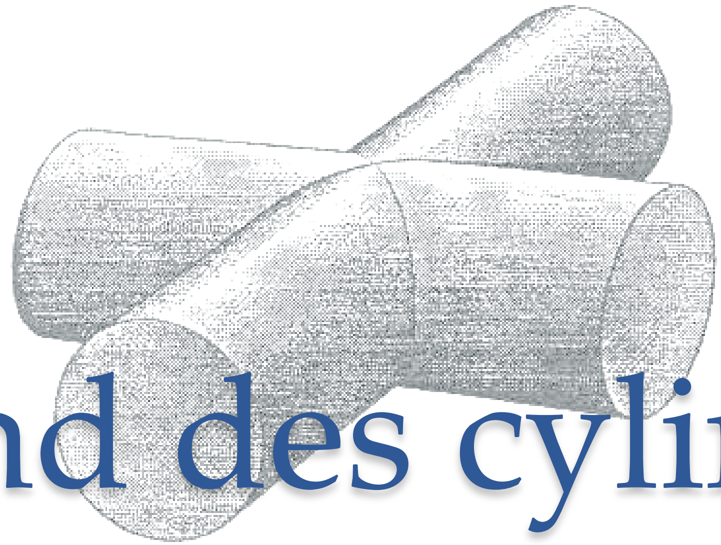
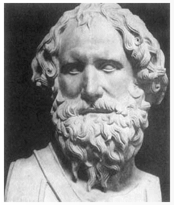
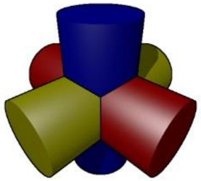


Quand des cylindres se rencontrent

Michel Roelens
KHLim Diepenbeek (formation des profs de maths)
Maria-Boodschaplyceum Brussel (secondaire)
Rédaction **UITWISKELING** (abonnez-vous !)

Quand des cylindres se rencontrent

1. La cheminée de mon collègue Kristof 
2. La Méthode de notre collègue Archimède 
3. L'intersection de cylindres 

Première partie

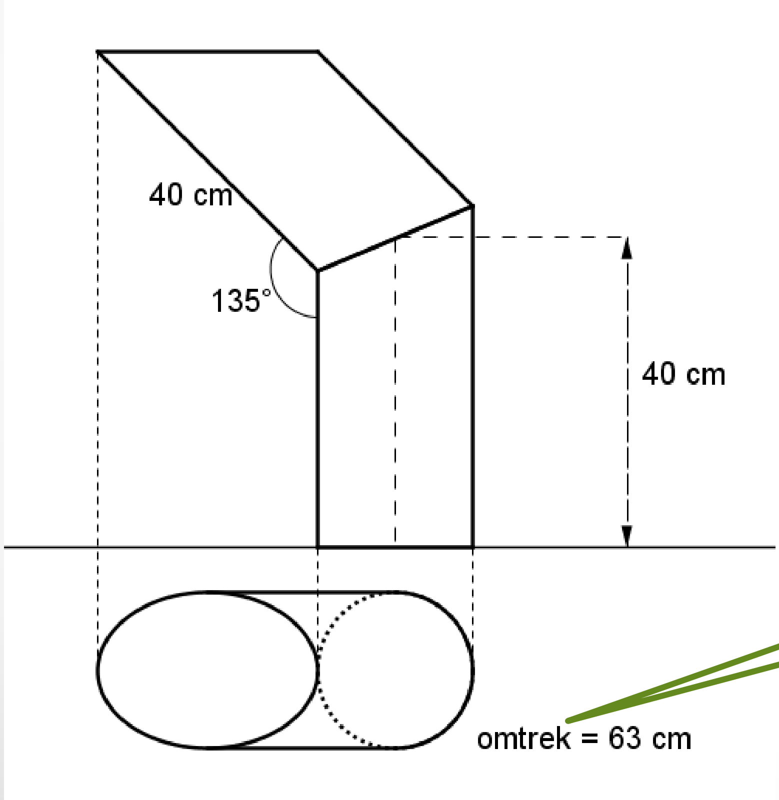
La cheminée de mon collègue

La cheminée mon collègue

Revêtir son conduit de cheminée : deux cylindres formant un angle de 135°.

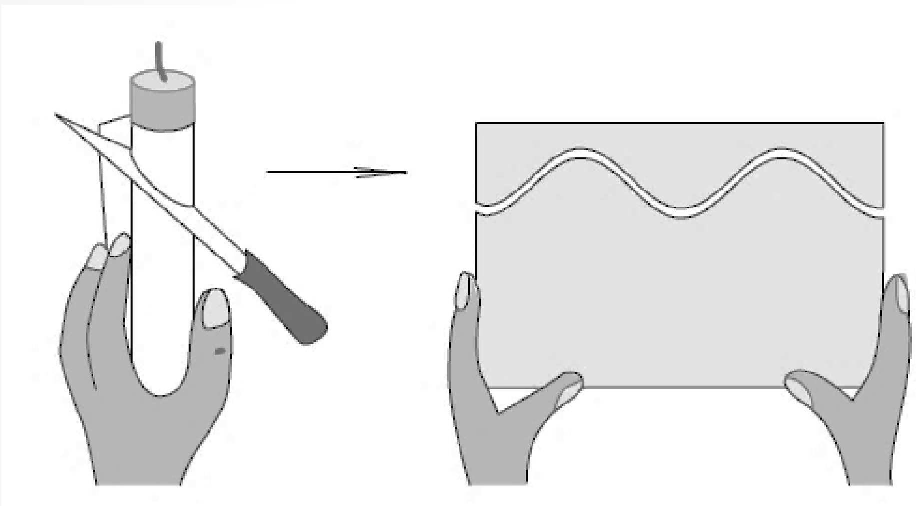
La cheminée de mon collègue

Voici ses données.

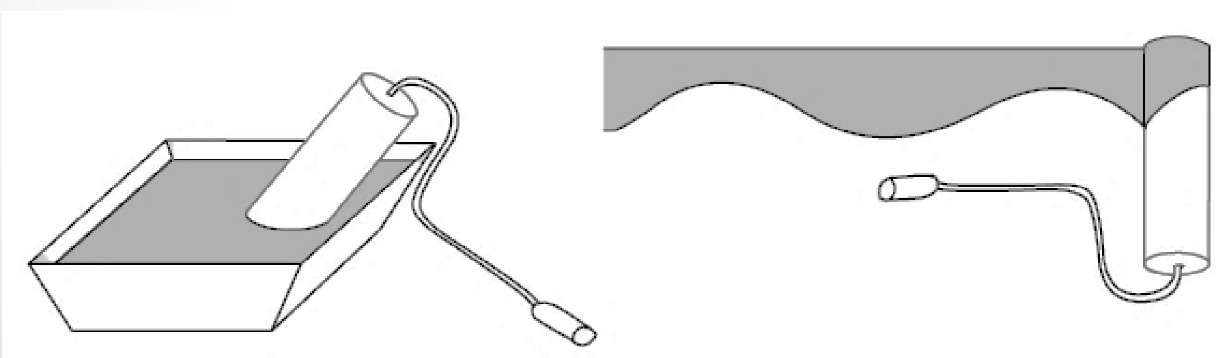


circonférence

Développement d'une section plane de cylindre

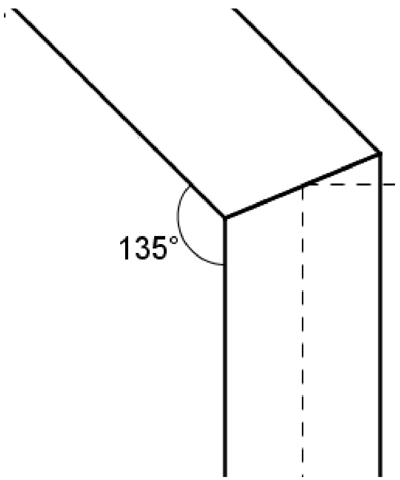


Une sinusoïde !

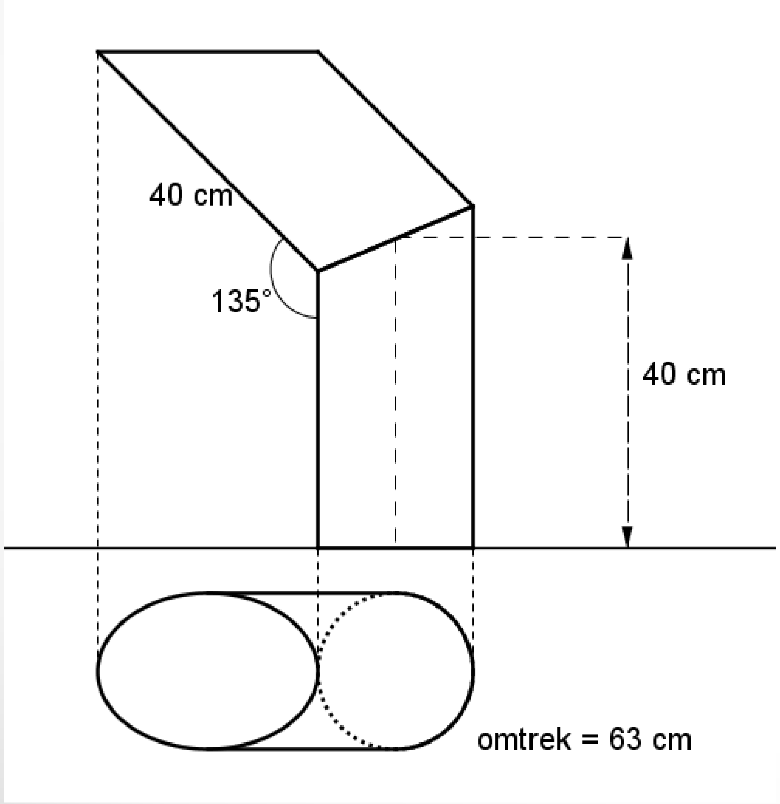


Au travail !

- Découper et coller deux morceaux de cylindres qui forment un angle de 135°



La cheminée de mon collègue



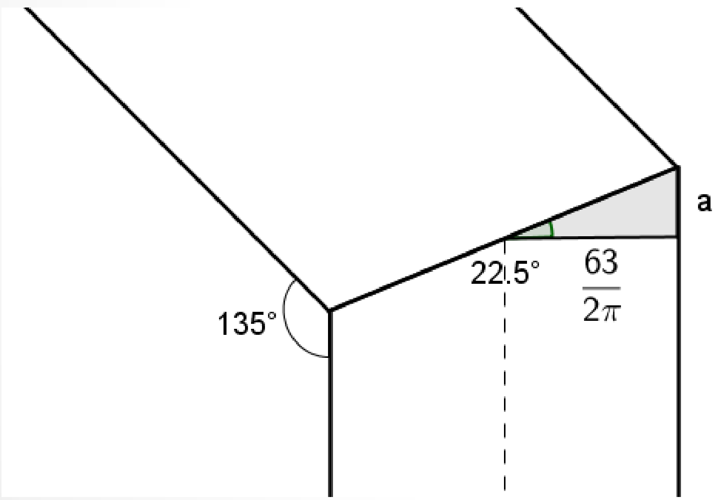
$$y = a \cos bx + d$$

$$d = 40$$

$$b = \frac{2\pi}{63}$$

$$a = ?$$

La cheminée de mon collègue



$$a = \frac{63}{2\pi} \tan 22{,}5°$$

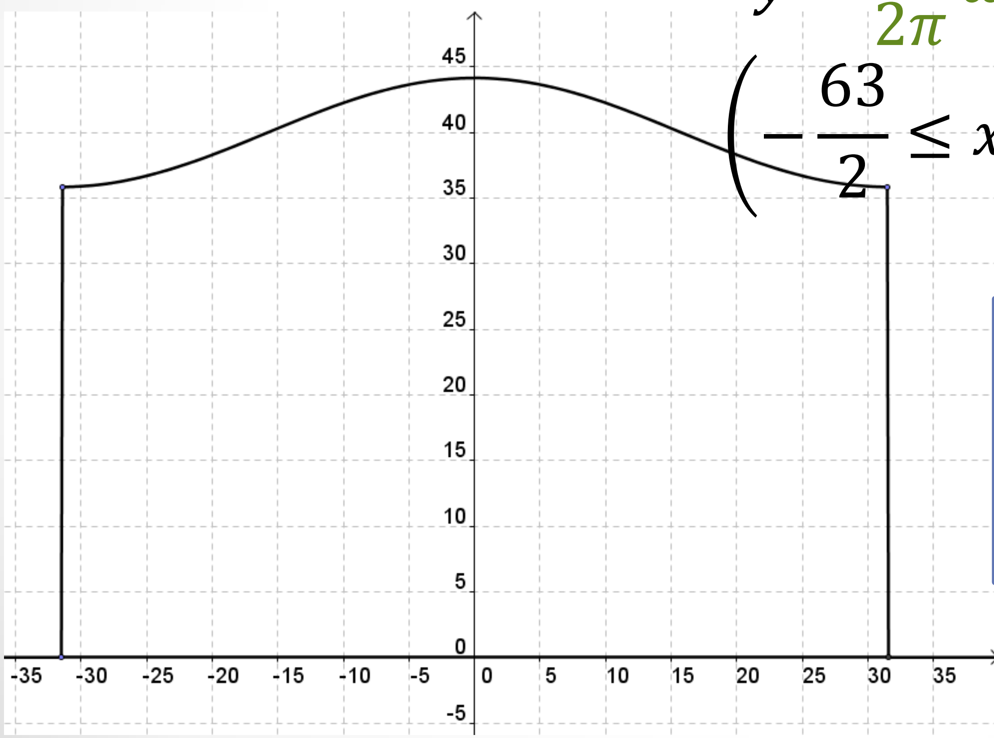
rayon

La cheminée de mon collègue

J'ai découpé le cylindre au point le plus bas de sa section.

$$y = \frac{63}{2\pi}\tan 22{,}5° \cos\frac{2\,\pi x}{63} + 40$$

$$\left(-\frac{63}{2} \le x \le \frac{63}{2} \quad \text{en centimètres}\right).$$



GeoGebra : facteur

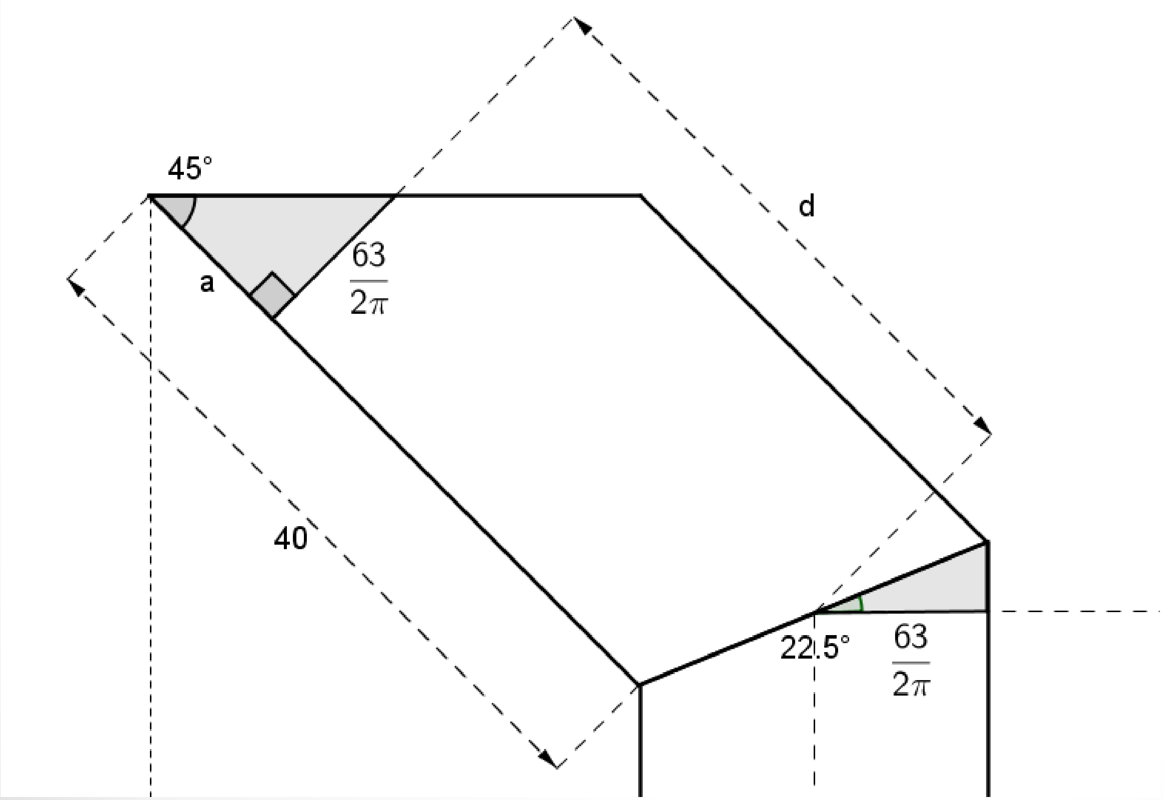
$$\left(\left(x \ge -\frac{63}{2}\right) \wedge \left(x \le \frac{63}{2}\right)\right)$$

Pour les virtuoses :

$$\tan 22{,}5° = \sqrt{2} - 1$$

La cheminée de mon collègue

$$d = 40 - \frac{63}{2\pi} + \frac{63}{2\pi}\tan 22{,}5°.$$

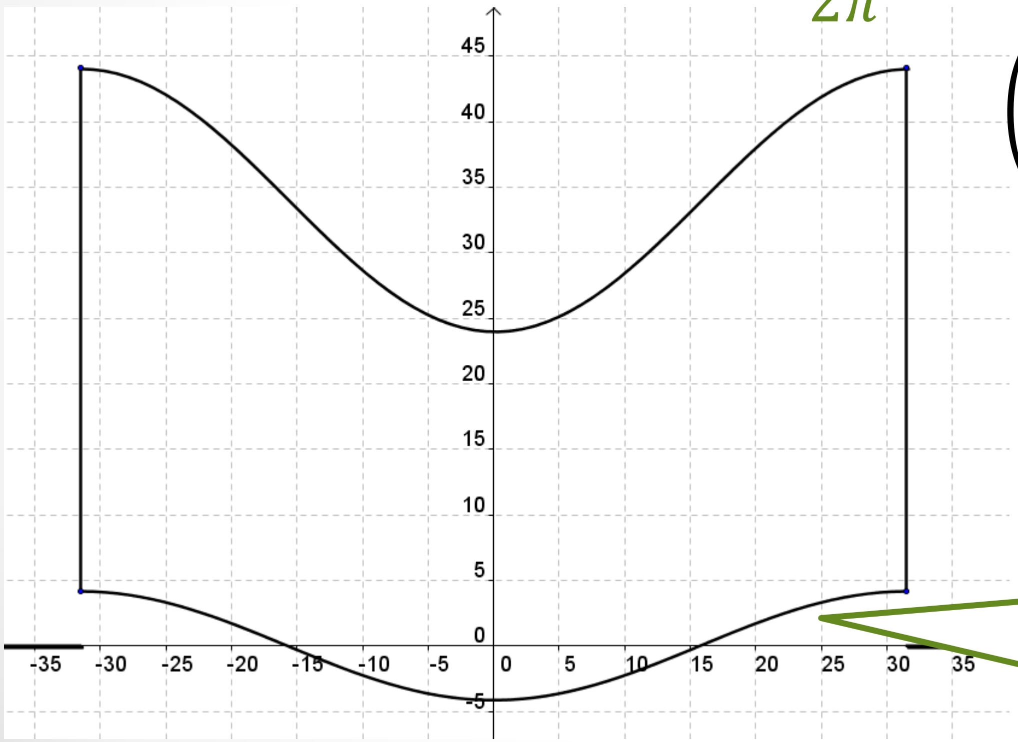


La cheminée de mon collègue

La partie du dessus :

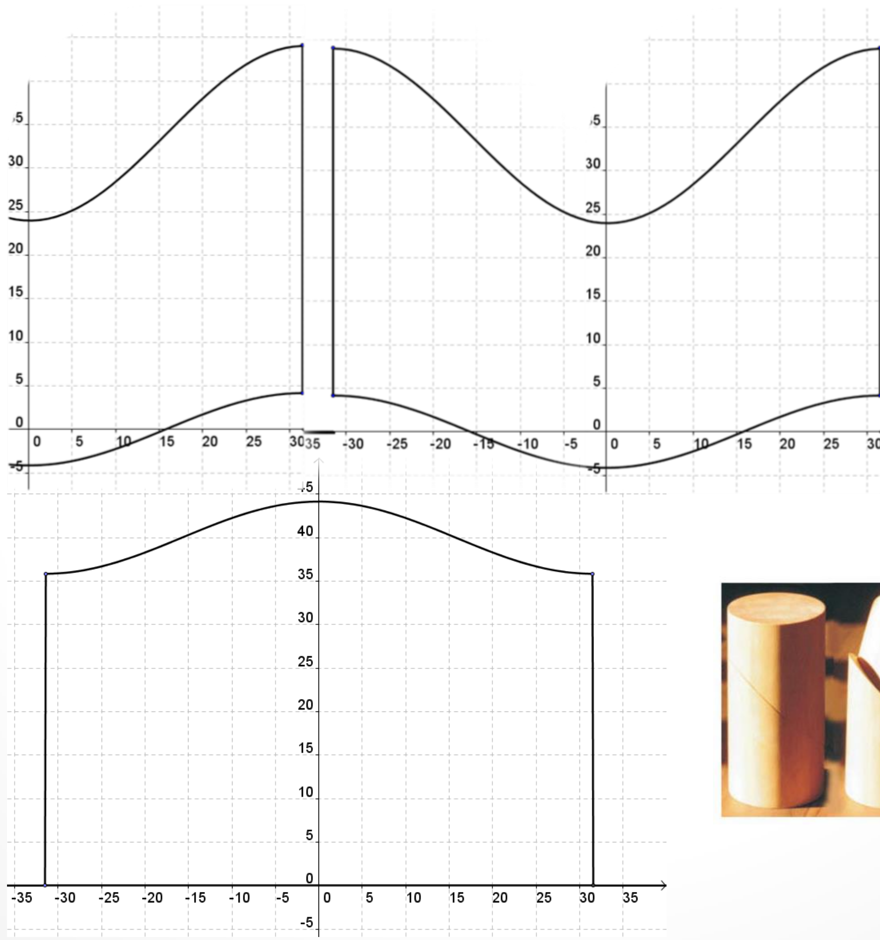
$$y = -\frac{63}{2\pi}\cos\frac{2\,\pi x}{63} + 40 - \frac{63}{2\pi} + \frac{63}{2\pi}\tan 22{,}5°$$

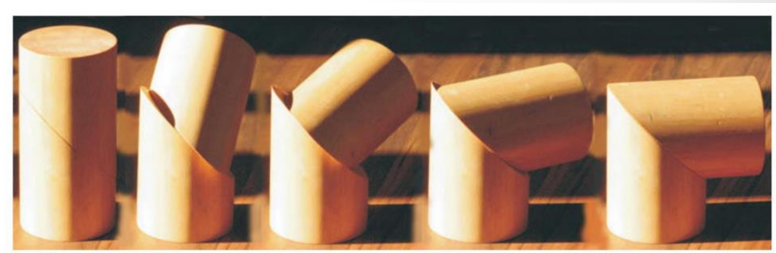
$$\left(-\frac{63}{2} \leq x \leq \frac{63}{2}\right).$$



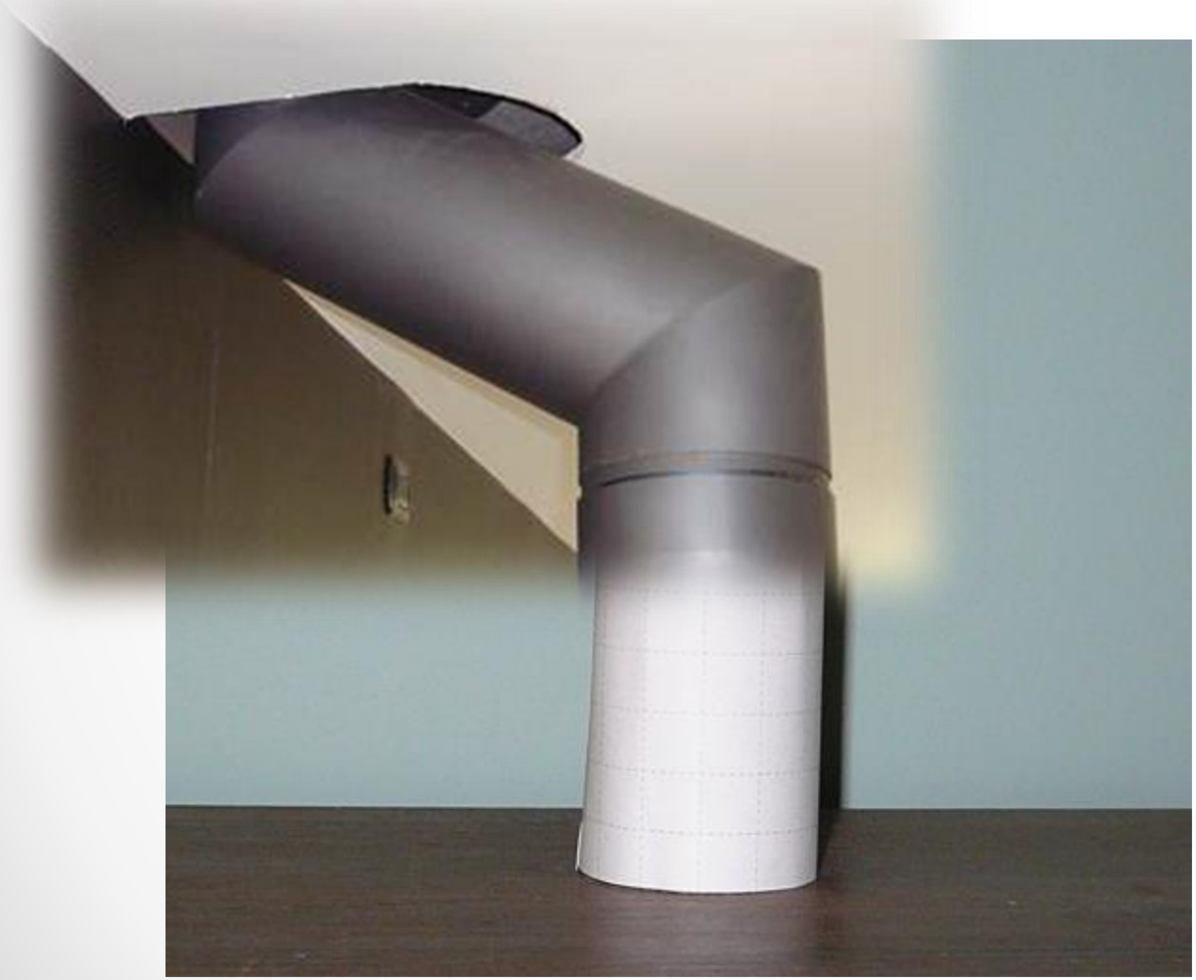
Le contraire de tout-à-l 'heure, sans le terme constant

La cheminée de mon collègue





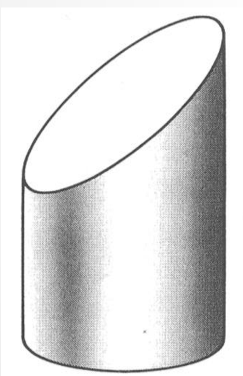
La cheminée de mon collègue

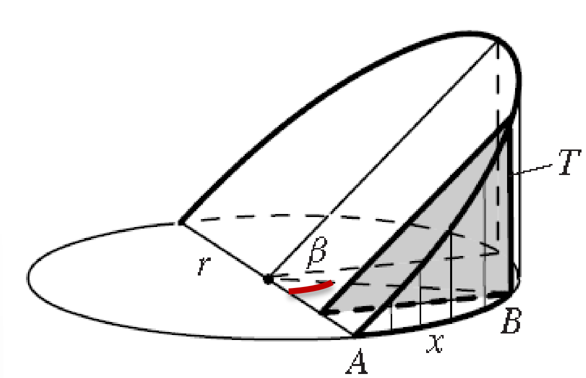


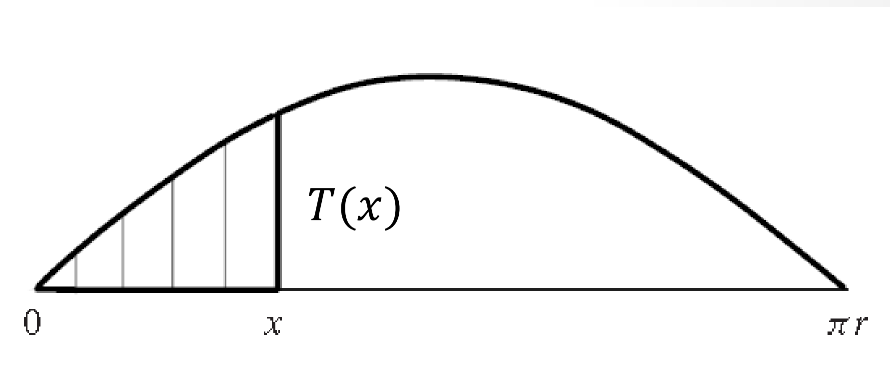
Mais…

Développement d'une section plane de cylindre

Sinusoïde: démontrons-le !

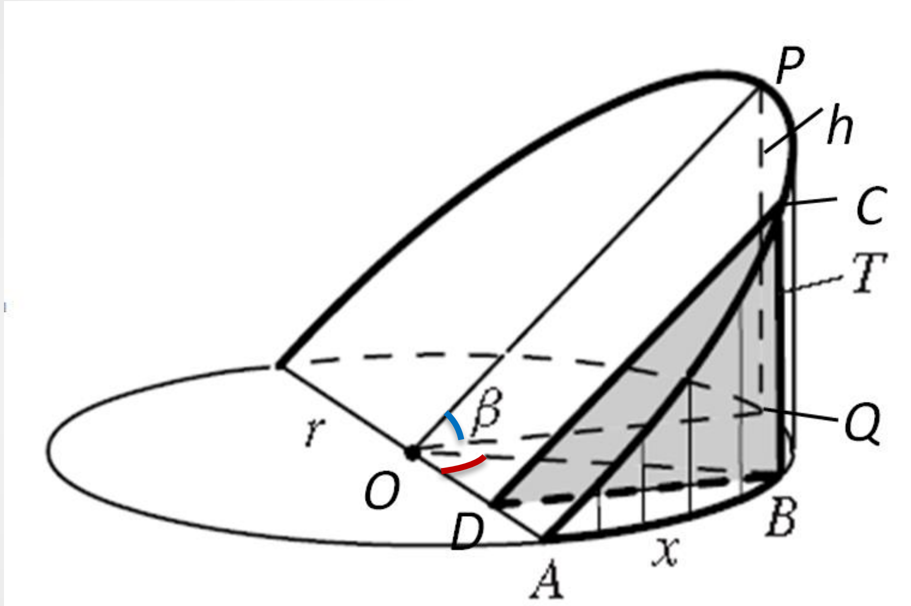






L'angle au centre qui correspond à l'arc AB, c'est $\frac{x}{r}$

Développement d'une section plane de cylindre



$$|DB| = r \sin \frac{x}{r}$$

Triangles semblables DBC et OQP:

$$\frac{T}{h} = \frac{|DB|}{r}$$

$$T = h \sin \frac{x}{r}$$

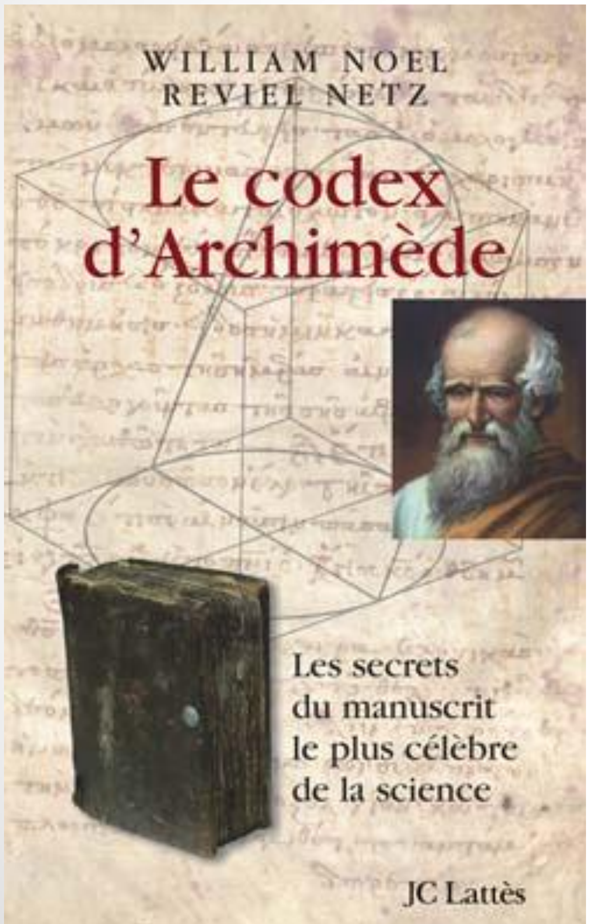
$$T = r \tan \beta \sin \frac{x}{r}$$

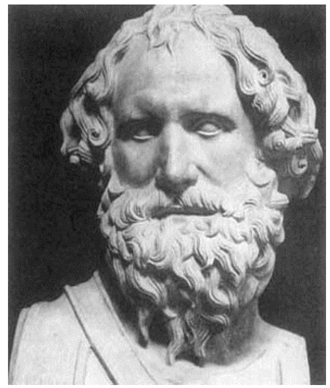
Deuxième partie

Notre collègue Archimède

La Méthode

(Περὶ μηχανικῶν θεωρημάτων πρὸς Ἐρατοσθένη ἔφοδος)





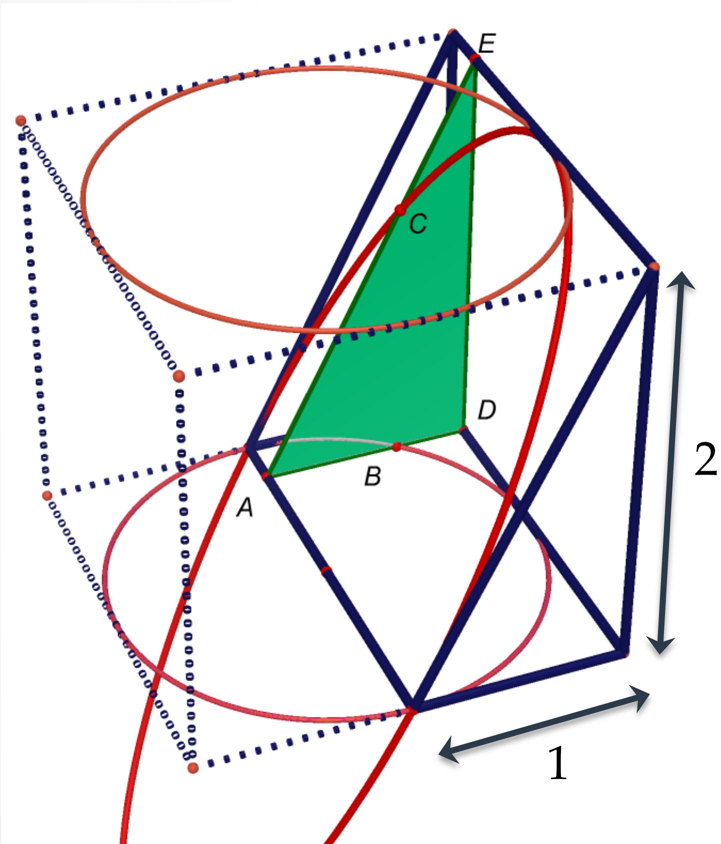
Lettre à Ératosthène dans le Codex C

- découvert en 1906 (palimpseste)
- Étudié par Heiberg
- volé
- vendu en 1998 à Monsieur B pour $ 2 200 000

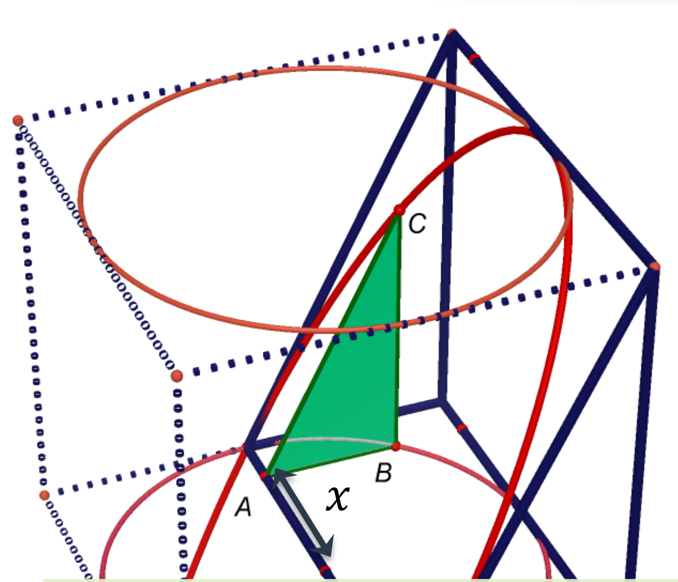
La Méthode

(Περὶ μηχανικῶν θεωρημάτων πρὸς Ἐρατοσθένη ἔφοδος)

Volume d'un segment de cylindre



aire$(ADE) = 1$

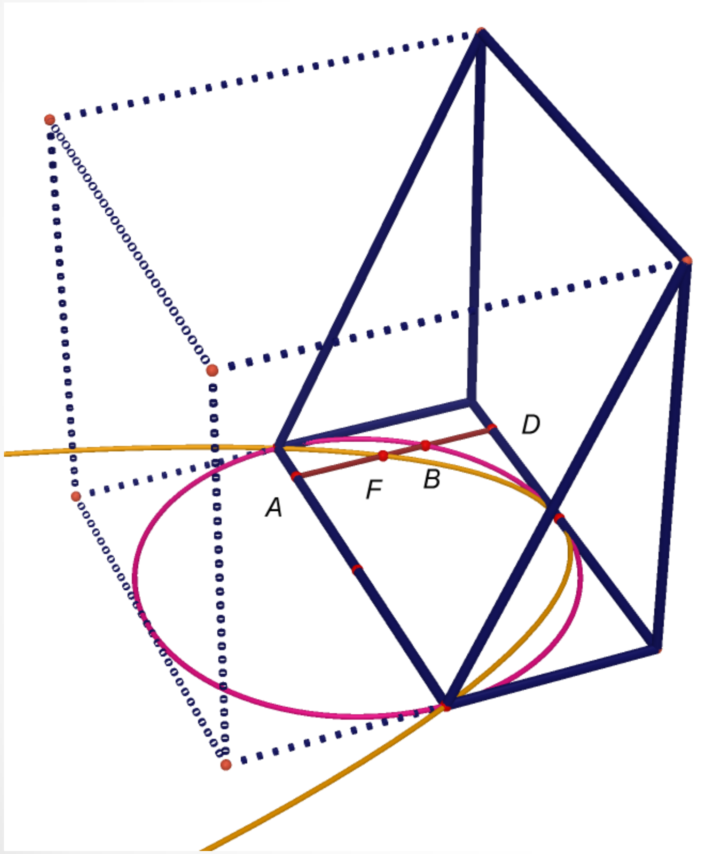


$|AB| = \sqrt{1 - x^2}$

$|BC| = 2\sqrt{1 - x^2}$

aire$(ABC) = 1 - x^2$

Volume d’un segment de cylindre



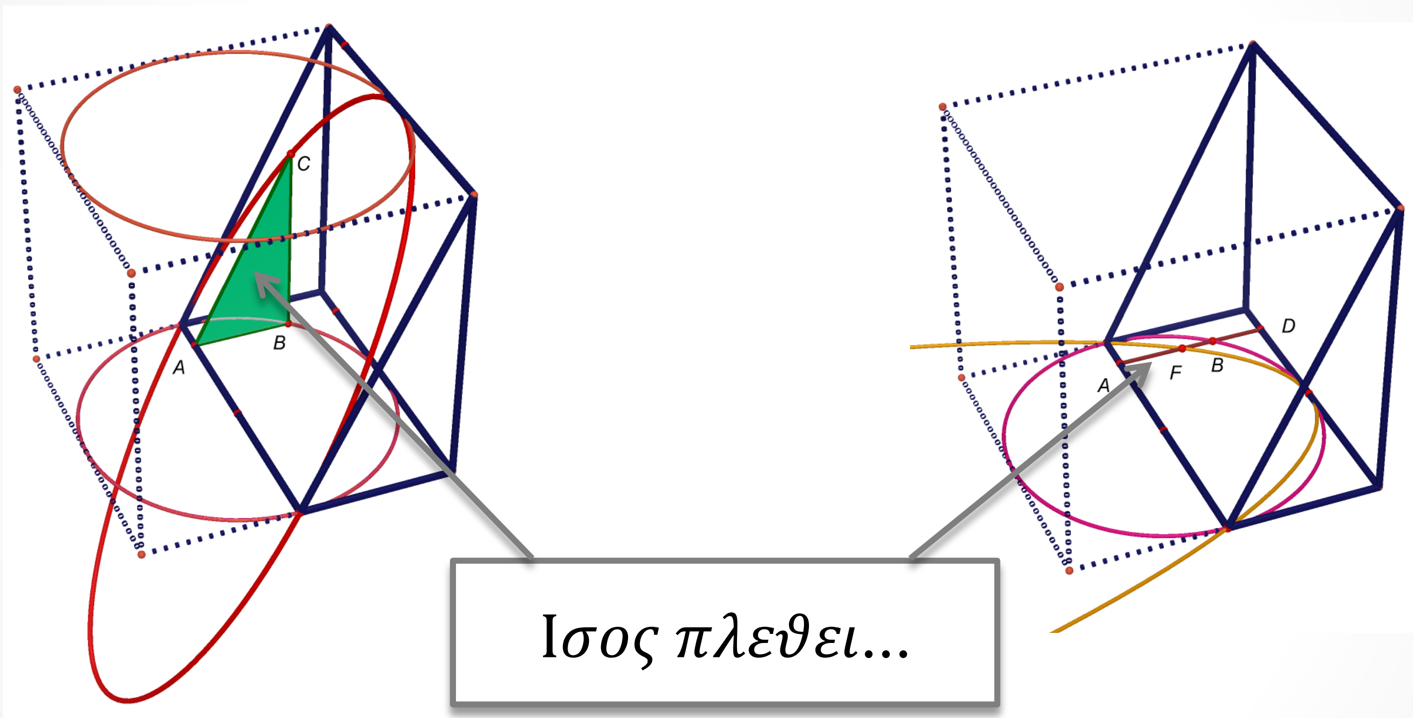
$$\frac{\text{aire}(ABC)}{\text{aire}(ADE)} = \frac{1 - x^2}{1} = \frac{|AF|}{|AD|}$$

$$\Longrightarrow \frac{\text{vol. (segment de cylindre)}}{\text{vol. (prisme)}}$$

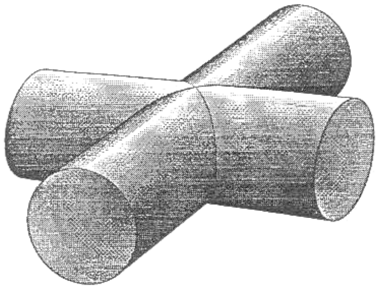
$$= \frac{\text{aire(segment de parabole)}}{\text{aire(rectangle)}} = \frac{2}{3}$$

Résultat préalable « Quadrature de la parabole »

Volume d'un segment de cylindre



Précurseur des intégrales ? Des cardinaux infinis ?



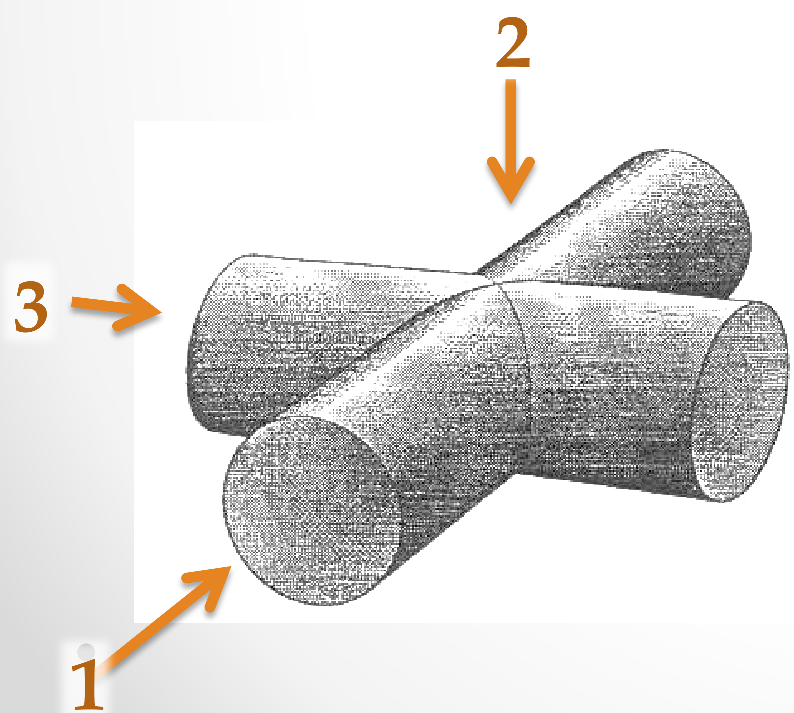
Troisième partie

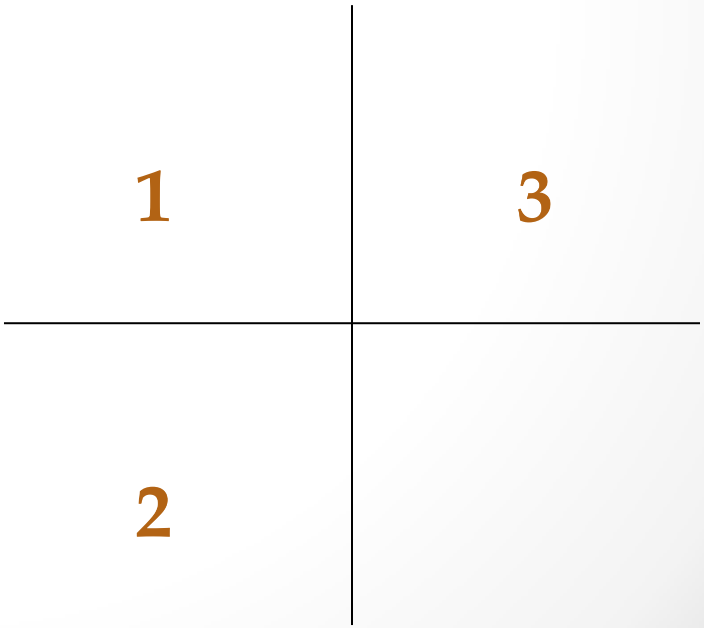
L'intersection de cylindres

Au travail !

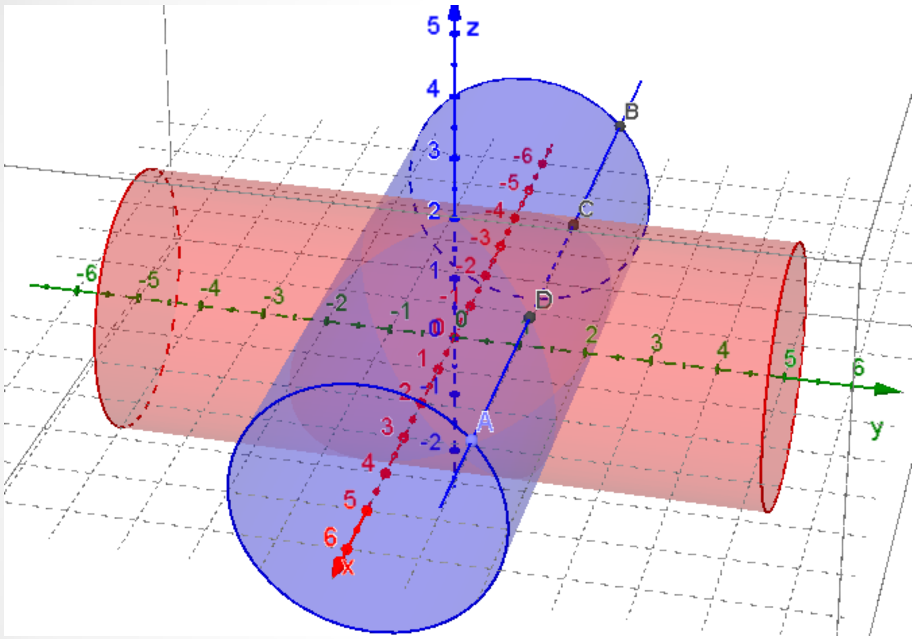
L'intersection de ces deux cylindres (perpendiculaires, même rayon).

- Quelle forme ont les « arêtes » ?
- Représenter en projections orthogonales.





L'intersection de deux cylindres



Arêtes?

$$\begin{cases} x^2 + z^2 = r^2 \\ y^2 + z^2 = r^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + z^2 = r^2 \\ x^2 - y^2 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + z^2 = r^2 \\ (x-y)(x+y) = 0 \end{cases}$$

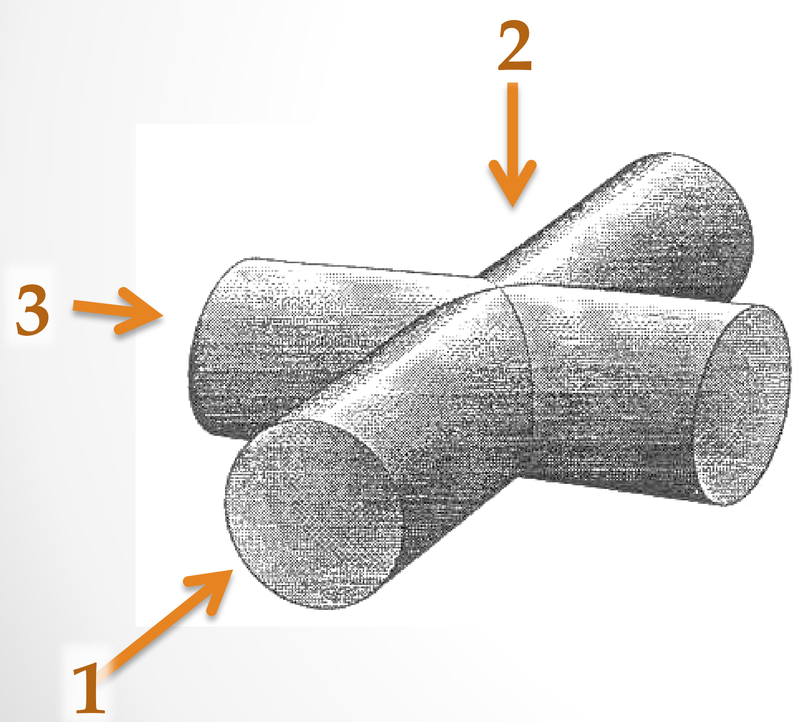
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + z^2 = r^2 \\ x - y = 0 \ \vee \ x + y = 0 \end{cases}$$

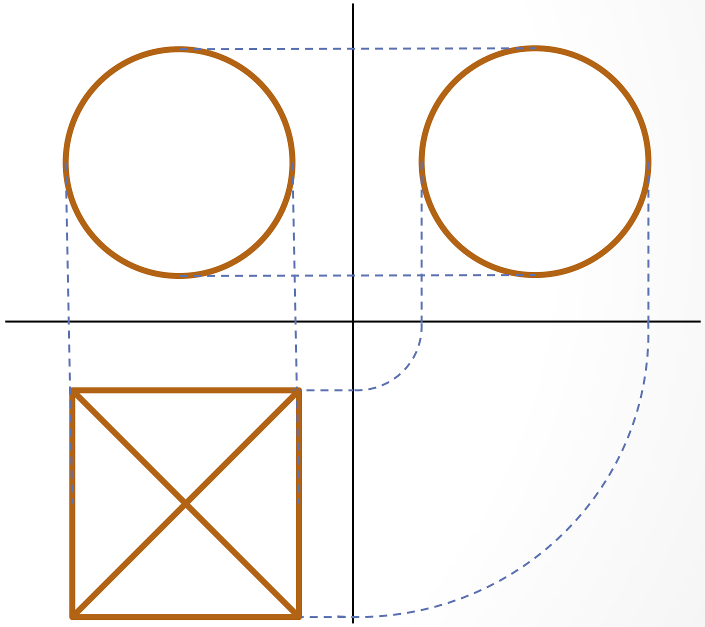
Ou tout-de-suite, par symétrie

- Deux ellipses; rapport des axes: $\sqrt{2}$ (excentricité: $\frac{\sqrt{2}}{2}$).

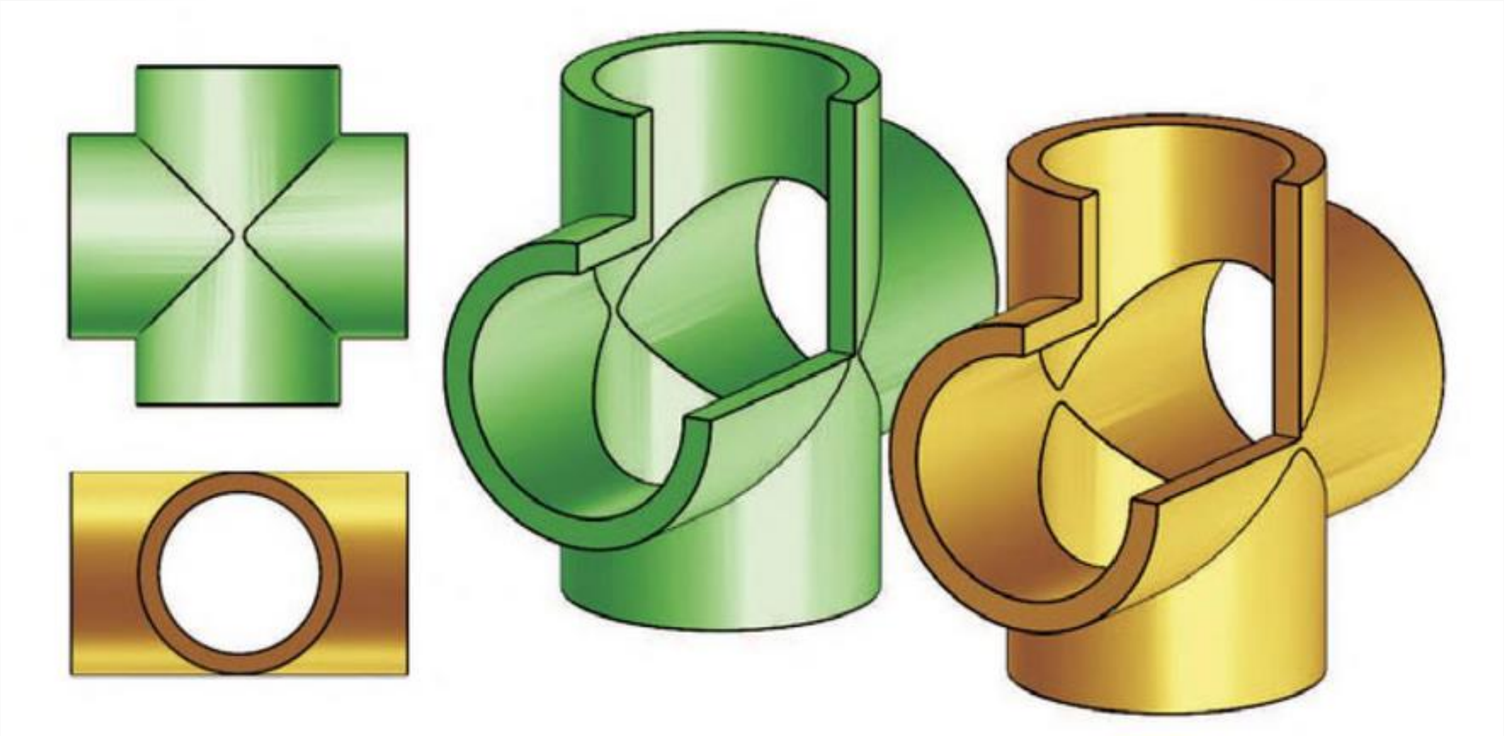
L’intersection de deux cylindres

Projections orthogonales



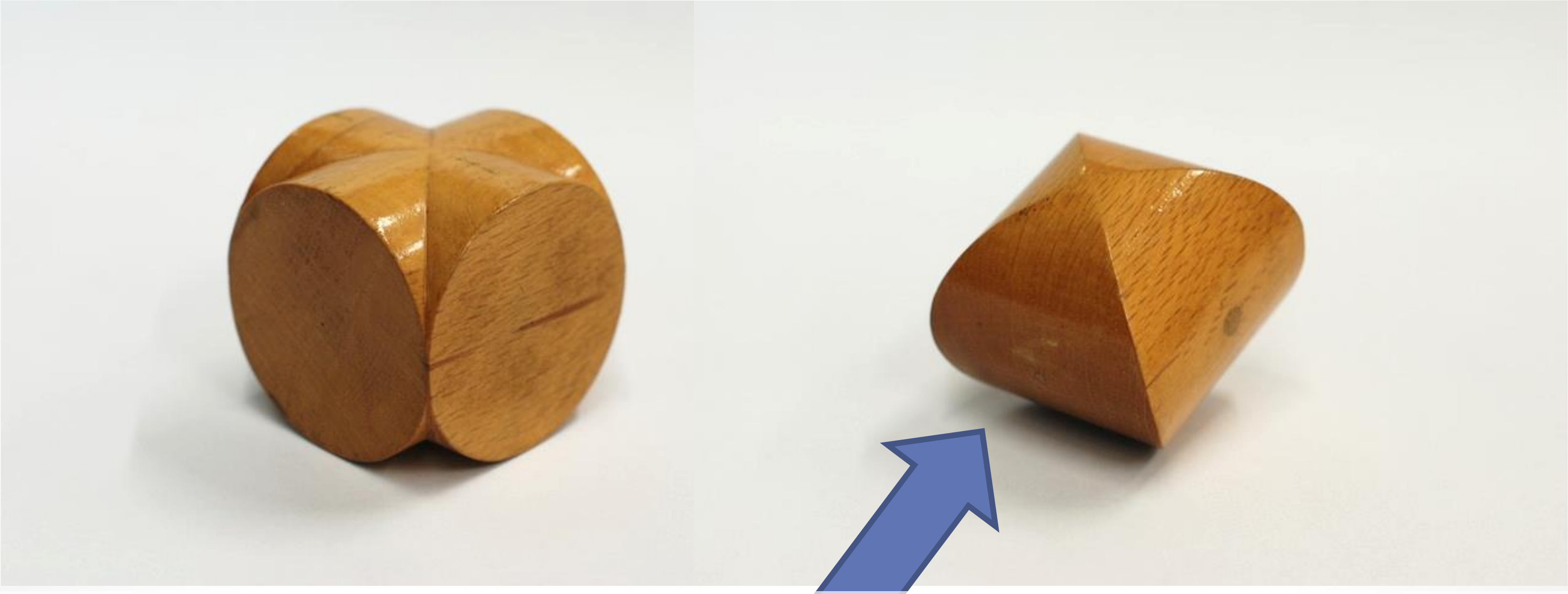


L’intersection de deux cylindres



L'intersection de deux cylindres

L'intersection de deux cylindres



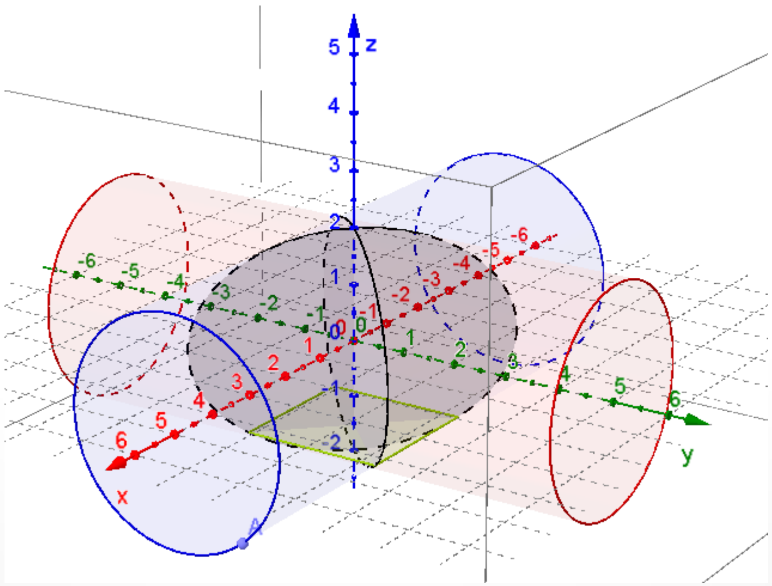
Bicylindre; solide de Steinmetz; équidomoïde; cage à oiseaux

C.P. Steinmetz
1865-1923

Au travail !

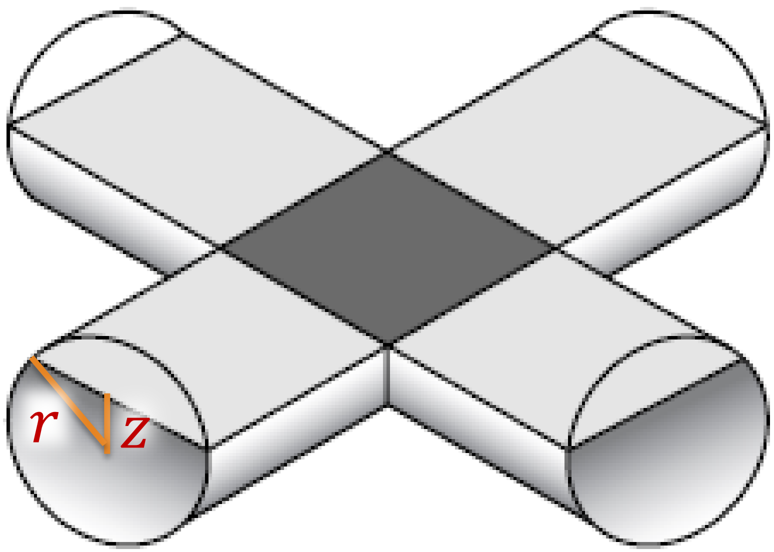
Calculer le volume (en fonction du rayon r).

- Quelles « tranches » ont la forme la plus accessible ?
- Après le calcul : comparer avec d'autres volumes.



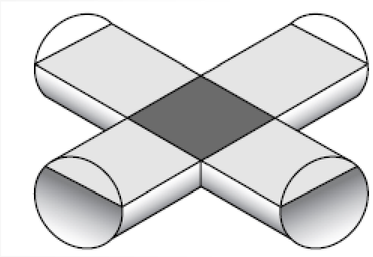
Volume du bicylindre

Les sections « horizontales » sont des carrés !



Le côté du carré à « hauteur » z est $2\sqrt{r^2 - z^2}$.

Volume du bicylindre



$$V = \int_{-r}^{r} \left(2\sqrt{r^2 - z^2}\right)^2 \mathrm{d}z$$

$$= 4 \int_{-r}^{r} (r^2 - z^2)\mathrm{d}z$$

$$= 4 \left[r^2 z - \frac{z^3}{3}\right]_{-r}^{r}$$

$$= 4 \left(r^3 - \frac{r^3}{3} + r^3 - \frac{r^3}{3}\right)$$

$$= \frac{16r^3}{3} \approx 5{,}33\, r^3$$

Pas de π !

Volume du bicylindre

Comparons :

- Cube circonscrit: $V = \frac{24}{3} r^3 = 8r^3$
- Bicylindre: $V = \frac{16}{3} r^3 \approx 5{,}33\, r^3$
- Sphère inscrite: $V = \frac{4\pi}{3} r^3 \approx 4{,}19\, r^3$
- Octaèdre inscrit: $V = \frac{8}{3} r^3 \approx 2{,}67\, r^3$

Moyenne

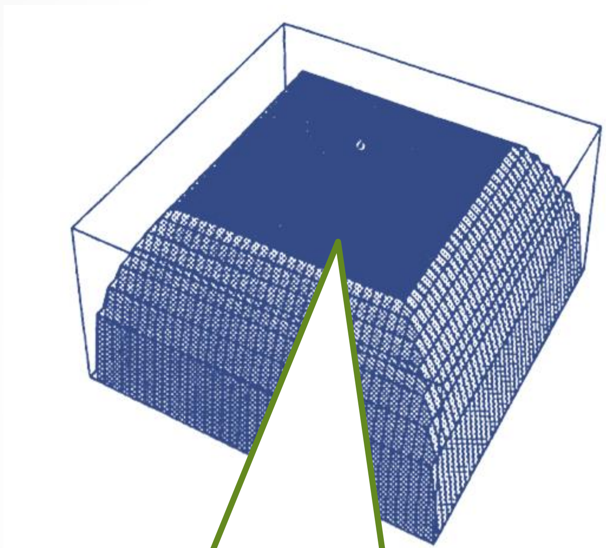
Volume du bicylindre

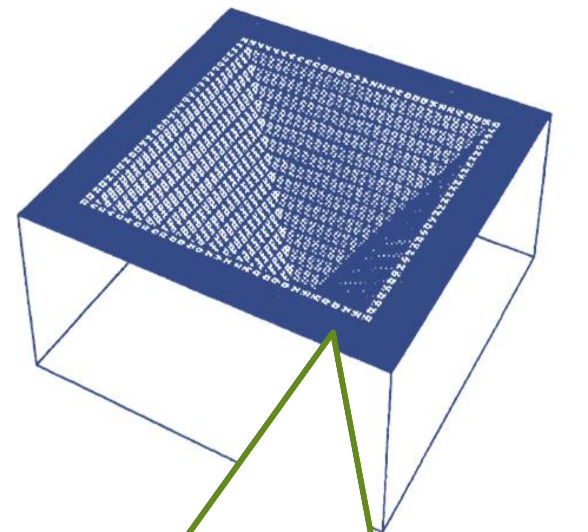
Comparons :

- Cube circonscrit: $V = \frac{24}{3}\, r^3 = 8r^3$
- Bicylindre: $V = \frac{16}{3}\, r^3 \approx 5{,}33\, r^3$ $\quad \frac{2}{3}$
- Sphère inscrite: $V = \frac{4\pi}{3}\, r^3 \approx 4{,}19\, r^3$
- Octaèdre inscrit: $V = \frac{8}{3}\, r^3 \approx 2{,}67\, r^3$ $\quad \frac{1}{3}$

Pouvions-nous le prévoir ?

Volume du bicylindre





Demi-bicylindre coupé à hauteur z

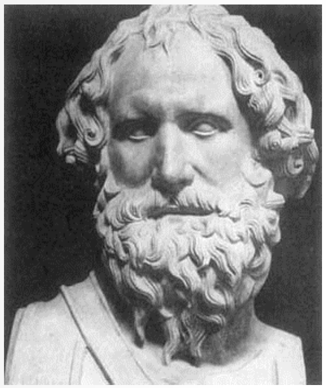
$\text{Aire} = 4(r^2 - z^2)$

Demi-cube moins cône coupé à hauteur z

$\text{Aire} = 4r^2 - 4z^2$

Cavalieri...

Volume du bicylindre



Archimède

Zu Chongzhi
5e siècle

$\frac{2}{3}$ du cube: Archimède mentionne ce résultat dans sa préface à *La Méthode*.

Sa démonstration est perdue.

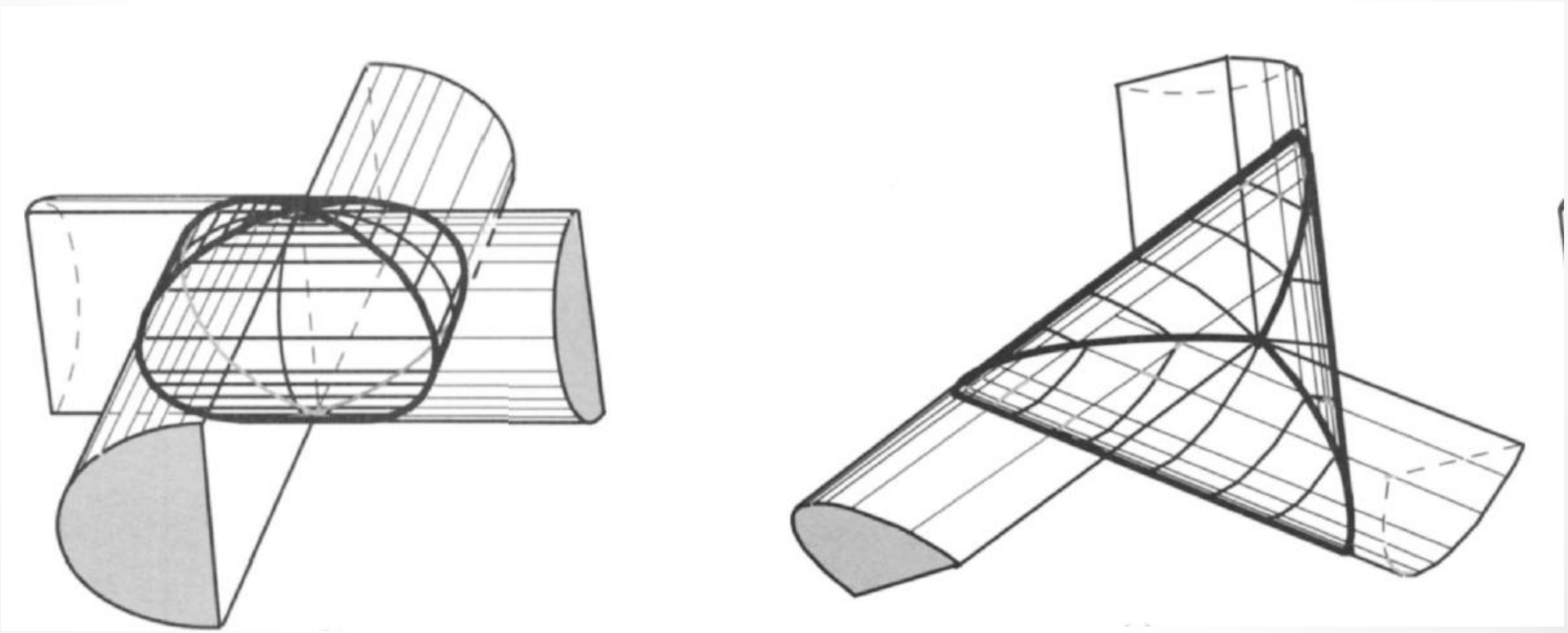
Archimède remarque:

Contrairement aux sphères, cônes, cylindres, cet objet est égal à une figure solide délimitée par des figures planes.

À la maison: l'aire ?

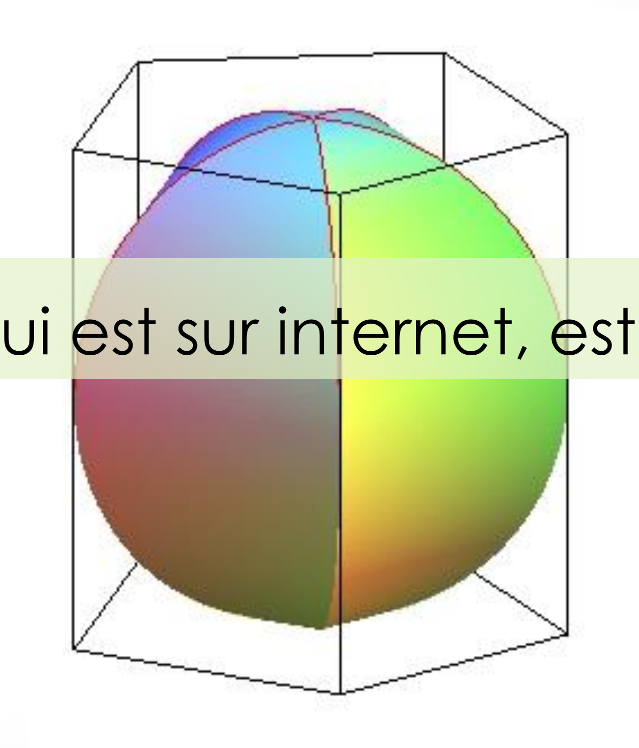
Intersection de plusieurs cylindres « horizontaux »

Généralisation « impaire »



Intersection de plusieurs cylindres « horizontaux »

« Le dôme de la cathédrale de Florence est un demi-équidomoïde pentagonal » (www.mathcurve.com)



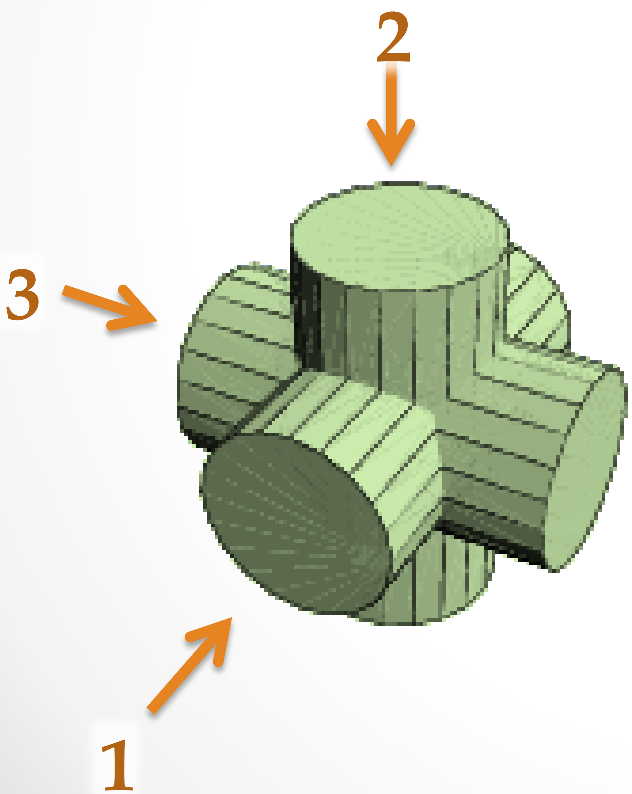
Bien évidemment, tout ce qui est sur internet, est vrai.

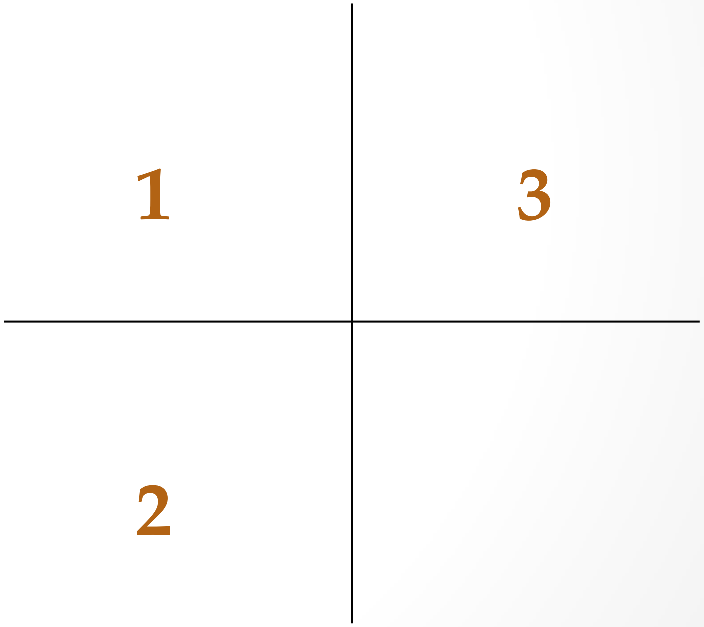
Intersection de plusieurs cylindres « horizontaux »

Intersection de trois cylindres perpendiculaires

« tricylindre »

Projections orthogonales ? Combien de « faces » ?

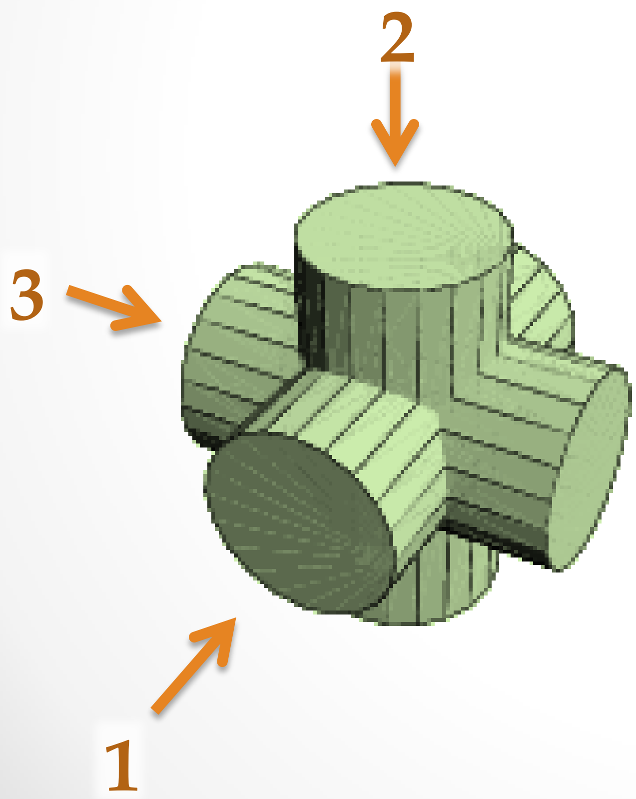


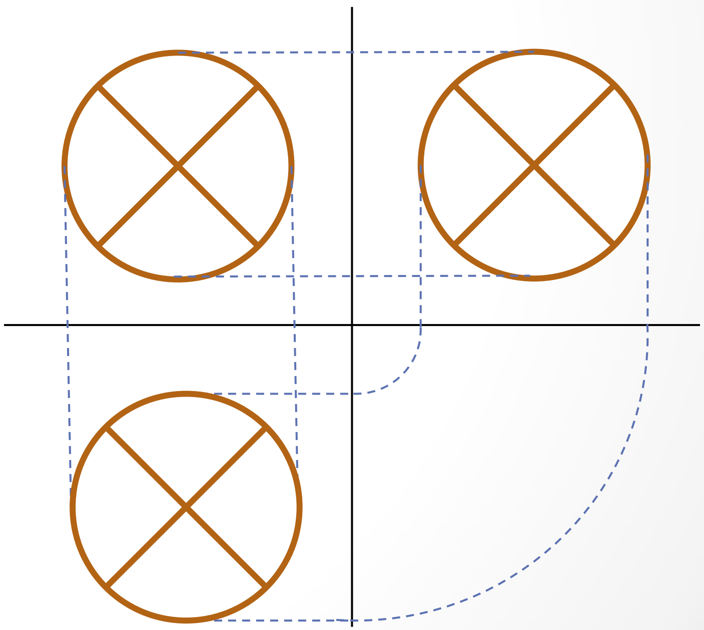


Intersection de trois cylindres perpendiculaires

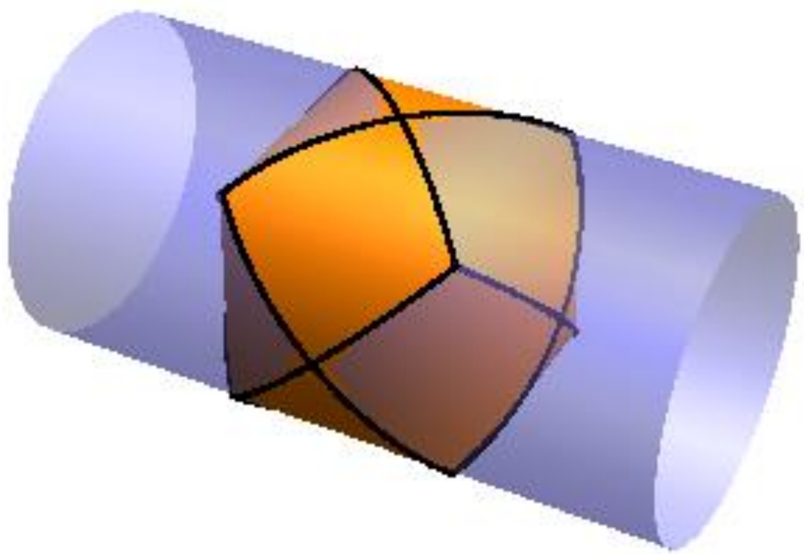
« tricylindre »

Projections orthogonales ? Combien de « faces » ?

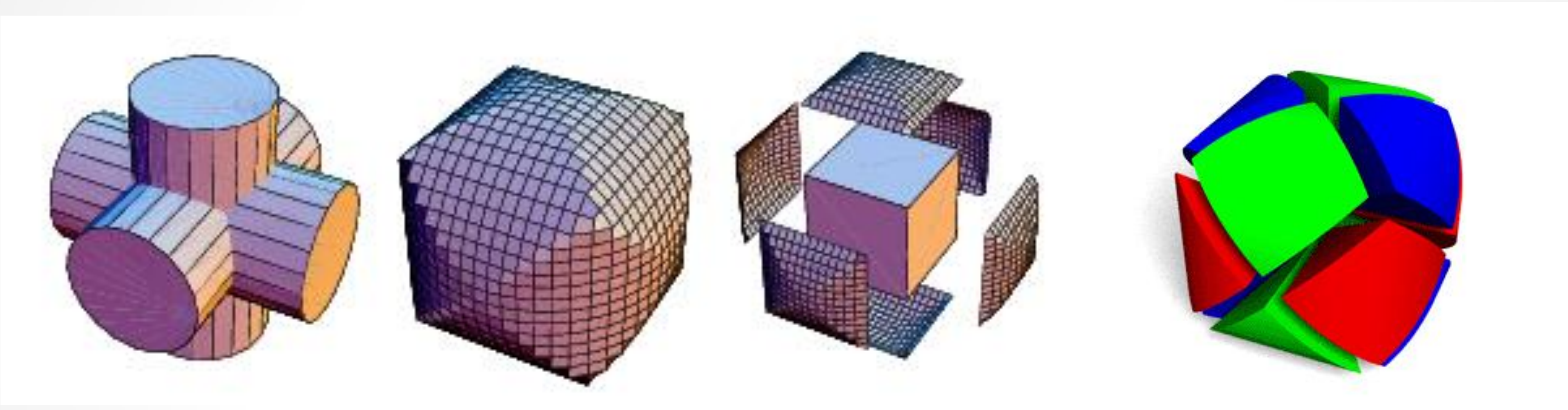




Intersection de trois cylindres perpendiculaires



Intersection de trois cylindres perpendiculaires



Sommets forment un cube.

Un « losange » cylindrique pour chaque arête du cube.

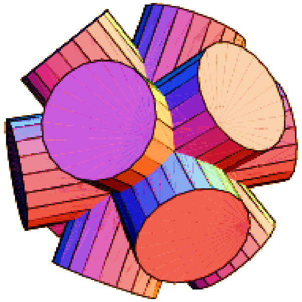
Les arêtes sont des morceaux d'ellipses

Dodécaèdre rhombique (courbé)

En classe ?

- Exercice moins routinier sur les formules de sinusoïdes $y = a\sin\big(b\,(x-c)\big) + d$
- Exercice moins routinier sur les intégrales pour calculer des volumes
- Plusieurs façons de calculer un même volume (avec et sans intégrales)
- Combiner analyse et géométrie dans l'espace
- **Objets mathématiques qui ont une « histoire »**

Merci !



Michel.Roelens@khlim.be

Bibliographie

- Apostol, T.A.,, Mnatsakanian, M.A. (2004). A Fresh Look at the Method of Archimedes. *American Mathematical Monthly 111*, 469-508. https://www.maa.org/sites/default/files/pdf/upload_library/22/Ford/Apostol496-508.pdf
- Cohen, D. (1991), Estimating the volumes of solid figures with curved surfaces, *Mathematics Teacher 84/5*, p. 392-395. http://verjinschi.disted.camosun.bc.ca/courses/M%20101/class%20notes/s7.2%20probi%2064.pdf
- De Temple, D.W. (1994), An Archimedian Property of the Bicylinder. *The college Mathematics Journal, 25*(4), 312-314. http://www.maa.org/sites/default/files/0746834209146.di020763.02p0071v.pdf
- Eggermont, H. en Van den Broeck, L. (2012). De kop van een mouw. In: Wiskunde en breien, *Uitwiskeling 28/1*, 29-31.
- Glaezer, G. (2007). *Geometrie und ihre Anwendungen in Kunst, Natur und Technik*. 2. Auflage, München: Elsevier, Spektrum Akad. Verlag
- Hogendijk, J.P. (2002), The surface area of the bicylinder and Archimedes' Method, *Historia Mathematica* 29, 199-203. http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0315086002923499
- Netz, R., Noel, W. (2007), *De Archimedes-codex, de geheimen van een opzienbarende palimpsest ontsluierd*, Athenaeum-Polak & Van Gennep, Amsterdam. (besproken in Uitwiskeling 25/4 (2009), 59-65.
- Roelens, M. (2013). Ontmoeting van twee cilinders, *Uitwiskeling 29/1*, 9-12.
- Stannard, W.A. (1979). Applying the techniques of Archimedes to the 'birdcage' problem. *Mathematics Teacher 72*, 58-60.