Et pourquoi pas demain ?

Wenn ich von «Kultur in Mathematik» höre, greife ich schon an meine OEIS

(**O**n line **E**ncyclopedia of **I**nteger **S**equences)

39ème Congrès de la SBPM

AUDERGHEM 2013

APMEP Régionale de Normandie Occidentale

Richard Choulet

richardchoulet@wanadoo.fr

0.1 Présentation d'un tableau de nombres entiers

Mi-décembre 2012, j'ai construit arbitrairement un tableau infini de nombres, avec une règle de croissance un peu plus sophistiquée que celle des coefficients du binôme, dont voici les premières lignes.

n \ p	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	2	4	7	11	16	22	29	37
2	1	1	5	21	63	151	311	575	981	1573
3	1	1	16	142	709	2521	7186	17536	38137	75889
4	1	1	65	1201	9709	50045	193765	614629	1682465	4110913
5	1	1	326	12336	157971	1158871	6002996	24441866	83328141	247764661
6	1	1	1957	149989	2993467	30806371	210896251	4590585349	16483289077	52161935041

La règle de construction de ce tableau, en notant $a_{n,p}$ le nombre situé en colonne numéro p et en ligne numéro n, est la suivante :

$$a_{n,p} = n(p-1)a_{n-1,p} + a_{n,p-1}, \qquad (\mathcal{R})$$

avec, par définition choisie et assumée $a_{n,0} = 1$ et $a_{0,p} = 1$ pour tous n et p, de sorte qu'immédiatement, par récurrence : $a_{n,1} = 1$ pour tout n.
La ligne de numéro 1 est obtenue avec la récurrence : $a_{1,p} = (p-1)\times 1 + a_{1,p-1}$ ce qui donne presqu'aussitôt : $a_{1,p} = 1 + \frac{p(p-1)}{2}$.
La colonne de numéro 2 vérifie la récurrence : $a_{n,2} = na_{n-1,2} + 1$. En utilisant un changement de nom de façon à gommer le n, on pose $a_{n,2} = u_n n!$ et la suite u vérifie alors la récurrence $u_n = u_{n-1} + \frac{1}{n!}$ ce qui fournit aussitôt $a_{n,2} = n!\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!} = \sum_{p=1}^{n} n(n-1)\cdots(n-p+1) + 1$.

0.1.1 Fonctions génératrices exponentielles des colonnes

Regardons pour commencer plus en détails, les colonnes du point de vue des fonctions génératrices exponentielles car elles sont aisées à mettre en évidence.
En effet avec Ψ_p la fonction génératrice exponentielle de colonne p ($p \geqslant 1$) pour laquelle on rappelle que

$$\Psi_p(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_{k,p}\frac{z^k}{k!},$$

il apparaît, en sommant, que la relation de récurrence $(\mathcal{R})$ a pour conséquence :

$$\Psi_p(z) = (p-1)z\Psi_p(z) + \Psi_{p-1}(z)$$

et de là vient :

$$\Psi_p(z) = \frac{\Psi_{p-1}(z)}{1-(p-1)z}.$$

De ceci résulte alors, avec $\Psi_1(z) = \exp(z)$, que :

$$\Psi_p(z) = \frac{\exp(z)}{\displaystyle\prod_{k=0}^{p-1}(1-kz)}.$$

Concrètement cela fournit $\Psi_2(z) = \frac{\exp(z)}{1-z}$ puis $\Psi_3(z) = \frac{\exp(z)}{(1-z)(1-2z)}$ etc.
C'est cette jolie formule qui permet de calculer le terme général en décomposant ($p \geqslant 2$) d'abord en éléments simples $\frac{1}{\displaystyle\prod_{k=0}^{p-1}(1-kz)}$. J'obtiens :

$$\frac{1}{\displaystyle\prod_{k=0}^{p-1}(1-kz)} = \sum_{k=1}^{p-1} \frac{\alpha_k}{1-kz}.$$

La classique méthode avec les pôles simples conduit à : $\alpha_k = \frac{(-1)^{p-k-1}k^{p-2}}{(k-1)!(p-k-1)!}$ valable également lorsque que $k=1$ ou $k=p-1$.

0.1.2 WHAM : Explicitement le terme général

Le développement en séries de chacune des fractions, joint à celui de l'exponentielle donne finalement après quelques calculs :

$$a_{n,p} = n! \sum_{m=0}^{n} \sum_{k=1}^{p-1} \frac{(-1)^{p-1-k}k^{p-2}}{(n-m)!(k-1)!(p-1-k)!} k^m.$$

Il semble (voir plus loin les errements qui ont conduit à cette formule) que j'ai la conjecture :

$$a_{n,p} = -\sum_{k=1}^{p-1} s_1(p, p-k) n(n-1)\cdots(n-k+1) a_{n-k,p} + 1$$

en notant $s_1(n,m)$ les nombres de Stirling de première espèce (voir page 10) avec

$$s_1(n,m) = \sum_{k=0}^{n-m} \sum_{j=0}^{k} \frac{(-1)^{2k-j}}{k!} Binomial(n-1+k, n-m+k) Binomial(2n-m, n-m-k) Binomial(k,j) j^{n-m+k}.$$

0.1.3 Petit programme donnant les lignes

```
for n from 1 to 10 do for p from 2 to 20 do a(n,0):=1:a(n,1):=1:a(n,p):=
```

```
n!*sum('1/(n-m)!*sum('k^(p-2)*(-1)^(p-1-k)*k^m/((k-1)!*(p-1-k)!)','k'=1..(p-1))','m'=0..n):od:
seq(a(n,p),p=0..20):od;
```

```
1, 1, 2, 4, 7, 11, 16, 22, 29, 37, 46, 56, 67, 79, 92, 106, 121, 137, 154, 172, 191

1, 1, 5, 21, 63, 151, 311, 575, 981, 1573, 2401, 3521, 4995, 6891, 9283, 12251, 15881, 20265,
25501, 31693, 38951

1, 1, 16, 142, 709, 2521, 7186, 17536, 38137, 75889, 140716, 246346, 411181, 659257, 1021294,
1535836, 2250481, 3223201, 4523752, 6235174, 8455381

1, 1, 65, 1201, 9709, 50045, 193765, 614629, 1682465, 4110913, 9176689, 19030529, 37122493,
68766829, 121874117, 207880933, 342909793, 549194657, 856809793, 1305742321, 1948351277

1, 1, 326, 12336, 157971, 1158871, 6002996, 24441866, 83328141, 247764661, 660715666, 1612242116,
3653979231, 7779988971, 15701806576, 30253471886, 55971706361, 99907278921, 172736111326,
290252920216, 475346291531

1, 1, 1957, 149989, 2993467, 30806371, 210896251, 1090803427, 4590585349, 16483289077, 52161935041,
148896462001, 390059091247, 950218297159, 2174959210087, 4716250848511, 9753704421001, 19344803197417,
36963886552669, 68311201935997, 122500679170531

1, 1, 13700, 2113546, 64976353, 927554741, 8308923526, 54122667460, 279061349561, 1202125537873,
4488327445456, 14911079785526, 44945629811545, 124763966772901, 322685254890818, 784877838044896,
1809016802250001, 3975634760360705, 8374337260128316, 16981548704063938, 33274139033744561

1, 1, 109601, 33926337, 1593358809, 31275110521, 363632051561, 2961520089641, 18588955665057,
95524990088929, 418684566161761, 1611570949003841, 5566786372419801, 17544127182618297,
51103393691263369, 139009711552291721, 356091727822291841, 864972977148462081, 2003882844525913057,
4449225857911120129, 9506894991040293401

1, 1, 986410, 611660476, 43632348319, 1169536327075, 17532978647320, 177455063487934,
1348559270386525, 8226358556789413, 42139808415892054, 187181193826237744,
738293044695798043, 2633058780418574119, 8612155842296388292, 26127379497885145138,
74199762753894543673, 198755871463273083337, 505349946675737781058, 1226124535657339241956,
2851803579125229413527

1, 1, 9864101, 12243073621, 1321213523191, 48102666606191, 924751598972191, 11572055408248231,
105971204335304981, 764079888878458021, 4556662646308742881, 23274782028932517281,
104487016945470302011, 420454070595699196291, 1540034330094229674251, 5197867459798149993571,
16327831872882331544521, 48128771307006024878441, 134038262241881447658301,
354740678660202511210381, 896583358693996099780511
```

Signalons que la suite des coefficients de Taylor de Ψ_2 est A000522, de Ψ_3 est A053482 mais qu'au delà les suites ne sont pas répertoriées. Ainsi Ψ_3 donne :
1, 4, 21, 142, 1201, 12336, 149989, 2113546, 33926337, 611660476, 12243073621, 269456124774, 6468249055921, 168191402251432, 4709596238204901, 141291441773619106, $\cdots$ avec Maple par exemple.
Ψ_4 donne
1, 7, 63, 709, 9709, 157971, 2993467, 64976353, 1593358809, 43632348319, 1321213523191, 43869502390077,

1585770335098693, 62013234471100459, 2609265444024424179, 117558236422872707161 etc.
Recherche de la fonction génératrice ordinaire des lignes φ_n telle que : $\varphi_n(u) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_{n,k}u^k$ elles vérifient la récurrence suivante avec $\varphi_0(u) = \frac{1}{1-u}$

$$(1-u)\varphi_n(u) = nu\varphi'_{n-1}(u) - n\varphi_{n-1}(u) + n + 1$$

$\varphi_1(u) = \frac{2u^2-2u+1}{(1-u)^3} = \frac{2}{1-u} - \frac{2}{(1-u)^2} + \frac{1}{(1-u)^3}$.
$\varphi_2(u) = \frac{8u^3-8u^2+8u-2}{(1-u)^5} + \frac{3}{1-u}$

0.2 Fonctions génératrices exponentielles des lignes

On note ϕ_n telle que $\phi_n(u) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_{n,k}\frac{u^k}{k!}$. L'utilisation adéquate de la relation de récurrence $(\mathcal{R})$ fournit :

$$\phi'_n(u) = nu\phi''_n(u) + \phi_n(u).$$

$\phi_0(u) = \exp(u)$, $\phi_1(u) = \exp(u)(\frac{u^2}{2}+1)$, $\phi_2(u) = \exp(u)(\frac{u^4}{4} + \frac{4u^3}{3} + 2u^2 + 1)$
L'écriture $\phi_n(u) = \exp(u)P_n(u)$ conduit à la relation :

$$P'_n(u) = nu(P''_{n-1}(u) + 2P'_{n-1}(u) + P_{n-1}).$$

C'est ainsi que $P_3(u) = \frac{u^6}{8} + 2u^5 + \frac{39}{4}u^4 + 16u^3 + \frac{15}{2}u^2 + 1$, $P_4(u) = \frac{1}{16}u^8 + 2u^7 + \frac{67}{3}u^6 + \frac{536}{5}u^5 + \frac{441}{2}u^4 + 168u^3 + 32u^2 + 1$.

```
P(1):=u^2/2+1: for n from 2 to 10 do
P(n):=int(n*u*(P(n-1)+2*diff(P(n-1),u)+diff(diff(P(n-1),u),u)),u)+1: od;
```

$P(2) := 1/4u^4 + 4/3u^3 + 2u^2 + 1$
$P(3) := 1/8u^6 + 2u^5 + 39/4u^4 + 16u^3 + 15/2u^2 + 1$
$P(4) := 1/16u^8 + 2u^7 + 67/3u^6 + 536/5u^5 + 441/2u^4 + 168u^3 + 32u^2 + 1$
$P(5) := 1/32 * u^{10} + 5/3 * u^9 + 1615/48 * u^8 + 328 * u^7 + 19625/12 * u^6 + 4076 * u^5 + 9215/2 * u^4 + 5680/3 * u^3 + 325/2 * u^2 + 1$
$P(6) := 1/64u^{12} + 5/4u^{11} + 319/8u^{10} + 5918/9u^9 + +97339/16u^8 + 224862/7u^7 + 94430u^6 + 144328u^5 + 400875/4u^4 + 24020u^3 + 978u^2 + 1$. Je vois donc qu'ici il n'y a rien d'évident, malgré le recours à l'exponentielle qui gomme quelques difficultés.

0.2.1 Et la culture ? Une petite histoire de Noël

Il est toujours bon pour savoir si l'on a pas inventé le vin chaud (quoiqu'avec deux bouts de bois cela ne doit pas être évident d'arriver à ses fins) d'aller consulter **OEIS**. En particulier pour une des suites exhibées répertoriée A053482, j'ai trouvé une remarque récente d'un collaborateur de ce site mondialement connu R.J. Mathar (le site et le collaborateur !) qui y donne cette conjecture sur notre suite commençant par 1, 4, 21, 142, 1201, 12336, 149989, 2113546, 33926337, 611660476, 12243073621, 269456124774, 6468249055921, 168191402251432, 4709596238204901, 141291441773619106, $\cdots$:

$$a(n) - (3n+1)a(n-1) + (2n+3)(n-1)a(n-2) - 2(n-1)(n-2)a(n-2) = 0.$$

Intrigué par ce bluffant résultat, j'ai voulu creusé davantage. Tout d'abord cette conjecture n'était pas bonne car il fallait lire $a(n-3)$ à la place du deuxième $a(n-2)$ donc en fait :

$$a(n)-(3n+1)a(n-1)+(2n+3)(n-1)a(n-2)-2(n-1)(n-2)a(n-3)=0. \qquad (\mathcal{M}_R)$$

Ensuite partant de mon côté et de la récurrence définissant mon tableau, j'ai voulu aussi fabriqué une autre récurrence sur A053482 dont découlerait la conjecture rectifiée de Mathar $(\mathcal{M}_R)$.
Or adoptant pour l'instant mes notations, j'ai :

$$a(n,3)=2na(n-1,3)+a(n,2)$$

avec $a(n,2)=na(n-1,1)+1$.
C'est ainsi que j'obtiens la récurrence sur les termes consécutifs de la suite avec les notations de Mathar :

$$a(n)=3na(n-1)-2n(n-1)a(n-2)+1.$$

La conjecture $(\mathcal{M}_R)$ se trouve alors aisément démontrée en écrivant

$$a(n)=(3n+1)a(n-1)-a(n-1)-2n(n-1)a(n-2)+1$$

où l'on remplace $a(n-1)$ par sa valeur $3(n-1)a(n-2)-(2n-1)(n-2)a(n-3)+1$ et le tour est joué.
L'idée révélée finalement ici, est que pour chacune des suites colonne il y a une récurrence linéaire mais qui n'est pas à coefficients constants.
Essayons de trouver celle qui régit la suite suivante :
1, 7, 63, 709, 9709, 157971, 2993467, 64976353, 1593358809, 43632348319, 1321213523191, 43869502390077, 1585770335098693, 62013234471100459, 2609265444024424179, 117558236422872707161 etc.
Elle doit être d'ordre 3 puisque

$$a(n,4)=3na(n-1,4)+a(n,3)$$

où $(a(n,3))$ est déjà d'ordre 2.
Les calculs donnent

$$a(n)=6na(n-1)-11n(n-1)a(n-2)+6n(n-1)(n-2)a(n-3)+1$$

avec la notation générique $(a(n))$. Si l'on veut faire dans le linéaire, 1 doit disparaître :

$$a(n)=(6n+1)a(n-1)-(11n+1)(n-1)a(n-2)+(11n+6)(n-1)(n-2)a(n-3)-6(n-1)(n-2)(n-3)a(n-4).$$

```
a(0):=1:a(1):=7:a(2):=63:a(3):=709: for p from 4 to 10 do
a(p):=6*p*a(p-1)-11*p*(p-1)*a(p-2)+6*p*(p-1)*(p-2)*a(p-3)+1:
od:seq(a(n),n=0..10);
1, 7, 63, 709, 9709, 157971, 2993467, 64976353, 1593358809, 43632348319, 1321213523191
> a(0):=1:a(1):=7:a(2):=63:a(3):=709: for p from 3 to 10 do
a(p):=(6*p+1)*a(p-1)-(11*p+6)*(p-1)*a(p-2)+(6*p+11)*(p-1)*(p-2)*a(p-3)-6*(p-1)*(p-2)*(p-3)*a(p-4):
od:seq(a(n),n=0..10);
1, 7, 63, 709, 9709, 157971, 2993467, 64976353, 1593358809, 43632348319, 1321213523191
```

Les récurrences suivantes sont :

$a(n) = 15na(n-1) - 85n(n-1)a(n-2) + 225n(n-1)(n-2)a(n-3) - 274n(n-1)(n-2)(n-3)a(n-4)$
$+120n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)a(n-5) + 1$ à la Choulet ou
$a(n) = (15n+1)a(n-1) - (85n+15)(n-1)a(n-2) + (225n+85)(n-1)(n-2)a(n-3) - (274n+225)(n-1)(n-2)(n-3)a(n-4)$
$+(120n+274)(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)a(n-5) - 120(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)a(n-6)$ à la Mathar.
Le résultat général est qu'on obtient une récurrente presque linéaire ou linéaire suivant l'un ou l'autre cas avec des coefficients réguliers non constants de factorielles décroissantes agrémentées de nombre de Stirling de première espèce.

```
a(0):=1:a(1):=16:a(2):=311:a(3):=7186: a(4):=193765:for p from 5 to 15 do
a(p):=15*p*a(p-1)-85*p*(p-1)*a(p-2)+225*p*(p-1)*(p-2)*a(p-3)-274*p*(p-1)*(p-2)*(p-3)*a(p-4)
+5!*p*(p-1)*(p-2)*(p-3)*(p-4)*a(p-5)+1: od:seq(a(n),n=0..15);
1, 16, 311, 7186, 193765, 6002996, 210896251, 8308923526, 363632051561, 17532978647320,
924751598972191, 53021724776532986, 3286587824914076941, 219165007446635186236,
15654220521032817824675, 1192944297299985496847086
> a(0):=1:a(1):=16:a(2):=311:a(3):=7186: a(4):=193765:for p from 6 to 15 do
a(p):=(15*p+1)*a(p-1)-(85*p+15)*(p-1)*a(p-2)+(225*p+85)*(p-1)*(p-2)*a(p-3)
-(274*p+225)*(p-1)*(p-2)*(p-3)*a(p-4)+(5!*p+274)*(p-1)*(p-2)*(p-3)*(p-4)*a(p-5)
-120*(p-1)*(p-2)*(p-3)*(p-4)*(p-5)*a(p-6): od:seq(a(n),n=0..15);
1, 16, 311, 7186, 193765, 6002996, 210896251, 8308923526, 363632051561, 17532978647320,
924751598972191, 53021724776532986, 3286587824914076941, 219165007446635186236,
15654220521032817824675, 1192944297299985496847086
```

La conjecture raisonnable, en revenant aux notations initiales, est que :

$$a_{n,p} = -\sum_{k=1}^{p-1} s_1(p,p-k)n(n-1)\cdots(n-k+1)a_{n-k,p} + 1$$

en notant $s_1(n,m)$ les nombres de Stirling de première espèce avec

$$s_1(n,m) = \sum_{k=0}^{n-m}\sum_{j=0}^{k} \frac{(-1)^{2k-j}}{k!} Binomial(n-1+k, n-m+k) Binomial(2n-m, n-m-k) Binomial(k,j) j^{n-m+k}.$$

Ainsi pour la colonne numéro 7 obtient-on la récurrence :
$a(p) = 21pa(p-1) - 175p(p-1)a(p-2) + 735p(p-1)(p-2)a(p-3) - 1624p(p-1)(p-2)(p-3)a(p-4)$
$+1764p(p-1)(p-2)(p-3)(p-4)a(p-5) - 720p(p-1)(p-2)(p-3)(p-4)(p-5)a(p-6) + 1$
ou si l'on préfère en rendant homogène :
$a(p) = (21p+1)a(p-1) - (175p+21)(p-1)a(p-2) + (735p+175)(p-1)(p-2)a(p-3)$
$-(1624p+735)(p-1)(p-2)(p-3)a(p-4) + (1764p+1624)(p-1)(p-2)(p-3)(p-4)a(p-5)$
$-(720p+1764)(p-1)(p-2)\cdots(p-5)a(p-6) - 720(p-1)(p-2)\cdots(p-6)a(p-7).$

```
a(0):=1:a(1):=22:a(2):=575:a(3):=17536: a(4):=614629:a(5):=24441866:
for p from 6 to 20 do a(p):=21*p*a(p-1)-175*p*(p-1)*a(p-2)+735*p*(p-1)*(p-2)*a(p-3)
-1624*p*(p-1)*(p-2)*(p-3)*a(p-4)+1764*p*(p-1)*(p-2)*(p-3)*(p-4)*a(p-5)
-720*p*(p-1)*(p-2)*(p-3)*(p-4)*(p-5)*a(p-6)+1: od:seq(a(n),n=0..20);
```

```
1, 22, 575, 17536, 614629, 24441866, 1090803427, 54122667460, 2961520089641,
177455063487934, 11572055408248231, 816777381720916232, 62094559308820045645,
5062540633534598746546, 440907633737939112534539, 40874631333714505624955596,
4020613975663564234668585937, 418400649954179586086958998630,
45940071590432500516307156004751, 5309139600277253483059853046572944,
644330373701221514844648555023985461
```

```
a(0):=1:a(1):=22:a(2):=575:a(3):=17536: a(4):=614629:a(5):=24441866:
for p from 6 to 20 do a(p):=(21*p+1)*a(p-1)-(175*p+21)*(p-1)*a(p-2)
+(735*p+175)*(p-1)*(p-2)*a(p-3)-(1624*p+735)*(p-1)*(p-2)*(p-3)*a(p-4)
+(1764*p+1624)*(p-1)*(p-2)*(p-3)*(p-4)*a(p-5)-(720*p
+1764)*(p-1)*(p-2)*(p-3)*(p-4)*(p-5)*a(p-6)
+720*(p-1)*(p-2)*(p-3)*(p-4)*(p-5)*(p-6)*a(p-7): od:seq(a(n),n=0..20);
1, 22, 575, 17536, 614629, 24441866, 1090803427, 54122667460, 2961520089641,
177455063487934, 11572055408248231, 816777381720916232, 62094559308820045645,
5062540633534598746546, 440907633737939112534539, 40874631333714505624955596,
4020613975663564234668585937, 418400649954179586086958998630,
45940071590432500516307156004751, 5309139600277253483059853046572944,
644330373701221514844648555023985461
```

Pour l'histoire de Noël, ayant repéré l'erreur de Mathar, je lui ai écrit pour signaler cette typo et aussi la démonstration que je donnais de sa conjecture en lui joignant tout le travail informel et non corrigé que j'avais mis en œuvre. C'est lui-même qui a cité ma démonstration à l'aide du tableau et entré les éléments que l'on retrouve dans A053482. Il m'a encouragé à entrer moi-même mes trouvailles ; le problème c'est qu'en un an et demi le site a changé et que je ne trouve pas si facile maintenant d'apporter des modifications ou des nouveautés. J'ai essayé avec A185106.

0.2.2 Une démonstration

Un joli travail à faire est de démontrer la conjecture proposée ci-dessus : en tous cas, cela semble bien coller sur les premières valeurs. Au boulot tonton Riri !
Par récurrence je démontre que $a_{n,p}$ s'écrit à l'aide des $p-1$ termes consécutifs précédents à savoir $a_{n-1,p}$, $a_{n-2,p}$, $\cdots$, $a_{n-p+1,p}$.
C'est vrai pour les premières valeurs comme on l'a vu. Je suppose que j'ai plus précisément :

$$a_{n,p-1} = \sum_{k=1}^{p-2} A_{p-1,k}(n)_k a_{n-k,p-1} + 1,$$

où l'on a posé $(n)_k = n(n-1)\cdots(n-k+1)$.
De la relation $a_{n,p} = n(p-1)a_{n-1,p} + a_{n,p-1}$, vient en écrivant successivement $a_{n-1,p}$, $a_{n-2,p}$ jusqu'à $a_{n-p+2,p}$, multipliant respectivement par $-(n)_1 A_{p-1,1}$, $-(n)_2 A_{p-1,2}$, $\cdots$, $-(n)_{p-2} A_{p-1,p-2}$ et en additionnant membre à membre :

$$a_{n,p} = \sum_{k=1}^{p-1} A_{p,k} a_{n-k,p}(n)_k + 1$$

de sorte que les relations $A_{p-1,k} - (p-1)A_{p-1,k-1} = A_{p,k}$ soient satisfaites.

Ces relations sont celles définissant les nombres de Stirling de première espèce avec $A_{p,k} = \begin{bmatrix} p \\ p-k \end{bmatrix}$ puisque les premières valeurs coïncident et que la récurrence générale $\begin{bmatrix} n+1 \\ k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n \\ k-1 \end{bmatrix} - n\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$ est satisfaite. Bravo Riri !

0.3 Tiens en voilà de la culture : les nombres de Stirling de première espèce

0.3.1 Une définition

La manière la plus simple, sans grosse considération théorique, de définir ces nombres de Stirling de première espèce est de partir du développement d'un produit de polynômes (on pourrait dire pompeusement qu'il s'agit déjà de fonctions génératrices). Plus précisément avec la notation $(x)_n = x(x-1)\cdots(x-n+1)$ et $(x)_0 = 1$ on définit ces nombres $s(n,k)$, d'ailleurs dans $\mathbb{Z}$, par ces relations :

$$(x)_n = \sum_{k=0}^{n} s(n,k)x^k.$$

Ceci fournit donc le tableau des premières valeurs en développant simplement les produits annoncés. On a aussi avec $< x >_n = x(x+1)\cdots(x+n-1)$ les relations :

$$< x >_n = \sum_{k=0}^{n} |s(n,k)|x^k.$$

$x(x-1) = -x + x^2$ d'où $s(2,1) = -1$ et $s(2,2) = 1$
$x(x-1)(x-2) = 2x - 3x^2 + x^3$ d'où $s(3,1) = 2$, $s(3,2) = -3$, $s(3,3) = 1$
$x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5) = 24x - 50x^2 + 35x^3 - 10x^4 + x^5$ ce qui fournit $s(5,1) = 24$, $s(5,2) = -50$, $s(5,3) = 35$, $s(5,4) = -10$, $s(5,5) = 1$.

0.3.2 La relation de récurrence et quelques remarques immédiates

Les nombres de Stirling de première espèce $s(n,k)$ satisfont à la récurrence triangulaire :

$$s(n,k) = s(n-1,k-1) - (n-1)s(n-1,k)$$

pour n et $k \geqslant 1$ avec $s(n,0) = s(0,k) = 0$ sauf $s(0,0) = 1$.
On en déduit les premières valeurs : $s(n,1) = (-1)^{n-1}(n-1)!$; $s(n,n-1) = -\binom{n}{2}$ $s(n,n) = 1$.

0.3.3 Un résultat concret

Les $|s(n+1,k+1)|$, avec n fixé et k variable, sont les fonctions symétriques élémentaires des n premiers entiers. En d'autres termes pour $\ell = 1,\ 2,\ \cdots,\ n$:

$$|s(n+1,n+1-\ell)| = \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_\ell \leqslant n} i_1.i_2.\cdots.i_\ell.$$

Par exemple : $|s(6,2)| = 1.2.3.4 + 2.3.4.5 + 3.4.5.1 + 4.5.1.2 = 274.$

0.3.4 Des résultats anciens plus sophistiqués mais apparemment dans l'oubli

Suivant Mitrinovic (PUBLIKACIJE ELEKTROTEHNIČKOG FAKULTETA UNIVERZITETA U BEOGRADU - PUBLICATIONS DE LA FACULTÉ D'ÉLECTROTECHNIQUE DE L'UNIVERSITÉ DE BELGRADE 1960), on a les résultats plus généraux :
$s(n, n-2) = \frac{1}{4}\binom{n}{3}P_2(n)$
$s(n, n-3) = \frac{1}{2}\binom{n}{4}n(n-1)P_3(n)$
$s(n, n-4) = \frac{1}{48}\binom{n}{5}P_4(n)$
$s(n, n-5) = \frac{1}{16}\binom{n}{6}n(n-1)P_5(n)$
$s(n, n-6) = \frac{1}{576}\binom{n}{7}P_6(n)$
avec les premières valeurs suivantes
$P_2(n) = 3n - 1,$
$P_3(n) = -1,$
$P_4(n) = 15n^3 - 30n^2 + 5n + 2,$
$P_5(n) = -3n^2 + 7n + 2,$
$P_6(n) = 63n^5 - 315n^4 + 315n^3 + 91n^2 - 42n - 16.$
Rien n'y est dit sur une généralisation et l'obtention des polynômes P_k.

0.3.5 Tonton Riri s'y colle

J'ai dit qu'on avait rien dit sur les polynômes précédents en tous cas dans les documents qui me furent accessibles.
J'ai trouvé deux choses.
La première c'est que les coefficients, semblant quand même anarchiques, aux dénominateurs ci-dessus et qui constituent la suite : 1, 4, 2, 48, 16, 576, 144, 3840, $\cdots$ forment, à l'exception du premier, la suite A163176 c'est-à-dire :
«The n-th Minkowski number divided by the n-th factorial : $a(n) = \frac{\text{A053657}(n)}{n!}$ et par ailleurs $a(n) = (1/n!)\prod_{p\ prime} p^{\sum_{k\geqslant 0}[(n-1)/((p-1)p^k)]}$. Voilà du beau, du bon, $\cdots$.
La seconde est un nouvel angle d'attaque, à ma connaissance, concernant les formules $s(n, n-k)$.
L'idée est de raisonner non pas sur la base habituelle des n^k mais sur la base des $\binom{n}{k}$ car on a toujours cette sympathique formule d'intégration discrète qui fait que :

$$\sum_{p=0}^{n}\binom{p}{k} = \binom{n+1}{k+1}$$

avec la convention usuelle $\binom{p}{k} = 0$ pour $p < k$, et que si l'on a :

$$u_n - u_{n-1} = \binom{n}{k},$$

on obtiendra par sommation

$$u_n = \binom{n+1}{k+1} + cste.$$

À la lumière de cet éclair, je revisite les résultats connus :

$s(n,n) = 1 = \binom{n}{0}$ (qui en fait sera ignoré dans ma généralité)
$s(n,n-1) = (-1)\binom{n}{2}$
$s(n,n-2) = 3\binom{n}{4} + 2\binom{n}{3}$
$s(n,n-3) = -\Big[15\binom{n}{6} + 20\binom{n}{5} + 6\binom{n}{4}\Big]$
$s(n,n-4) = 105\binom{n}{8} + 210\binom{n}{7} + 130\binom{n}{6} + 24\binom{n}{5}$.
La cause est entendue, mais quel est le secret de fabrication et quelle est la généralité ?
Le premier point est l'application de la récurrence qui donne :

$$s(n,n-k) = s(n-1,n-k-1) - (n-1)s(n-1,n-k),$$

de sorte qu'avec $u_n = s(n,n-k)$ cette relation s'écrit :

$$u_n - u_{n-1} = -(n-1)s(n-1,n-k).$$

Donc par récurrence vient l'alternance des signes, le fait que si $s(n-1,n-k)$ est combinaison linéaire de $\binom{n}{p}$, il en de même pour $s(n,k)$ par sommation et par ailleurs la nature et le nombre de termes est complétement régi : il suffit de connaître les coefficents.
Le deuxième point est la conversion de $(n-1)\binom{n-1}{p}$ en coefficient du binôme. Plus précisément on a :

$$(n-1)\binom{n-1}{p} = (p+1)\binom{n-1}{p+1} + p\binom{n-1}{p},$$

en écrivant $n-1 = n-(p+1)+p$.
Le dernier point fait donc la synthèse en remarquant que la constante évoquée ci-dessus est toujours 0. Donnons l'exemple de l'obtention de $s(n,n-4)$ à partir de
$s(n,n-3) = -\Big[15\binom{n}{6} + 20\binom{n}{5} + 6\binom{n}{4}\Big]$. Ici :
$u_n - u_{n-1} = 15(n-1)\binom{n-1}{6} + 20(n-1)\binom{n-1}{5} + 6(n-1)\binom{n-1}{4}$
$u_n - u_{n-1} = 15(n-7+6)\binom{n-1}{6} + 20(n-6+5)\binom{n-1}{5} + 6(n-5+1)\binom{n-1}{4}$
$u_n - u_{n-1} = 15\times 7\binom{n-1}{7} + 15\times 6\binom{n-1}{6} + 20\times 6\binom{n-1}{6} + 20\times 5\binom{n-1}{5} + 6\times 5\binom{n-1}{5} + 6\times 4\binom{n-1}{4}$
$u_n - u_{n-1} = 105\binom{n-1}{7} + 210\binom{n-1}{6} + 130\binom{n-1}{5} + 24\binom{n-1}{4}$ «d'où »
$u_n = s(n,n-4) = 105\binom{n}{8} + 210\binom{n}{7} + 130\binom{n}{6} + 24\binom{n}{5}$.
Le tableau des coefficients $b(k,p)$, obtenus par récurrence, est structuré de la manière suivante : dans la ligne numéro k on lit successivement les coefficients de $\binom{n}{2k}$, $\binom{n}{2k-1}$, $\cdots$, $\binom{n}{k+1}$ autrement dit $\boldsymbol{b(k,p)}$ **est le coefficient de** $\boldsymbol{\binom{n}{2k+1-p}}$. La récurrence qui le gère, en vertu de ce que j'ai dit est :

$$b(k,p) = (2k-p)\Big[b(k-1,p) + b(k-1,p-1\Big],$$

valable aussi en complétant par des zéros de sorte que la première colonne correspond bien aux produits des entiers impairs et que la diagonale principale est celle des factorielles. Autrement dit on pose $b(k,0) = 0$ pour $k > 0$, $b(0,0) = 1$ et $b(k,p) = 0$ pour $p > k$. Le tableau débute ainsi

k \ p	1	2	3	4	5	6
1	1					
2	3	2				
3	15	20	6			
4	105	210	130	24		
5	945	2520	2380	924	120	
6	8505	34650	44100	26432	7308	720

Par exemple : $s(n,n-6) = 8505\binom{n}{12}+34650\binom{n}{11}+44100\binom{n}{10}+26432\binom{n}{9}+7308\binom{n}{8}+720\binom{n}{7}$.
C'est bien joli mais que sait-on de ces nombres ?

0.3.6 Les dernières nouvelles

En fait relu différemment, ce tableau n'est pas inconnu : nous le retrouvons page 98 du tome 2 de Louis Comtet «Analyse Combinatoire » de 1970 aux PUF. Comment passe-t-on de l'un à l'autre des tableaux et quels sont donc les résultats ?
Le tableau de Louis Comtet présente sous la forme $d(n,k)$ le nombre de dérangements d'un ensemble à n éléments à k orbites ou encore le nombre de permutations d'un tel ensemble ayant $k \geqslant 2$ cycles.
J'obtiens les liens : $d(m,p) = b(m-p, m-2p+1)$ pour p de 1 à $m - [\frac{m+1}{2}]$.
Dans la colonne de rang m chez Comtet on lit successivement : $b(m-1,m-1)$, $b(m-2,m-3)$, $\cdots$, $b([\frac{m+1}{2}], \frac{3-(-1)^m}{2})$ et les propriétés alors décrites font que j'ai :
La fonction génératrice :

$$1 + \sum_n \sum_{p,1\leqslant 2p\leqslant n} b(n-p, n-2p+1)\frac{t^n u^k}{n!} = \mathrm{e}^{-tu}(1-t)^{-u}$$

Quelques valeurs particulières
$b(k,1) = 1.3.5.\cdots.(2k-1)(= d(2k,k))$ A001147 sur OEIS
$b(k+1,2) = \frac{1}{3}\frac{(2k+1)!}{(k-1)!2^{k-1}}(= d(2k+1,k)$ A000906 sur 0EIS
$b(k+2,3) = \frac{4k+5}{18} \times \frac{2k+2)!}{(k-1)!2^k}(= d(2k+2,k))$ A000907 sur OEIS.
Indiquons que OEIS signale les deux colonnes suivantes de notre tableau sous les noms de A001784 et A001785 auxquelles il convient d'ôter le 1 commençant. Après il semble que rien ne soit répertorier.
Des relations intéressantes

$$\sum_{m=1}^{\ell}(-1)^m b(\ell, l-m+1) = (-1)^\ell$$

$$\sum_{m=1}^{\ell}\frac{b(\ell, l-m+1)}{\ell+m-1} = 0$$

De la primalité
Pour p premier et $k \geqslant 2$: $b(p-k, p-2k+1) \equiv 0\ mod[p(p-1)]$

0.3.7 La denise sur le bateau

Il ne faut surtout pas croire que je meuble pour faire étirer cet articulet sur un nombre de pages nul modulo 4, car ce qui suit, revêt la plus haute importance. Le résultat suivant donne explicitement le terme général du tableau b. En effet le scoop Choulet est que :

$$b(n,k) = \sum_{i=0}^{2n+1-k} binomial(2n+1-k, 2n+1-k-i)s(2n+1-k+1-i, n+1-k-i).$$

Par exemple la première colonne connue autrement est aussi donnée par :

```
k:=1:for n from 1 to 20 do c(n):=(-1)^n*sum((-1)^i *binomial(2*n-k+1,2*n-k+1-i)*
stirling1(2*n-k+1-i,n-k+1-i),i=0..2*n+1-k)od:seq(c(n),n=1..20);
1, 3, 15, 105, 945, 10395, 135135, 2027025, 34459425, 654729075, 13749310575,
316234143225, 7905853580625, 213458046676875, 6190283353629375, 191898783962510625,
6332659870762850625, 221643095476699771875, 8200794532637891559375,
319830986772877770815625
```

Si l'on veut garder le décalage du tableau qui fait noter les zéros au début, on aura par exemple pour la colonne 4 :

```
k:=4:for n from 1 to 20 do c(n):=(-1)^n*sum((-1)^i *binomial(2*n-k+1,2*n-k+1-i)*
stirling1(2*n-k+1-i,n-k+1-i),i=0..2*n+1-k)od:seq(c(n),n=1..20);
0, 0, 0, 24, 924, 26432, 705320, 18858840, 520059540, 14980405440, 453247114320,
14433720701400, 483908513388300, 17068210823664000, 632607429473019000,
24602295329058447000, 1002393959071727722500, 42720592574082543120000,
1901494175902386925860000, 88258044199520007347535000
```

Maintenant quatre pages de plus seront considérées comme une punition, donc il faut savoir s'arrêter dignement : finalement la culture c'est savoir aller chercher où il faut quand on s'aventure en terre inconnue.

0.4 Bibliographie sommaire

ANALYSE COMBINATOIRE, Louis Comtet, 1970, PUF
FAMILLE DE POLYNÔMES (obtenu après ce que j'ai écrit, et lu sur) : www.iecn.u-nancy.fr/~eguether/zARTICLE/DJ.pdf
OEIS The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences
TABLEAUX QUI FOURNISSENT DES POLYNÔMES DE STIRLING, D. S, Mitrinovic - R. S. Mitrinovic, 1960, PUBLICATIONS DE LA FACULTÉ D'ÉLECTROTECHNIQUE DE L'UNIVERSITÉ DE BELGRADE numéro 34
http ://mathworld.wolfram.com/ toutes les maths all around the world ! Dont bien sûr Stirling et ses sbires.

Il s'en passe de belles dans mon jardin au printemps !