QUELQUES GÉNÉRALISATIONS DU THÉORÈME DE STEWART

40e Congrés de la SBPMef
Namur, août 2014

FRANCISCO BELLOT ROSADO

Comisión de Olimpiadas de la R.S.M.E.

franciscobellot@gmail.com

Je veux remercier à la Commission Congrès pour avoir accepté ma proposition de faire cet exposé et en particulier a mon collègue et ami Eric pour sa présentation.

Je dédie mon exposé à la mémoire de deux personnes qui nous ont laissé récemment. La première est notre cher **Jean-Paul Houben**, avec qui tous nous avons partagé les congrès de notre Société.

La seconde est liée à ma présentation; **Leon van den Broek** était un mathématicien néerlandais grâce a qui j'ai pu avoir les documents originaux relatifs à la généralisations du théorème de Stewart . Quand je l'ai démandé de m'envoyer la copie d'un des articles que je cite dans la Bibliographie, il m'a averti: *Il est en néerlandais.* Je le remerciait, en ajoutant: *Oui, mais j'ai un dictionnaire...* **Leon** était en plus l'organisateur du concours Kangourou des Mathématiques dans son pays et nous le rappellerons, bien sure, dans la prochaine reunion de Kangourou sans frontières.

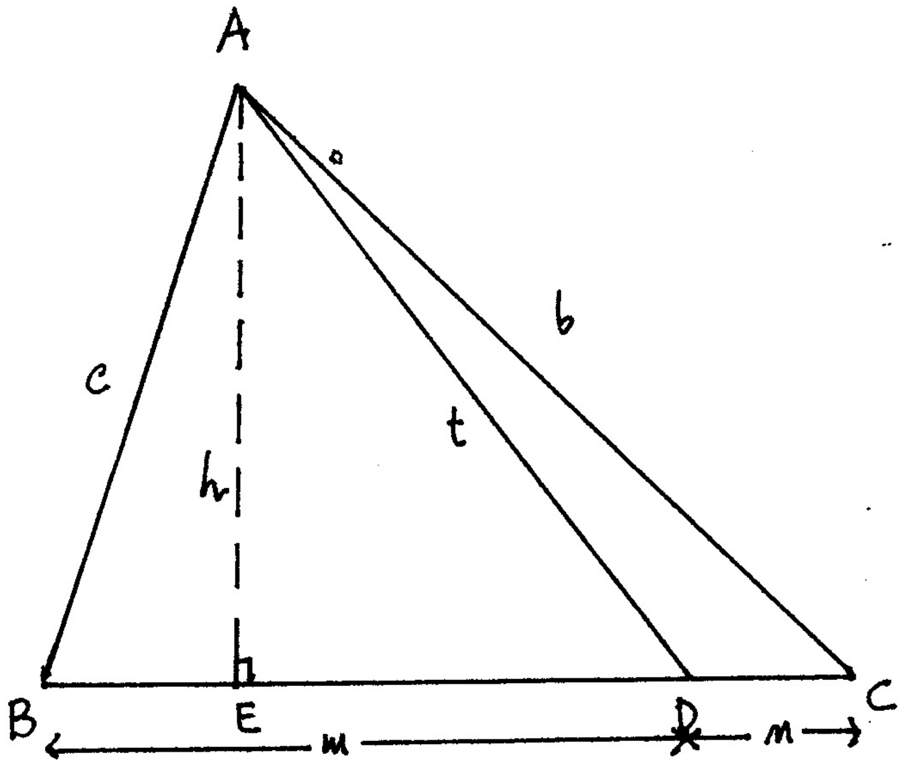
Voici tout d'abord un portrait de notre protagoniste, Matthew Stewart, un mathématicien écossais, née dans 1717 et décedé en Edinburgh en 1785; je l'ai obtenu grâce à mon collègue anglais Andrew Jobbings, organisateur du Concours le Kangourou des Mathématiques dans le Royaume Uni. Voici notre homme:

Matthew Stewart, 1717-1785

1.- Le problème dans le plan

On suppose que ABC est un triangle arbitraire, et aussi que D est un point du coté BC. On veut calculer la longueur ***t*** du segment AD en fonction des longueurs des trois cotés du triangle ABC, ***a,b,c*** et d'un quatrième donnée qui permet fixer la position du point D dans le coté BC.

Dans la figure suivante nous utiliserons les longueurs des segments BD = ***m*** et DC = ***n*** pour fixer la position de D. Il est bien connu, étant donné que ***m + n = a,*** qu'il suffit connaître la proportion dans laquelle le point D divise le segment BC, c'est à dire, ***m/n.***



En effet, nous avons

$$h^2 = c^2 - BE^2 = t^2 - ED^2 =$$

$$= b^2 - (ED + n)^2$$

Il suffit considérer les deux égalités

$$c^2 - BE^2 = t^2 - ED^2$$

$$t^2 - ED^2 = b^2 - (ED + n)^2$$

Que nous pouvons les écrire ainsi :

$$c^2 - (m - ED)^2 = t^2 - ED^2$$

$$b^2 - (ED + n)^2 = t^2 - ED^2.$$

En développant les carrés et après simplifications nous arrivons à

$$c^2 - m^2 + 2m\cdot ED = t^2$$

et

$$b^2 - n^2 - 2n\cdot ED = t^2.$$

Et d'ici nous faisons l'élimination des termes qui contiennent la longueur ED: il suffit multiplier la première par n, la seconde par m, et sommer les résultats

$$nc^2 + mb^2 - mn(m + n) = (m + n)t^2$$

qui, comme m + n = a, on peut écrire dans la forme usuelle du théorème de Stewart:

$$nc^2 + mb^2 - mna = at^2 \qquad (1)\blacksquare$$

Observation: Si l'angle B du triangle ABC est obtuse, le point B est entre E et D, mais dans ce cas les modifications à faire sont faciles.

1.1.-Applications du théorème: longueurs de quelques ceviennes

Longueurs des médianes

Si le point D est le mi-point de BC, m = n = a/2; la médiane AD a une longueur m_a, et la substitution directe de ce valeur commun à m et n dans (1) nous donne

$$\mathbf{m_a^2 = (b^2 + c^2)/2 - a^2/4. \quad (2)}$$

Ce résultat est aussi connu comme le **théorème de Appolonius.**

1.2.- Longueur des bisectrices intérieures

Si D est le pied de la bissectrice intérieure de l'angle A du triangle, il est connu que cette cévienne divise au coté opposé en deux segments qui sont proportionnels aux cotés contigus.

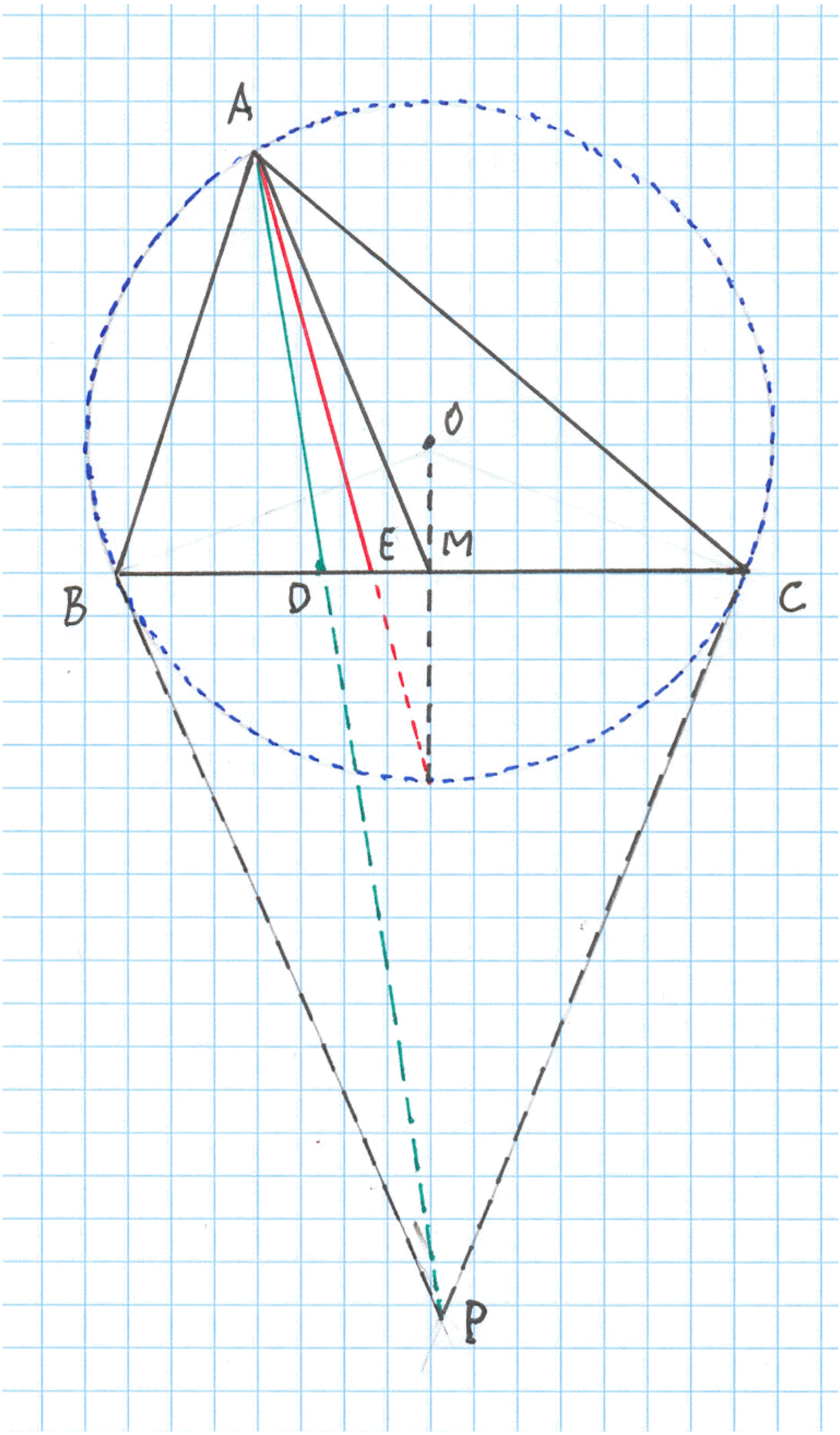
En substituant les valeurs de m et n dans la formule de Stewart nous avons, pour la longueur de la bissectrice w_a la formule

$$w_a^2 = bc\left[1 - \frac{a^2}{(b+c)^2}\right]$$

1.3.- Longueur de la symédiane

La symédiane est la symétrique de la médiane respect de la bissectrice intérieure

La figure suivante montre un procédé pour dessiner la symédiane: en dressant les tangentes à la circonférence circonscrite à ABC dans **B et C,** qui se coupent dans un point P, alors la droite AP est la symédiane de A. La longueur qui va s'obténir avec le théorème de Stewart est celle du segment dont les extrèmes sont A et le point d'intersection **de AP avec BC, signalé** en vert dans la figure.



Dans ce cas, le théorème de la symédiane dit: la symédiane d'un vertix d'un triangle divise le coté opposé en deux segments qui sont proportionneaux *aux carrés* des cotés contigus.

En utilisant ceci on peut déduire la longueur de la symédiane, que nous écriverons dans une forme un peu plus courte:

$$s_a = \frac{2bc}{b^2 + c^2} \bullet m_a$$

1.4.- Un problème de l'Olympiade Ibéroamericaine de 1988, proposé par Brazil, que je vous présente sans solution, en vous invitant à chercher celle-ci :

ABC est un triangle dont les longueurs des cotés sont a, b, c. Chaque coté de ABC est divisé dans *n* segments égaux. Soit S la somme des carrés des distances de chaque vertix à chacun des points de division du coté opposé aux vertices. Montrez que

$$S / (a^2+b^2+c^2)$$

est un nombre rationnel.

2.- Le saut dans l'espace

La première configuration pour étendre le théorème dans l'espace est formé par un quadrilatère convexe, plan, ABCD, dont les diagonales AC et BD se coupent dans O; et un point arbitraire M de l'espace tridimensionel.

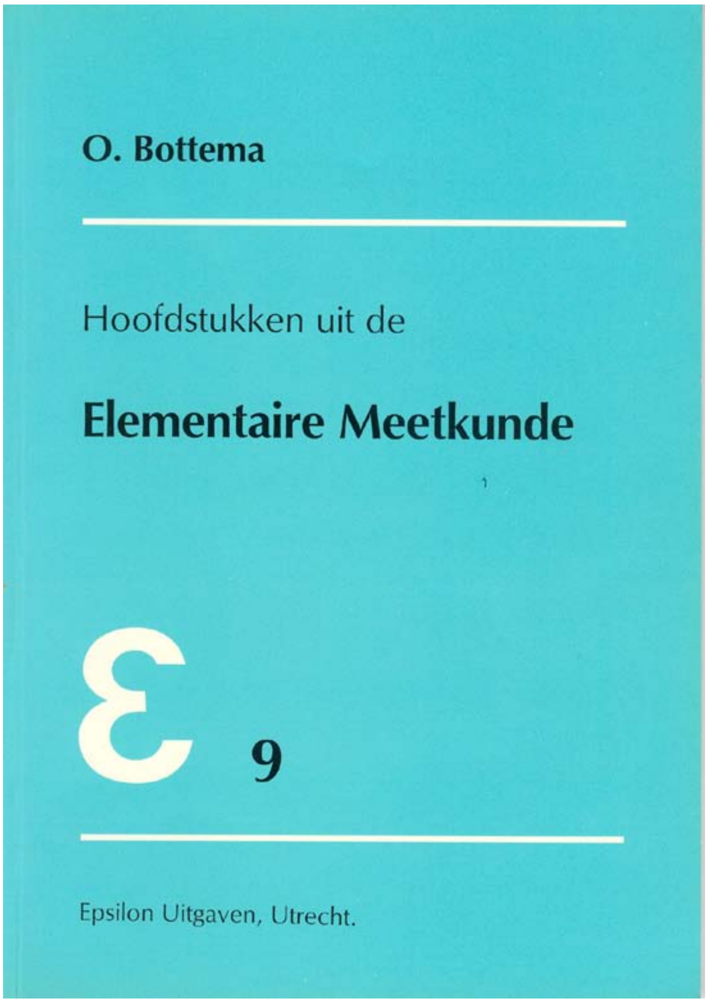
J'ai trouvé deux références bibliographiques: la première est le presque exhaustive livre *Planul şi spaţiul euclidian (1986)* du géomètre roumain Dan Brănzei; la seconde est un article du mathématicien néerlandais Oene Bottema, *De formule van Stewart voor een viervlak* , publié dans un journal néerlandais dans l'année 1980.

Voici les portraits de ces deux protagonistes:

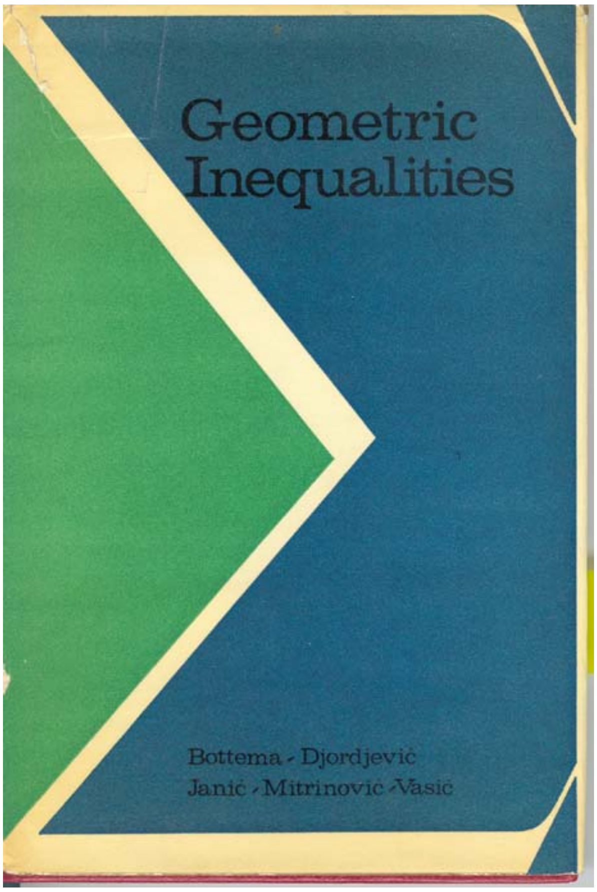
Dan Branzei (1942 – 2012)

Oene Bottema (1901-1992)

Tous les écrits de Bottema sont extraordinairement intéressants; ces deux sont un échantillon**:**

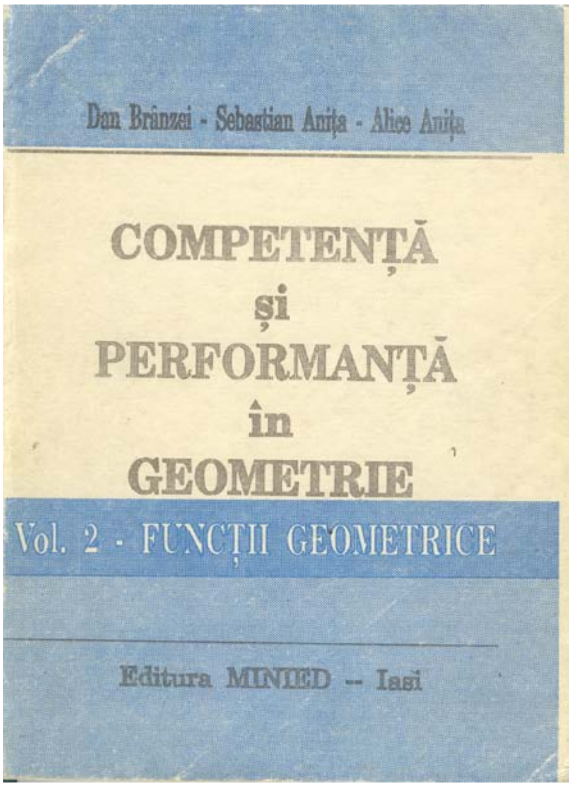


Versión en anglais: *Topics in Elementary Geometry*



Ceci est la “bible” de Bottema sur inégalités géométriques

D'ici vient la première géneralisation dans l'espace du théorème de Stewart

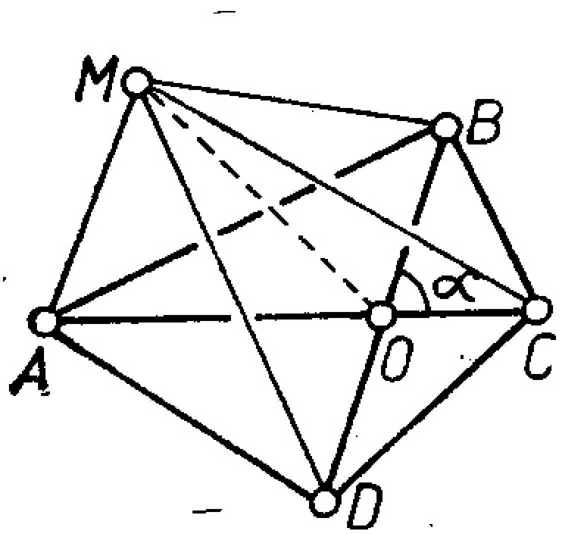


Celui ci est le second volume d'une oeuvre de Branzei, pas terminée (et qui ne pourra pas être terminée, car deux des trois auters sont décedés...)

Le principal résultat de Branzei est formulé tout de suite; la notation S avec un sous index du type ABC, etc., signifie l'aire du triangle ABC

Si ABCD est un quadrilatère convexe, O est le point d'intersection des diagonales, et M est n'importe quel point de l'espace, alors on a

$$MA^2 \cdot S_{BCD} + MB^2 \cdot S_{ABD} = MB^2 \cdot S_{ACD} + MD^2 \cdot S_{ABC} + (AO \cdot OC - BO \cdot OD) \cdot S_{ABCD}$$



On va applier le théorème de Stewart dans le plan aux triangles AMC avec la cevienne MO et DMB avec la même cevienne MO.

En faisant ça on verra pourquoie les aires de ces triangles interviennent dans l'expression finale.

Nous avons

$$\mathbf{MA^2 \cdot OC + MC^2 \cdot OA = MO^2 \cdot AC + AO \cdot OC \cdot AC}$$

et

$$\mathbf{MB^2 \cdot OD + MD^2 \cdot OB = MO^2 \cdot BD + DO \cdot OB \cdot DB}$$

En multipliant la première par BD, la seconde par AC et en retranchant, on a

$$\mathbf{MA^2 \cdot OC \cdot BD + MC^2 \cdot OA \cdot BD - MB^2 \cdot OD \cdot AC - MD^2 \cdot OB \cdot AC}$$

$$\mathbf{= BD \cdot AC(AO \cdot OC - OD \cdot OB)}$$

Si on multiplie cette expression par

$$\mathbf{(\sin BOC) / 2}$$

nous avons exactement la formule annoncée .

Il y a deux cas particuliers intéressants, qui néanmoins nous ne traiterons pas: quand ABCD est un trapèze, avec AB et CD parallèles; et quand le quadrilatère ABCD est inscrit dans une circonférence.

3.- Une approximation à la généralisation de Bottema dans l'espace de dimension 3: le cas du tétraèdre

Suivant la méthode de Polya:

¿Quelles sont les données du problème?

Dans le cas du plan, un triangle et un point placé dans un des cotés.

Dans le cas de l'espace, le polyèdre le plus simple est le tétraèdre ABCD; et un point placé dans une des triangles qui sont les faces du tétraèdre.

¿Quelle est l'inconnue?

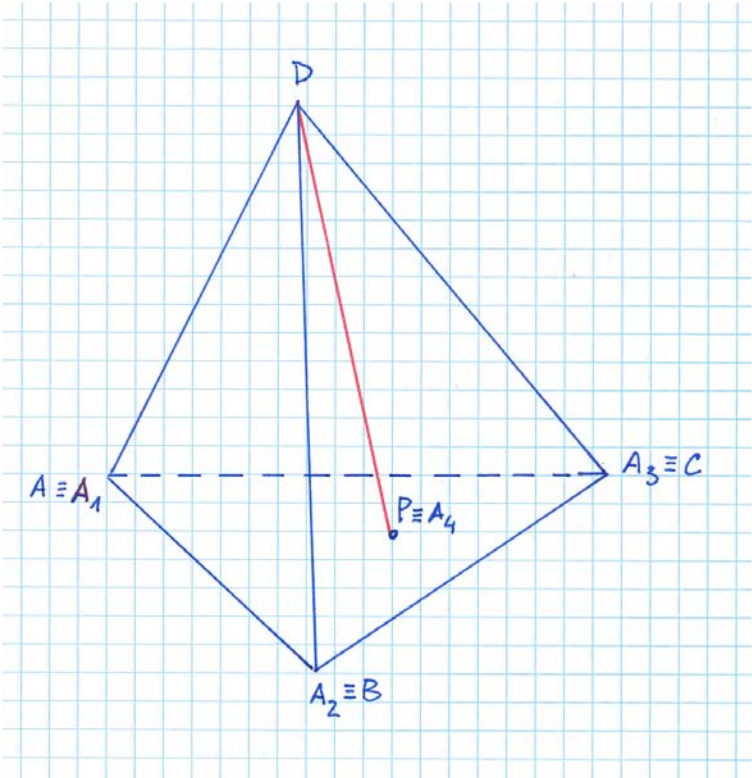
Dans le cas du plan, la distance entre le point el le sommet opposé au coté du triangle dans lequel se trouve le point.

Dans le cas del'espace, la distance entre le point placé dans la base, et le quatrième sommet du tétraèdre .

¿En fonction de quelles données nous voulons exprimer la solution?

Dans le cas du plan, les longueuers des cotés et le quotient m / n des distances du point aux extrèmes de la base.

La situation dans le cas de l'espace est plus compliquée. Voyons une figure pour comprendre le problème.



Bottema change la notation: Dans la figure on appelle A_i, avec i=1,2,3 aux vertices ABC de la base du tétraèdre; A_4 est le point P du plan ABC; et D est le quatrième sommet du tétraèdre.

Alors, entre les données que nous utiliserons, nous avons les six arêtes du tétraèdre, que nous appellons:

$$BC = a;\ CA = b;\ AB = c;$$

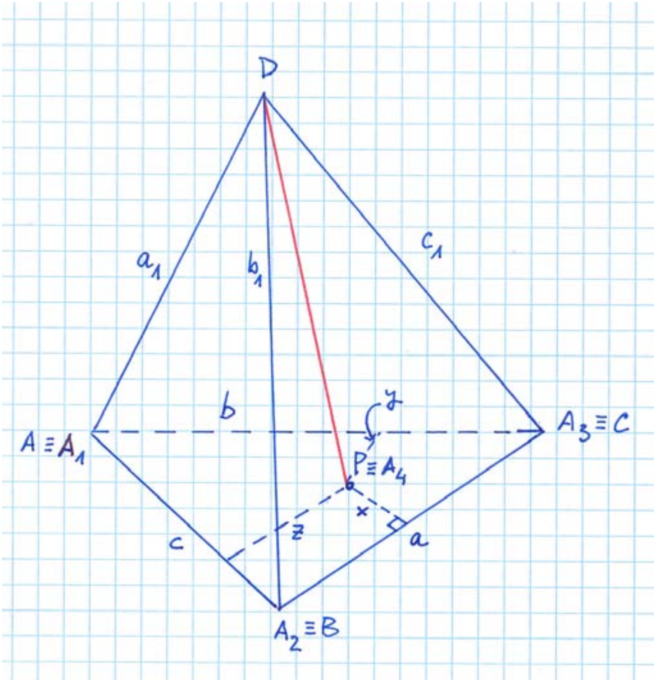
$$DA_1 = a_1;\ DA_2 = b_1;\ DA_3 = c_1.$$

Évidemment, étant donné le tétraèdre, ces six longueurs sont fixes, mais pour déterminer P nous avons besoin de quelque chose de plus. Nous pourrions penser en utiliser les distances **de P aux trois sommets de la base, PA, PB et PC (car nous voulons calculer PD), mais il est plus commode employer les distances de P *aux cotés du triangle ABC.***

En effet, si on appelle x, y, z les distances de P à BC, CA et AB, respectivement, il est possible exprimer facilement l'aire F du triangle ABC:

$$2F = ax + by + cz$$

La figure suivante montre les données et (en rouge) l'inconnue du problème:



Bottema dans l'article cité plus haut demontre deux formulations équivalents de la formule de Stewart pour le tétraèdre: dans la première, DP = d, et l'aire orientée d'un triangle UVW est écrit comme [UVW];

$$[A_1A_2A_3]d^2=[PA_2A_3]a_1^{\,2}+[PA_3A_1]a_2^{\,2}+[PA_1A_2]a_3^{\,2}+[A_1A_2A_3]m$$

oú, en plus, m est la puissance de P relative à la circonference circonscrite à ABC.

La seconde formulation est:

$$2Fd^2 = aa_1^{\,2}x+bb_1^{\,2}y+cc_1^{\,2}z - 2R(ayz+bzx+cxy),$$

oú F = [ABC] et R est le rayon de la circonférence circonscrite à ABC.

Comme $ayz+bzx+cxy = 0$ est l'équation du cercle circonscrit à ABC en utilisant des coordonnées trilinéaires, le dernier terme de la formule s'annulera si le point P appartient à ce cercle.

La raison pour laquelle Bottema donne cette seconde formulation est parce qu'elle permet calculer, en faisant que le point P appartienne au plan ABC, les distances entre le point D et des points distingués du triangle ABC.

Nous allons donner quelques examples de ces distances :

Si nous choissisons P comme le isobarycentre de ABC, alors

$$d^2 = \frac{1}{3}\left(a_1^{\ 2} + b_1^{\ 2} + c_1^{\ 2}\right) - \frac{1}{9}\left(a^2 + b^2 + c^2\right).$$

Si nous choisissons $P = I$, le centre du cercle inscrit dans ABC, alors

$$\left(a+b+c\right)d^2 = aa_1^{\ 2} + bb_1^{\ 2} + cc_1^{\ 2} - abc\,.$$

Si $P = K$, le point de Lemoine qui est l'ntersection des symédianes, on a

$$\left(a^2+b^2+c^2\right)^2 d^2 = \left(a^2 a_1^{\ 2} + \cdots\right)\left(a^2+b^2+c^2\right) - 3a^2b^2c^2\,.$$

Finalement, on peut aussi observer que si le pont D est dans le plan du triangle ABC, on peut aussi calculer des distances entre des points distingués du triangle ABC, par exemple

$$OI^2 = R^2 - 2rR\ ;$$

$$OI_a^{\ 2} = R^2 + 2Rr_1;$$

$$(a^2 + b^2 + c^2)^2\ OK^2 = 2R^2[(b^2 - c^2)^2 + (c^2 - a^2)^2 + (a^2 - b^2)^2].$$

4.- Généralisation dans n dimensions

Il est aussi possible la généralisation du résultat de Stewart dans un espace euclidien de *n* dimensions; Bottema l'a fait en 1979, dans un article en langue allemande publié dans la revue suisse *Elemente der Mathematik: Eine Erweiterung der Stewartschen Formel;* vol.34, nr 6, 1979, pg. 138-140.

La formulation précise est la suivante :

Si les *(n+1)* points $A_1, A_2, \ldots, A_{n+1}$ de l'espace euclidien E_n appartiennent au hyperplan *U* (de dimension n-1), et *A* est un point en dehors *U* , alors en appellant $r_i = AA_i$ (pour $i = 1, 2, \ldots, (n+1)$), *on a*

$$F_1 r_1^{\,2} - F_2 r_2^{\,2} + \ldots + (-1)^n F_{n+1} r_{n+1}^{\,2} = (-1)^{k+1} m_k F_k\ .$$

Dans cette formule, F_i est le (hyper) volume su simplex S_i obtenu en séparant de l'ensemble $\{A_1, A_2, \ldots, A_{n+1}\}$ le point A_i ; *k* est n'importe quel nombre de {1,2, ... , n+1} et m_k est la puissance de A_k relative à la hyperesphère C_k circonscrite à S_k.

4.- Bibliographie

1.-Bellot, F.: *Problemas de Geometría de Olimpiadas (Lección de preparación olímpica). Inédito.*

2.-Bottema, O.: *Eine Erweiterung der Stewartschen Formel. Elemente der Mathematik,* vol. 34, nr. 6, 1979, pp. 138-140.

3.-Bottema, O: *De formule van Stewart voor een viervlak; Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde,* vol. 68, 1980-81, pp.79-83.

4.-Brănzei, D. et al.: *Planul şi spaţiul euclidian (1986),Editura Academiei, Bucarest.*

5.-Davis, D.R.: *Modern College Geometry. Addison Wesley, 1949.*

6.-Posamentier, A.S. & Lehmann I.: *The secret of triangles. Prometheus Books, 2012.*

7.-Posamentier, A. S. & Salkind, C.T.: *Challenging problems in Geometry. Dale Seymour Publications, 1988.*

Valladolid, août 2014