La géométrie des tétraèdres

Philippe TILLEUIL

Collège Sainte Marie - Mouscron

S.B.P.M. — 27 août 2013

La géométrie des tétraèdres

L'exposé sera consacré à quelques problèmes concernant la géométrie des tétraèdres (quelconques), en commençant par les comparer à des questions analogues pour les triangles du plan.

Ce sera l'occasion de se promener à travers quelques points d'histoire de cette géométrie, et aussi d'en esquisser quelques prolongements actuels.

De quoi sera-t-il question(s) ?

On va discuter de la manière de **transposer** des idées, des *définitions*, des propriétés de la géométrie plane pour développer des idées, des *définitions* et des propriétés de la géométrie dans l'espace.

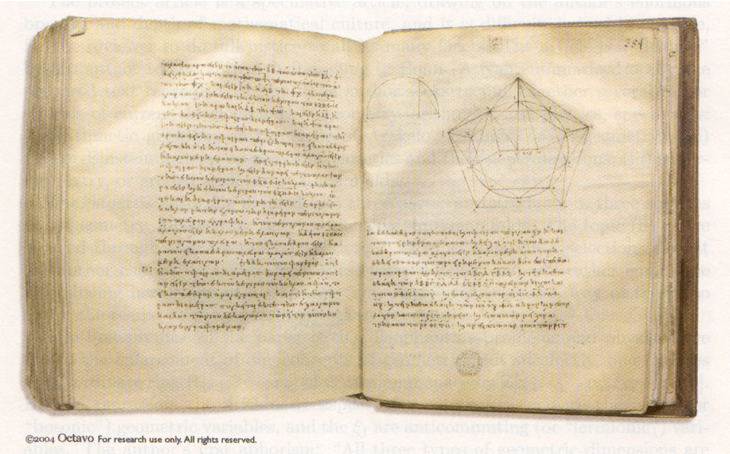
Plus précisément, la géométrie (élémentaire) des triangles est-elle un (bon) **modèle** de la géométrie (élémentaire) des tétraèdres ?

En bref :

- Beaucoup de questions !
- Quelques réponses ...
- La question de la méthode ...

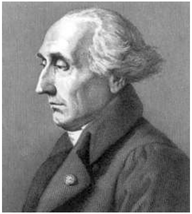
Y a t-il une histoire ?

Ça remonte (évidemment) à Euclide ...



. . . et Archimède, Euler, etc. Mais laissons parler un « débutant » :

> « *Les pyramides triangulaires tiennent, par leur simplicité, parmi les corps solides le même rang que les triangles parmi les figures planes ; car de même que toute figure plane rectiligne peut être regardée comme composée de triangles, de même aussi tout corps solide terminé par des plans peut être supposé formé de pyramides triangulaires ; mais si les Géomètres se sont toujours beaucoup occupés de l'étude des triangles et n'ont cessé d'en approfondir les propriétés, ils n'ont fait, ce me semble, qu'effleurer celles des pyramides triangulaire ; et des principaux Problèmes qu'on peut proposer sur ces sortes de solides, il n'y en a encore qu'un très-petit nombre qui ait été résolu . . .* »



J. L. Lagrange (1736-1813)

Solutions analytiques de quelques problèmes sur les pyramides triangulaires — Nouveaux mémoires de l'Académie Royale des Sciences et Belles-Lettres de Berlin (1773).

Cela deviendra un *leitmotiv*.

De 1773 à 1965(!), il se passe bien des choses concernant la géométrie du tétraèdre et, plus généralement, la géométrie dans l'espace :

- dans un grand nombre de revues :

  les Annales de Gergonne, les Annales Scientifiques de l'Ecole Normale Supérieure, le Journal de Mathématiques Pures et Appliquées (ou Journal de Liouville), les Nouvelles Annales de Mathématiques, le Bulletin de la Société Mathématique de France, l'Enseignement Mathématique, les Commentarii Mathematici Helvetici, le Journal für die Reine und Angewandte Mathematik (ou Journal de Crelle), les Mathematische Annalen, le Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, l'Archiv der Mathematik und Physik (ou Archives de Grünert), les Elemente der Mathematik, le Duke Mathematical Journal, The Analyst/Annals of Mathematics, l'American Mathematical Monthly, les Philosophical Transactions of the Royal Society of London, le Tohoku Mathematical Journal, Mathesis (1881-1915 & 1922-1965), etc.

(→ *Digizeitschriften, Project Euclid, NUMDAM, Gallica, JSTOR,* etc.)

- et dans beaucoup de livres :

Der

barycentrische Calcul

ein neues Hülfsmittel

zur

analytischen Behandlung der Geometrie

dargestellt

und insbesondere

auf die Bildung neuer Classen von Aufgaben und
die Entwickelung mehrerer Eigenschaften der Kegelschnitte

angewendet

von

August Ferdinand Möbius
Professor der Astronomie zu Leipzig.

Leipzig
Verlag von Johann Ambrosius Barth
1827.

Tetraedrometrie

von

Dr. Gustav Junghann.

Erster Theil.
Die Goniometrie dreier Dimensionen.

Mit 9 lithographirten Tafeln.

Gotha.
E. F. Thienemann.
1862.

Lehrbuch

der

analytischen Geometrie

in

homogenen Koordinaten

von

Dr. Wilhelm Killing,

Professor der Mathematik an der Kgl. Akademie zu Münster i. W.

Zweiter Teil:

Die Geometrie des Raumes.

Paderborn.
Druck und Verlag von Ferdinand Schöningh.
1901.

B. G. TEUBNERS SAMMLUNG VON LEHRBÜCHERN
AUF DEM GEBIETE DER
MATHEMATISCHEN WISSENSCHAFTEN
MIT EINSCHLUSS IHRER ANWENDUNGEN
BAND XVI

ANALYTISCHE GEOMETRIE DES PUNKTES, DER GERADEN LINIE UND DER EBENE

EIN HANDBUCH ZU DEN VORLESUNGEN UND ÜBUNGEN ÜBER ANALYTISCHE GEOMETRIE

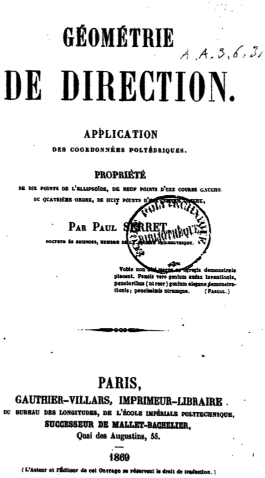
VON

DR. OTTO STAUDE

O. PROFESSOR DER MATHEMATIK AN DER UNIVERSITÄT ROSTOCK

MIT 387 FIGUREN IM TEXT

LEIPZIG UND BERLIN
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER
1905



GÉOMÉTRIE

DE DIRECTION.

APPLICATION

DES COORDONNÉES POLYÉDRIQUES.

PROPRIÉTÉ

DE DIX POINTS DE L'ELLIPSOÏDE, DE NEUF POINTS D'UNE COURBE GAUCHE DU QUATRIÈME ORDRE, DE HUIT POINTS D'UNE COURBE GAUCHE,

PAR PAUL SERRET

DOCTEUR ÈS SCIENCES, MEMBRE DE LA SOCIÉTÉ PHILOMATHIQUE.

Vobis non nisi magna et egregia demonstrata placent. Paucis vero genium audax inventionis, paucioribus (ut reor) genium elegans demonstrationis; paucissimis utrumque. (PASCAL.)

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE IMPÉRIALE POLYTECHNIQUE,

SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER,

Quai des Augustins, 55.

1869

(L'Auteur et l'Éditeur de cet Ouvrage se réservent le droit de traduction.)

VICTOR THÉBAULT

Parmi

LES BELLES FIGURES

de la

GÉOMÉTRIE

DANS L'ESPACE

(Géométrie du Tétraèdre)

LIBRAIRIE VUIBERT

63, Boulevard Saint-Germain, 63

(→ *DML/Bielefeld*, *Gallica*, *BookFinder*, etc.)

Un exemple . . . exemplaire

L'aire d'un triangle peut se définir en termes de puzzles, **mais** en général le volume d'un tétraèdre ne peut pas se définir ainsi !

$\rightarrow$ Troisième problème de Hilbert (1900 - 1901 - 1965 - . . .)

Et maintenant ?

La géométrie du tétraèdre — et plus généralement, la géométrie de l'espace — a donc été (très) bien étudiée, avant de tomber dans l'oubli.

En se plongeant dans la littérature qui s'y rapporte, on peut commencer à comprendre pourquoi : *on ne s'y retrouve pas* !

Mais cela change, et il se passe actuellement des choses très intéressantes en géométrie *des petites dimensions*.

Mais dans une classe, à quoi tout cela sert-il ?

- Un formidable réservoir de questions et de problèmes, de difficultés très variées.

  A distinguer : les questions de niveau « enseignement secondaire », et les questions — élémentaires ! — mais qui ne sont pas de ce niveau.

- La fabrication des images $\rightarrow$ Cabri 3D
- Un terrain d'expériences pour les idées et les méthodes :
  - l'importance de la géométrie des figures,
  - l'intérêt d'une méthode inductive : les questions « naturelles »,
  - la critique et la reconstruction des définitions,
  - la convergence/divergence synthétique-vectoriel,
  - etc.

(Re-)construire de la géométrie dans ma tête, avant d'essayer d'en introduire dans celle des élèves.

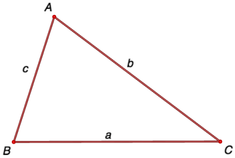
Au travail !

La géométrie des triangles est-elle un (bon) **modèle** de la géométrie des tétraèdres ?

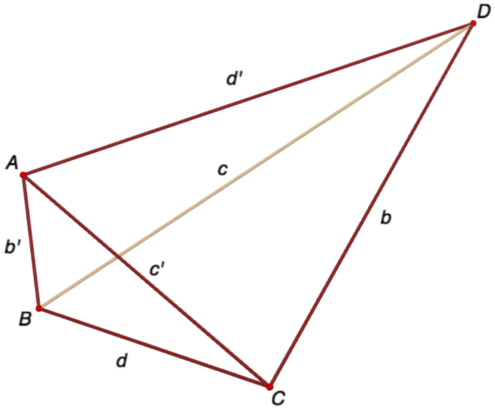
- Beaucoup de questions !
- Quelques réponses ...
- La question de la méthode ...

Qu'est-ce qu'un tétraèdre ?

I. Présentation des figurants



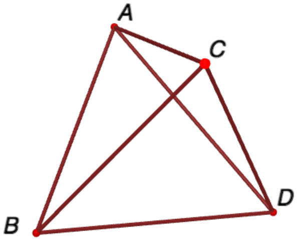
$$\partial\,(ABC) = BC - AC + AB$$



$$\partial\,(ABCD) = BCD - ACD + ABD - ABC$$

II. Des exemples

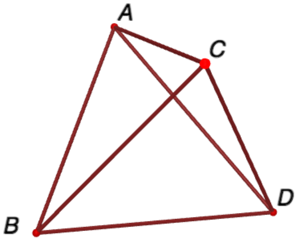
1. Qu'est-ce qui correspond à un triangle équilatéral ?



Un tétraèdre régulier . . .

II. Des exemples

1. Qu'est-ce qui correspond à un triangle équilatéral ?

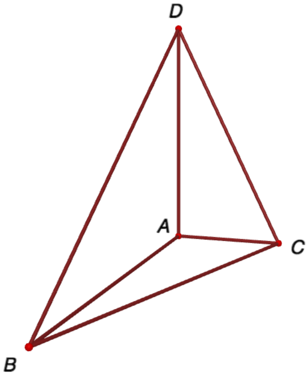


Un tétraèdre régulier . . .

Question

Comment dessiner (correctement) un tétraèdre régulier ?

2. Qu'est-ce qui correspond à un triangle rectangle ?



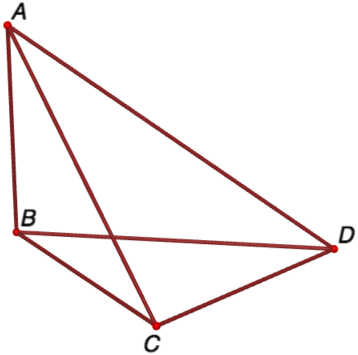
Un tétraèdre trirectangle ...

Question

Quelle peut être la forme de la face non triangle rectangle *d'un tétraèdre trirectangle ?*

Question

Existe-t-il un tétraèdre dont toutes *les faces sont des triangles rectangles ?*



... ou un tétraèdre quadrirectangle, ou orthoschème

3. Qu'est-ce qui correspond à un triangle isocèle ... ou équilatéral ?

Si on s'intéresse aux propriétés des faces, ou des arêtes ...

Question

Caractériser les tétraèdres dont les périmètres des faces triangulaires sont constants.

Question

Caractériser les tétraèdres dont les aires des faces triangulaires sont constantes.

$\longrightarrow$ tétraèdres *isocèles*, ou *équifaciaux*.

4. Périls

- La botanique des tétraèdres se révèle celle d'une jungle, dans laquelle il est prématuré — ou même dangereux ! — de trop s'aventurer.
- Le foisonnement des détails, propriétés remarquables, etc. a, de plus, probablement tué le sujet (cfr. la période après 1900 . . .)

5. Des contre-exemples, pour d'autres questions

- Qu'est-ce qu'un polyèdre régulier convexe ?

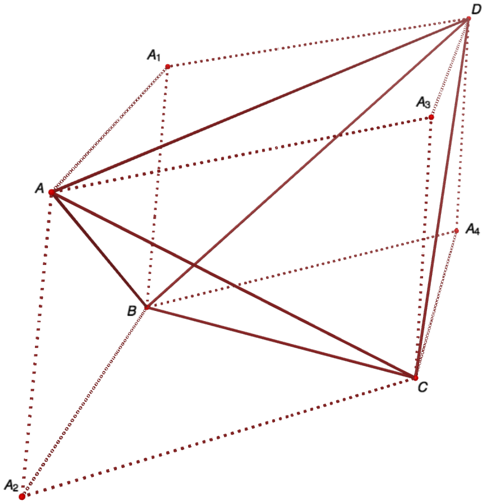
  Un tétraèdre isocèle a toutes ses faces isométriques ; le « double tétraèdre régulier » n'est formé que de triangles équilatéraux, etc.
- Tous les polyèdres sont-ils *tétraédralisables*, comme le pensait Lagrange ?

III. Un fantôme précieux

Un cube permet de réaliser un représentation fidèle — et utile ! — d'un tétraèdre régulier. *Cela n'est pas limité au tétraèdre régulier !*

C'est ce qu'on appelle le *parallélipipède-enveloppe* du tétraèdre.

Il n'a pas de « correspondant triangulaire » !



Le parallélipipède-enveloppe d'un tétraèdre mérite qu'on s'y intéresse : il est utile !

Question

Dessiner et caractériser le parallélipipède-enveloppe d'un tétraèdre trirectangle.

Question

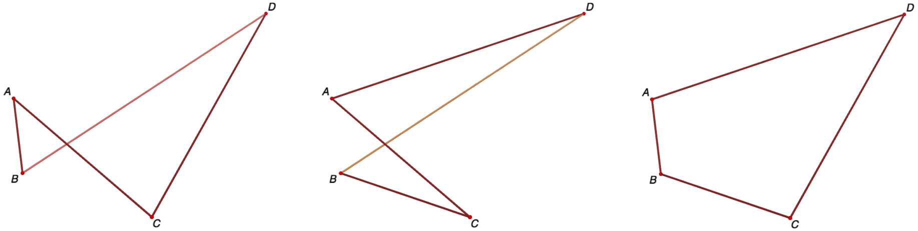
Dessiner et caractériser le parallélipipède-enveloppe d'un tétraèdre quadrirectangle.

Question

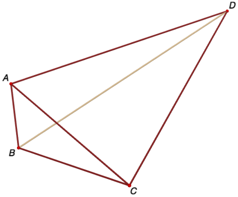
Caractériser le parallélipipède-enveloppe d'un tétraèdre isocèle.

Le parallélipipède-enveloppe parle aux arêtes gauches du tétraèdre !

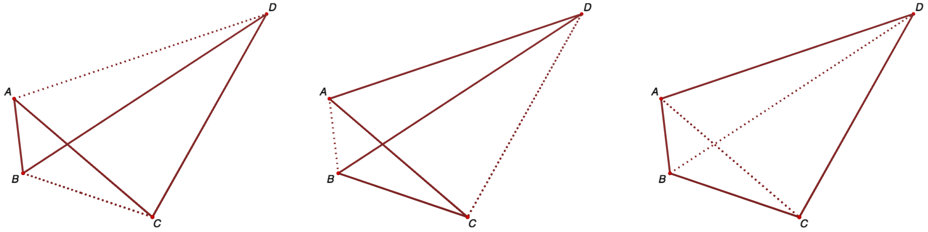
IV. Plus simple qu'un tétraèdre ?



Un tétraèdre est formé de 3 *quadrilatères gauches* qui sont « bien enchaînés ».



Heureusement, les arêtes d'un quadrilatère gauche sont aussi gauches que le quadrilatère . . .



. . . et permettent de retrouver le tétraèdre qui se cache derrière le quadrilatère.

1. Un peu de caractérisations

Dans toutes les questions suivantes, on ne s'intéresse qu'aux quadrilatères gauches *non dégénérés*, c'est-à-dire non plans.

Question

- *Caractériser les quadrilatères gauches dont tous les angles sont droits, et les côtés opposés sont égaux.*
- *Caractériser les quadrilatères gauches dont tous les angles sont droits.*

Question

- *Caractériser les quadrilatères gauches dont 3 angles sont droits, et un couple de côtés opposés sont égaux.*
- *Caractériser les quadrilatères gauches dont 3 angles sont droits.*

Dans le plan, les angles opposés d'un parallélogramme sont égaux — et donc supplémentaires ! — et cela suffit à caractériser un parallélogramme.

Question

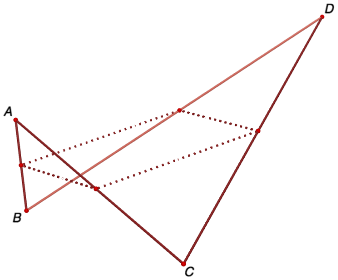
- *Caractériser les quadrilatères gauches dont les angles opposés sont égaux et supplémentaires.*
- *Caractériser les quadrilatères gauches dont les angles opposés sont égaux.*

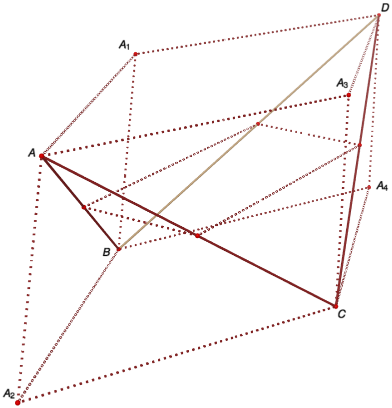
Un tétraèdre équifacial est un bon sujet d'expérience pour cette question.

Mais on peut construire des quadrilatères gauches dont les angles opposés sont égaux et dont tous les côtés sont de longueurs différentes.

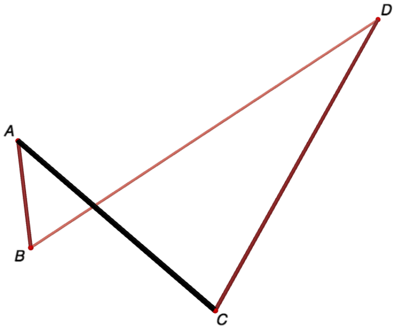
2. Un peu de généralisations

- Un classique : le parallélogramme (plan) médian. C'est un fantôme du fantôme !





- « CACAC » est un *critère d'isométrie* des quadrilatères plans. Pour les quadrilatères gauches, il faut le faire évaluer en : « $\mathrm{CA}\genfrac{}{}{0pt}{}{\mathrm{C}}{\mathrm{D}}\mathrm{AC}$ ».



- La somme des angles (intérieurs) d'un quadrilatère gauche *n*'est *pas* constante, et les exemples ne manquent pas ! Une relation élémentaire, qui réduit pas mal de questions :

$$0 < \sum \text{angle}_{\textit{intérieur}} < 2\pi$$

- Pour généraliser un peu le parallélogramme-médian ...

Question

Si on choisit un point sur chaque côté d'un quadrilatère gauche, à quelle(s) condition(s) ces 4 points sont-ils coplanaires ?

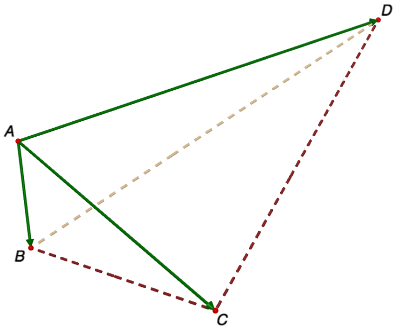
- Si les côtés opposés d'un quadrilatère gauche sont égaux, il possède un *axe* de symétrie.
- Etc.

Anatomie d'un tétraèdre

I. Qu'est-ce qui détermine un tétraèdre ?

- Le modèle : les cas d'isométrie des triangles (CCC . . . , CAC, ACA).
- Une adaptation : quelques cas d'isométrie des tétraèdres.

  - Presque évident : CCCCCC . . .
  - Un air connu : $\text{CA}\overset{\text{C}}{\underset{\text{D}}{}}\text{AC}$
  - Le cas « vectoriel » : CACACA



Question

Construire le tétraèdre pour lequel $b = c = d = 1$ *et* $b' = c' = d' = 0,55$.

II. Il y a trop d'angles dans un tétraèdre !

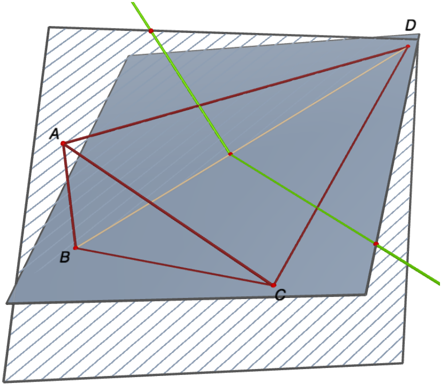
Dans un triangle, il y a 3 angles (intérieurs), et $\sum \text{angle}_{\textit{intérieur}} = \pi$.

1. Les 22 candidats

- Les angles « tout à fait plans » : ce sont les angles (intérieurs) de face, aux sommets du tétraèdre.
  Il y en a $3 \times 4 = 12$.
  On a évidemment :

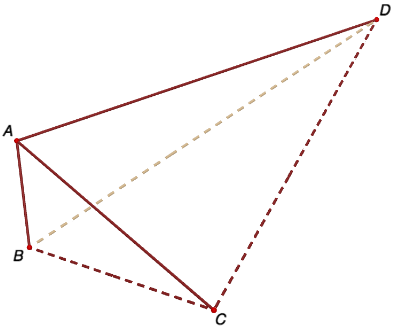
$$\sum \text{angle}_{\textit{intérieur}} \text{ de face} = 4 \cdot \pi$$

- Les angles « dans l'espace mais plans » : ce sont les *angles dièdres* le long des arêtes du tétraèdre. Il y en a donc 6.



Comme $6 \neq 5$, il devrait y avoir une relation . . .

- Les angles « tout à fait dans l'espace » : ce sont les *angles trièdres* aux sommets du tétraèdre. Il y en a donc 4.

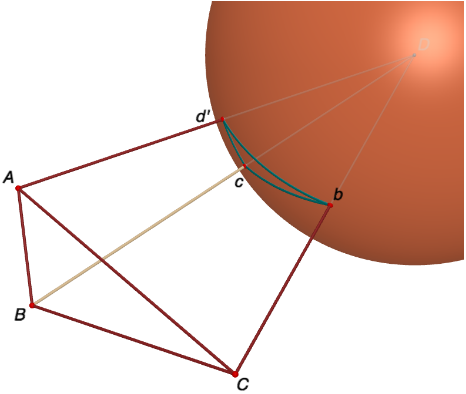


Dans un trièdre, il y a tout : angles de face et dièdres ! CACACA ⇒ les angles de face doivent déterminer les angles dièdres. Et la réciproque est vraie.

Les angles trièdres pourraient correspondre aux angles (intérieurs) d'un triangle... Pour que ce soit intéressant, Il faut savoir les mesurer.

2. L'angle solide

Comme un angle trièdre est « tout à fait dans l'espace », il possède une mesure appropriée, analogue à la mesure d'angle sur le cercle : c'est l'*angle solide*.



$$\alpha(D) = b + c + d' - \pi$$

Deux trièdres de même angle solide ne sont donc pas nécessairement isométriques.

… Mais ils sont *équidécomposables* !

La *somme* des angles solides d'un tétraèdre est-elle constante ?

Question

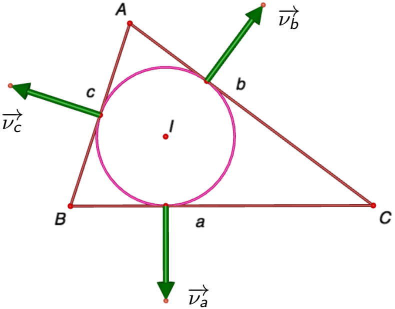
Calculer la somme des angles solides

- *d'un tétraèdre régulier ;*
- *d'un tétraèdre trirectangle « cubique » ;*
- *d'un tétraèdre quadrirectangle « cubique ».*

- $12 \cdot \operatorname{Arc\,cos} \frac{1}{3} - 4\pi = 2,205142394\ldots$
- $6 \cdot \operatorname{Arc\,cos} \frac{\sqrt{3}}{3} - \pi = 2,590307055\ldots$
- $\frac{2\pi}{3} = 2,094395102\ldots.$

III. Une petite merveille . . .

1. . . . Dans un triangle



Les *vecteurs (unitaires) normaux extérieurs*

- 1ères relations :

$$\widehat{\overrightarrow{\nu_b}, \overrightarrow{\nu_c}} = \pi - A$$

  Etc.

- 2ème relation :

$$\widehat{\overrightarrow{\nu_b}, \overrightarrow{\nu_c}} + \widehat{\overrightarrow{\nu_c}, \overrightarrow{\nu_a}} + \widehat{\overrightarrow{\nu_a}, \overrightarrow{\nu_b}} = 2\pi$$

- 3ème relation :

$$a \cdot \overrightarrow{\nu_a} + b \cdot \overrightarrow{\nu_b} + c \cdot \overrightarrow{\nu_c} = \overrightarrow{0}$$

Pourquoi est-ce merveilleux ?

- Les 1ères relations ne sont peut-être pas si merveilleuses que ça, mais avec la 2ème relation, on en déduit :

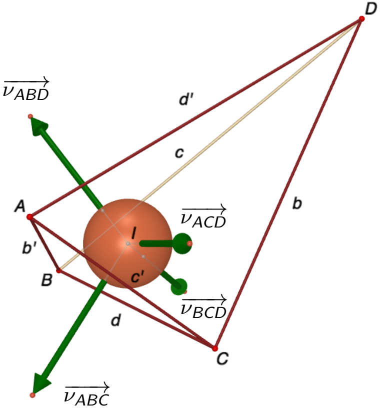
$$A + B + C = \pi$$

- La 3ème relation — écrite « en composantes » — implique *en même temps*

la *règle des sinus*
et
la *forme généralisée du théorème de Pythagore* !

- La *démonstration* de la 3ème relation est remarquablement simple : une rotation de $-\frac{\pi}{2}$!

2. ... Mais surtout dans un tétraèdre



Les *vecteurs (unitaires) normaux extérieurs*

- 1[ères] relations :

$$\widehat{\overrightarrow{\nu_{ABC}}, \overrightarrow{\nu_{ABD}}} = \pi - b'$$

Etc.

- 2[ème] relation :

$$\alpha\left(\overrightarrow{\nu_{ABC}}, \overrightarrow{\nu_{ABD}}, \overrightarrow{\nu_{ACD}}\right) + \alpha\left(\overrightarrow{\nu_{ABC}}, \overrightarrow{\nu_{ABD}}, \overrightarrow{\nu_{BCD}}\right) + \alpha\left(\overrightarrow{\nu_{ABC}}, \overrightarrow{\nu_{ACD}}, \overrightarrow{\nu_{BCD}}\right) + \alpha\left(\overrightarrow{\nu_{ABD}}, \overrightarrow{\nu_{ACD}}, \overrightarrow{\nu_{BCD}}\right) = 4\pi$$

- 3[ème] relation :

$$\mathcal{S}(ABC) \cdot \overrightarrow{\nu_{ABC}} + \mathcal{S}(ABD) \cdot \overrightarrow{\nu_{ABD}} + \mathcal{S}(ACD) \cdot \overrightarrow{\nu_{ACD}} + \mathcal{S}(BCD) \cdot \overrightarrow{\nu_{BCD}} = \overrightarrow{0}$$

IV. ... Son langage ...

1. Les outils

- Le calcul vectoriel.
- Le produit scalaire « • » et ses propriétés.
- Le produit vectoriel « × » et ses propriétés géométriques ;
  - les définitions (vecteur normal à un plan vectoriel, aire orientée d'un parallélogramme, ...)
  - les significations géométriques (orthogonalité, orientation et antisymétrie, ...)
  - les propriétés algébriques (bilinéarité, antisymétrie, ...)

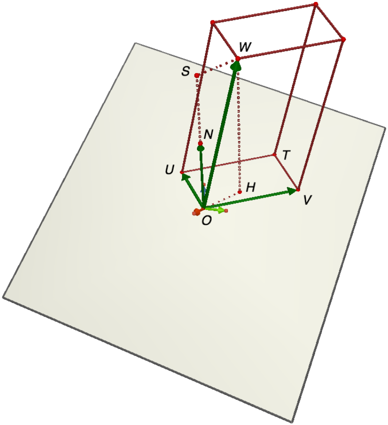
$$\forall \vec{u} : \vec{u} \times \vec{u} = \vec{0} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \forall \vec{u}, \vec{v} : \vec{u} \times \vec{v} = -\vec{v} \times \vec{u}$$

Et tout n'est pas dit ...

- **Le déterminant,** et ses propriétés géométriques.
  - les définitions :

$$\text{dét}\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}\right) = \left(\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}\right) \bullet \overrightarrow{w}$$

$$= \mathcal{VOL}\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}\right)$$



  - les propriétés qui s'ensuivent,
  - et les autres propriétés, par exemple

$$\text{dét}\left(\mathcal{A} \cdot \mathcal{B}\right) = \text{dét}\mathcal{A} \cdot \text{dét}\mathcal{B}$$

Et là aussi, tout n'est pas dit . . .

2. Un exemple

La preuve de la $3^{\text{ème}}$ relation

Par définition :

$$\begin{cases} \mathcal{S}(ABC) \cdot \overrightarrow{\nu_{ABC}} & = & \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{BC} \\ \mathcal{S}(ABD) \cdot \overrightarrow{\nu_{ABD}} & = & -\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{BD} \\ \mathcal{S}(ACD) \cdot \overrightarrow{\nu_{ACD}} & = & \overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{CD} \\ \mathcal{S}(BCD) \cdot \overrightarrow{\nu_{BCD}} & = & -\overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{CD} \end{cases}$$

Or,

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AB} \times \left(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DB}\right) = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{DC}$$

$$\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{CD} = \left(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}\right) \times \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{CD}$$

Dès lors . . .

Avec $\wedge$ et $*$, ce sera encore plus proche de la démonstration du cas triangulaire . . .

V. . . . Et ses conséquences

- Au point de vue des angles trièdres : rien, si ce n'est

$$\sum \text{angle}_{\textit{intérieur}} \text{ de face} = 4 \cdot \pi$$

- Au point de vue des angles dièdres : la *relation de Clausen* (qui confirme que $6 \neq 5$).

$$\text{dét} \begin{pmatrix} 1 & -\cos b' & -\cos c' & -\cos d \\ -\cos b' & 1 & -\cos d' & -\cos c \\ -\cos c' & -\cos d' & 1 & -\cos b \\ -\cos d & -\cos c & -\cos b & 1 \end{pmatrix} = 0$$

Par produits scalaires de la 3ème relation avec les v.u.n., on forme un système linéaire homogène en les $\mathcal{S}(ABC)$, . . . Etc.

$\rightarrow$ Conjecture de Stoker . . .

- Pour la relation généralisée de Pythagore, le cas du triangle est un modèle parfait.

$$\left\| a \cdot \overrightarrow{\nu_a} \right\|^2 = \left\| -b \cdot \overrightarrow{\nu_b} - c \cdot \overrightarrow{\nu_c} \right\|^2$$

  Etc. Dans le cas du tétraèdre, les formules sont plus longues, et font intervenir les angles dièdres des arêtes.

- Pour la règle des sinus, on travaille par produit vectoriel dans le cas du triangle. Dans le cas du tétraèdre, par déterminants géométriques, on obtient :

$$\frac{\text{snt } A}{\mathcal{S}\,(BCD)} = \frac{\text{snt } B}{\mathcal{S}\,(ACD)} = \frac{\text{snt } C}{\mathcal{S}\,(ABD)} = \frac{\text{snt } D}{\mathcal{S}\,(ABC)}$$

  où snt A est le *sinus triédrique* (ou *eckensinus*) du trièdre de sommet A — et pas de l'angle solide $\alpha(A)$! — défini par :

$$\text{snt } A := \sin c' \cdot \sin A_1 \cdot \sin b' = \sin c' \cdot \sin A_2 \cdot \sin d' = \sin b' \cdot \sin A_3 \cdot \sin d'$$

VI. Le retour du volume

1. Une formule très simple, et très compliquée

Le parallélipipède-enveloppe et le déterminant géométrique montrent que le volume V d'un tétraèdre $ABCD$ est donné par

$$V = \frac{1}{6} \cdot \left| \text{dét} \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD} \right) \right|$$

Or, on a la relation :

$$\begin{pmatrix} AB_x & AB_y & AB_z \\ AC_x & AC_y & AC_z \\ AD_x & AD_y & AD_z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} AB_x & AC_x & AD_x \\ AB_y & AC_y & AD_y \\ AB_z & AC_z & AD_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left\| \overrightarrow{AB} \right\|^2 & \overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AC} & \overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AD} \\ \overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AC} & \left\| \overrightarrow{AC} \right\|^2 & \overrightarrow{AC} \bullet \overrightarrow{AD} \\ \overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AD} & \overrightarrow{AC} \bullet \overrightarrow{AD} & \left\| \overrightarrow{AD} \right\|^2 \end{pmatrix}$$

On a donc l'identité des déterminants des deux membres. Et on sait que

$$\text{dét}\ {}^t\mathcal{A} = \text{dét}\ \mathcal{A}$$

On en déduit l'impressionnante formule :

$$V^2 = \frac{1}{36} \cdot \text{dét} \begin{pmatrix} \left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2 & \overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AC} & \overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AD} \\ \overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AC} & \left\|\overrightarrow{AC}\right\|^2 & \overrightarrow{AC} \bullet \overrightarrow{AD} \\ \overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AD} & \overrightarrow{AC} \bullet \overrightarrow{AD} & \left\|\overrightarrow{AD}\right\|^2 \end{pmatrix}$$

Puisque

$$\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AC} = \frac{\left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2 + \left\|\overrightarrow{AC}\right\|^2 - \left\|\overrightarrow{BC}\right\|^2}{2} = \frac{b'^2 + c'^2 - d^2}{2}$$

etc ..., cette formule permet donc d'évaluer le volume d'un tétraèdre en termes de la (seule) longueur des arêtes :

$$V^2 = \frac{1}{36} \cdot \text{dét} \begin{pmatrix} b'^2 & \frac{b'^2+c'^2-d^2}{2} & \frac{b'^2+d'^2-c^2}{2} \\ \frac{b'^2+c'^2-d^2}{2} & c'^2 & \frac{c'^2+d'^2-b^2}{2} \\ \frac{b'^2+d'^2-c^2}{2} & \frac{c'^2+d'^2-b^2}{2} & d'^2 \end{pmatrix}$$

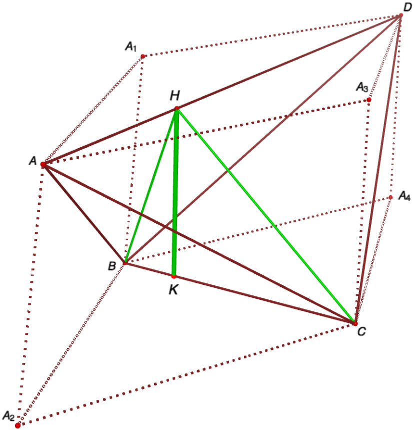
La formule de Héron pour l'aire d'un triangle s'obtient pareillement !

2. Le volume mobile

Question

On considère deux droites gauches d_1 et d_2 fixées une fois pour toutes. On choisit un segment de longueur ℓ_1 sur d_1 et un segment de longueur ℓ_2 sur d_2. Cela détermine une famille de tétraèdres.

Comment varie leur volume ?



Les aires des faces d'un tétraèdre ne le déterminent pas (à isométrie près), puisque $4 \neq 6$.

Question***

Les aires de chacune des faces d'un tétraèdre étant fixées, décrire les variations de son volume. En particulier, ce volume admet-il un maximum — ou un minimum — et comment le caractériser ?

Les droites dans un tétraèdre

I. Les droites remarquables dans un triangle

Elles sont bien connues.

- Les 3 médianes ; elles ont un point commun, le barycentre du triangle.
- Les 3 médiatrices : elles ont un point commun, le centre du cercle circonscrit au triangle.
- Les 3 bissectrices : elles ont un point commun, le centre du cercle inscrit dans le triangle.
- Les 3 hauteurs : elles ont un point commun, appelé l'orthocentre du triangle . . .

Il n'y a jamais plus de 2 hauteurs *complètement extérieures* dans un triangle.

II. Question(s) de définitions

Dans un tétraèdre, il peut y avoir des notions de médianes, médiatrices, bissectrices et hauteurs de 3 types différents :

- à partir d'une face et (parfois) du sommet opposé,
- entre deux arêtes opposées,
- en termes du trièdre d'un sommet.

Ces notions sont à chaque fois *distinctes*, sauf (partiellement) pour les bissectrices !

Les notions en termes du trièdre d'un sommet étant « non-tétraédriques » — sauf (partiellement) pour les bissectrices — elles ne sont donc généralement pas considérées.

1. La famille des médianes

- Une *médiane* d'un tétraèdre est la droite définie par un sommet et le barycentre de la face opposée.
- Une *bimédiane* d'un tétraèdre est la droite définie par les milieux de deux arêtes opposées.

Il y a donc 4 médianes et 3 bimédianes. Elles sont distinctes.

Une autre vision. . .

- Une *médiane* d'un tétraèdre est une grande diagonale de son parallélipipède-enveloppe.
- Une *bimédiane* d'un tétraèdre est une médiane (de faces) de son parallélipipède-enveloppe.

2. La famille des médiatrices

- Une *médiatrice* d'un tétraèdre est l'intersection des plans médiateurs des arêtes d'une face. De manière équivalente, c'est la perpendiculaire à une face au centre du cercle circonscrit à cette face.
- Une *bimédiatrice* d'un tétraèdre est la droite d'intersection des plans médiateurs de deux arêtes opposées.

Il y a donc 4 médiatrices et 3 bimédiatrices. Elles sont distinctes.

3. La famille des bissectrices

- Une *bissectrice* d'un tétraèdre est la bissectrice d'un trièdre de sommet (*sic* !), c'est-à-dire la droite obtenue comme intersection des plans bissecteurs des dièdres aboutissants à ce sommet.
- Une *bibissectrice* d'un tétraèdre est la droite d'intersection des plans bissecteurs des dièdres dont les arêtes sont deux arêtes opposées.

Il y a donc encore 4 bissectrices et 3 bibissectrices. Elles sont distinctes.

4. La famille des hauteurs

- Une *hauteur* d'un tétraèdre est la droite perpendiculaire à une face menée par le sommet opposé.
- Une *bihauteur* d'un tétraèdre est la droite qui est perpendiculaire commune à deux arêtes opposées.

Il y a donc 4 hauteurs et 3 bihauteurs. Elles sont distinctes.

Question

Dans un système d'axes orthonormés, on considère le tétraèdre dont les sommets sont les points $A : (0;0;0)$, $B : (1;0;1)$, $C : (3;1;0)$ *et* $D : (4;1;0)$. *Déterminez les coordonnées des pieds des hauteurs de ce tétraèdre.*

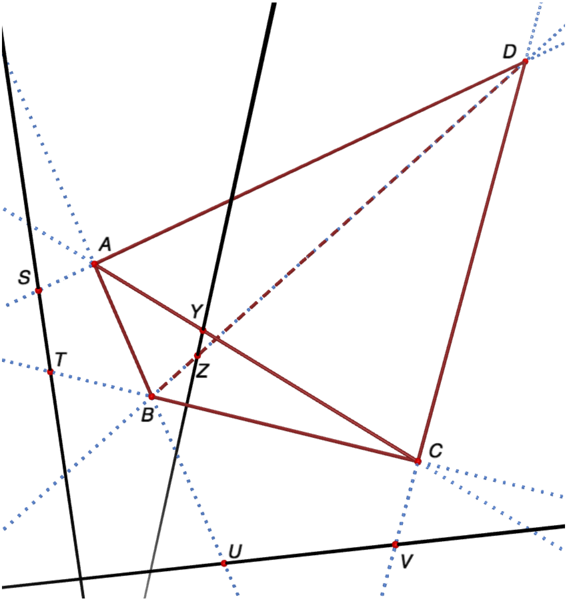
Parmi ces pieds, quels sont ceux situés à l'intérieur *de la face sous-jacente ?*

Le procédé de construction classique de la perpendiculaire commune à deux droites gauches implique immédiatement qu'une bihauteur d'un tétraèdre est perpendiculaire à deux faces opposées de son parallélipipède-enveloppe.

III. Question(s) d'intersection

- Les 4 médianes d'un tétraèdre ont un point commun, qui est le barycentre du tétraèdre ainsi que le centre de symétrie du parallélipipède-enveloppe de ce tétraèdre.
  C'est aussi le point d'intersection de ses bimédianes.
- Les 4 médiatrices d'un tétraèdre ont un point commun, qui est le centre de la sphère circonscrite au tétraèdre.
  C'est aussi le point d'intersection de ses bimédiatrices.
- Les 4 bissectrices d'un tétraèdre ont un point commun, qui est le centre de la sphère inscrite dans le tétraèdre.
  C'est aussi le point d'intersection de ses bibissectrices.

Mais la géométrie des hauteurs, et des bihauteurs est tout à fait *sauvage* !


D
A
S
Y
T
Z
B
C
U
V

De manière générale, les hauteurs d'un tétraèdre n'ont pas de point commun, et les bihauteurs non plus.

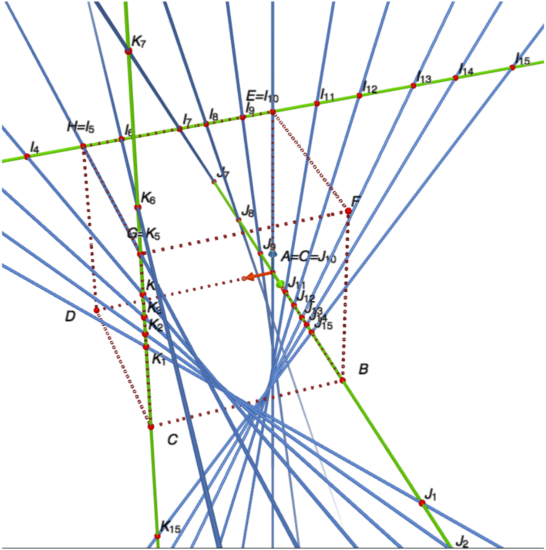
Sans être du tout exhaustif ...

- Si deux hauteurs d'un tétraèdre ont un point commun, alors les deux arêtes opposées *associées* sont orthogonales.
- Si un tétraèdre possède un orthocentre ($\equiv$ *tétraèdre orthocentrique*), alors son parallélipipède-enveloppe est un *rhomboèdre*.
- Les bihauteurs d'un tétraèdre sont concourantes si et seulement si les côtés opposés de ce tétraèdre sont égaux ou orthogonaux.
- Etc.

Toujours de manière générale, les 4 hauteurs d'un tétraèdre appartiennent à une surface du second degré, nécessairement réglée : un *hyperboloïde* !

Question

Construire beaucoup de droites qui s'appuient sur 3 droites gauches 2 à 2 orthogonales.



Comment faire ?
Y a-t-il des *méthodes* tétraédriques ?

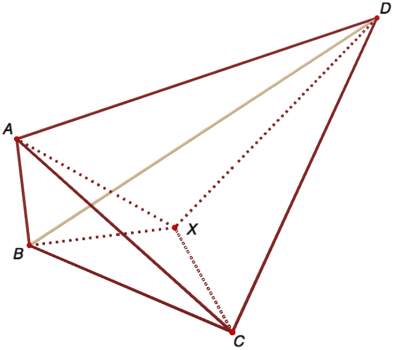
(Résumé)

I. Faire de la géométrie vectorielle « à mort » !

Toute la géométrie vectorielle, au sens le plus large, semble *indispensable* ! Ce langage-là n'était pas aussi clairement disponible au XIX$^{\text{ème}}$ siècle que maintenant !

- Le calcul vectoriel euclidien.
- L'algèbre extérieure d'un espace vectoriel et ses interprétations géométriques (aires, $k-$volumes, décomposabilité, coordonnées de Plücker, etc.)
- L'extension de tout cela au cas euclidien : l'$*$ de Hodge, ses coreligionaires, les interprétations géométriques correspondantes (Plücker-Klein), etc.
- La géométrie sur $\mathbb{C}$, sur $\mathbb{H}$.
- La géométrie des groupes classiques.

- Les *coordonnées barycentriques*, le calcul barycentrique *euclidien*, et les interprétations géométriques et *projectives* correspondantes.



$$\begin{array}{ccc} \overrightarrow{XB} \wedge \overrightarrow{XC} \wedge \overrightarrow{XD} & = & p_X \cdot \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{AD} \\ -\overrightarrow{XA} \wedge \overrightarrow{XC} \wedge \overrightarrow{XD} & = & q_X \cdot \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{AD} \\ \ldots & \text{etc.} & \ldots \end{array}$$

On note

$$X \underset{\Delta}{:} (p_X ; q_X ; r_X ; s_X)$$

et on a la relation fondamentale

$$p_X + q_X + r_X + s_X = 1$$

Bien sûr, on a

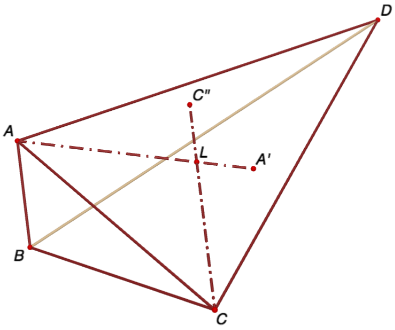
$$A \underset{\Delta}{:} (1; 0; 0; 0)\,, \text{etc.}$$

Homogénéité et symétrie(s) !

Encore une fois, le cas — plus simple — du triangle est un superbe terrain d'expériences !

II. Un exemple simple

A quelle(s) condition(s) deux *céviennes* d'un tétraèdre sont-elles concourantes ?



Si

$$A' \underset{\Delta}{:} (0; q'; r'; s')$$

et

$$C'' \underset{\Delta}{:} (p''; q''; 0; s'')$$

alors il faut que

$$\frac{q'}{q''} = \frac{s'}{s''}$$

Pour cela, on utilise le fait que deux droites se coupent si elles sont perpendiculaires, ... *mais dans un autre espace !*

En guise de conclusion

« Il y a une tendance naturelle, dans l'enseignement des mathématiques, à suivre l'ordre logique et à expliquer toutes les techniques et toutes les réponses, ***avant*** *de soulever les questions et de considérer les exemples, en supposant que les étudiants auront ainsi à leur disposition toutes les connaissances utiles pour y répondre le moment venu.*
Il vaut mieux parsemer le cours de questions intéressantes et mystérieuses, et d'exemples inexplicables, même si les étudiants, les professeurs, ou qui que ce soit n'est pas près d'y répondre. Le meilleur ordre psychologique d'apprentissage pour un sujet de mathématiques est bien souvent ***très différent*** *de l'ordre strictement logique.*
En tant que mathématicien, nous savons que les questions sans réponses ne connaîtront jamais de fin. Au contraire, les étudiants conçoivent généralement les mathématiques comme une nourriture prête à être consommée, et qu'il leur faudra digérer en conséquence.
Il nous faudrait présenter les mathématiques à nos étudiants d'une manière qui soit, à la fois plus intéressante, et plus proche des situations réelles que les étudiants rencontreront dans la suite de leur existence : sans réponse assurée. »

W. P. Thurston (1945 - 2012)