Des systèmes linéaire indéterminés dans le Liber Abaci de Fibonacci

Marie-France Guissard

CREM

mf.guissard@crem.be

Ce que fait le CREM

- Des recherches
- De la formation continue
- Des séminaires et des conférences
- Un centre de documentation
- Des publications
- Des logiciels

Contacts : www.crem.be

info@crem.be

Dernière recherche

Math & Manips

Comment introduire des manipulations dans la classe pour favoriser la construction des apprentissages

Systèmes linéaires indéterminés dans le Liber Abaci de Leonardo Fibonacci

Statue de

Leonardo Fibonacci

dans le

Campo Santo

à Pise

(1170 - 1240)

Son œuvre

***Liber Abaci*, rédigé en 1202, revu en 1228.**

***Practica Geometriae*, traité de géométrie et de trigonométrie écrit en 1220.**

***Flos super solutionibus quarundam quaestionum ad numerum et ad geometriam pertinentium*, 1225, recueil de solutions à quinze problèmes.**

***Epistola suprascripti Leonardi ad Magistrum Theodorum*, vers 1225, lettre adressée à l'astrologue Maître Théodore, deux problèmes y sont résolus.**

***Liber Quadratorum*, le livre des nombres carrés écrit en 1225, contient vingt propriétés des nombres carrés qui permettent de résoudre un problème du second degré.**

Le Liber Abaci

Première version 1202

Deuxième version 1228

Ici commence le liber Abaci

Composé par Leonard fils de Bonaci Pisan en l’année M^{o} cc^{o} ij^{o}

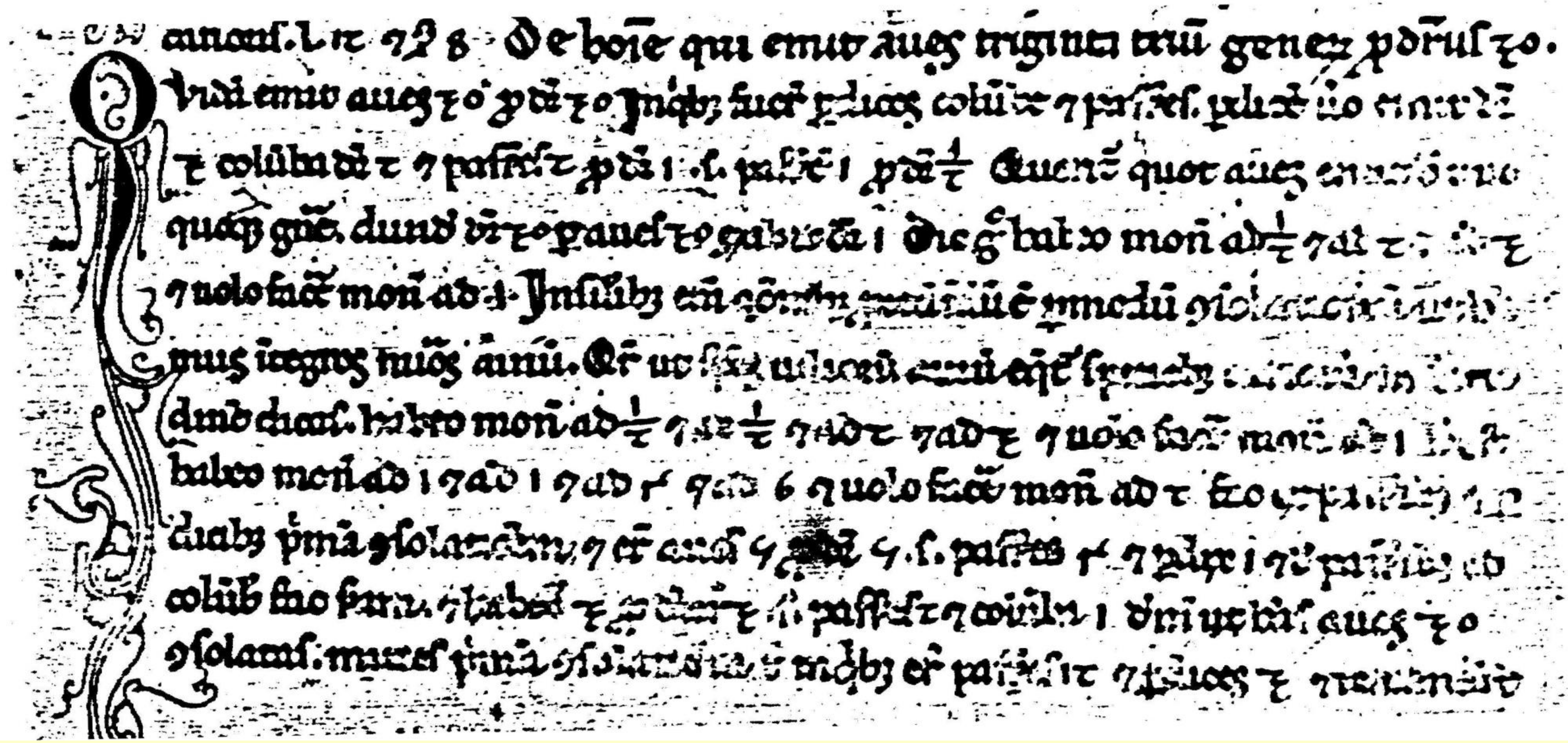
Lorsque mon père fut nommé, loin de la patrie, scribe officiel à la douane de Bejaïa pour les commerçants de Pise, me faisant venir auprès de lui, alors que j’étais enfant, ayant réfléchi à l’intérêt et aux avantages futurs que j’en tirerais, après m’avoir intéressé durant quelques temps à l’arithmétique, il décida que je resterais et que je suivrais des cours. Là, introduit, grâce à un maître admirable, dans l’art du calcul au moyen des neuf figures indiennes, la science de cet art me plut à tel point que je réalisai que, quelque matière que l’on étudiât, de différentes façons, en Égypte, Syrie, Grèce et Provence, j’acquis beaucoup plus en ces lieux de haut négoce, grâce à une étude approfondie, et j’y appris à défendre mes idées en examinant les différents points d’une question.

Contenu du Liber Abaci

Chap 1 à 7 : écriture des nombres et manières d'effectuer les opérations à l'aide des « neuf figures indiennes »
Chap 8 : achat et vente des marchandises
Chap 9 : règles pour troquer les marchandises
Chap 10 : les sociétés, règles de partage des gains entre les associés
Chap 11 : compensation des monnaies
Problème d'oiseaux
Chap 12 : récréations mathématiques
Deux hommes et une bourse
Chap 13 : règle de la double fausse position
Quatre hommes et une bourse
Chap 14 : extraction des radicaux carrés et cubiques
Chap 15 : questions de géométrie et algèbre

Des combinaisons linéaires pour résoudre un problème d'oiseaux

De homine qui emit aves triginta trium generum pro denariis 30



De l'homme qui a acheté trente oiseaux de trois espèces pour 30 deniers

Quelqu'un a acheté 30 oiseaux pour 30 deniers, parmi lesquels il y a des perdrix, des colombes et des moineaux. En fait, il a acheté les perdrix pour 3 deniers, les colombes pour 2 et 2 moineaux pour 1 denier, à savoir 1 moineau pour 1/2 denier. On demande combien d'oiseaux de chaque espèce il a achetés.

$$x + y + z = 30$$

$$3x + 2y + 1/2\ z = 30$$

Divise 30 deniers par 30 oiseaux, il viendra 1 denier. Je dis donc que j'ai de l'argent-monnaie à 1/2 et à 2 et à 3 ; et je veux faire de l'argent-monnaie à 1. En effet, dans de semblables questions, nous devons procéder par la méthode des compensations, puisque nous avons un nombre entier d'oiseaux.

C'est pourquoi, pour que l'espèce des oiseaux les moins chers soit compensée en nombre par les espèces plus chères, tu dois dire : j'ai de l'argent-monnaie à 1/2 et à 2 et à 3 et je veux faire de l'argent-monnaie à 1, c'est-à-dire j'ai de l'argent-monnaie à 1 et à 4 et à 6 et je veux faire de l'argent-monnaie à 2.

Fais des moineaux et perdrix une première compensation et il y aura 5 oiseaux pour 5 deniers, à savoir 4 moineaux et 1 perdrix; et, des moineaux avec les colombes, fais-en une seconde; et tu auras 3 oiseaux pour 3 deniers, à savoir 2 moineaux et 1 colombe. Ensuite, pour avoir 30 oiseaux compensés, tu prendras trois fois la première compensation dans laquelle il y aura 12 moineaux et 3 perdrix. Et il restera 15 oiseaux compensés, pour lesquels tu prendras cinq fois la seconde compensation et tu auras 10 moineaux et 5 colombes. Et ainsi, en ce qui concerne les 30 oiseaux dont il a été question auparavant, il y aura 22 moineaux et 5 colombes et 3 perdrix, comme il est montré en marge.

	Perdrix à 3 deniers	Colombes à 2 deniers	moineaux à 1/2 denier	nombre d'oiseaux	coût
E1	1		4	5	1x3 + 4x1/2 = 5
E2		1	2	3	1x2 + 2x1/2 = 3
E	3	5	22	30	3x3 + 5x2 + 22x1/2=30

30 oiseaux pour 30 deniers

E = 3 E1 + 5 E2

Et tu dois savoir que, de ce qui est suscrit, tu peux avoir autant d'oiseaux qu'on voudra pour la même quantité de deniers au-delà de 15, mais en deçà, ce n'est pas possible, si ce n'est pour 13 et 11 et 8. En vérité, dans le cas des 13 oiseaux, la première compensation apparaîtra deux fois et la seconde, une fois. Et pour 11 oiseaux, la seconde compensation apparaîtra deux fois et la première, une fois. Et pour 8 oiseaux, chacune des compensations apparaîtra une fois.

	Perdrix à 3 deniers	Colombes à 2 deniers	moineaux à 1/2 denier	nombre d'oiseaux	coût
E1	1		4	5	1x3 + 4x1/2 = 5
E2		1	2	3	1x2 + 2x1/2 = 3

	16 oiseaux pour 16 deniers	**2 E1 + 2 E2**
N >15	**17 oiseaux pour 17 deniers**	**1 E1 + 4 E2**
	18 oiseaux pour 18 deniers	**3 E1 + 1 E2**
	8 oiseaux pour 8 deniers	**1 E1 + 1 E2**
N <15	**11 oiseaux pour 11 deniers**	**1 E1 + 2 E2**
	13 oiseaux pour 13 deniers	**2 E1 + 1 E2**
	14 oiseaux pour 14 deniers	**1 E1 + 3 E2**

Un coq vaut cinq pièces de monnaie, une poule, trois pièces et trois poulets valent une pièce. Avec 100 pièces de monnaie, on achète cent oiseaux. Combien de coqs, de poules et de poulets cela fait-il?

Zhang Qiujian, 5ième siècle av. J-C.

$$x + y + z = 100$$

$$5x + 3y + 1/3\, z = 100$$

$$x = 4 + 4t$$

$$y = 18 - 7t$$

$$z = 78 + 3t$$

4 coqs, 18 poules, 78 poulets

8 coqs, 11 poules, 81 poulets

12 coqs, 4 poules, 84 poulets

Avec cent drachmes, on veut acheter cent volatiles de types canards, coqs et moineaux, sachant que chaque canard coûte cinq drachmes, tandis qu'on acquiert vingt moineaux pour 1 drachme et que chaque coq en vaut une.

Abu Kamil, né vers 850, mort vers 930

$$x + y + z = 100$$

$$5x + 1/20\, y + z = 100$$

19 canards,

80 moineaux,

et 1 coq

Deux hommes et une bourse

(diverses méthodes)

Ici commence la quatrième partie du chapitre 12 concernant des bourses trouvées

Deux hommes, qui avaient des deniers, ont trouvé une bourse remplie de deniers. Après cette découverte, le premier dit au second : si j'avais les deniers de la bourse en plus de ceux que je possède, j'aurais trois fois autant toi. À quoi l'autre lui répond : si j'avais, moi, les deniers de la bourse, j'aurais quatre fois autant que toi. On demande combien chacun possédait et combien ils ont trouvé dans la bourse.

notons

$h1$ l'avoir du premier homme

$h2$ l'avoir du deuxième homme

b = le contenu de bourse

$$h1 + b = 3\, h2 \qquad h2 = 5/4\, h1$$

$$h2 + b = 4\, h1 \qquad b = 11/4\, h1$$

ce qui donne

$$h1 = 4,\ \ h2 = 5 \text{ et } b = 11$$

comme première solution entière

Il faut bien sûr remarquer que, puisque le premier en possession de la bourse, a trois fois autant que le second, si ce premier avec la bourse possède 3, le second possède 1. Donc à eux deux plus la bourse, ils ont 4, desquels le premier avec la bourse possède 3, et donc il a les 3/4 de la totalité de la somme des deniers des deux hommes et de la bourse. D'autre part, puisque le second avec la bourse possède quatre fois autant que le premier, il s'ensuit qu'il a [avec la bourse] 4/5 de cette même somme.

$$h1 + b = 3/4\,(h1 + h2 + b)$$

$$h2 + b = 4/5\,(h1 + h2 + b)$$

C'est pourquoi tu imagines un nombre dans lequel on peut trouver 4/5 et 3/4, et ce sera 20. Pose donc que la somme de tous ces deniers soit 20, desquels le premier avec la bourse possède les 3/4, à savoir 15, et le second avec la bourse les 4/5, à savoir 16.

En posant : $h1 + h2 + b = 20$

On a

$h1 + b = 15$

$h2 + b = 16$

Donc à eux deux avec la bourse comptée deux fois, ils ont 31. En fait le surplus qui est de 20 à 31, à savoir 11, est la somme des deniers de la bourse. Pour cette raison que la bourse est comptée deux fois, alors qu'elle ne doit l'être qu'une seule fois, le montant de la bourse est compté une fois de plus qu'il ne doit l'être. D'où les deniers superflus qui sont de 20 à 31, c'est-à-dire 11, valent une fois ce qui fut trouvé dans la bourse. Ainsi, tu ôtes 11 de 15, il reste 4 et c'est l'avoir du premier. Ensuite, ôte 11 de 16, il reste 5 et c'est l'avoir du second. Donc le premier a 4, et le second, 5 qui, ajoutés aux 11 de la bourse, font 20, comme nous l'avions posé pour leur somme.

$$h1 + b = 15$$

$$h2 + b = 16$$

en additionnant, on a $h1 + h2 + 2b = 31$

or $h1 + h2 + b = 20$

on peut en déduire que $b = 11$

puis $h1 = 4$ et $h2 = 5$

D'une autre façon, puisque le premier avec la bourse possède les 3/4 de la totalité de la somme de leurs deniers avec la bourse, le second a donc 1/4 de cette somme, et le premier a 1/5 de la somme totale pour la raison que le second, avec la bourse, en possède 4/5. C'est pourquoi, tu prends 1/5 de 20 qui vaut 4, et c'est ce que possède le premier. De même, tu prends 1/4 de 20, qui est 5, et c'est l'avoir du second. Ainsi, à eux deux, ils ont 9 auxquels, jusqu'à 20, il reste 11 pour le montant de la bourse, comme nous l'avions dit précédemment.

$$h1 + b = 3/4\,(h1 + h2 + b)$$

$$h2 + b = 4/5\,(h1 + h2 + b)$$

$$h2 = 1/4\,(h1 + h2 + b) =$$

$$= 1/4 \text{ de } 20 = 5$$

$$h1 = 1/5\,(h1 + h2 + b) =$$

$$= 1/5 \text{ de } 20 = 4$$

Encore autrement. Pose que le premier a la chose. Ainsi, avec la bourse, il a la chose avec la bourse qui valent le triple des deniers du second. Donc le second a le tiers de la chose et de la bourse. Ainsi, s'il possédait la bourse, il aurait la bourse et un tiers de la bourse, et en plus un tiers de la chose, qui sont égaux à quatre choses, à savoir le quadruple des deniers du premier, puisque le second avec la bourse possède quatre fois autant que le premier.

Posons l'avoir du premier homme ($h1$) la chose x

$$x + b = 3\,h2$$

$$h2 = 1/3\,(x + b)$$

$$h2 + b = b + 1/3\,x + 1/3\,b$$

$$b + 1/3\,x + 1/3\,b = 4\,x$$

Ôte donc de l’une et de l’autre partie un tiers de la chose, il restera la bourse et un tiers de la bourse qui sont égaux à quatre choses moins un tiers de la chose. C’est pourquoi le triple d’une fois la bourse et de son tiers, à savoir 4 bourses, est égal au triple de quatre choses moins son tiers, à savoir 11 choses.

$$b + 1/3\ x + 1/3\ b = 4\ x$$

$$b + 1/3\ b = 4\ x - 1/3\ x$$

$$4\ b = 11\ x$$

Et parce que quatre fois 11 égale onze fois quatre, la proportion des deniers de la bourse aux deniers du premier homme sera comme 11 est à 4. D'où si dans la bourse, il y a 11 deniers, le premier homme en a 4, dont le tiers de la somme, à savoir 5, doit être l'avoir du second, puisque le premier avec la bourse possède le triple de ce dernier.

$$b/x = 11/4$$

Si $b = 11$, $x = h1 = 4$ et $h2 = 5$

Quatre hommes et une bourse (méthode des deux fausses positions)

Des quatre hommes qui ont trouvé une bourse

Quatre hommes possédant des deniers ont trouvé une bourse remplie de deniers ; le premier dit que s'il avait les deniers de la bourse, il posséderait deux fois autant que le second. Le second, s'il avait la bourse, posséderait trois fois autant que le troisième et le troisième, s'il l'avait, posséderait quatre fois autant que le quatrième. Le quatrième, lui, aurait cinq fois autant que le premier. On demande combien chacun possède de deniers.

Notons hi (i = 1 à 4) l'avoir de chacun des hommes

x = le contenu de bourse

$$h1 + x = 2\,h2$$

$$h2 + x = 3\,h3$$

$$h3 + x = 4\,h4$$

$$h4 + x = 5\,h1$$

Ce qui est certain, c'est que tu poses que le premier possède 9 deniers et que, dans la bourse, il y a 21 deniers. Donc, si le premier prend la bourse, il aura 30. D'où, comme il possède alors le double du second, il faut que le second en ait la moitié, à savoir 15. Ceux-ci, ajoutés aux deniers de la bourse, à savoir 21, font 36 dont le tiers, à savoir 12 sera la part du troisième puisque le deuxième, avec la bourse, aurait le triple du troisième. À ces 12, on ajoute la bourse, ce qui fait 33, dont le quart, à savoir 8 1/4 est la part du quatrième. À ceux-ci, on ajoute la bourse, à savoir 21, ce qui fait 29 1/4 deniers qui devraient être 45, à savoir le quintuple des deniers du premier homme. Donc, en ce qui concerne le quatrième homme, il y a 15 3/4 en défaut, à savoir la différence entre 29 1/4 et 45.

Si $x = 21$ et $h1 = 9$ (première fausse position)

$h1 + x = 30$ donc $h2 = 15$
$h2 + x = 36$ donc $h3 = 12$
$h3 + x = 33$ donc $h4 = 8\ 1/4$
$h4 + x = 29\ 1/4$

Différence avec 45 : 15 3/4

par défaut

C’est pourquoi, dans une seconde position, tu accroîtras les deniers de la bourse ou tu diminueras le nombre de deniers du premier homme. Augmentons par exemple le nombre de deniers de la bourse et posons qu’on y trouve 27 deniers, à savoir 6 de plus que dans la première position. Ceux-ci, ajoutés aux deniers du premier homme, à savoir 9 font 36 dont la moitié, à savoir 18 appartient au second homme. Ceux-ci, si on leur ajoute la bourse, font 45 dont le tiers, à savoir 15, appartient au troisième homme. Ceux-ci, si on leur ajoute la bourse, font 42 dont le quart appartient au troisième homme ; cela lui fait 10 1/2. Ceux-ci, si on leur ajoute le contenu de la bourse, font 37 1/2 qui devraient être 45, à savoir le quintuple de ce qu’a le premier homme. D’où, dans cette seconde position, 7 1/2 font défaut au quatrième homme, à savoir la différence entre 37 1/2 et 45.

Si $x = 27$ et $h1 = 9$ (seconde fausse position)

$h1 + x = 36$ donc $h2 = 18$

$h2 + x = 45$ donc $h3 = 15$

$h3 + x = 42$ donc $h4 = 10\ 1/2$

$h4 + x = 37\ 1/2$

Différence avec 45 : 7 1/2

par défaut

En fait, dans la première position, 15 3/4 ; et pour 6 que nous avons ajouté à la bourse en seconde position, nous avons approché la vérité de 8 1/4 , à savoir la différence entre 15 3/4 et 7 1/2 et il reste pour y arriver 7 1/2.

$$15\ 3/4 - 7\ 1/2 = 8\ 1/4$$

C'est pourquoi tu multiplies 7 1/2 par 6 puis tu diviseras par 8 1/4 comme il est indiqué en marge, il vient 5 5/11 deniers. Ceux-ci, si on leur ajoute 27 deniers, à savoir le contenu de la bourse en seconde position, on obtiendra 32 5/11 et c'est cette quantité qu'on trouvera dans la bourse si le premier homme avait eu au départ 9 deniers.

$$7\ 1/2 \times 6\ /\ 8\ 1/4 = 60/11 = 5\ \ 5/11$$

$$27 + 5\ \ 5/11 = 32\ \ 5/11$$

$$h1 = 9 \quad x = 357/11$$

Car pour obtenir en nombres entiers le contenu de la bourse et de l'avoir des hommes, multiplie par 11 le nombre de deniers de la bourse et ce que possède le premier homme, tu obtiendras 357 deniers pour la bourse et 99 deniers pour l'avoir du premier homme. Ces 357 et 99, puisqu'ils ont entre eux une règle commune, à savoir 3, divisons chacun d'eux par 3 pour obtenir la solution en plus petits entiers.

$$h1 = 99 \quad x = 357$$

$$h1 = 33 \quad x = 119$$

C’est ce que tu dois toujours faire dans tous les cas semblables et ainsi, tu obtiendras 119 pour les deniers de la bourse, et pour ceux du premier homme 33. Si on ajoute ces deux nombres, cela fait 152 dont la moitié, à savoir 76 est la quantité de deniers que possède le deuxième homme. Si on les ajoute aux deniers de la bourse, à savoir 119, on obtient 195 dont le tiers, à savoir 65, est la part du troisième homme. Si on les ajoute encore aux deniers de la bourse, cela fait 184 dont le quart, à savoir 46, est ce que possède le quatrième homme. Si on y ajoute les deniers de la bourse, cela fait 165 qui représentent le quintuple de l’avoir en deniers du premier homme, comme il était demandé

$$h1 = 33 \quad x = 119$$

$$33 + 119 = 152 = 2\,h2 \text{ donc } h2 = 76$$

$$76 + 119 = 195 = 3\,h3 \text{ donc } h3 = 65$$

$$65 + 119 = 184 = 4\,h4 \text{ donc } h4 = 46$$

$$46 + 119 = 165 = 5\,h1$$

Dans les mathématiques chinoises:

Ying (excédent), Buzu (déficit)

Les neufs chapitres sur l’art du calcul

Dans les mathématiques arabes

Al Hata’ayn (l’erreur)

Conclusion : pourquoi aborder l'histoire des maths par le biais d'un texte original ?

Il y a un certain réconfort pour un élève à situer ses propres difficultés dans une continuité historique, les obstacles qu'il doit franchir sont souvent ceux-là mêmes qui ont posé problème dans le passé, la manipulation du langage algébrique en est un.

La lecture d'un texte historique montre la difficulté de faire des mathématiques sans un langage adapté, fait percevoir l'utilité et l'aspect simplificateur du symbolisme algébrique.