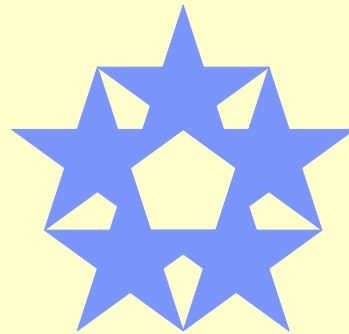


Des systèmes linéaire indéterminés dans le Liber Abaci de Fibonacci

Marie-France Guissard



CREM

mf.guissard@crem.be

Ce que fait le CREM

- Des recherches
- De la formation continue
- Des séminaires et des conférences
- Un centre de documentation
- Des publications
- Des logiciels

Contacts :

www.crem.be

info@crem.be

Dernière recherche

Math & Manips

*Comment introduire des manipulations dans la classe
pour favoriser la construction des apprentissages*

**Systemes lineaires indeterminés
dans le Liber Abaci de
Leonardo Fibonacci**

**Statue de
Leonardo
Fibonacci
dans le
Campo Santo
à Pise**

(1170 - 1240)



Son œuvre

Liber Abaci, rédigé en 1202, revu en 1228.

Practica Geometriae, traité de géométrie et de trigonométrie écrit en 1220.

Flos super solutionibus quarundam quaestionum ad numerum et ad geometriam pertinentium, 1225, recueil de solutions à quinze problèmes.

Epistola suprascripti Leonardi ad Magistrum Theodorum, vers 1225, lettre adressée à l'astrologue Maître Théodore, deux problèmes y sont résolus.

Liber Quadratorum, le livre des nombres carrés écrit en 1225, contient vingt propriétés des nombres carrés qui permettent de résoudre un problème du second degré.

Deuxième version 1228

Incipit lib. Abaci Compositus alconardo filio bonaci pisano An
Anno. M^o cc^o q^o **S**IASISTUS nabi dñe in magister Michael scote su
me philosopho. Ut libri te nro que dñdū cōposu nob trāser
ber. Unde nre obsecratio postulat ipm substitutione plantane
uagane. tūm hñore et alior mltor utilitate coirei. In
cūm correctioe quedam necessaria auctori et qđam supflua
releant. In quo plenā nūor doctrinā editor iuxta modū mtoz q̄ modū
i ipsa scia pstantioe. Et que arismetica 7 geometria scientia ff
connece. Et suffragatione sibi ad iūce non potest te nro plenā tūm de
trina mli interseantur geometrica quedā. uel ar geometria spectamina
que hic tñ iuxta modū mī p pantiur q̄ modū est supfluo ex multis pro
bationibz et demonstrationibz que figuris geometricis fiūt. De qđ
i oho libro que te pmetica Geometrie composui. Et qđ ar Geometria p
tūm et alia plura copiosio explicam singula subiecto appretatio
huc geometrie demonstratione. Dñe hic liber magis

Ici commence le liber Abaci

Composé par Leonard fils de Bonaci Pisan en l'année M^o cc^o ij^o

Lorsque mon père fut nommé, loin de la patrie, scribe officiel à la douane de Bejaïa pour les commerçants de Pise, me faisant venir auprès de lui, alors que j'étais enfant, ayant réfléchi à l'intérêt et aux avantages futurs que j'en tirerais, après m'avoir intéressé durant quelques temps à l'arithmétique, il décida que je resterais et que je suivrais des cours. Là, introduit, grâce à un maître admirable, dans l'art du calcul au moyen des neuf figures indiennes, la science de cet art me plut à tel point que je réalisai que, quelque matière que l'on étudiât, de différentes façons, en Égypte, Syrie, Grèce et Provence, j'acquis beaucoup plus en ces lieux de haut négoce, grâce à une étude approfondie, et j'y appris à défendre mes idées en examinant les différents points d'une question.

Contenu du Liber Abaci

Chap 1 à 7 : écriture des nombres et manières d'effectuer les opérations à l'aide des « neuf figures indiennes »

Chap 8 : achat et vente des marchandises

Chap 9 : règles pour troquer les marchandises

Chap 10 : les sociétés, règles de partage des gains entre les associés

Chap 11 : compensation des monnaies

Problème d'oiseaux

Chap 12 : récréations mathématiques

Deux hommes et une bourse

Chap 13 : règle de la double fausse position

Quatre hommes et une bourse

Chap 14 : extraction des radicaux carrés et cubiques

Chap 15 : questions de géométrie et algèbre

**Des combinaisons linéaires
pour résoudre
un problème d'oiseaux**

De homine qui emit aves triginta trium generum pro denariis 30

canon. l. 12 c. 8 De homine qui emit aves triginta trium generum pro denariis 30.
Quidam enim emit pro denario 30 generum aves. scilicet columbas et passeres. Item pro denario 30
et columbas et passeres pro denario. scilicet passeres pro denario. Quoniam quot aves emit pro denario
quot generum. dicitur de pane et gabata. Sic habeo monum ad 1/2 et ad 1/4 et ad 1/8 et ad 1/16 et ad 1/32 et ad 1/64 et ad 1/128 et ad 1/256 et ad 1/512 et ad 1/1024 et ad 1/2048 et ad 1/4096 et ad 1/8192 et ad 1/16384 et ad 1/32768 et ad 1/65536 et ad 1/131072 et ad 1/262144 et ad 1/524288 et ad 1/1048576 et ad 1/2097152 et ad 1/4194304 et ad 1/8388608 et ad 1/16777216 et ad 1/33554432 et ad 1/67108864 et ad 1/134217728 et ad 1/268435456 et ad 1/536870912 et ad 1/1073741824 et ad 1/2147483648 et ad 1/4294967296 et ad 1/8589934592 et ad 1/17179869184 et ad 1/34359738368 et ad 1/68719476736 et ad 1/137438953472 et ad 1/274877906944 et ad 1/549755813888 et ad 1/1099511627776 et ad 1/2199023255552 et ad 1/4398046511104 et ad 1/8796093022208 et ad 1/17592186044416 et ad 1/35184372088832 et ad 1/70368744177664 et ad 1/140737488355328 et ad 1/281474976710656 et ad 1/562949953421312 et ad 1/1125899906842624 et ad 1/2251799813685248 et ad 1/4503599627370496 et ad 1/9007199254740992 et ad 1/18014398509481984 et ad 1/36028797018963968 et ad 1/72057594037927936 et ad 1/144115188075855872 et ad 1/288230376151711744 et ad 1/576460752303423488 et ad 1/1152921504606846976 et ad 1/2305843009213693952 et ad 1/4611686018427387904 et ad 1/9223372036854775808 et ad 1/18446744073709551616 et ad 1/36893488147419103232 et ad 1/73786976294838206464 et ad 1/147573952589676412928 et ad 1/295147905179352825856 et ad 1/590295810358705651712 et ad 1/1180591620717411303424 et ad 1/2361183241434822606848 et ad 1/4722366482869645213696 et ad 1/9444732965739290427392 et ad 1/18889465931478580854784 et ad 1/37778931862957161709568 et ad 1/75557863725914323419136 et ad 1/151115727451828646838272 et ad 1/302231454903657293676544 et ad 1/604462909807314587353088 et ad 1/1208925819614629174706176 et ad 1/2417851639229258349412352 et ad 1/4835703278458516698824704 et ad 1/9671406556917033397649408 et ad 1/19342813113834066795298816 et ad 1/38685626227668133590597632 et ad 1/77371252455336267181195264 et ad 1/154742504910672534362390528 et ad 1/309485009821345068724781056 et ad 1/618970019642690137449562112 et ad 1/1237940039285380274899124224 et ad 1/2475880078570760549798248448 et ad 1/4951760157141521099596496896 et ad 1/9903520314283042199192993792 et ad 1/19807040628566084398385987584 et ad 1/39614081257132168796771975168 et ad 1/79228162514264337593543950336 et ad 1/158456325028528675187087900672 et ad 1/316912650057057350374175801344 et ad 1/633825300114114700748351602688 et ad 1/1267650600228229401496703205376 et ad 1/2535301200456458802993406410752 et ad 1/5070602400912917605986812821504 et ad 1/10141204801825835211973625643008 et ad 1/20282409603651670423947251286016 et ad 1/40564819207303340847894502572032 et ad 1/81129638414606681695789005144064 et ad 1/162259276829213363391578010288128 et ad 1/324518553658426726783156020576256 et ad 1/649037107316853453566312041152512 et ad 1/1298074214633706907132624082305024 et ad 1/2596148429267413814265248164610048 et ad 1/5192296858534827628530496329220096 et ad 1/10384593717069655257060992658440192 et ad 1/20769187434139310514121985316880384 et ad 1/41538374868278621028243970633760768 et ad 1/83076749736557242056487941267521536 et ad 1/166153499473114484112975882535043072 et ad 1/332306998946228968225951765070086144 et ad 1/664613997892457936451903530140172288 et ad 1/1329227995784915872903807060280344576 et ad 1/2658455991569831745807614120560689152 et ad 1/5316911983139663491615228241121378304 et ad 1/10633823966279326983230456482242756608 et ad 1/21267647932558653966460912964485513216 et ad 1/42535295865117307932921825928971026432 et ad 1/85070591730234615865843651857942052864 et ad 1/170141183460469231731687303715884105728 et ad 1/340282366920938463463374607431768211456 et ad 1/680564733841876926926749214863536422912 et ad 1/1361129467683753853853498429727072845824 et ad 1/2722258935367507707706996859454145691648 et ad 1/5444517870735015415413993718908291383296 et ad 1/10889035741470030830827987437816582766592 et ad 1/21778071482940061661655974875633165533184 et ad 1/43556142965880123323311949751266331066368 et ad 1/87112285931760246646623899502532662132736 et ad 1/174224571863520493293247799005065324265472 et ad 1/348449143727040986586495598010130648530944 et ad 1/696898287454081973172991196020261297061888 et ad 1/1393796574908163946345982392040522594123776 et ad 1/2787593149816327892691964784081045188247552 et ad 1/5575186299632655785383929568162090376495104 et ad 1/11150372599265311570767859136324180752990208 et ad 1/22300745198530623141535718272648361505980416 et ad 1/44601490397061246283071436545296723011960832 et ad 1/89202980794122492566142873090593446023921664 et ad 1/178405961588244985132285746181186892047843328 et ad 1/356811923176489970264571492362373784095686656 et ad 1/713623846352979940529142984724747568191373312 et ad 1/1427247692705959881058285969449495136382746624 et ad 1/2854495385411919762116571938898990272765493248 et ad 1/5708990770823839524233143877797980545530986496 et ad 1/11417981541647679048466287755595961091061972992 et ad 1/22835963083295358096932575511191922182123945984 et ad 1/45671926166590716193865151022383844364247891968 et ad 1/91343852333181432387730302044767688728495783936 et ad 1/182687704666362864775460604089535377456991567872 et ad 1/365375409332725729550921208179070754913983135744 et ad 1/730750818665451459101842416358141509827966271488 et ad 1/1461501637330902918203684832716283019655932542976 et ad 1/2923003274661805836407369665432566039311865085952 et ad 1/5846006549323611672814739330865132078623730171904 et ad 1/11692013098647223345629478661730264157247460343808 et ad 1/23384026197294446691258957323460528314494920687616 et ad 1/46768052394588893382517914646921056628989841375232 et ad 1/93536104789177786765035829293842113257979682750464 et ad 1/187072209578355573530071658587684226515959365500928 et ad 1/374144419156711147060143317175368453031918731001856 et ad 1/748288838313422294120286634350736906063837462003712 et ad 1/1496577676626844588240573268701473812127674924007424 et ad 1/2993155353253689176481146537402947624255349848014848 et ad 1/5986310706507378352962293074805895248510699696029696 et ad 1/11972621413014756705924586149611790497021399392059392 et ad 1/23945242826029513411849172299223580994042798784118784 et ad 1/47890485652059026823698344598447161988085597568237568 et ad 1/95780971304118053647396689196894323976171195136475136 et ad 1/191561942608236107294793378393788647952342390272950272 et ad 1/383123885216472214589586756787577295904684780545900544 et ad 1/766247770432944429179173513575154591809369561091801088 et ad 1/1532495540865888858358347027150309183618739122183602176 et ad 1/3064991081731777716716694054300618367237478244367204352 et ad 1/6129982163463555433433388108601236734474956488734408704 et ad 1/12259964326927110866866776217202473468949912977468817408 et ad 1/24519928653854221733733552434404946937899825954937634816 et ad 1/49039857307708443467467104868809893875799651909875269632 et ad 1/98079714615416886934934209737619787751599303819750539264 et ad 1/196159429230833773869868419475239575503198607639501078528 et ad 1/392318858461667547739736838950479151006397215279002157056 et ad 1/784637716923335095479473677900958302012794430558004314112 et ad 1/1569275433846670190958947355801916604025588861116008628224 et ad 1/3138550867693340381917894711603833208051177722232017256448 et ad 1/6277101735386680763835789423207666416102355444464034512896 et ad 1/12554203470773361527671578846415332832204710888928069025792 et ad 1/25108406941546723055343157692830665664409421777856138051584 et ad 1/50216813883093446110686315385661331328818843555712276103168 et ad 1/100433627766186892221372630771322662657637687111424552206336 et ad 1/200867255532373784442745261542645325315275374222849104412672 et ad 1/401734511064747568885490523085290650630550748445698208825344 et ad 1/803469022129495137770981046170581301261101496891396417650688 et ad 1/1606938044258990275541962092341162602522202993782792835301376 et ad 1/3213876088517980551083924184682325205044405987565585670602752 et ad 1/6427752177035961102167848369364650410088811975131171341205504 et ad 1/12855504354071922204335696738729300820177623950262342682411008 et ad 1/25711008708143844408671393477458601640355247900524685364822016 et ad 1/51422017416287688817342786954917203280710495801049370729644032 et ad 1/102844034832575377634685573909834406561420991602098741459288064 et ad 1/205688069665150755269371147819668813122841983204197482918576128 et ad 1/411376139330301510538742295639337626245683966408394965837152256 et ad 1/822752278660603021077484591278675252491367932816789931674304512 et ad 1/1645504557321206042154969182557350504982735865633579863348609024 et ad 1/3291009114642412084309938365114701009965471731267159726697218048 et ad 1/6582018229284824168619876730229402019930943462534319453394436096 et ad 1/13164036458569648337239753460458804039861886925068638906788872192 et ad 1/26328072917139296674479506920917608079723773850137277813577744384 et ad 1/52656145834278593348959013841835216159447547700274555627155488768 et ad 1/105312291668557186697918027683670432318895095400549111254310977536 et ad 1/210624583337114373395836055367340864637790190801098222508621955072 et ad 1/421249166674228746791672110734681729275580381602196445017243910144 et ad 1/842498333348457493583344221469363458551160763204392890034487820288 et ad 1/1684996666696914987166688442938726917102321526408785780068975640576 et ad 1/3369993333393829974333376885877453834204643052817571560137951281152 et ad 1/6739986666787659948666753771754907668409286105635143120275902562304 et ad 1/13479973333575319897333507543509815336818572211270286240551805124608 et ad 1/26959946667150639794667015087019630673637144422540572481103610249216 et ad 1/53919893334301279589334030174039261347274288845081144962207220498432 et ad 1/107839786668602559178668060348078522694548577690162289924414440996864 et ad 1/215679573337205118357336120696157045389097155380324579848828881993728 et ad 1/431359146674410236714672241392314090778194310760649159697657763987456 et ad 1/862718293348820473429344482784628181556388621521298319395315527974912 et ad 1/1725436586697640946858688965569256363112777243042596638790631055949824 et ad 1/3450873173395281893717377931138512726225554486085193277581262111899648 et ad 1/6901746346790563787434755862277025452451108972170386555162524223799296 et ad 1/13803492693581127574869511724554050904902217944340773110325048447598592 et ad 1/27606985387162255149739023449108101809804435888681546220650096895197184 et ad 1/55213970774324510299478046898216203619608871777363092441300193790394368 et ad 1/110427941548649020598956093796432407239217743554726184882600387580788736 et ad 1/220855883097298041197912187592864814478435487109452369765200775161577472 et ad 1/441711766194596082395824375185729628956870974218904739530401550323154944 et ad 1/883423532389192164791648750371459257913741948437809479060803100646309888 et ad 1/1766847064778384329583297500742918515827483896875618958121606201292619776 et ad 1/3533694129556768659166595001485837031654967793751237916243212402585239552 et ad 1/7067388259113537318333190002971674063309935587502475832486424805170479104 et ad 1/14134776518227074636666380005943348126619871175004951664972849610340958208 et ad 1/28269553036454149273332760011886696253239742350009903329945699220681916416 et ad 1/56539106072908298546665520023773392506479484700019806659891398441363832832 et ad 1/113078212145816597093331040047546785012958969400039613319782796882727665664 et ad 1/226156424291633194186662080095093570025917938800079226639565593765455331328 et ad 1/452312848583266388373324160190187140051835877600158453279131187530910662656 et ad 1/904625697166532776746648320380374280103671755200316906558262375061821325312 et ad 1/1809251394333065553493296640760748560207343510400633813116524750123642650624 et ad 1/3618502788666131106986593281521497120414687020801267626233049500247285301248 et ad 1/7237005577332262213973186563042994240829374041602535252466099000494570602496 et ad 1/14474011154664524427946373126085988481658748083205070504932198000989141204992 et ad 1/28948022309329048855892746252171976963317496166410141009864396001978282409984 et ad 1/57896044618658097711785492504343953926634992332820282019728792003956564819968 et ad 1/115792089237316195423570985008687907853269984665640564039457584007913129639936 et ad 1/231584178474632390847141970017375815706539969331281128078915168015826259279872 et ad 1/463168356949264781694283940034751631413079938662562256157830336031652518559744 et ad 1/926336713898529563388567880069503262826159877325124512315660672063305037119488 et ad 1/1852673427797059126777135760139006525652319754650249024631321344126610074238976 et ad 1/3705346855594118253554271520278013051304639509300498049262642688253220148477952 et ad 1/7410693711188236507108543040556026102609279018600996098525285376506440296955904 et ad 1/14821387422376473014217086081112052205218558037201992197050570753012880593911808 et ad 1/29642774844752946028434172162224104410437116074403984394101141506025761187823616 et ad 1/59285549689505892056868344324448208820874232148807968788202283012051522375647232 et ad 1/118571099379011784113736688648896417641748464297615937576404566024103044751294464 et ad 1/237142198758023568

De l'homme qui a acheté trente oiseaux de trois espèces pour 30 deniers

Quelqu'un a acheté 30 oiseaux pour 30 deniers, parmi lesquels il y a des perdrix, des colombes et des moineaux. En fait, il a acheté les perdrix pour 3 deniers, les colombes pour 2 et 2 moineaux pour 1 denier, à savoir 1 moineau pour 1/2 denier. On demande combien d'oiseaux de chaque espèce il a achetés.

$$x + y + z = 30$$

$$3x + 2y + \frac{1}{2}z = 30$$

Divise 30 deniers par 30 oiseaux, il viendra 1 denier. Je dis donc que j'ai de l'argent-monnaie à $1/2$ et à 2 et à 3 ; et je veux faire de l'argent-monnaie à 1. En effet, dans de semblables questions, nous devons procéder par la méthode des compensations, puisque nous avons un nombre entier d'oiseaux.

C'est pourquoi, pour que l'espèce des oiseaux les moins chers soit compensée en nombre par les espèces plus chères, tu dois dire : j'ai de l'argent-monnaie à $1/2$ et à 2 et à 3 et je veux faire de l'argent-monnaie à 1, c'est-à-dire j'ai de l'argent-monnaie à 1 et à 4 et à 6 et je veux faire de l'argent-monnaie à 2.

Fais des moineaux et perdrix une première compensation et il y aura 5 oiseaux pour 5 deniers, à savoir 4 moineaux et 1 perdrix; et, des moineaux avec les colombes, fais-en une seconde; et tu auras 3 oiseaux pour 3 deniers, à savoir 2 moineaux et 1 colombe. Ensuite, pour avoir 30 oiseaux compensés, tu prendras trois fois la première compensation dans laquelle il y aura 12 moineaux et 3 perdrix. Et il restera 15 oiseaux compensés, pour lesquels tu prendras cinq fois la seconde compensation et tu auras 10 moineaux et 5 colombes. Et ainsi, en ce qui concerne les 30 oiseaux dont il a été question auparavant, il y aura 22 moineaux et 5 colombes et 3 perdrix, comme il est montré en marge.

| | Perdrix | Colombes | moineaux | nombre | coût |
|----------------------------|-------------|-------------|-------------------|-----------|--|
| | à 3 deniers | à 2 deniers | à 1/2 denier | d'oiseaux | |
| E1 | 1 | | 4 | 5 | $1 \times 3 + 4 \times 1/2 = 5$ |
| E2 | | 1 | 2 | 3 | $1 \times 2 + 2 \times 1/2 = 3$ |
| E | 3 | 5 | 22 | 30 | $3 \times 3 + 5 \times 2 + 22 \times 1/2 = 30$ |
| 30 oiseaux pour 30 deniers | | | $E = 3 E1 + 5 E2$ | | |

Et tu dois savoir que, de ce qui est suscrit, tu peux avoir autant d'oiseaux qu'on voudra pour la même quantité de deniers au-delà de 15, mais en deçà, ce n'est pas possible, si ce n'est pour 13 et 11 et 8. En vérité, dans le cas des 13 oiseaux, la première compensation apparaîtra deux fois et la seconde, une fois. Et pour 11 oiseaux, la seconde compensation apparaîtra deux fois et la première, une fois. Et pour 8 oiseaux, chacune des compensations apparaîtra une fois.

| | Perdrix à 3 deniers | Colombes à 2 deniers | moineaux à 1/2 denier | nombre d'oiseaux | coût |
|----------|----------------------------|-------------------------|--------------------------|---------------------|---------------------------------|
| E1 | 1 | | 4 | 5 | $1 \times 3 + 4 \times 1/2 = 5$ |
| E2 | | 1 | 2 | 3 | $1 \times 2 + 2 \times 1/2 = 3$ |
| $N > 15$ | 16 oiseaux pour 16 deniers | | | 2 E1 + 2 E2 | |
| | 17 oiseaux pour 17 deniers | | | 1 E1 + 4 E2 | |
| | 18 oiseaux pour 18 deniers | | | 3 E1 + 1 E2 | |
| $N < 15$ | 8 oiseaux pour 8 deniers | | | 1 E1 + 1 E2 | |
| | 11 oiseaux pour 11 deniers | | | 1 E1 + 2 E2 | |
| | 13 oiseaux pour 13 deniers | | | 2 E1 + 1 E2 | |
| | 14 oiseaux pour 14 deniers | | | 1 E1 + 3 E2 | |

Un coq vaut cinq pièces de monnaie, une poule, trois pièces et trois poulets valent une pièce. Avec 100 pièces de monnaie, on achète cent oiseaux. Combien de coqs, de poules et de poulets cela fait-il?

Zhang Qiujuan, 5ième siècle av. J-C.

$$x + y + z = 100$$

4 coqs, 18 poules, 78 poulets

$$5x + 3y + \frac{1}{3}z = 100$$

8 coqs, 11 poules, 81 poulets

12 coqs, 4 poules, 84 poulets

$$x = 4 + 4t$$

$$y = 18 - 7t$$

$$z = 78 + 3t$$

Avec cent drachmes, on veut acheter cent volatiles de types canards, coqs et moineaux, sachant que chaque canard coûte cinq drachmes, tandis qu'on acquiert vingt moineaux pour 1 drachme et que chaque coq en vaut une.

Abu Kamil, né vers 850, mort vers 930

$$x + y + z = 100$$

$$5x + \frac{1}{20}y + z = 100$$

19 canards,

80 moineaux,

et 1 coq

Deux hommes et une bourse
(diverses méthodes)

Ici commence la quatrième partie du chapitre 12 concernant des bourses trouvées

Deux hommes, qui avaient des deniers, ont trouvé une bourse remplie de deniers. Après cette découverte, le premier dit au second : si j'avais les deniers de la bourse en plus de ceux que je possède, j'aurais trois fois autant toi. À quoi l'autre lui répond : si j'avais, moi, les deniers de la bourse, j'aurais quatre fois autant que toi. On demande combien chacun possédait et combien ils ont trouvé dans la bourse.

| | | |
|--------------------------------|---------------------------------|---------------|
| notons | $h1 + b = 3 h2$ | $h2 = 5/4 h1$ |
| $h1$ l'avoir du premier homme | $h2 + b = 4 h1$ | $b = 11/4 h1$ |
| $h2$ l'avoir du deuxième homme | ce qui donne | |
| b = le contenu de bourse | $h1 = 4, h2 = 5$ et $b = 11$ | |
| | comme première solution entière | |

Il faut bien sûr remarquer que, puisque le premier en possession de la bourse, a trois fois autant que le second, si ce premier avec la bourse possède 3, le second possède 1. Donc à eux deux plus la bourse, ils ont 4, desquels le premier avec la bourse possède 3, et donc il a les $3/4$ de la totalité de la somme des deniers des deux hommes et de la bourse. D'autre part, puisque le second avec la bourse possède quatre fois autant que le premier, il s'ensuit qu'il a [avec la bourse] $4/5$ de cette même somme.

$$h1 + b = 3/4 (h1 + h2 + b)$$

$$h2 + b = 4/5 (h1 + h2 + b)$$

C'est pourquoi tu imagines un nombre dans lequel on peut trouver $\frac{4}{5}$ et $\frac{3}{4}$, et ce sera 20. Pose donc que la somme de tous ces deniers soit 20, desquels le premier avec la bourse possède les $\frac{3}{4}$, à savoir 15, et le second avec la bourse les $\frac{4}{5}$, à savoir 16.

En posant : $h1 + h2 + b = 20$

On a

$$h1 + b = 15$$

$$h2 + b = 16$$

Donc à eux deux avec la bourse comptée deux fois, ils ont 31. En fait le surplus qui est de 20 à 31, à savoir 11, est la somme des deniers de la bourse. Pour cette raison que la bourse est comptée deux fois, alors qu'elle ne doit l'être qu'une seule fois, le montant de la bourse est compté une fois de plus qu'il ne doit l'être. D'où les deniers superflus qui sont de 20 à 31, c'est-à-dire 11, valent une fois ce qui fut trouvé dans la bourse. Ainsi, tu ôtes 11 de 15, il reste 4 et c'est l'avoir du premier. Ensuite, ôte 11 de 16, il reste 5 et c'est l'avoir du second. Donc le premier a 4, et le second, 5 qui, ajoutés aux 11 de la bourse, font 20, comme nous l'avions posé pour leur somme.

en additionnant, on a $h1 + h2 + 2b = 31$

$$h1 + b = 15$$

or

$$h1 + h2 + b = 20$$

$$h2 + b = 16$$

on peut en déduire que

$$b = 11$$

puis

$$h1 = 4 \quad \text{et} \quad h2 = 5$$

D'une autre façon, puisque le premier avec la bourse possède les $3/4$ de la totalité de la somme de leurs deniers avec la bourse, le second a donc $1/4$ de cette somme, et le premier a $1/5$ de la somme totale pour la raison que le second, avec la bourse, en possède $4/5$. C'est pourquoi, tu prends $1/5$ de 20 qui vaut 4, et c'est ce que possède le premier. De même, tu prends $1/4$ de 20, qui est 5, et c'est l'avoir du second. Ainsi, à eux deux, ils ont 9 auxquels, jusqu'à 20, il reste 11 pour le montant de la bourse, comme nous l'avions dit précédemment.

$$h1 + b = 3/4 (h1 + h2 + b)$$

$$h2 + b = 4/5 (h1 + h2 + b)$$

$$h2 = 1/4 (h1 + h2 + b) =$$

$$= 1/4 \text{ de } 20 = 5$$

$$h1 = 1/5 (h1 + h2 + b) =$$

$$= 1/5 \text{ de } 20 = 4$$

Encore autrement. Pose que le premier a la chose. Ainsi, avec la bourse, il a la chose avec la bourse qui valent le triple des deniers du second. Donc le second a le tiers de la chose et de la bourse. Ainsi, s'il possédait la bourse, il aurait la bourse et un tiers de la bourse, et en plus un tiers de la chose, qui sont égaux à quatre choses, à savoir le quadruple des deniers du premier, puisque le second avec la bourse possède quatre fois autant que le premier.

Posons l'avoir du premier
homme ($h1$) la chose x

$$x + b = 3 h2$$

$$h2 = 1/3 (x + b)$$

$$h2 + b = b + 1/3 x + 1/3 b$$

$$b + 1/3 x + 1/3 b = 4 x$$

Ôte donc de l'une et de l'autre partie un tiers de la chose, il restera la bourse et un tiers de la bourse qui sont égaux à quatre choses moins un tiers de la chose. C'est pourquoi le triple d'une fois la bourse et de son tiers, à savoir 4 bourses, est égal au triple de quatre choses moins son tiers, à savoir 11 choses.

$$b + 1/3 x + 1/3 b = 4 x$$

$$b + 1/3 b = 4 x - 1/3 x$$

$$4 b = 11 x$$

Et parce que quatre fois 11 égale onze fois quatre, la proportion des deniers de la bourse aux deniers du premier homme sera comme 11 est à 4. D'où si dans la bourse, il y a 11 deniers, le premier homme en a 4, dont le tiers de la somme, à savoir 5, doit être l'avoir du second, puisque le premier avec la bourse possède le triple de ce dernier.

$$b/x = 11/4$$

$$\text{Si } b = 11, \quad x = h1 = 4 \quad \text{et} \quad h2 = 5$$

Quatre hommes et une bourse
(méthode des deux
fausses positions)

Des quatre hommes qui ont trouvé une bourse

Quatre hommes possédant des deniers ont trouvé une bourse remplie de deniers ; le premier dit que s'il avait les deniers de la bourse, il posséderait deux fois autant que le second. Le second, s'il avait la bourse, posséderait trois fois autant que le troisième et le troisième, s'il l'avait, posséderait quatre fois autant que le quatrième. Le quatrième, lui, aurait cinq fois autant que le premier. On demande combien chacun possède de deniers.

Notons h_i ($i = 1$ à 4) l'avoir

de chacun des hommes

x = le contenu de bourse

$$h_1 + x = 2 h_2$$

$$h_2 + x = 3 h_3$$

$$h_3 + x = 4 h_4$$

$$h_4 + x = 5 h_1$$

Ce qui est certain, c'est que tu poses que le premier possède 9 deniers et que, dans la bourse, il y a 21 deniers. Donc, si le premier prend la bourse, il aura 30. D'où, comme il possède alors le double du second, il faut que le second en ait la moitié, à savoir 15. Ceux-ci, ajoutés aux deniers de la bourse, à savoir 21, font 36 dont le tiers, à savoir 12 sera la part du troisième puisque le deuxième, avec la bourse, aurait le triple du troisième. À ces 12, on ajoute la bourse, ce qui fait 33, dont le quart, à savoir $8 \frac{1}{4}$ est la part du quatrième. À ceux-ci, on ajoute la bourse, à savoir 21, ce qui fait $29 \frac{1}{4}$ deniers qui devraient être 45, à savoir le quintuple des deniers du premier homme. Donc, en ce qui concerne le quatrième homme, il y a $15 \frac{3}{4}$ en défaut, à savoir la différence entre $29 \frac{1}{4}$ et 45.

Si $x = 21$ et $h1 = 9$ (première fausse position)

| | | | |
|---------------------------|------|----------------------|---|
| $h1 + x = 30$ | donc | $h2 = 15$ | Différence avec 45 : $15 \frac{3}{4}$ par défaut |
| $h2 + x = 36$ | donc | $h3 = 12$ | |
| $h3 + x = 33$ | donc | $h4 = 8 \frac{1}{4}$ | |
| $h4 + x = 29 \frac{1}{4}$ | | | |

C'est pourquoi, dans une seconde position, tu accroîtras les deniers de la bourse ou tu diminueras le nombre de deniers du premier homme. Augmentons par exemple le nombre de deniers de la bourse et posons qu'on y trouve 27 deniers, à savoir 6 de plus que dans la première position. Ceux-ci, ajoutés aux deniers du premier homme, à savoir 9 font 36 dont la moitié, à savoir 18 appartient au second homme. Ceux-ci, si on leur ajoute la bourse, font 45 dont le tiers, à savoir 15, appartient au troisième homme. Ceux-ci, si on leur ajoute la bourse, font 42 dont le quart appartient au troisième homme ; cela lui fait $10 \frac{1}{2}$. Ceux-ci, si on leur ajoute le contenu de la bourse, font $37 \frac{1}{2}$ qui devraient être 45, à savoir le quintuple de ce qu'a le premier homme. D'où, dans cette seconde position, $7 \frac{1}{2}$ font défaut au quatrième homme, à savoir la différence entre $37 \frac{1}{2}$ et 45.

Si $x = 27$ et $h1 = 9$ (seconde fausse position)

$$h1 + x = 36 \quad \text{donc} \quad h2 = 18$$

$$h2 + x = 45 \quad \text{donc} \quad h3 = 15$$

$$h3 + x = 42 \quad \text{donc} \quad h4 = 10 \frac{1}{2}$$

$$h4 + x = 37 \frac{1}{2}$$

Différence avec 45 : $7 \frac{1}{2}$

par défaut

En fait, dans la première position, $15 \frac{3}{4}$; et pour 6 que nous avons ajouté à la bourse en seconde position, nous avons approché la vérité de $8 \frac{1}{4}$, à savoir la différence entre $15 \frac{3}{4}$ et $7 \frac{1}{2}$ et il reste pour y arriver $7 \frac{1}{2}$.

$$15 \frac{3}{4} - 7 \frac{1}{2} = 8 \frac{1}{4}$$

C'est pourquoi tu multiplies $7 \frac{1}{2}$ par 6 puis tu diviseras par $8 \frac{1}{4}$ comme il est indiqué en marge, il vient $5 \frac{5}{11}$ deniers. Ceux-ci, si on leur ajoute 27 deniers, à savoir le contenu de la bourse en seconde position, on obtiendra $32 \frac{5}{11}$ et c'est cette quantité qu'on trouvera dans la bourse si le premier homme avait eu au départ 9 deniers.

$$7 \frac{1}{2} \times 6 \div 8 \frac{1}{4} = 60/11 = 5 \frac{5}{11}$$

$$27 + 5 \frac{5}{11} = 32 \frac{5}{11}$$

$$h1 = 9 \quad x = 357/11$$

Car pour obtenir en nombres entiers le contenu de la bourse et de l'avoir des hommes, multiplie par 11 le nombre de deniers de la bourse et ce que possède le premier homme, tu obtiendras 357 deniers pour la bourse et 99 deniers pour l'avoir du premier homme. Ces 357 et 99, puisqu'ils ont entre eux une règle commune, à savoir 3, divisons chacun d'eux par 3 pour obtenir la solution en plus petits entiers.

$$h1 = 99 \quad x = 357$$

$$h1 = 33 \quad x = 119$$

C'est ce que tu dois toujours faire dans tous les cas semblables et ainsi, tu obtiendras 119 pour les deniers de la bourse, et pour ceux du premier homme 33. Si on ajoute ces deux nombres, cela fait 152 dont la moitié, à savoir 76 est la quantité de deniers que possède le deuxième homme. Si on les ajoute aux deniers de la bourse, à savoir 119, on obtient 195 dont le tiers, à savoir 65, est la part du troisième homme. Si on les ajoute encore aux deniers de la bourse, cela fait 184 dont le quart, à savoir 46, est ce que possède le quatrième homme. Si on y ajoute les deniers de la bourse, cela fait 165 qui représentent le quintuple de l'avoir en deniers du premier homme, comme il était demandé

$$h1 = 33 \quad x = 119$$

$$33 + 119 = 152 = 2 h2 \quad \text{donc } h2 = 76$$

$$76 + 119 = 195 = 3 h3 \quad \text{donc } h3 = 65$$

$$65 + 119 = 184 = 4 h4 \quad \text{donc } h4 = 46$$

$$46 + 119 = 165 = 5 h1$$

Dans les mathématiques chinoises:

Ying (excédent), Buzu (déficit)

Les neufs chapitres sur l'art du calcul

Dans les mathématiques arabes

Al Hata'ayn (l'erreur)

Conclusion : pourquoi aborder l'histoire des maths par le biais d'un texte original ?

Il y a un certain réconfort pour un élève à situer ses propres difficultés dans une continuité historique, les obstacles qu'il doit franchir sont souvent ceux-là mêmes qui ont posé problème dans le passé, la manipulation du langage algébrique en est un.

La lecture d'un texte historique montre la difficulté de faire des mathématiques sans un langage adapté, fait percevoir l'utilité et l'aspect simplificateur du symbolisme algébrique.