Raconter les mathématiques

Luc Lemaire
Université Libre de Bruxelles

Congrès 2015 de la SBPMef
Mons

Les développements actuels des mathématiques pures et de leurs applications dépassent forcément le cadre de l'enseignement secondaire.
Ce texte présente des exemples de mathématiques récentes qui peuvent être « racontés » aux élèves des dernières années du secondaire, peut-être par petites parenthèses lors de l'introduction des notions.

Parmi toutes les possibilités (les mathématiques sont omniprésentes) j'ai choisi de concentrer la présentation sur des applications de la notion de dérivée.

Le texte se termine par la présentation d'une étude sur les débouchés des diplômes de mathématique, basée sur les promotions de 1997 à 2012.

Quelques références sur internet

- Point de départ de nombreux liens sur les mathématiques, leur beauté, leur utilité, la recherche, les débouchés....

http://www.ulb.ac.be/facs/sciences/math/info-fe.html

notamment les liens :

- Les maths, ça sert à rien ? On va te démontrer le contraire (Ebullisciences, revue des Jeunesses scientifiques, 2011)
- Que deviennent nos anciens étudiants ? (Etude des carrières de 16 promotions de l'ULB)
- La recherche mathématique aujourd'hui (2000)

Autres liens (voir dans Google) :

- L'explosion des mathématiques (2000)
- L'explosion continue (2013)
- Les sites de l'ESA et la NASA

Contact : Luc Lemaire, llemaire@ulb.ac.be

G.H.Hardy (1940)

A mathematician, like a painter or a poet, is a maker of patterns.
If his patterns are more permanent than theirs, it is because they are made with ideas.

Beauty is the first test : there is no permanent place in the world for ugly mathematics.

Very little of mathematics is useful practically, and that little is comparatively dull
(sur ce dernier point, la suite a montré tout le contraire)

Timothy Gowers

If you were to work out what mathematical research has cost
the world in the last hundred years, then work out
what the world has gained in crude economic terms,
you will discover that the world has received
an extraordinary return on a very small investment

(Millenium Lecture, Clay Foundation,2000)

Les dérivées
Les équations différentielles
Les équations aux dérivées partielles

$$\frac{d}{dx} f(x) \qquad\qquad \frac{\partial}{\partial x} f(x, y)$$

Exemples d'équations différentielles :

- f = m.a (Newton)
- équations de Navier-Stokes décrivant le mouvement d'un fluide visqueux

Il me semble que la définition de la dérivée pourrait tout de suite être illustrée par les équations différentielles, en particulier l'équation de Newton F = m.a.

Pour un point qui se déplace sur une droite, en notant f(t) la position du point au temps t, la dérivée f '(t) représente la vitesse instantanée, c'est à dire l'augmentation de la coordonnée de la position du point.

La dérivée seconde f ''(t) (dérivée de la dérivée) représente l'augmentation de la vitesse, donc l'accélération.

La loi F = m.a est illustrée par l'usage d'une voiture.

Quand on appuie sur l'accélérateur, le moteur crée une force transmise aux roues, force qui provoque une augmentation de la vitesse, une accélération. Si on augmente le poids de la voiture, l'accélération diminue.

De manière plus générale, pour un point se déplaçant sur une droite sous l'action d'une force, on écrit l'équation de Newton sous la forme décrite ci-dessous.

La force F subie par le point peut dépendre du temps t (un champ magnétique variable par exemple), de la position f(t) du point (un ressort par exemple), de la vitesse f '(t) du point (les forces de frottement dépendent souvent de la vitesse).

Au total, F est une fonction de trois variables, et on a l'équation

$$f''(t) = (1/m) \, . \, F(t, f(t), f'(t)).$$

C'est le premier exemple d'une équation différentielle :

- l'inconnue est une fonction $f(t)$

- l'équation est un lien entre la variable t, la fonction $f(t)$ et ses dérivées $f'(t)$ et $f''(t)$.

L'équation $F = m.a$ pour des corps célestes est une généralisation à des triples de fonctions (les trois coordonnées de la position d'un point dans l'espace)

Sauf dans des cas très rares, il n’est pas possible
de résoudre une telle équation, c’est à dire d’écrire
ses solutions sous forme de formules.

Dès lors il a fallu faire …beaucoup de maths, aussi bien des maths pures que des maths appliquées!

D’une part démontrer l’existence éventuelle de solutions, et leurs propriétés, souvent par la création de théories très abstraites.

D’autre part calculer des approximations des solutions, par des méthodes utilisant des calculs informatiques.
Pour cela, il faut montrer que ces solutions calculées sont proches des solutions exactes (c’est l’objet de l’ analyse numérique).

Mes satellites préférés :
Voyager 1 et Voyager 2
Lancés en 1977 – toujours en forme aujourd'hui

1961 : Michael Minovitch (mathématicien de 25 ans) montre qu'on peut utiliser l'attraction des planètes pour accélérer et modifier la trajectoire d'un satellite
1965 : Gary Flandro montre que la Terre et les quatre grosses planètes seront du même côté du soleil vers 1977, et que cela ne se reproduira que 176 ans plus tard.

Les deux satellites ont donc été lancés en 1977.

Voyager 2 a photographié et analysé Jupiter (1979), Saturne (1981), Uranus (1986) et Neptune (1989).

Aujourd'hui il est à 16 milliards de km de la Terre.
Il continue l'analyse de l'espace lointain grâce à cinq instruments encore en fonction.
Un signal radio aller-retour met 30 heures.
Il émet avec une puissance de 20 watts, et le signal reçu est de l'ordre de 10^{-18} watts.

L’orientation de Voyager 2 est déterminée par des senseurs visant le Soleil et l’étoile Canopus.
Elle est réglée par des moteurs fusées qui se déclenchent lorsqu’il est à 0,05 degré d’écart
Son angle d’émission radio est de 0,6 degrés.
Dès lors, la Terre est toujours dans la zone de réception du message.

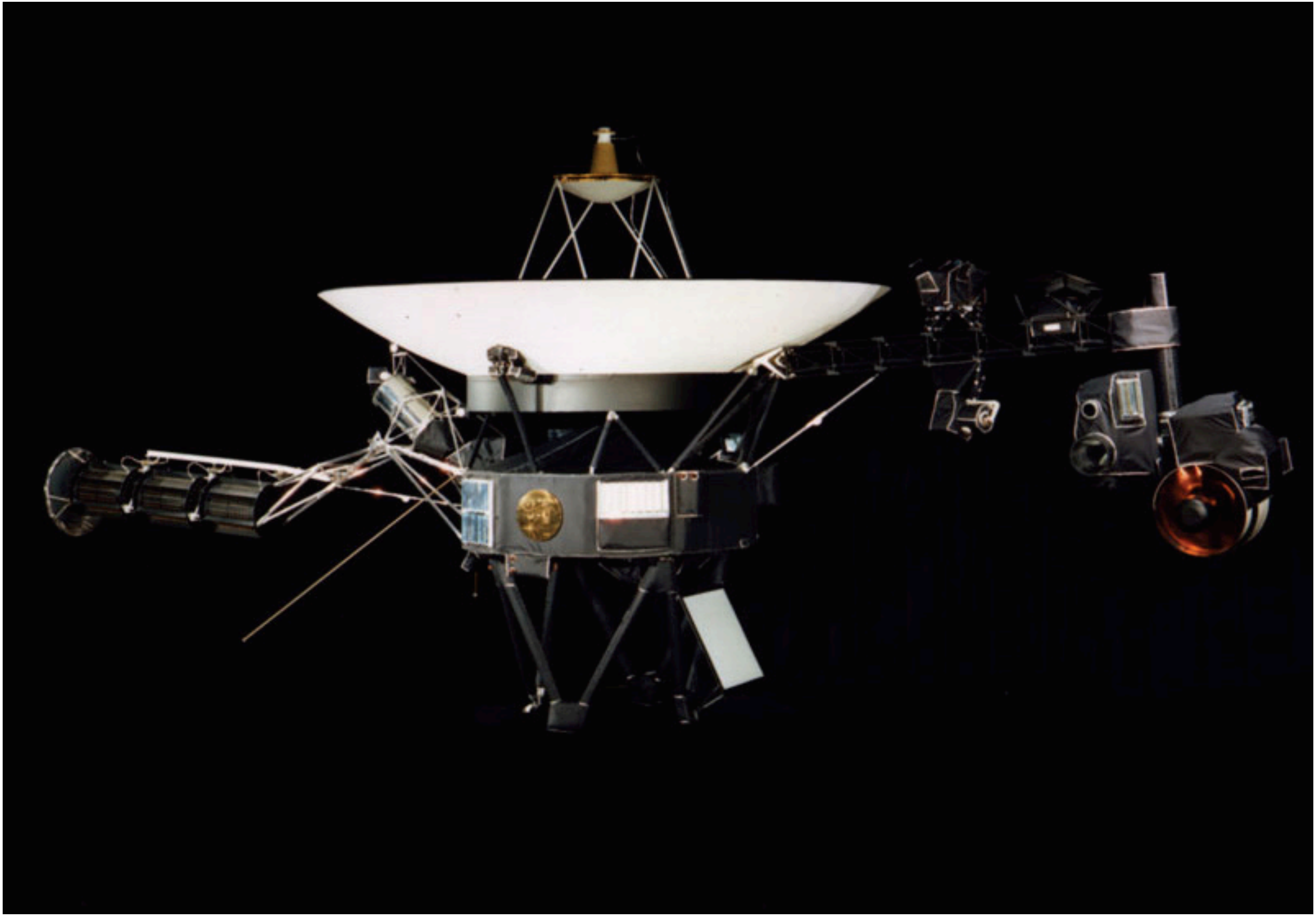
Ces satellites utilisent un concentré de mathématiques de différents domaines.

Le premier point est de faire suivre la trajectoire voulue par le satellite, en n’employant que très peu de carburant. L’idée est de se servir du passage près d’une planète comme d’une catapulte envoyant vers la suivante. Pour cela, l’équation f = m.a de Newton a été remplacée par un système fini d’équations, le continu de l’espace et du temps étant remplacés par de petits accroissements.

Mais la transmission de photos des planètes a fait appel à de toutes autres mathématiques. Les caméras embarquées ont fait des photos, qui ont été numérisées puis compressées pour ne pas surcharger le message radio. Le signal reçu était donc limité et aussi entaché d’erreurs de transmission.

Toute l’opération a donc fait appel à des idées - courantes aujourd’hui mais pas en 1977 : la compression du signal et les codes correcteurs d’erreurs.

Mais le grain de sel qui rend stupéfiant ce succès est que l’ordinateur de bord date évidemment de 1977, et que la plupart des logiciels utilisés n’existaient pas au moment du lancement. Il a fallu transmettre aux satellites de nouveaux logiciels fonctionnant sur des ancêtres de nos ordinateurs.



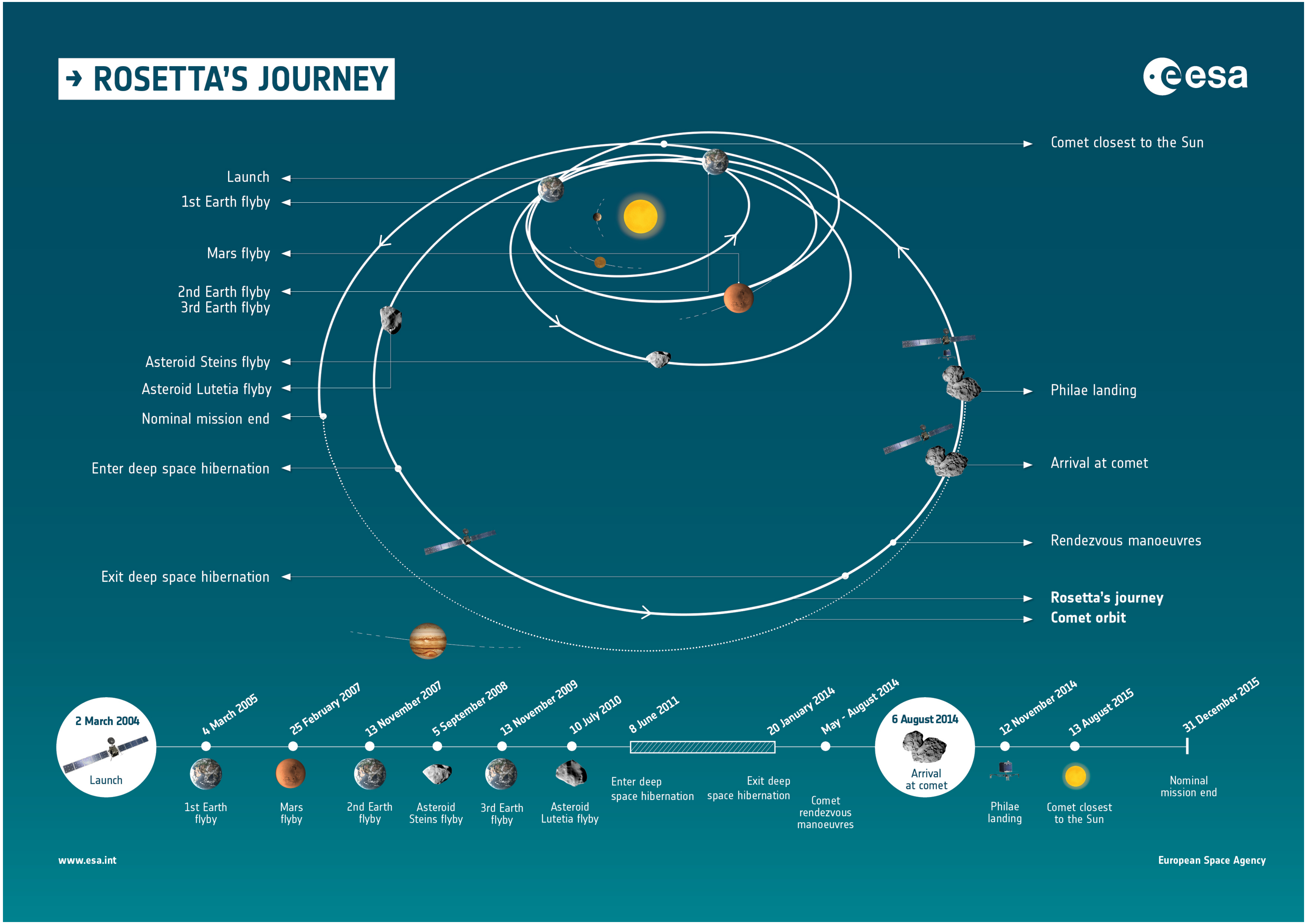
2015 : les satellites Rosetta et Philae rejoignent la comète 67P/Churyumov-Gerasimenko, Philae se pose sur la comète

Soulignons qu'il s'agit maintenant d'un satellite de l'ESA (Agence Spatiale Européenne), et que des chercheurs belges sont associés au programme.
Pour atteindre la comète, en arrivant au bon endroit et à la bonne vitesse, le satellite a accompli un périple de dix ans presque surréaliste puisqu'il est passé trois fois près de la Terre et une fois près de Mars, dans l'ordre que voici :

- <u>2 mars 2004 : lancement de *Rosetta*</u>
- 4 mars 2005 : 1re assistance gravitationnelle de la Terre
- 25 février 2007 : assistance gravitationnelle de Mars
- 13 novembre 2007 : deuxième assistance gravitationnelle de la Terre
- 13 novembre 2009 : troisième et dernière assistance gravitationnelle de la Terre
- 8 juin 2011 : mise en sommeil de la sonde
- 20 janvier 2014 : réactivation de la sonde

- 6 août 2014 : mise en orbite autour de la comète
- 12 novembre 2014 : atterrissage de *Philae* à la surface de la comète
- 31 décembre 2015 : fin de la mission.

Aujourd'hui, les chercheurs analysent les résultats des expériences réalisée en vol par Rosetta et au sol par Philae - une autre sorte d'aventure intellectuelle



ROSETTA'S JOURNEY
esa
Launch
1st Earth flyby
Mars flyby
2nd Earth flyby
3rd Earth flyby
Asteroid Steins flyby
Asteroid Lutetia flyby
Nominal mission end
Enter deep space hibernation
Exit deep space hibernation
Comet closest to the Sun
Philae landing
Arrival at comet
Rendezvous manoeuvres
Rosetta's journey
Comet orbit
2 March 2004
Launch
4 March 2005
1st Earth flyby
25 February 2007
Mars flyby
13 November 2007
2nd Earth flyby
5 September 2008
Asteroid Steins flyby
13 November 2009
3rd Earth flyby
10 July 2010
Asteroid Lutetia flyby
8 June 2011
Enter deep space hibernation
20 January 2014
Exit deep space hibernation
May - August 2014
Comet rendezvous manoeuvres
6 August 2014
Arrival at comet
12 November 2014
Philae landing
13 August 2015
Comet closest to the Sun
31 December 2015
Nominal mission end
www.esa.int
European Space Agency

Equations de Navier-Stokes (1822-1845)

Ces équations aux dérivées partielles décrivent le mouvement des fluides visqueux. Elle forment en fait un système d'équations aux dérivées partielles extraordinairement difficiles.

Aujourd’hui :

On ne comprend pas les propriétés théoriques des solutions : elles font l’objet d’un des sept Prix du Millénaire de la Fondation Clay.
C’est à l’occasion de l’an deux mille que cette fondation a posé sept problèmes importants en mathématique, en attribuant à chaque solution un prix d’un million de dollars.
Seul un des problèmes a été résolu à ce jour, quand le mathématicien russe Grigori Perelman a démontré la conjecture de Poincaré. Notons qu’il a en fait refusé le Prix, estimant que la solution du problème portait sa propre récompense.

On comprend tellement peu les équations de Navier-Stokes que le Prix sera attribué à celui qui démontrera qu'elles possèdent des solutions régulières, ou à celui qui démontrera qu'elles n'en possèdent pas : ceux qui ont rédigé la question n'ont pas voulu deviner la réponse.

Revenons aux applications des équations de Navier-Stokes.
On ne peut pas calculer leurs solutions, les très nombreuses applications passent donc par des approximations, où on remplace les dérivées par des différences finies.

Nous présentons trois applications récentes, choisies parmi d'innombrables sujets.

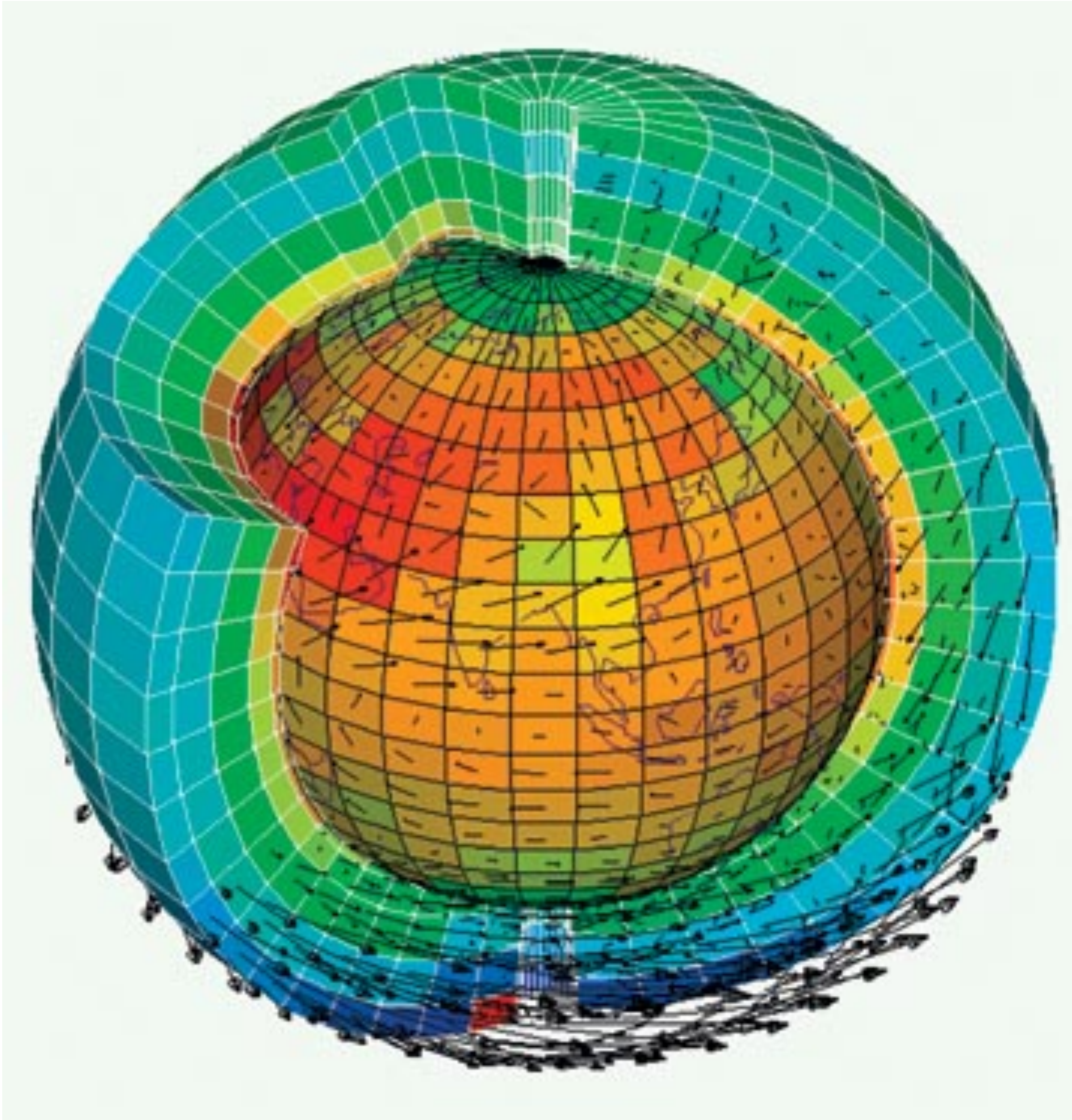
Prévisions météo

On emploie une version sophistiquée des équations de Navier-Stokes, prenant en compte la pression, le vent, l'humidité, le relief, la nature du sol ou de la mer…

Il est impossible d'écrire les solutions de ces équations aux dérivées partielles.

On découpe alors fictivement l'atmosphère en parallélépipèdes de 2 à 20 km de côté et de quelques dizaines à quelques centaines de mètres de hauteur, et on remplace les équations aux dérivées partielles de Navier Stokes par un système fini d'équations algébriques en considérant seulement les valeurs au centre des parallélépipèdes (en nombre fini) et en des valeurs du temps espacées de quelques minutes.

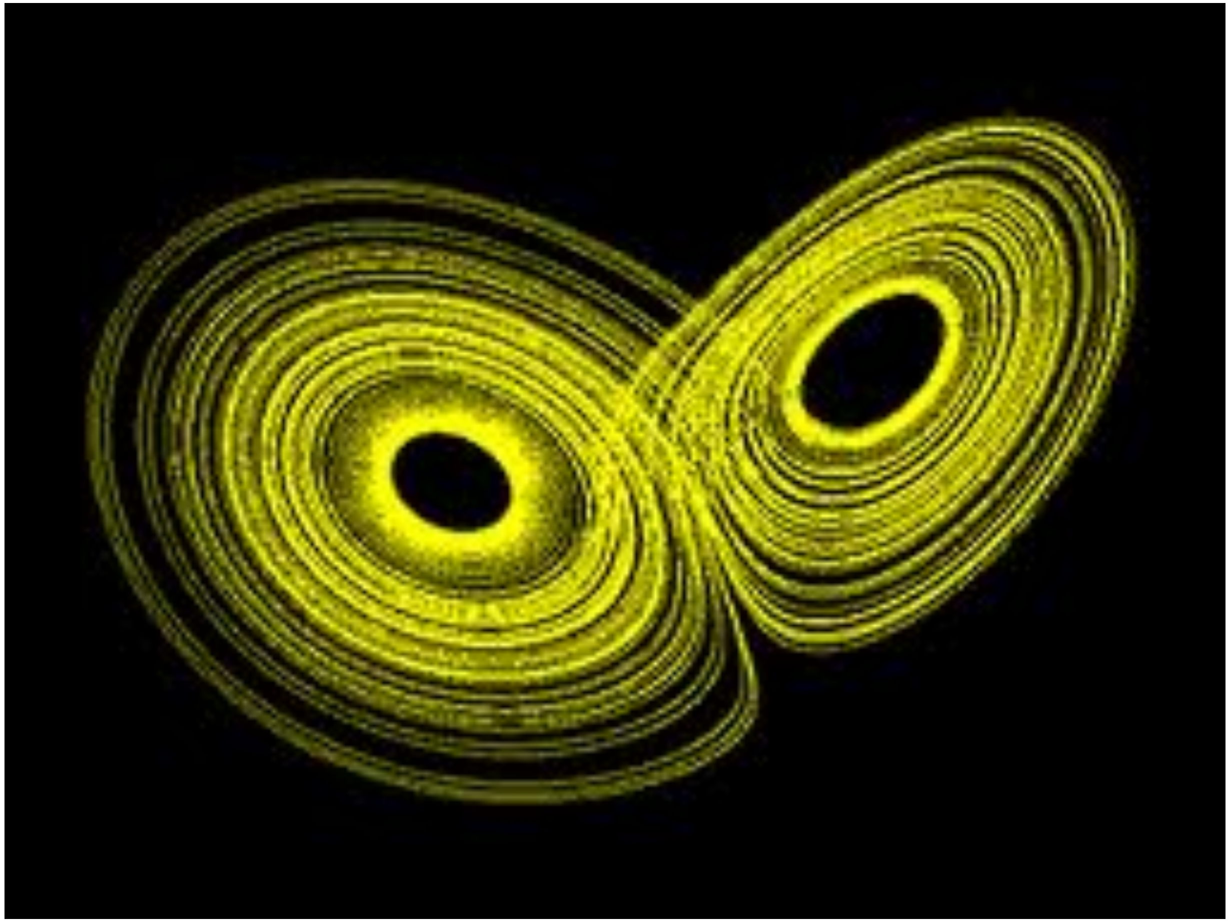
En principe, l'état en un temps initial déterminera la suite.



Les difficultés sont nombreuses :
- imprécision des données mesurées
- approximation des « vraies » équations par le modèle discret
- temps de calcul limité

Beaucoup d'idées nouvelles sont employées, par exemple on remplace la donnée initiale par la demande que la solution du calcul soit « proche » de la réalité observée sur 24 heures, et on utilise aussi des modèles probabilistes.

On peut espérer des prévisions à quinze jours, mais pas plus pour cause d'instabilité (phénomène chaotique). C'est Edward Lorenz qui le premier a exhibé un système d'équations telles qu'une petite erreur à un moment donné donne une grande erreur plus tard.



Edward Lorenz 1963

La trajectoire de la solution saute d’un côté à l’autre d’une manière qui semble aléatoire alors que les équations sont déterministes. Une petite imprécision qu’on ne peut pas mesurer fait basculer la suite dans une autre trajectoire

Modélisation des airbags des voitures

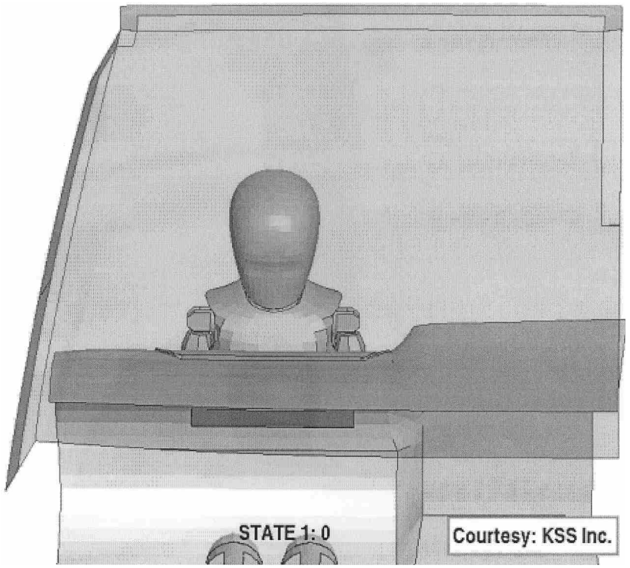
Travail réalisé au Fraunhofer Institute for Industrial Mathematics ITWM
http://www.itwm.fraunhofer.de/en/fraunhofer-itwm.html

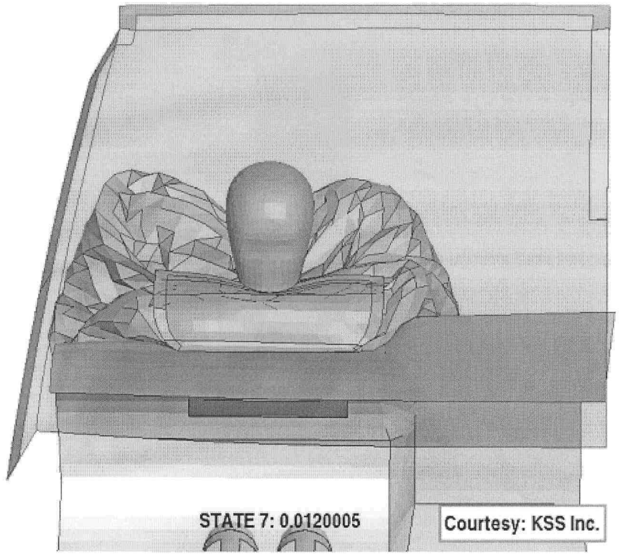
But : tester par un modèle mathématique l'ouverture d'un airbag en cas d'accident

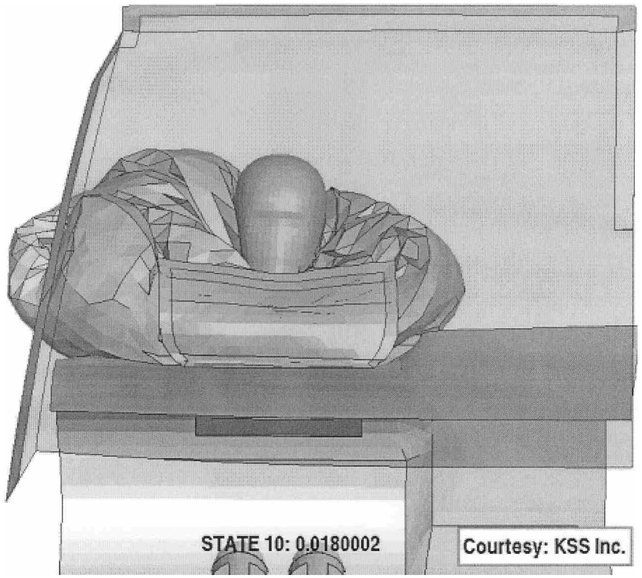
Intérêt évident : on peut le tester tant qu'on veut sans aucun accident réel. On peut varier la forme du sac, la manière dont il est plié, l'arrivée du gaz.

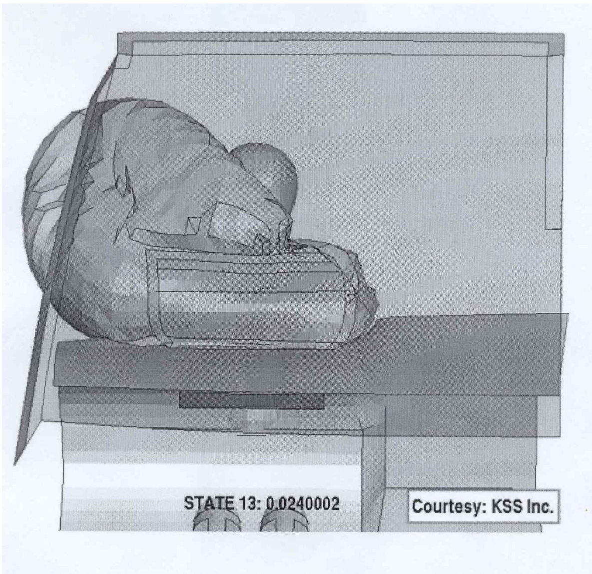
Méthode : écrire les équations de Navier-Stokes, les discrétiser pour obtenir une solution approchée grâce à un programme informatique

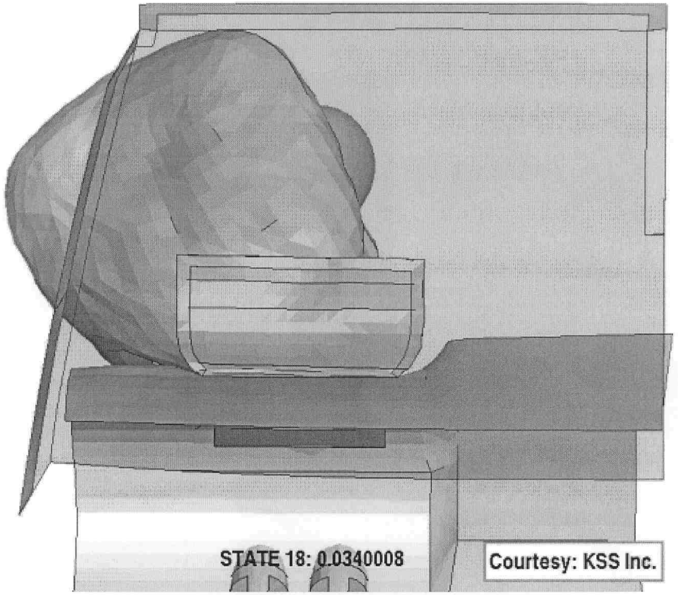
Difficulté (bien résolue !): les méthodes traditionnelles passent par un quadrillage du domaine remplaçant les dérivées par des différences finies.
Mais ici le bord du domaine (le sac) se déforme très rapidement sous l'effet du gaz !
On a donc développé des méthodes de résolution « sans quadrillage »

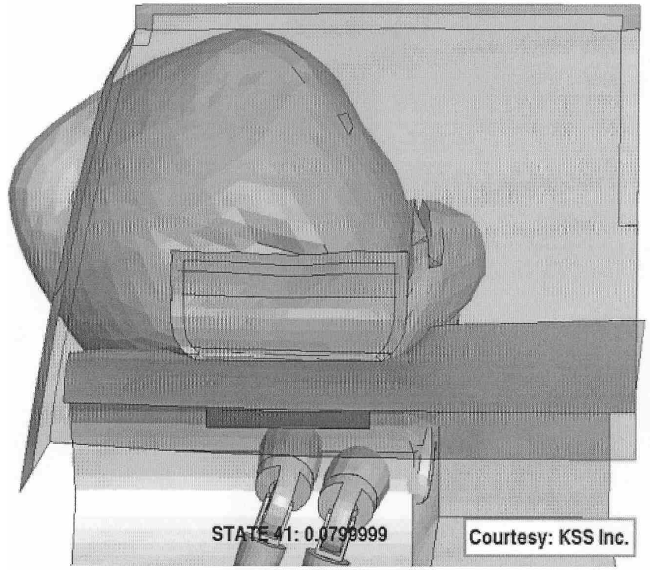

STATE 1: 0
Courtesy: KSS Inc.


STATE 7: 0.0120005
Courtesy: KSS Inc.


STATE 10: 0.0180002
Courtesy: KSS Inc.


STATE 13: 0.0240002
Courtesy: KSS Inc.


STATE 18: 0.0340008
Courtesy: KSS Inc.


STATE 41: 0.0799999
Courtesy: KSS Inc.

Modélisation du système cardio-vasculaire

Travail en cours (progrès rapides) du Professeur Alfio Quarteroni à Lausanne

But : tester par un modèle mathématique le flux de sang qu'on obtiendrait après différentes opérations de pontage coronarien …sans avoir procédé à une seule opération

Intérêt évident : on peut tester la future opération autant de fois qu'on veut sans toucher au malade !

Méthode : écrire les équations de Navier-Stokes, les discrétiser pour obtenir une solution approchée grâce à un programme informatique

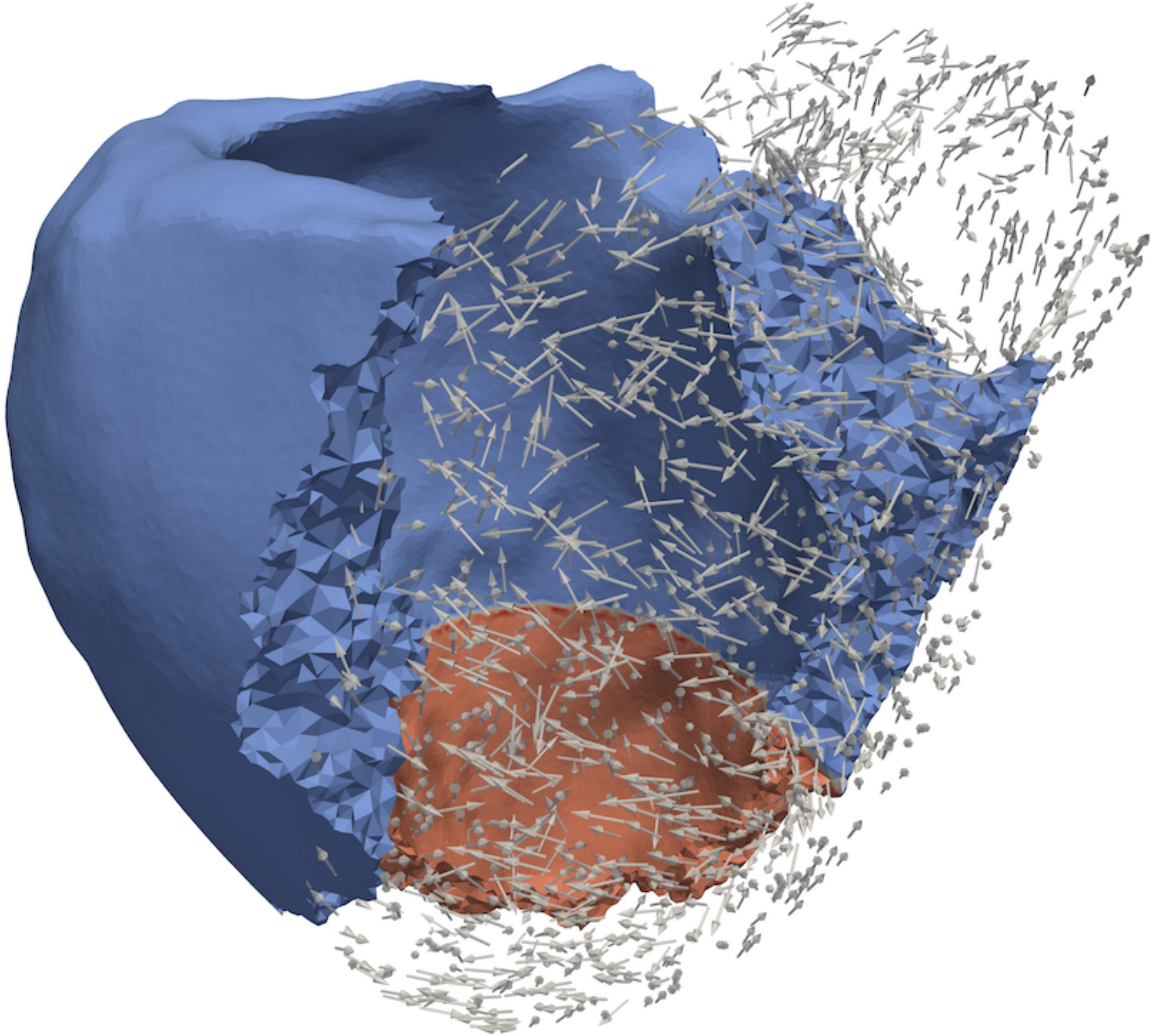
Difficulté : La complexité du système cardiovasculaire, avec des comportements différents du sang selon l'épaisseur des vaisseaux sanguins est évidemment énorme (entre l' artère aorte et un vaisseau capillaire, on ne parle pas du même comportement).

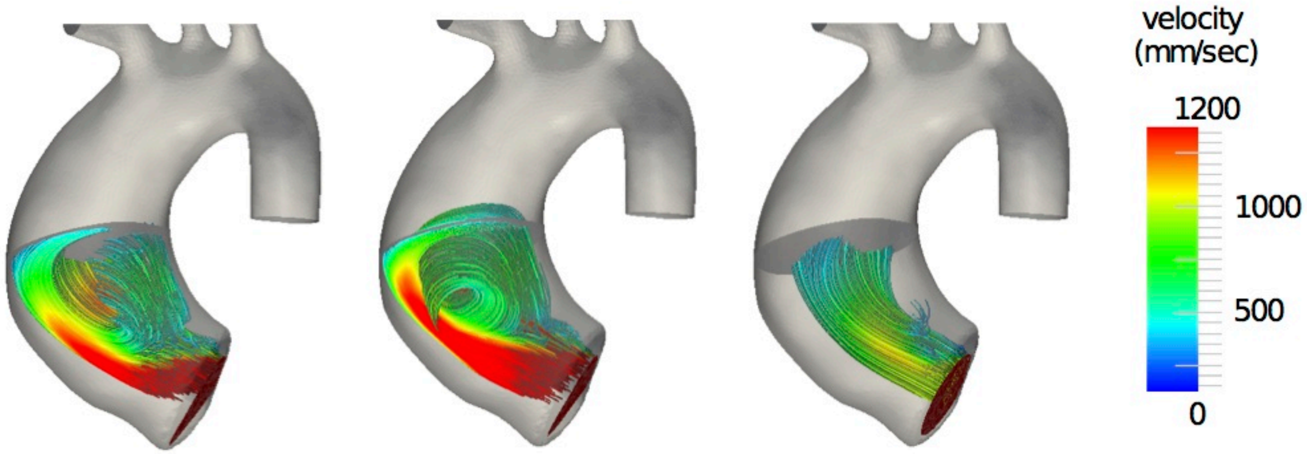
Les méthodes traditionnelles pour « résoudre » les équations aux dérivées partielles dans un domaine passent par un quadrillage du domaine remplaçant les dérivées par des différences finies, d'où un système d'équations fini (mais grand)

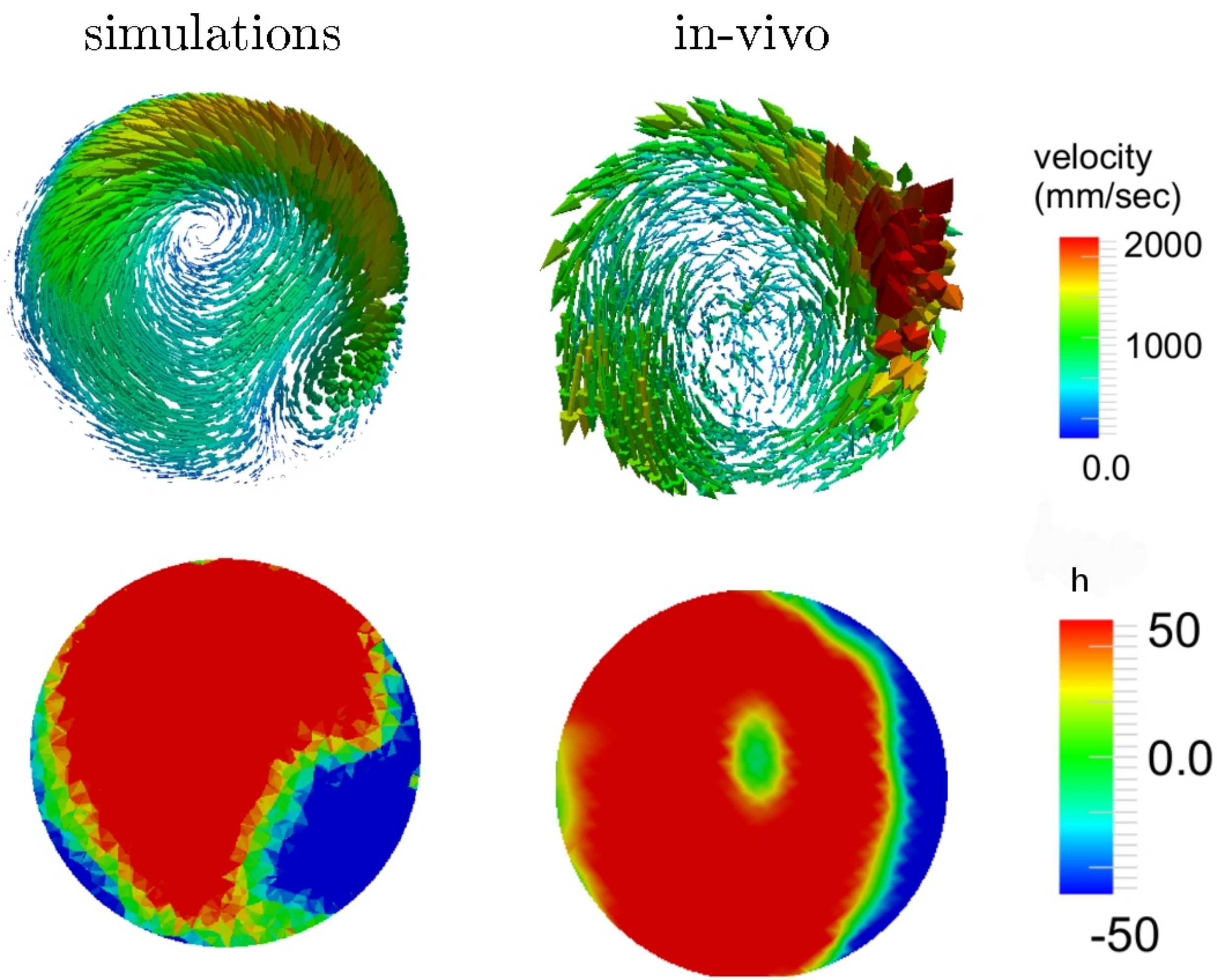
Ici, le bord du domaine bouge : le cœur et les artères se contractent pour pousser le sang, et le sang les repousse !

On emploie à nouveau des méthodes de résolution « sans quadrillage »

C'est une recherche en cours, avec un avenir plus que prometteur.




velocity
(mm/sec)
1200
1000
500
0



simulations
in-vivo
velocity (mm/sec)
2000
1000
0.0
h
50
0.0
-50

Et que deviennent les diplômés en mathématique ?

Une enquête récente sur seize promotions de l'ULB montre que la plupart des diplômés trouvent rapidement un métier de haut niveau de responsabilité lié à leur diplôme

Les métiers des mathématiciens

Enquête sur les professions actuelles des anciens étudiants du département de mathématique de l'ULB, diplômés entre 1997 et 2012 en mathématique, statistique ou actuariat. Ces master sont directement accessibles après un Ba en mathématique.

204 réponses sur 306 diplômés.

Activité des diplômés	Pourcentage
Travail dans une compagnie privée ou un secteur de l'état	
Finance - assurance	29,4%
Consultance	10,3%
Industrie pharmaceutique	2,5%
Informatique	2%
Autres (soins de santé, mobilité dans les villes, industrie spatiale, industrie alimentaire, énergie, affaires intérieures....)	7,2%
Total	**51,4%**

Enseignant ou chercheur universitaire	
Professeur ou chercheur permanent	9,3%
Chercheur post doctorant (chercheur ou assistant)	5,4%
Doctorant (chercheur ou assistant)	11,3%
Total	**26%**
Professeur	
Dans l'enseignement secondaire (Belgique)	11,2%
Dans l'enseignement secondaire (Luxembourg)	2,5%
Dans l'enseignement supérieur non universitaire	5,4%
Total	**19,1%**
Etude complémentaire ou interruption volontaire de carrière	1%
Demandeur d'emploi	2,5%

Parmi les diplômés, 51,5 % sont en fait des diplômées - les mathématiques sont largement ouvertes aux filles comme aux garçons.

65 % des étudiants ont mis moins d'un mois pour trouver leur premier emploi. Nombreux sont ceux qui nous ont dit avoir eu un contrat en poche avant la fin de leurs études.
Pour 85 % d'entre eux, la recherche d'emploi a mis moins de trois mois, pour 92 % moins de six mois et pour 95,6 % moins d'un an.