

Les Médailles Fields 2014

Alain VALETTE

Institut de Mathématiques, Université de Neuchâtel, Suisse

Le 13 août 2014, lors de la cérémonie d'ouverture du Congrès International des Mathématiciens (ICM), organisé à Seoul sous les auspices de l'Union Mathématique Internationale (IMU), la Présidente de la République de Corée, Mme Geun-Hye PARK, a remis la Médaille Fields à Artur AVILA, Manjul BHARGAVA, Martin HAIRER et Maryam MIRZAKHANI.

1 L'Union mathématique internationale (IMU)

IMU est une organisation scientifique internationale, non gouvernementale, sans but lucratif. Ses objectifs sont:

- la promotion de la coopération internationale en mathématiques;
- organiser, financer et promouvoir le Congrès International des Mathématiciens et d'autres rencontres et conférences scientifiques;
- encourager et financer d'autres activités mathématiques internationales susceptibles de contribuer au développement des sciences mathématiques sous tous leurs aspects: purs, appliqués, pédagogiques, culturels.

Jusqu'au 31 décembre, la présidente de IMU est Baronne Ingrid DAUBECHIES (belge, Duke Univ., USA).



2 Le Congrès International des Mathématiciens (ICM)

ICM est la plus grande conférence mondiale dans le domaine des mathématiques (3000 participants en moyenne - 4000 à Seoul). Il se tient tous les quatre ans, sous les auspices de IMU.

Année	Ville	Pays
1897	Zurich	Suisse
1900	Paris	France
1904	Heidelberg	Allemagne
1908	Rome	Italie
1912	Cambridge	Grande-Bretagne
1920	Strasbourg	France
1924	Toronto	Canada
1928	Bologne	Italie
1932	Zurich	Suisse
1936	Oslo	Norvège

Année	Ville	Pays
1950	Cambridge	USA
1954	Amsterdam	Pays-Bas
1958	Edimbourg	Grande-Bretagne
1962	Stockholm	Suède
1966	Moscou	URSS
1970	Nice	France
1974	Vancouver	Canada
1978	Helsinki	Finlande
1983	Varsovie	Pologne
1986	Berkeley	USA
1990	Kyoto	Japon
1994	Zurich	Suisse
1998	Berlin	Allemagne
2002	Beijing	China
2006	Madrid	Espagne
2010	Hyderabad	Inde
2014	Seoul	Corée du Sud
2018	Rio de Janeiro	Brésil
2022	Paris	France (à confirmer)

Chaque ICM est immortalisé par un volume d'*Actes* (anglais: *Proceedings*) qui reprend les articles basés sur les exposés. Ces derniers, tous sur invitation, présentent les développements importants des 4 dernières années, en principe de la manière la plus accessible possible.

Pas d'orateur belge cette année!

Les Médailles Fields, les Prix Nevanlinna et Gauss, la Médaille Chern, le nouveau Prix Leelavati pour la vulgarisation des mathématiques, sont décernés durant la cérémonie d'ouverture de ICM.

3 La Médaille Fields

La médaille Fields est la plus prestigieuse récompense pour la reconnaissance de travaux en mathématiques. Son but est d'apporter un soutien et une reconnaissance aux mathématiciens jeunes qui ont déjà apporté des contributions majeures. Elle est attribuée tous les quatre ans, à de deux à quatre mathématiciens devant avoir moins de 40 ans au 1er janvier de l'année en cours. Elle est accompagnée d'un chèque de 15.000 dollars canadiens (environ 10.000 euros). Elle est encore surnommée “*Prix Nobel des Mathématiques*”, quoique le *Prix Abel* (créé en 2003) ressemble beaucoup plus au Prix Nobel.



La médaille a été dessinée par le sculpteur canadien R. Tait McKenzie. Sur l'avvers, un portrait de profil d'Archimède et une citation latine (Traduction "S'élever au-dessus de soi-même et comprendre le monde"). Sur le revers, une autre inscription latine (traduction: "Les mathématiciens du monde entier, rassemblés, de récompenser des écrits remarquables"). La tranche porte le nom du lauréat.

La Médaille Fields doit son nom au mathématicien canadien John Charles Fields (1863-1932).



Au Congrès de Toronto en 1924, il propose la création d'une médaille récompensant de "jeunes" mathématiciens:

"It is proposed to found two gold medals to be awarded at successive International Mathematical Congress for outstanding achievements in mathematics. (...) It would be understood, however, that in making the awards while it was in recognition of work already done it was at the same time intended to be an encouragement for further achievement on the part of the recipients and a stimulus to renewed effort on the part of others."

Les premières médailles sont attribuées au Congrès d'Oslo en 1936. La décision de passer à quatre lauréats, au plus, date de 1966.

Pays	Nombre de médailles
Etats-Unis	13
France	11
URSS/ Russie	9
Royaume-Uni	5
Japon	3
Belgique	2

Afrique du Sud	1
Finlande	1
Israel	1
Italie	1
Norvège	1
Nouvelle-Zélande	1
Suède	1
Allemagne	1
Australie	1
Vietnam	1
Brésil	1
Iran	1
Autriche	1
Canada	1

Les deux médaillés belges:

Pierre DELIGNE (né en 1944; médaillé en 1978; prof. en retraite à l'IAS Princeton); Jean BOURGAIN (né en 1954; médaillé en 1994; prof. à l'IAS Princeton)



4 Les Médailles Fields 2014

4.1 Ladies first: Maryam MIRZAKHANI

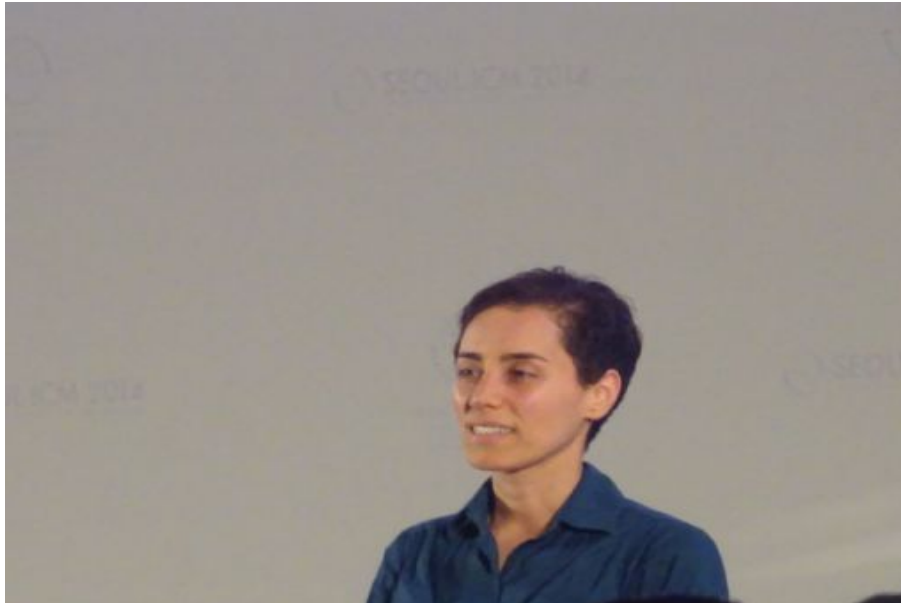
Citation: *Elle a obtenu de remarquables contributions à la dynamique et à la géométrie des surfaces de Riemann et de leurs espaces de modules.*

De nationalité iranienne, Maryam Mirzakhani est née à Téhéran en 1977. Elle a été une des 2 premières étudiantes dans l'équipe iranienne aux Olympiades Mathématiques Internationales, avec un score de 41/42 en 1994, et de 42/42 en 1995.



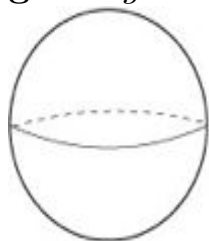
Après des études à l'Université Sharif de Téhéran (1999), elle obtient sa thèse en 2004 à Harvard (USA) sous la direction de C. McMullen (Médaille Fields 1998). De 2004 à 2008, elle est professeur-assistante à Princeton, et depuis 2008 elle est professeur à Stanford.

Elle est la première femme à recevoir la Médaille Fields.

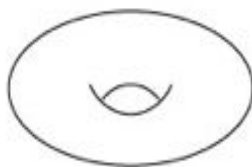


Les travaux de Maryam Mirzakhani concernent les surfaces à courbure -1 , et leurs espaces de modules.

On considère des surfaces fermées orientées; topologiquement, elles sont classées par le nombre de trous, qu'on appelle le **genre** g de la surface:



genus 0



genus 1



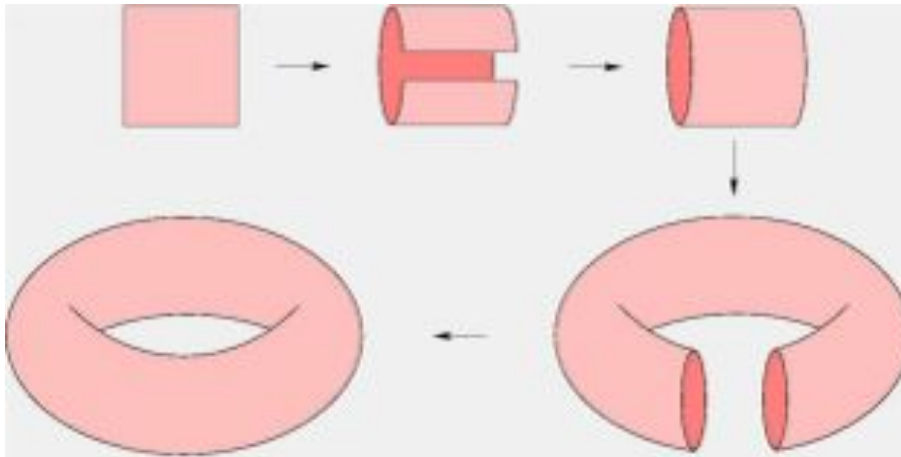
genus 2

On munit ensuite la surface d'une **structure riemannienne**: intuitivement, c'est une manière de mesurer des angles et des longueurs sur la surface. En particulier, on a la notion de courbe géodésique: ce sont les courbes qui, localement, minimisent la distance entre 2 points; une façon plus physique d'y penser, est que les géodésiques sont les trajectoires des rayons lumineux émis sur la surface (par exemple: les droites dans le plan, les grands cercles sur la sphère).

La notion de courbure peut s'exprimer localement en termes de divergence des géodésiques:

- divergence sous-linéaire $\Leftrightarrow$ courbure strictement positive (exemple: la sphère);
- divergence linéaire $\Leftrightarrow$ courbure nulle (exemple: le plan euclidien);
- divergence superlinéaire $\Leftrightarrow$ courbure strictement négative (exemples plus bas)

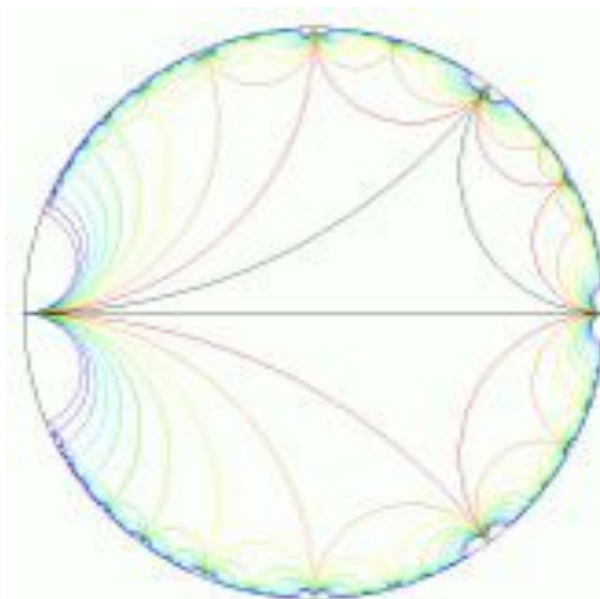
On peut munir un tore d'une métrique de courbure nulle, en le voyant comme quotient d'un carré du plan euclidien par identification des paires de côtés opposés; on parle alors de **tore plat**.



Notons qu'en remplaçant un carré par un parallélogramme, c-à-d. en jouant sur les longueurs des côtés et sur les angles, on obtient une famille de métriques plates **distinctes** sur le tore. C'est un premier exemple d'**espace de modules**: l'espace des métriques plates sur le tore; on peut y penser comme l'espace des parallélogrammes du plan, à isométries près.

Passons à la courbure -1 : l'archétype est le **plan hyperbolique**, ou **disque de Poincaré**, représenté par le disque ouvert dans lequel:

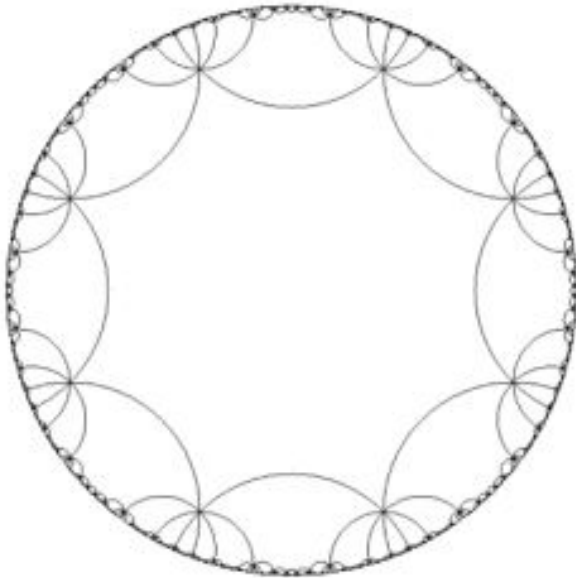
- les angles hyperboliques sont les angles euclidiens;
- les géodésiques sont les arcs de cercle orthogonaux au bord, ainsi que les diamètres du disque.



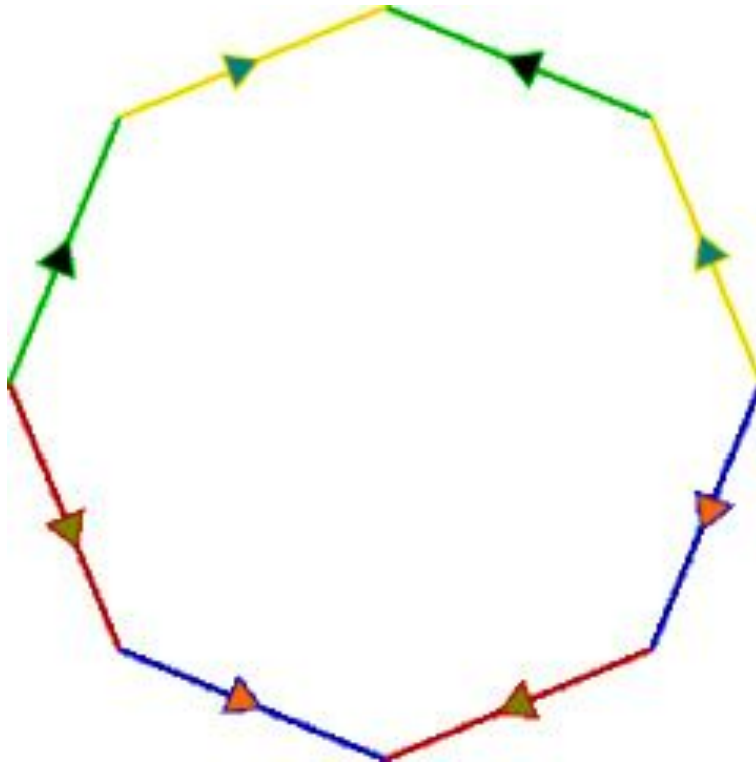
Cette géométrie a inspiré Escher:



Un résultat dû à Poincaré et Koebe, mais trouvant sa source dans les travaux de Riemann, dit que toute surface de genre $g \geq 2$ est le quotient du disque de Poincaré par un groupe de pavage; en particulier, toute surface de genre ≥ 2 peut être munie d'une métrique à courbure -1. Par exemple, la surface de genre 2 correspond au pavage du disque de Poincaré par des octogones, avec 8 octogones en chaque sommet:

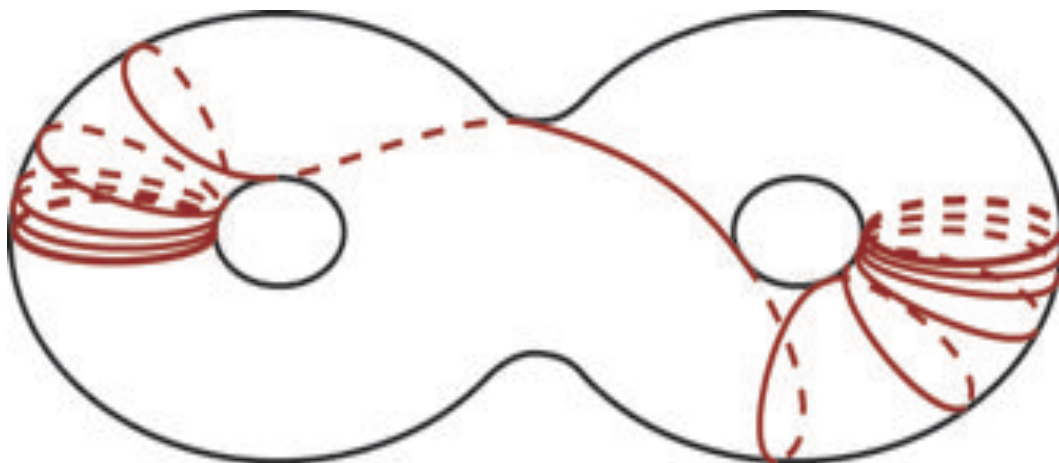


où l'identification des côtés de l'octogone fondamental se fait selon:

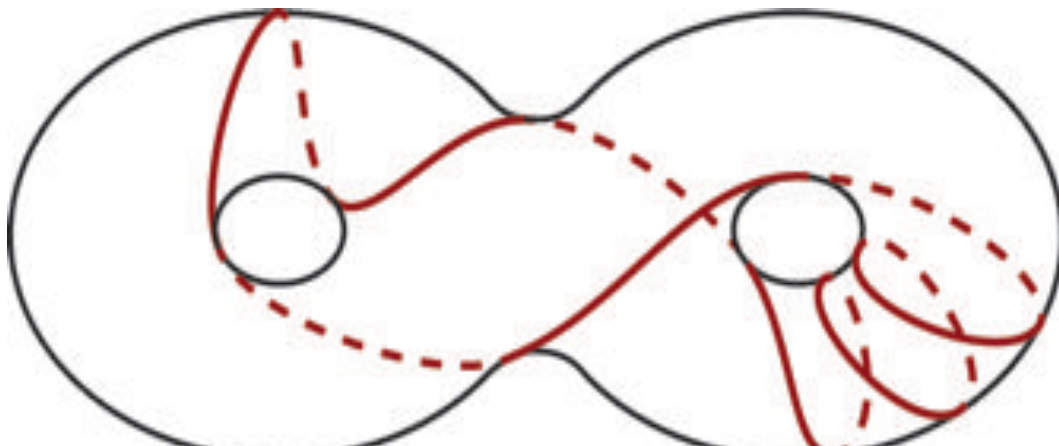


En faisant varier les paramètres de l'octogone (angles, longueur des côtés) on obtient **l'espace des modules** M_2 de la surface de genre 2. Plus généralement, pour une surface Σ_g de genre $g \geq 2$, qu'on peut obtenir par recollement à partir d'un $4g$ -gone, l'espace des modules M_g est l'ensemble des métriques de courbure -1 sur Σ_g ; c'est l'ensemble des pavages du disque de Poincaré par des $4g$ -gones, où $4g$ faces se rencontrent en chaque sommet (à isométries du disque près). Teichmüller avait montré, à la fin des années 1930, que M_g est un espace de dimension $6g - 6$.

Pour une métrique à courbure -1 donnée sur Σ_g , les géodésiques sont de 2 types: non fermées:



ou fermées:



On savait depuis les années 1940 que le nombre de géodésiques fermées de longueur $\leq L$ sur une surface, se comporte asymptotiquement comme $\frac{e^L}{L}$. Le problème de compter les géodésiques fermées **simples** (celles qui ne se recoupent pas, voir figure) est beaucoup plus délicat, et a été résolu par Mirzakhani en 2004: elle montre qu'il existe une constante C , dépendant de la métrique choisie, telle que le nombre de géodésiques simples fermées sur la surface de longueur au plus L , se comporte asymptotiquement comme $C.L^{6g-6}$. Un point remarquable de la preuve est d'être obligé de considérer non seulement la métrique donnée, mais aussi les métriques voisines dans M_g .



4.2 Artur AVILA

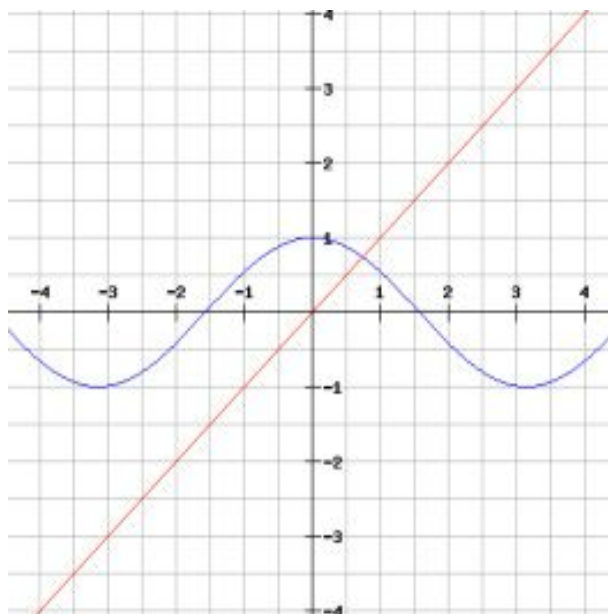
Citation: *Ses contributions profondes à la théorie des systèmes dynamiques ont révolutionné le sujet, en utilisant l'idée puissante de la renormalisation comme principe unificateur.*

Né au Brésil en 1979, Artur Avila est aussi naturalisé Français. Il a eu sa thèse en 2001 à l'Instituto Nacional de Matematica Pura e Aplicada (IMPA) de Rio de Janeiro, sous la direction de Welington de Melo. Depuis 2003 il est chercheur au CNRS à Paris, et est devenu Directeur de Recherches en 2008. Depuis 2009 il se partage entre Paris et l'IMPA. Il a déjà obtenu en 2008 le prix de la Société Mathématique Européenne.



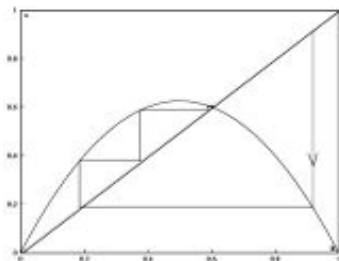
4.2.1 Transformations unimodales

Sur une calculatrice, entrons un $x \in [0, 1]$ et pressons plusieurs fois la touche $\cos$ (en radians): on constate que la suite $x, \cos x, \cos(\cos x), \cos(\cos(\cos x), \dots$ converge assez vite vers $0.739085\dots$, qui est l'unique solution de $x = \cos x$:

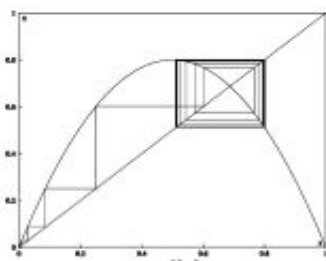


Un **système dynamique discret** est donné par une fonction $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, et la suite des itérées $f(x), f \circ f(x), f \circ f \circ f(x), \dots$; la question est de décrire le comportement de $f^n(x) = f \circ \dots \circ f(x)$ (n -ème itérée) pour $n \gg 0$. Pour x fixé, la suite des itérées $(f^n(x))_{n \geq 0}$ s'appelle **l'orbite** de x . Pour $f(x) = \cos(x)$, toute orbite converge vers un point fixe.

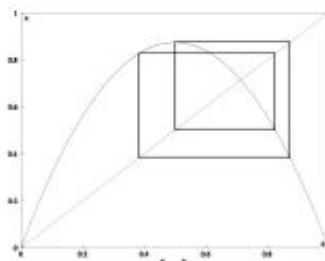
Considérons la suite $f_r(x) = rx(1-x)$, où r est un paramètre, $r \in [1, 4]$. Pour $1 \leq r < 3$, les orbites de f_r convergent vers un point fixe. Quand r atteint 3, on voit apparaître un cycle de longueur 2, vers lequel les autres orbites convergent. Puis, à approximativement $r = 3.44949$, nouveau changement: le cycle de longueur 2 se divise en un cycle de longueur 4. Vers $r = 3.54409$, ce cycle se divise en un cycle de longueur 8, et ces “bifurcations” doublant la période se produisent de plus en plus vite, jusqu’environs $r = 3.56995$, où il y a **l’apparition du chaos**: le système devient imprévisible, les orbites semblant se répartir de façon complètement aléatoire dans $[0, 1]$.



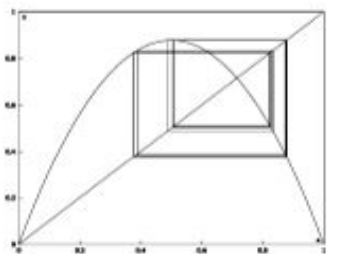
(a)



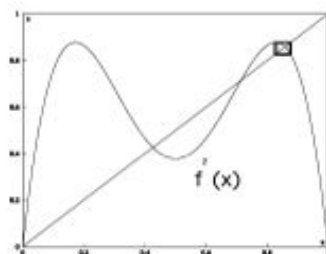
(b)



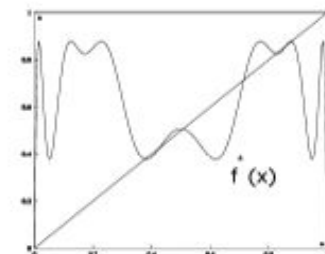
(c)



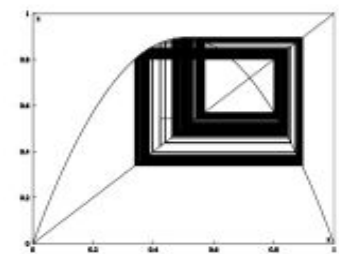
(d)



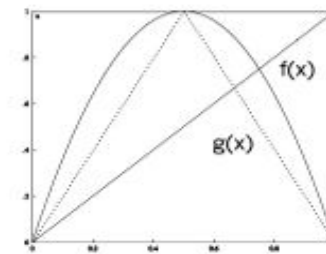
(e)



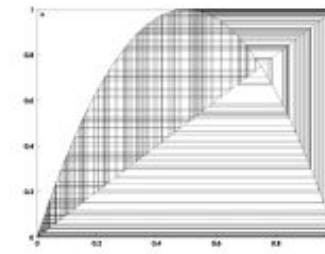
(f)



(g)



(h)



(i)

Disons qu'une application $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ est **unimodale** si $f(0) = f(1) = 0$ et $f'' < 0$ (donc: un unique maximum).

Théorème 4.1 (Avila-Lyubich-de Melo 2003). *Dans une famille analytique réelle $(f_r)_{r \in I}$ d'applications unimodales, on a pour presque tout r la dichotomie suivante:*

- ou bien f_r est **régulière**, c-à-d. que presque toute orbite converge vers une orbite périodique;
- ou bien f_r est **stochastique**: il existe une fonction h_r positive sur $[0, 1]$, avec $\int_0^1 h_r(x) dx = 1$ et $h_r \circ f = h_r$ (h_r est invariante par f_r), telle que presque toutes les orbites de f_r se répartissent selon la mesure $h_r(x) dx$, c-à-d. pour toute fonction continue ϕ sur $[0, 1]$, on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \phi(f_r^k(x)) = \int_0^1 \phi(x) h_r(x) dx$$

(la “moyenne temporelle” de ϕ est égale à la “moyenne spatiale” de ϕ par rapport à $h_r(x) dx$).

“Nous avons atteint une compréhension probabiliste complète des familles réelles analytiques de dynamiques unimodales, et Artur Avila a été un des acteurs principaux dans la dernière étape de la théorie.” (M. Lyubich, 2012).

4.2.2 Le problème des 10 Martini

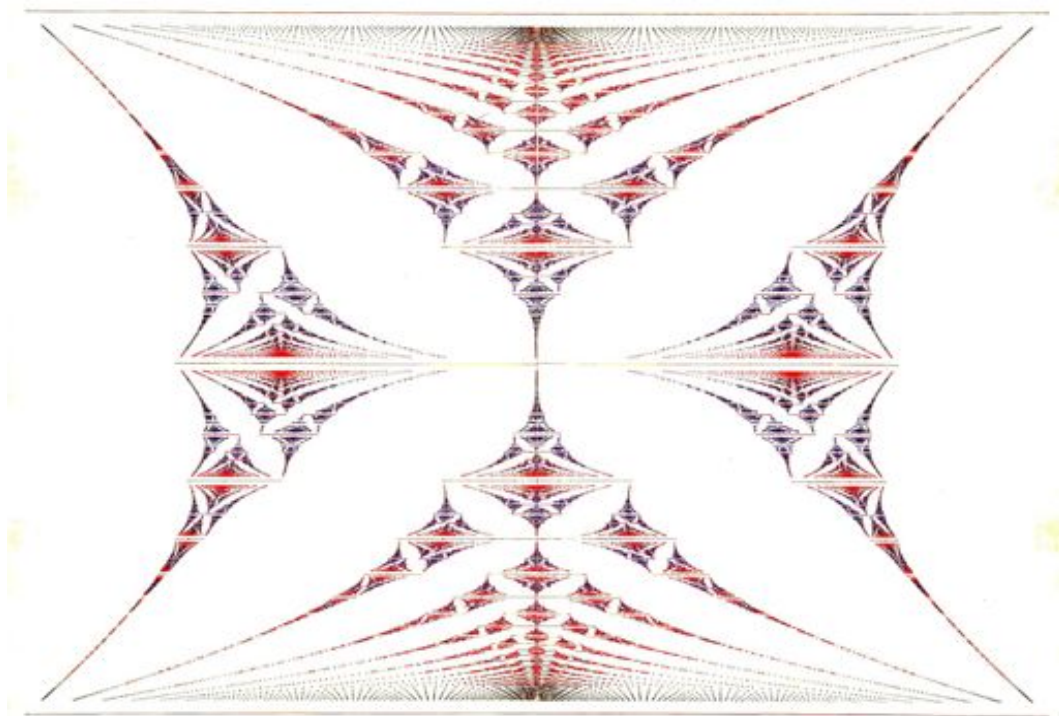
Considérons la situation physique suivante: un électron se déplace sur un réseau cristallin à une dimension, soumis à un potentiel électro-magnétique V . Il peut donc sauter de 1 vers la gauche ou vers la droite. Dans la formulation du problème en mécanique quantique, l'état de la particule est décrit par une fonction f sur $\mathbb{Z}$, telle que $|f(n)|^2$ est la probabilité que la particule se trouve en $n \in \mathbb{Z}$ (donc $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |f(n)|^2 = 1$). L'évolution du système est décrite par **l'hamiltonien** H , un opérateur qui agit sur les fonctions sur $\mathbb{Z}$:

$$(Hf)(n) = f(n+1) + f(n-1) + V(n)f(n).$$

Les niveaux d'énergie possibles pour la particule sont donnés par le **spectre** de H , qui est (essentiellement) l'ensemble des valeurs propres de H , c-à-d. l'ensemble des $\mu \in \mathbb{R}$ pour lesquels il existe $f \neq 0$ avec $Hf = \mu f$.

Un cas très étudié depuis les années 1970 est celui d'un potentiel **presque périodique** $V(n) = 2\lambda \cos(2\pi n\alpha)$. L'opérateur $(H_{\lambda,\alpha}f)(n) = f(n+1) + f(n-1) + 2\lambda \cos(2\pi n\alpha)f(n)$ s'appelle dans la littérature **opérateur presque-Mathieu**. La constante $\lambda \in \mathbb{R}$ est la **constante de couplage**: pour $\lambda = 0$, c'est l'électron libre.

Le premier à avoir étudié numériquement le spectre de $H_{\lambda,\alpha}$ est D. HOFSTADTER dans les années 1970, pour $\lambda = 1$. Il obtient une figure incroyablement fractale connue aujourd'hui sous le nom de **papillon de Hofstadter** (où $\alpha \in [0, 1]$ est en ordonnée, et le spectre de $H_{1,\alpha}$ est représenté horizontalement):



On obtient des figures analogues pour $\lambda \neq 0$. On a assez vite pu montrer que, pour α rationnel, on a un **spectre de bandes**, c-à-d. une réunion finie d'intervalles fermés. En 1981, cela a conduit le probabiliste américain Mark KAC à proposer 10 Martini pour une preuve du fait que, pour α irrationnel, le spectre de $H_{\lambda,\alpha}$ est un **ensemble de Cantor**, c-à-d. une partie fermée bornée de $\mathbb{R}$, totalement discontinue, et sans point isolé. A peu près en même temps, les physiciens ANDRE et AUBRY proposaient une conjecture sur la mesure de Lebesgue (= la “longueur”) du spectre de $H_{\lambda,\alpha}$: pour $0 < \lambda \leq 1$ et α irrationnel, la mesure du spectre de $H_{\lambda,\alpha}$ est $4(1 - \lambda)$.

En 2004, diverses méthodes de physique mathématique avaient permis de démontrer la conjecture des 10 Martini pour un ensemble de paramètres (λ, α) de mesure 1 dans le carré $[0, 1]^2$, et il était clair qu'il fallait de nouvelles idées pour progresser.

En introduisant des idées venues des systèmes dynamiques,
Avila a obtenu:

Théorème 4.2. • *(Avila-Krikorian 2006) La conjecture d'André-Aubry est vraie:*

- *(Avila-Jitomirskaya 2009) La conjecture des 10 Martini est vraie.*

Malheureusement, Mark Kac nous avait quittés en 1984...

4.3 Manjul BHARGAVA

Citation: *Il a développé de puissantes nouvelles méthodes en géométrie des nombres et les a appliquées pour compter les anneaux de petit rang et pour borner le rang moyen des courbes algébriques.*

Né en 1974 au Canada, Bhargava a grandi en Inde et aux Etats-Unis. Il a reçu son doctorat en 2001 de l'Université sous la direction d'Andrew WILES (le Grand Théorème de Fermat... vous vous rappelez?). Il est devenu professeur à Princeton en 2003, et a été élu à la US Academy of Sciences en 2013. Il a 6 articles dans la plus prestigieuse revue mondiale, les *Annals of Mathematics*.

Les mathématiques de Bhargava s'enracinent dans la théorie des nombres la plus classique - on dit qu'il est la personne au monde qui a le mieux compris les *Disquisitiones Arithmeticae* de C.F. Gauss.



4.3.1 Le théorème de 15, et celui de 290

Au 17ème siècle, Fermat avait montré qu'un entier n est une somme de 2 carrés, c-à-d. $n = x^2 + y^2$ avec $x, y \in \mathbb{Z}$, si et seulement si tout nombre premier congru à 3 modulo 4 apparaît avec un exposant pair dans la factorisation de n en facteurs premiers.

Exemple 4.3. • $10 = 2 \times 5 = 3^2 + 1^2$;

• $30 = 2 \times 3 \times 5$ n'est pas somme de 2 carrés;

• $90 = 2 \times 3^2 \times 5 = 9^2 + 3^2$.

Au 18ème siècle, Lagrange a montré que tout entier positif n est somme de 4 carrés, c-à-d $n = x^2 + y^2 + z^2 + t^2$ avec $x, y, z, t \in \mathbb{Z}$.

Exemple 4.4. On a $39 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 5^2$

Le point commun entre ces deux exemples: ils font intervenir des formes quadratiques définies positives à coefficients entiers:

Forme quadratique en k variables: $Q(\mathbf{x}) = \sum_{1 \leq i \leq j \leq k} a_{ij} x_i x_j$, où

$\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_k)$;

A coefficients entiers: $a_{ij} \in \mathbb{Z}$;

Définie positive: $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^k : Q(\mathbf{x}) \geq 0$, avec égalité si et seulement si $\mathbf{x} = 0$.

Définition 4.5. La forme quadratique Q **représente l'entier** n s'il existe $\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^k$ tel que $Q(\mathbf{x}) = n$, c-à-d. l'équation $Q(\mathbf{x}) = n$ admet des solutions entières.

Un problème classique est: quels sont les entiers représentés par une forme quadratique donnée? Pour les formes binaires ($k = 2$), le problème remonte à Lagrange, Legendre, et surtout Gauss.

En 1993, J.H. Conway et W. Schneeberger démontrent: pour une forme quadratique Q définie positive avec a_{ij} pair pour $i < j$: si Q représente tout entier dans $\{1, 2, \dots, 15\}$, alors Q représente tout entier positif. Ils ne publient pas la preuve (trop de cas à considérer). En 2000, Bhargava entre dans l'arène en donnant une preuve en 6 pages d'un résultat plus précis:

Théorème 4.6. *Soit une forme quadratique Q définie positive avec a_{ij} pair pour $i < j$. Si Q représente tout entier dans $\{1, 2, 3, 5, 6, 7, 10, 14, 15\}$, alors Q représente tout entier positif. De plus, pour tout entier t dans cette liste, il existe une forme en 4 variables qui ne représente pas t , mais représente tout autre entier positif.*

Exemple 4.7. La forme $x^2 + 2y^2 + 5z^2 + 5t^2$ représente tout entier positif.

En 2005, en collaboration avec J. Hanke, Bhargava récidive et démontre le théorème de 290, conjecturé par Conway:

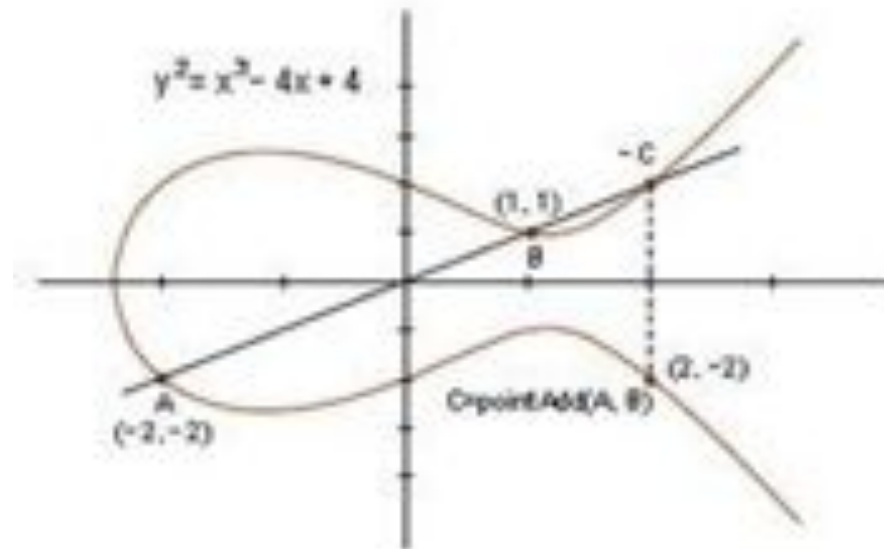
Théorème 4.8. *Soit Q une forme quadratique définie positive à coefficients entiers. Si Q représente les 29 entiers 1, 2, 3, 5, 6, 7, 10, 13, 14, 15, 17, 19, 21, 22, 23, 26, 29, 30, 31, 34, 35, 37, 42, 58, 93, 110, 145, 203, 290, alors Q représente tous les entiers positifs. De plus, pour tout entier t dans cette liste, il existe une forme qui ne représente pas t , mais représente tout autre entier positif.*

4.3.2 Points rationnels sur des courbes algébriques

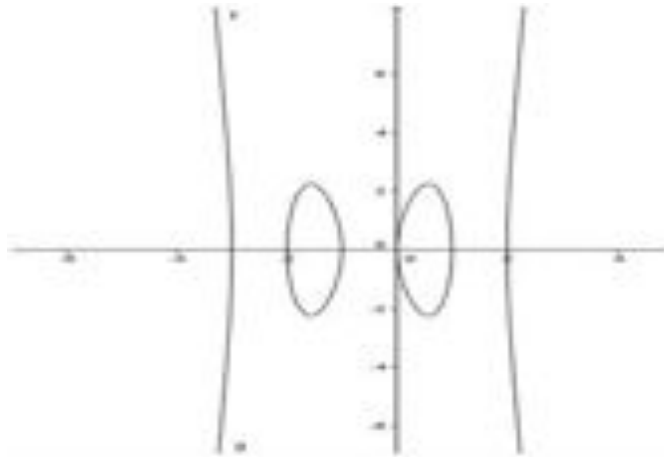
Bhargava se dit fasciné par les formules qui produisent des carrés parfaits, comme l'équation de Pythagore $a^2 + b^2 = c^2$ (“quels sont les carrés sommes de 2 carrés?”), ou l'équation de Pell-Fermat $dy^2 \pm 1 = x^2$ (“quels sont les carrés proches d'un multiple donné d'un carré?”).

Il a beaucoup travaillé sur le problème: si $P(x)$ est un polynôme à coefficients entiers, de degré n : prend-il sur les entiers des valeurs qui sont des carrés? Ou encore: l'équation $y^2 = P(x)$ a-t-elle des solutions entières? Ou encore, plus géométriquement, la courbe algébrique plane d'équation $y^2 = P(x)$ a-t-elle des points entiers? Plus généralement, cette courbe possède-t-elle des points rationnels? On fera quelques hypothèses pour éviter des cas triviaux, par exemple si P s'annule en $\alpha \in \mathbb{Q}$, clairement le point $(\alpha, 0)$ est un point rationnel de la courbe. On supposera donc que P est irréductible sur $\mathbb{Q}$.

Pour $n = 3, 4$ on obtient une “courbe elliptique”:



Pour $n \geq 5$, on parle de “courbe hyperelliptique”:



On savait:

- Pour $n = 1, 2$ l'ensemble des points rationnels est vide ou infini;
- Pour $n \geq 5$, le nombre de points rationnels est fini (démontré en 1983 par G. FALTINGS, Médaille Fields en 1986).

Bhargava a l'idée d'obtenir des résultats statistiques sur les courbes. Pour cela, il les range selon la **hauteur** du polynôme P : si $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$, la hauteur de P est $h(P) = \max_{0 \leq i \leq n} |a_i|$. Pour un degré n fixé, la **densité** de courbes de degré n sans point rationnel est alors

$$d_n = \liminf_{h \rightarrow \infty} \frac{\text{Nb de courbes de hauteur } \leq h \text{ sans point rationnel}}{\text{Nb de courbes de hauteur } \leq h}.$$

Théorème 4.9 (Bhargava 2013). *La plupart des courbes hyperelliptiques n'ont pas de point rationnel: pour $n > 5$, on a $d_n > \frac{1}{2}$. De plus, pour $n \rightarrow \infty$, la densité d_n tend exponentiellement vite vers 1.*

Pour $n = 3, 4$ (courbes elliptiques):

Théorème 4.10 (Bhargava-Shankar-Skinner). *Une proportion positive de courbes elliptiques n'a pas de point rationnel. Une proportion positive de courbes elliptiques a une infinité de points rationnels.*



4.4 Martin HAIRER

Citation: *Il a obtenu des contributions remarquables à la théorie des équations aux dérivées partielles stochastiques, et en particulier il a créé une théorie des structures de régularité pour de telles équations.*

De nationalité autrichienne, Martin Hairer est né à Genève en 1975 (son père, Ernst Hairer, est professeur honoraire d'analyse numérique à l'Université de Genève). Il a obtenu sa thèse en 2001 à Genève, sous la direction de Jean-Pierre Eckmann (physique mathématique). Déjà comme doctorant, il s'était fait remarquer par la conception - et la commercialisation! - du logiciel Amadeus de traitement de sons, "The swiss army knife of sound editing", utilisé entre autre pour la digitalisation des disques-vinyl. Hairer est actuellement professeur à l'Université de Warwick (Angleterre).



En physique, les phénomènes dépendant uniquement du temps sont décrits par des équations différentielles:

$$y'(t) = f(y(t))$$

(où $y(t)$ est la fonction inconnue). Si la fonction f n'est pas connue avec précision, on peut être amené à ajouter un terme d'erreur, qui traduit une incertitude dans la modélisation:

$$y'(t) = f(y(t)) + \sigma(y(t))n(t),$$

ou encore

$$y(t) = y(0) + \int_0^t (f(y(s)) + \sigma(y(s))n(s)) ds.$$

Si f, σ, n sont suffisamment réguliers (disons C^∞), un théorème de point fixe s'applique et donne l'existence d'une solution unique.

Si n est très irrégulière, une idée est d'approcher n par des approximations lisses n_k , de regarder l'équation intégrale

$$y(t) = y(0) + \int_0^t (f(y(s)) + \sigma(y(s))n_k(s)) ds,$$

et d'espérer que tout se passe bien, c-à-d. que la solution y_k de l'équation approchée converge pour $k \rightarrow \infty$ vers la solution y de l'équation de départ. Idéalement la fonction-limite y ne devrait pas dépendre du choix de l'approximation n_k choisie pour n .

Si $n(t)$ est un *bruit*, c-à-d. une réalisation d'un processus stochastique, l'équation différentielle de départ devient **stochastique**.

Un bruit souvent considéré est le **bruit blanc**: $\mathbb{E}(n_t) = 0$, $\mathbb{E}(n_s n_t) = 0$ si $s \neq t$ (non corrélation en temps). Si n_t est un bruit blanc, alors $W(t) = \int_0^t n(s) ds$ est un **mouvement brownien** - observé par le botaniste BROWN en 1827, formalisé d'abord par BACHELIER (1900 - naissance des maths financières!) puis par EINSTEIN (1905 - théorie cinétique des gaz), mis sur des bases rigoureuses par WIENER (1930) et LEVY (1948)... Un problème est qu'on démontre que (presque) toute trajectoire brownienne est non dérivable en tout point, donc la "dérivée" $n(t)$ n'a pas de sens comme fonction, mais seulement comme distribution au sens de Laurent SCHWARTZ. Une théorie rigoureuse pour les équations différentielles stochastiques a été développée par ITO à partir de 1948:

$$Y(t) = Y(0) + \int_0^t (f(Y(s)) ds + \int_0^t \sigma(Y(s)) dW(s)''$$

Les phénomènes physiques qui dépendent à la fois de l'espace et du temps, sont décrits par des **équations aux dérivées partielles**: par exemple l'évolution de la chaleur dans un barreau mince est décrite par

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2},$$

où $u(x, t)$ est la température au temps t au point d'abscisse x . Si on ajoute un terme de bruit, on parle d'**équation aux dérivées partielles stochastique**.

Martin Hairer s'est particulièrement intéressé au cas de l'équation KPZ (du nom des physiciens KHARDAR, PARISI et ZHANG, 1986), qui modélise des phénomènes d'interface et des phénomènes de croissance:

$$\frac{\partial h(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 h(x, t)}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial h(x, t)}{\partial x}\right)^2 + n(t)$$

où $n(t)$ est un bruit blanc. Le problème est que les dérivées partielles de $h(x, t)$ doivent être prises au sens des distributions... et que l'élévation au carré d'une distribution n'a pas de sens a priori!

Martin Hairer a développé une **théorie des structures de régularité** (qui incorpore comme cas particulier la théorie des “chemins rugueux” (rough paths) de T. LYONS, 1998), qui lui permet de donner du sens aux solutions d'EDPS extrêmement singulières qui surgissent en physique mathématique.

Martin Hairer prouve que si on considère une suite d'équations:

$$\partial_t h_\varepsilon = \partial_x^2 h_\varepsilon + (\partial_x h_\varepsilon)^2 - C_\varepsilon + n_\varepsilon$$

où n_ε est lisse et converge au sens approprié vers le bruit blanc n , et C_ε est une constante bien choisie, alors la solution h_ε converge vers une limite qui est universelle. Une nouveauté est que le choix de la topologie est intimement lié au niveau d'irrégularité du bruit n .

D'après les spécialistes, les structures de régularité de Martin Hairer s'appliquent bien au-delà de l'équation KPZ en dimension 1, et proposent un ensemble d'outils pour construire explicitement de bonnes approximations à une équation singulière. Il s'agit apparemment d'une approche révolutionnaire qui fournit un point de vue nouveau sur plusieurs équations fondamentales de la physique mathématique, dont on avait longtemps cru qu'elles étaient impossibles à traiter rigoureusement sur le plan mathématique.

