - 0{,}5\sin 3t \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
\text{coeff. ang. (tangente en } P) &= \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} \\
&= \frac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}} \\
&= \frac{1{,}5\cos t - 1{,}5\cos 3t}{-1{,}5\sin t + 1{,}5\sin 3t} \\
&= \frac{\cos t - \cos 3t}{-\sin t + \sin 3t} \\
&= \frac{2\sin 2t \sin t}{2\cos 2t \sin t} \quad \text{(Simpson)} \\
&= \tan 2t\,.
\end{aligned}$$

Voir le mouvement

Rotation instantanée



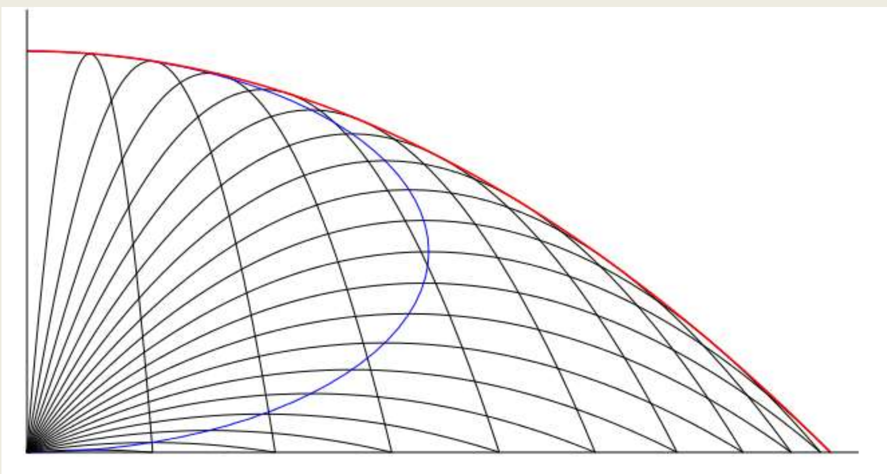


Exercice : fontaine ou ballistique ?

« parabole de sûreté »

Torricelli, *De motu projectorum,* 1644

Coeff. ang. a



$$\begin{cases} x = \dfrac{t}{\sqrt{(1+a^2)}} \\ y = \dfrac{at}{\sqrt{1+a^2}} - \dfrac{gt^2}{2} \end{cases}$$

Exercice : fontaine ou ballistique ?

$$\begin{cases} x = \dfrac{t}{\sqrt{(1+a^2)}} \\ y = \dfrac{at}{\sqrt{1+a^2}} - \dfrac{gt^2}{2} \end{cases}$$

Éliminer t

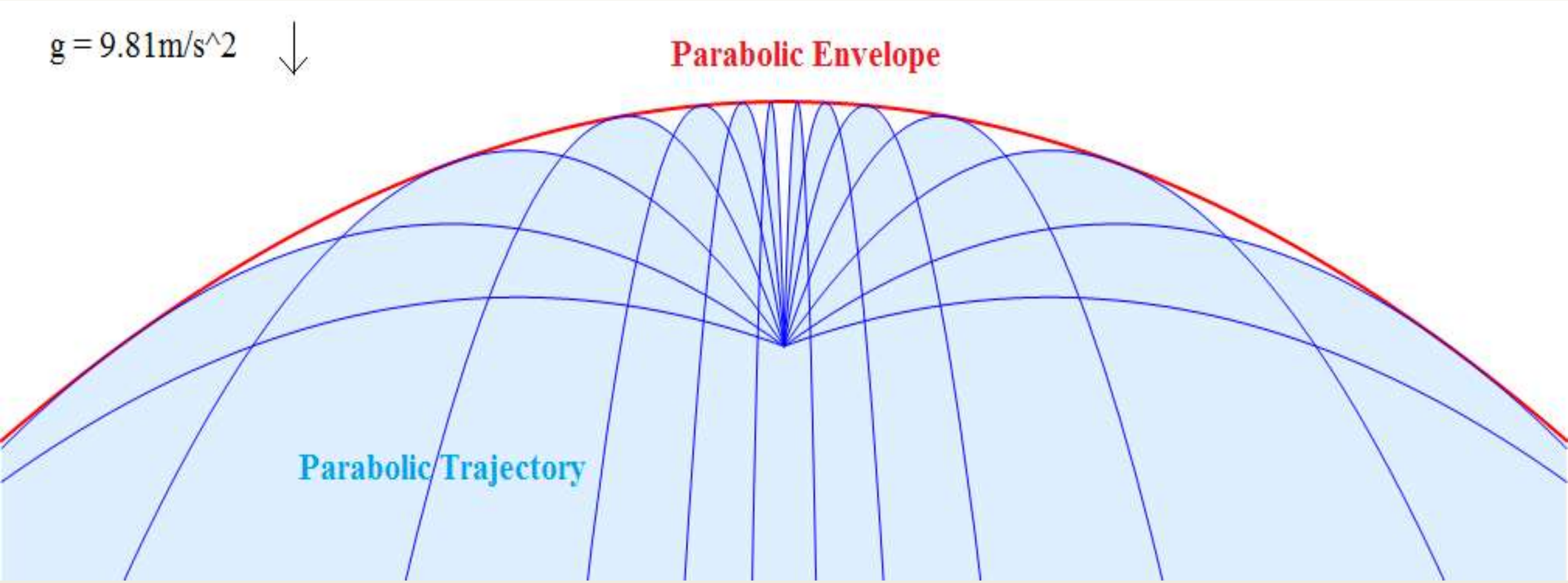
$$y = ax - \frac{gx^2(1+a^2)}{2}$$

$\dfrac{\partial y}{\partial a} = 0$

$$x - gax^2 = 0$$
$$a = \frac{1}{gx}$$
$$y = \frac{1}{2g} - \frac{gx^2}{2}$$

Parabole!

Exercice : fontaine ou ballistique ?



Applicable à l’économie

« The envelope theory »

(Optimisation en micro-économie.)

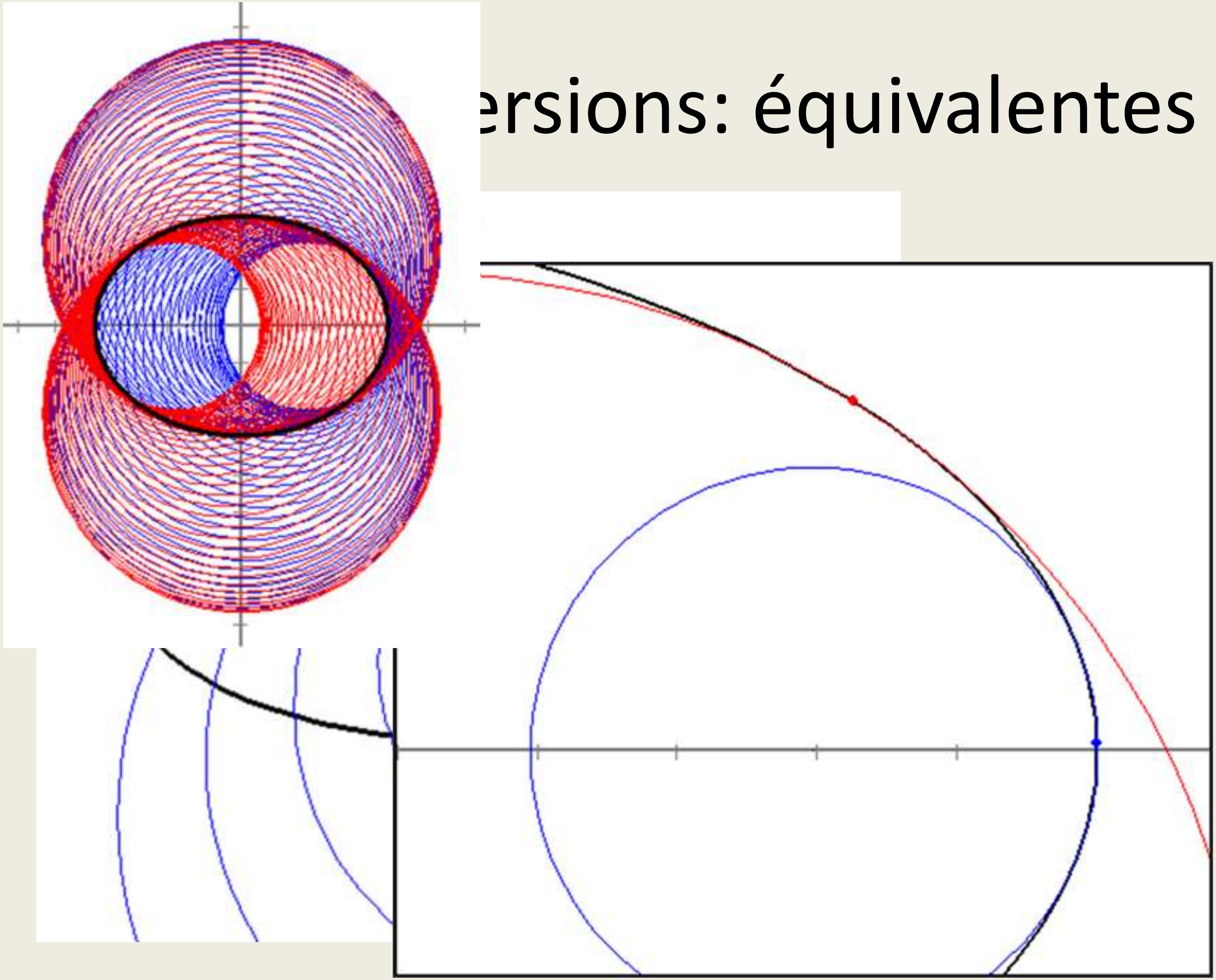
Deux variables

$$\begin{cases} y = f(x,m) \\ \dfrac{\partial f}{\partial m} = 0 \end{cases} \xrightarrow{F(x,y,m)=f(x,m)-y} \begin{cases} F(x,y,m) = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial m} = 0 \end{cases}$$

Plusieurs versions: équivalentes ?

- **I** Courbe des points d'intersection de lignes infiniment proches
- **T** Courbe tangente à toutes les lignes de la famille
- **B** Bord de la région (de l'union des lignes de la famille)
- **D** $\begin{cases} F(x, y, m) = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial m} = 0 \end{cases}$

ersions: équivalentes ?



I ?

T ?

B ?

D ?

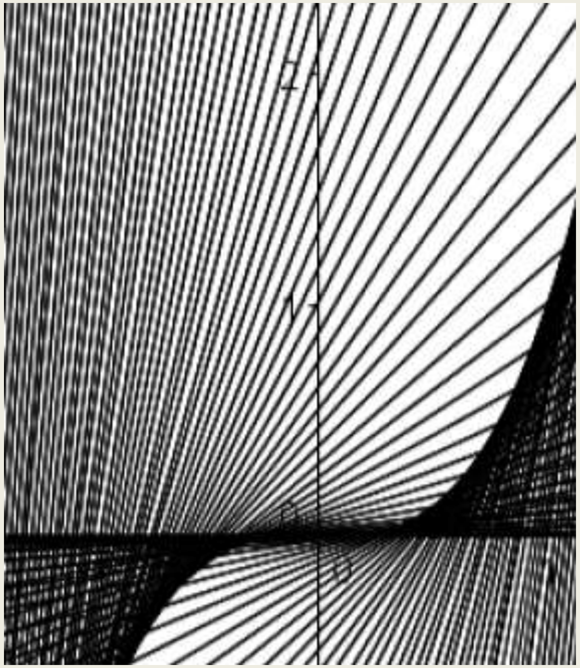
Plusieurs versions: équivalentes ?

I ?

T ?

B ?

D ?



$$y - t^3 = 3t^2(x - t)$$

Plusieurs versions: équivalentes ?

$$x^2 + y^2 - \sin^2 t = 0$$

C’est quoi?

I ?

T ?

B ?

D ?

Sujet accessible ?

On n’est pas obligé de tout faire.

Les idées sont accessibles (intersection – fenêtre).

Éviter la théorie générale.

Les calculs peuvent bien souvent être évités

…par de belles idées

…auxquelles les élèves ne pensent pas.

Invitation: UITWISKELING 30 ans

Venez fêtez avec nous !

www.uitwiskeling.be

Samedi 15 mars 2014 à Anvers