UNE SÉLECTION DE PROBLÈMES DE COMPÉTITIONS MATHÉMATIQUES EUROPÉENNES

Francisco Bellot Rosado

Congrès SBPMef 2015 à Mons

Je voudrais d'abord remercier la Commission Congrès pour avoir accepté ma proposition de faire un exposé, ici à Mons.

J'ai choisie une selection de problems don't l'origine commun sont des competitions européennes de niveau anterieur à l'enseignement universitaire. J'espère qu'ils ne seront pas très connues à vous.

Le premier example vient d'un concours qui, à cé moment, n'existe pas: La compétition Autriche-Pologne, qui, après 29 ans d'existance, depuis 2007 a été substituée (par iniciative de l'Autriche) par l'Olympiade d'Europe Centrale.

Problème 1

A-P Math Comp. 1985, problème 7

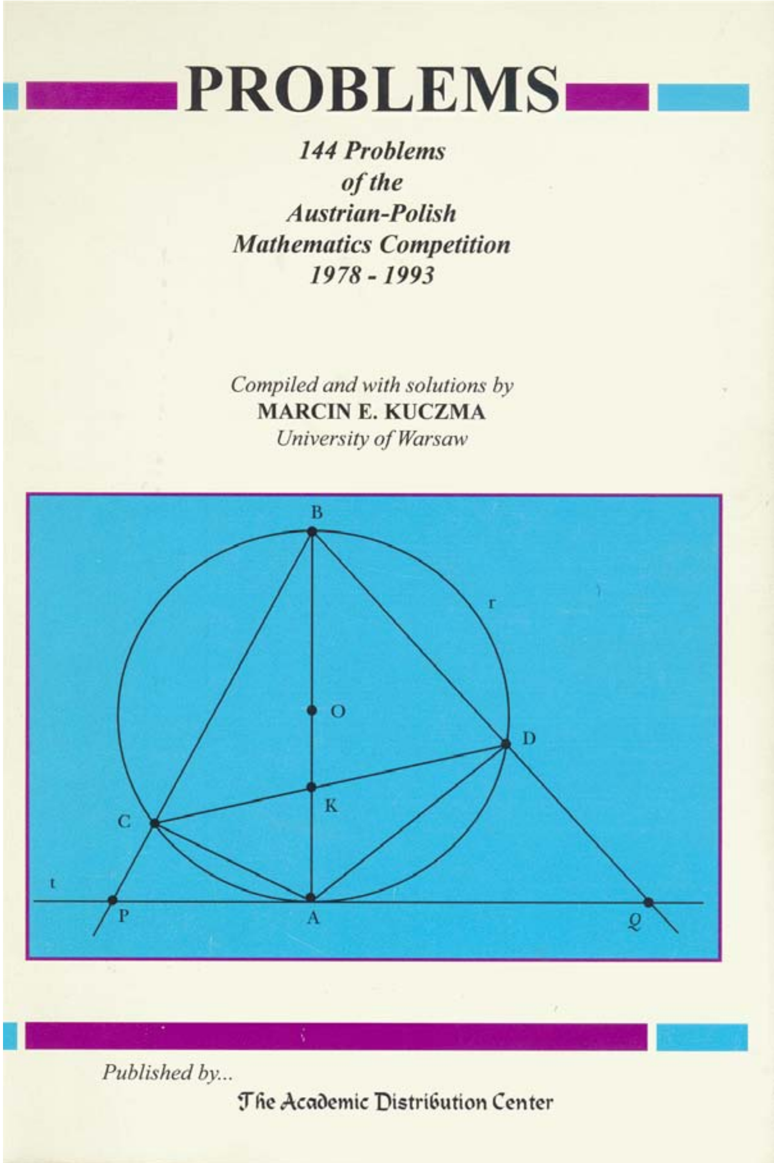
Trouver une cote supérieur de

$$\frac{x_1x_2+2x_2x_3+x_3x_4}{x_1^{\,2}+x_2^{\,2}+x_3^{\,2}+x_4^{\,2}}.$$

oú (x_1, x_2, x_3, x_4) sont des nombres réels, pas tous nuls.

Note pour les participants: *À moindre cote, meilleure solution!*

Une excellent compilation de problèmes de cette compétition est incluse dans le livre que voici:



Solution (de **Marcin E. Kuczma, Université de Varsovie)**

Nous allons trouver la moindre des cotes supérieures de l'expression donnée, en utilisant plusieurs changements de variables, convenablement choisis.

Soient $F\left(x_1, x_2, x_3, x_4\right) = \dfrac{x_1x_2 + 2x_2x_3 + x_3x_4}{x_1^{\ 2} + x_2^{\ 2} + x_3^{\ 2} + x_4^{\ 2}}$ et $u = \sqrt{x_2^{\ 2} + x_3^{\ 2}}$, $v = \sqrt{x_1^{\ 2} + x_4^{\ 2}}$.

Alors, $u \geq 0, v \geq 0$ et $u + v > 0$. Alors on a

$$2x_2x_3 = u^2 - \left(x_2 - x_3\right)^2 \leq u^2 \quad (1)\,.$$

D'autre part, par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a

$$x_1x_2 + x_3x_4 \leq uv \quad (2)\,.$$

Ainsi nous arrivons à

$$F\left(x_1, x_2, x_3, x_4\right) \le \frac{u^2+uv}{u^2+v^2} \equiv G(u,v) \quad (3).$$

Si u=0, on a G(0,v)=0. Pour u>0,

$$\frac{1}{G(u,v)} = \frac{v^2-u^2+2u^2}{u(v+u)} = \frac{v-u}{u} + \frac{2u}{v+u} = -2 + \frac{v+u}{u} + \frac{2u}{v+u}.$$

En posant $w = \frac{v+u}{u}$, nous avons

$$2 + \frac{1}{G(u,v)} = w + \frac{2}{w} = 2\sqrt{2} + \left(\sqrt{w} - \sqrt{\frac{2}{w}}\right)^2 \ge 2\sqrt{2} \quad (4);$$

et, en tenant compte de (3), nous trouvons

$$F\left(x_1, x_2, x_3, x_4\right) \le G(u,v) \le \frac{1}{2\sqrt{2}-2} = \frac{1+\sqrt{2}}{2} \quad (5).$$

Dans (5), l'égalité est possible si et seulement si (1), (2) et (4) sont égalités. Dans (4), l'égalité exige $w=\sqrt{2}$, c'est à dire, $v=\left(\sqrt{2}-1\right)u$.

Les inégalités (1) et (2) deviennent égalités si $x_2 = x_3$ et $x_1 = x_4$. Ainsi, $\frac{1+\sqrt{2}}{2}$ est la moindre cote supérieure de l'expression donnée, et ceci pour $x_2 = x_3 = 1;\ x_1 = x_4 = \sqrt{2}-1$.

Quelques observations

Il faut signaler que les participants dans la compétition Autriche-Pologne (comme ceux de sa continuation, l'Olympiade de l'Europe Centrale) ne sont pas les mêmes choisis pour l' IMO : c'est-à-dire, une fois décidé quels sont les 18 meilleurs étudiants classifiés pendant les tests de sélection, les 6 premiers vont à la IMO, les 6 suivants vont à l'Olympiade de l'Europe Centrale, et les 5 suivants à la compétition du Nord de l'Europe connue comme **The Baltic Way,** dont nous parlerons aussi pendant cet exposé.

Problème 2

Olympiade britannique 2013-14, Première tour

Trouver la valeur exacte de

$$\frac{2014^4+4\cdot 2013^4}{2013^2+4027^2}-\frac{2012^4+4\cdot 2013^4}{2013^2+4025^2}.$$

(On rappelle que l'usage de calculateurs est interdit dans la plupart des Olympiades et en particulier dans celle de la Grande Bretagne)

On devrait espérer que la valeur demandée soit dans une certaine mésure « familiale » ou au moins « simple »....

En suivant le conseil de Pólya, essayons « Géneraliser ». Dans ce cas, nous posons ***2013 = n***.

Alors l'expression devienne

$$\frac{(n+1)^4+4\cdot n^4}{n^2+(2n+1)^2}-\frac{(n-1)^4+4\cdot n^4}{n^2+(2n-1)^2}.$$

Ainsi nous devons voir la manière de simplifier ceci, sans calculs avec des valeurs particuliers.... On peut se concentrer dans le numérateur :

$$\left[(n+1)^4+4\cdot n^4\right]\cdot\left[n^2+(2n-1)^2\right]-\left[n^2+(2n+1)^2\right]\cdot\left[(n-1)^4+4\cdot n^4\right]$$

En developpant la première couple de facteurs on obtient

$$25n^6+19n^4-5n^2+1,$$

Et en faisant de même avec la seconde, nous avons

$$25n^6+19n^4-5n^2+1.$$

Donc la valeur cherché est ***zéro*** car les dénominateurs des deux fractions ne sont pas nuls.

Problème 3

Olympiade de la Roumanie, 1994 ; 9e année

Auteur : D.M. Batinetzu-Giurgiu

Soient *a, b, c ; A, B, C nombres réels strictement positives tels que les équations*

$$ax^2 - bx + c = 0 \text{ et } Ax^2 - Bx + C = 0$$

aient des racines réelles. Prouver que pour tout u compris entre les racines de la première équation et pour tout U compris entre les racines de la seconde, on a l'inégalité

$$(au + AU)\left(\frac{c}{u} + \frac{C}{U}\right) \le \left(\frac{b+b}{2}\right)^2 .$$

Solution

On voit que les racines des deux équations sont strictement positives, et alors *u,U* sont positives aussi et l'énoncé a du sens. En effet, si x_1, x_2 sont les racines de la première équation, par les rélations entre les racines et les coéfficients on a $x_1 + x_2 = \frac{b}{a} > 0$ et $x_1 x_2 = \frac{c}{a} > 0$, donc $x_1 > 0, x_2 > 0$. De même pour la seconde équation.

Comme $u \in [x_1, x_2]$, on a u>0 et

$$f(u) = au^2 - bu + c \le 0 \Rightarrow au^2 + c \le bu \leftrightarrow au + \frac{c}{u} \le b .$$

De la même manière on a $AU + \frac{C}{U} \le B$.

De ces deux inégalités nous obtenons, par addition et multiplication par ½ dans les premières membres et en changeant et en appliant l'inégalité arithmétique-géométrique

$$\frac{1}{2}(b+B) \ge \frac{1}{2}\left(au + AU + \frac{c}{u} + \frac{C}{U}\right) \ge \sqrt{(au + AU)\left(\frac{c}{u} + \frac{C}{U}\right)}$$

d'oú nous avons

$$\left[\frac{1}{2}\left(au + AU + \frac{c}{u} + \frac{C}{U}\right)\right]^2 \le \left[\frac{1}{2}(b+B)\right]^2$$

Le cas d'égalité est possible si on a, simultanément,

$$au+\frac{c}{u}=b, AU+\frac{C}{U}=B\ ,$$

c'est-à-dire, *u* et *U* sont des racines des deux équations (u de la première et U de la seconde), et, en plus, on a

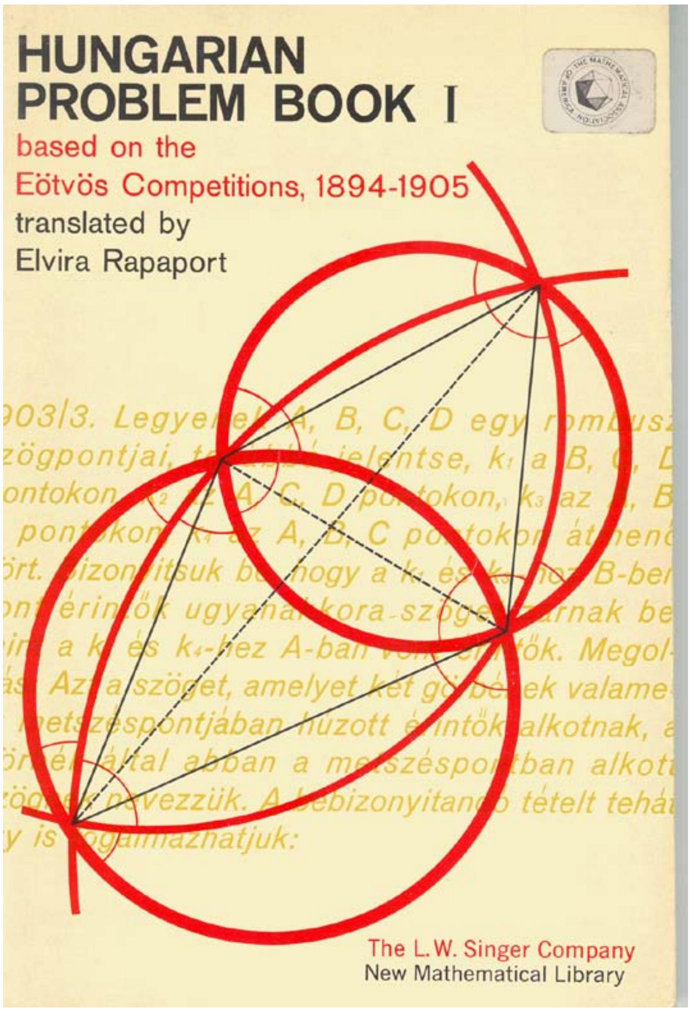
$$au+\frac{c}{u}=AU+\frac{C}{U}\ .$$

Problème 4

Le premier problème de la Compétition hongroise Eötvös-Kürschak 1894

Cette compétition est la plus ancienne de l'Europe et probablement c'est la seule qui a deux noms : quand la Société de Physiciens et Mathématiciens de Hongrie fut divisé en deux, celle de Physiciens et celle des Mathématiciens, le nom original Compétition Eötvös fut retenue par le concours de Physique et on baptisa avec Kürschak celle de Mathématiques.

Voici le livre avec les premiers concours, en traduction en anglais :



Et voici aussi l'image de Jósef Kürschak (1864-1933) :

The Eötvös Contests in elementary mathematics have been open to Hungarian students in their last year of high school ever since 1894. They are famous for the simplicity of the concepts employed, the mathematical depth reached, and the diversity of elementary mathematical fields touched. But perhaps their most remarkable feature is the influence that they, together with a mathematics journal for students, seem to have had on the young people of that small country. Among the winners of the first eleven contests (i.e. those contained in the present volume) many turned into scientists of international fame; e.g. L. Fejér, T. von Kármán, D. Kőnig, M. Riesz. Among the winners of the next twenty contests (i.e. those contained in volume 12) are G. Szegő, T. Radó, E. Teller; all three are well-known in the United States, where they now reside. This translation of the Eötvös Contest Problems from 1894-1928 is based on the revised Hungarian edition of J. Kürschák's original compilation. Kürschák combined his excellence in mathematics with his interest in education when he supplied the elegant solutions and illuminating explanations.

JÓZSEF KÜRSCHÁK (1864-1933) was born and educated in Hungary. He was professor of mathematics at the Polytechnic University in Budapest, member of the Hungarian Academy and permanent member of the Examination Board for prospective high school teachers of mathematics.

His many contributions to mathematics include work in the calculus of variations, in algebra and in number theory. He used his great pedagogical skill in developing and teaching an exceptionally good mathematics course for beginning engineering students. He also gave courses for future high school teachers, mainly in elementary geometry and in geometrical constructions. Several of his papers deal with the teaching and popularization of mathematics. His devotion to intelligently guided problem solving is illustrated by the famous problem book which forms the basis of the present volume.

77011

NEW MATHEMATICAL LIBRARY

Cover design suggested by Arlys Stritzel

Prouver que les expressions

$$2x + 3y \text{ et } 9x + 5y$$

sont divisibles par 17 pour le même ensemble de valeurs entières de x et y.

Solution

Nous pouvons écrire

$$u = 2x + 3y, \quad v = 9x + 5y.$$

Nous allons chercher la manière d'introduire 17 avec u et v :

$$3v - 5u = 17x$$

Nous pouvons écrire ceci en deux manières :

$$3v = 5u + 17x \quad (1)$$

$$5u = 3v - 17x \quad (2)$$

Si x et y sont des entièrs tels que u est divisible par 17, (1) nous dit que 3v est aussi divisible par 17, donc v doit l'être (car 3 ne l'est pas).

De la même forme, en utilisant (2) nous pouvons déduire que si les entiers x et y sont tels que v est divisible par 17, alors u doit être aussi divisible para 17.

Problème 5

Un problème de l'Olympiade USSR 1990

Auteur : Dmitri Tereshin, Moscou

***Soient** $a_1, a_2, \ldots, a_n$ **nombres positifs tels que** $a_1 + a_2 + \ldots + a_n = 1$.*

Prouver qu'on a

$$\frac{a_1^2}{a_1+a_2}+\frac{a_2^2}{a_2+a_3}+\cdots+\frac{a_{n-1}^2}{a_{n-1}+a_n}+\frac{a_n^2}{a_n+a_1}\geq\frac{1}{2}.$$

Solution

L'égalité suivante est simple :

$$0=\left(a_1-a_2\right)+\left(a_2-a_3\right)+\cdots+\left(a_{n-1}-a_n\right)+\left(a_n-a_1\right),$$

et chaque terme de cette somme peut s'écrire comme une fraction convenable :

$$=\frac{a_1^2-a_2^2}{a_1+a_2}+\frac{a_2^2-a_3^2}{a_2+a_3}+\cdots+\frac{a_{n-1}^2-a_n^2}{a_{n-1}+a_n}+\frac{a_n^2-a_1^2}{a_n+a_1}=0$$

Alors nous pouvons aussi écrire ceci dans la forme

$$\frac{a_1^2}{a_1+a_2}+\frac{a_2^2}{a_2+a_3}+\cdots+\frac{a_{n-1}^2}{a_{n-1}+a_n}+\frac{a_n^2}{a_n+a_1}=\frac{a_2^2}{a_1+a_2}+\frac{a_3^2}{a_2+a_3}+\cdots+\frac{a_n^2}{a_{n-1}+a_n}+\frac{a_1^2}{a_n+a_1}.$$

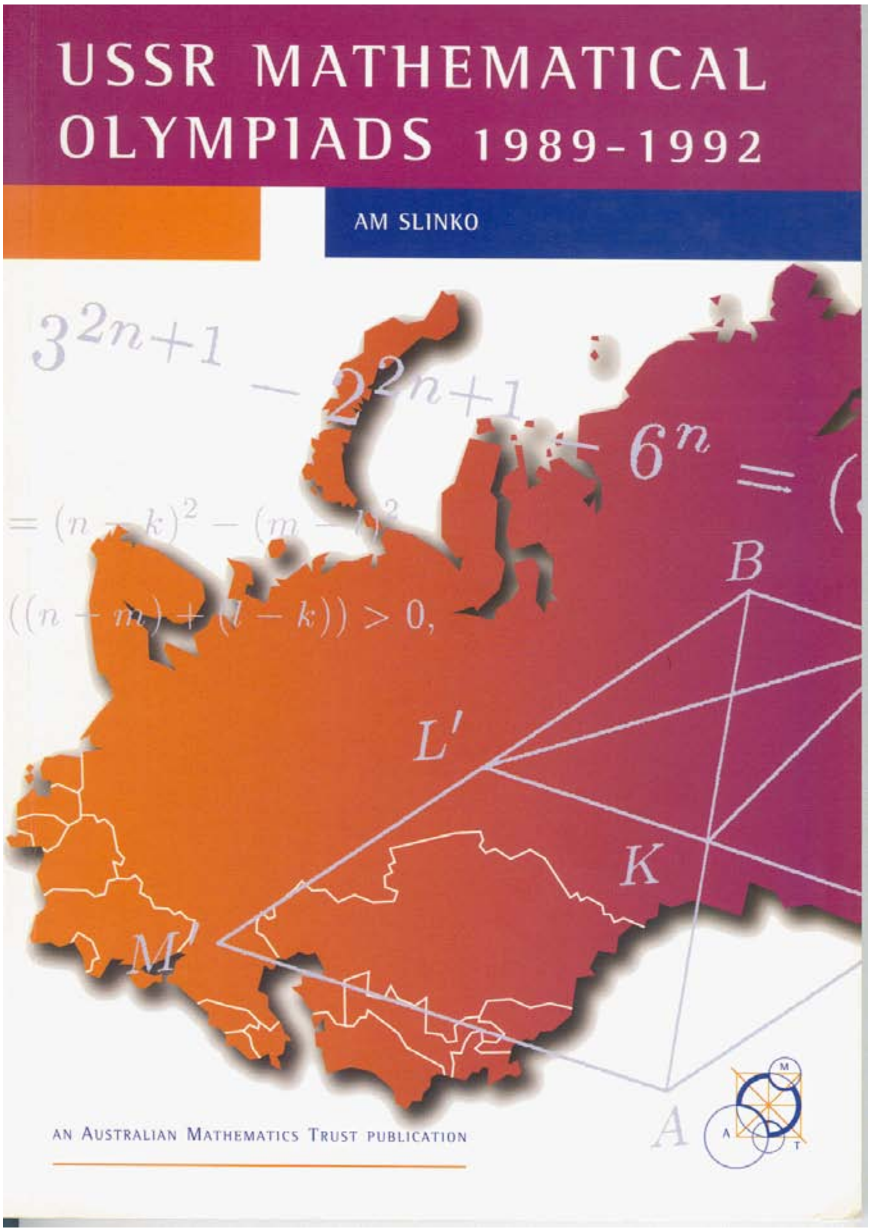
Une des possibles formes d'écrire l'inégalité des moyennes arithmetique et geométrique est la suivante :

$$\frac{a_i^2+a_j^2}{a_i+a_j}\geq\frac{1}{2}\left(a_i+a_j\right)$$

et ceci nous permet obtenir

$$\frac{a_1^2}{a_1+a_2}+\frac{a_2^2}{a_2+a_3}+\cdots+\frac{a_{n-1}^2}{a_{n-1}+a_n}+\frac{a_n^2}{a_n+a_1}=$$
$$\frac{1}{2}\left(\frac{a_1^2+a_2^2}{a_1+a_2}+\cdots+\frac{a_{n-1}^2+a_n^2}{a_{n-1}+a_n}+\frac{a_n^2+a_1^2}{a_n+a_1}\right)\geq\frac{1}{2}\left(a_1+\cdots+a_n\right)=\frac{1}{2}$$

L'égalité a lieu pour $a_1=a_2=\cdots=a_n=\frac{1}{n}$.

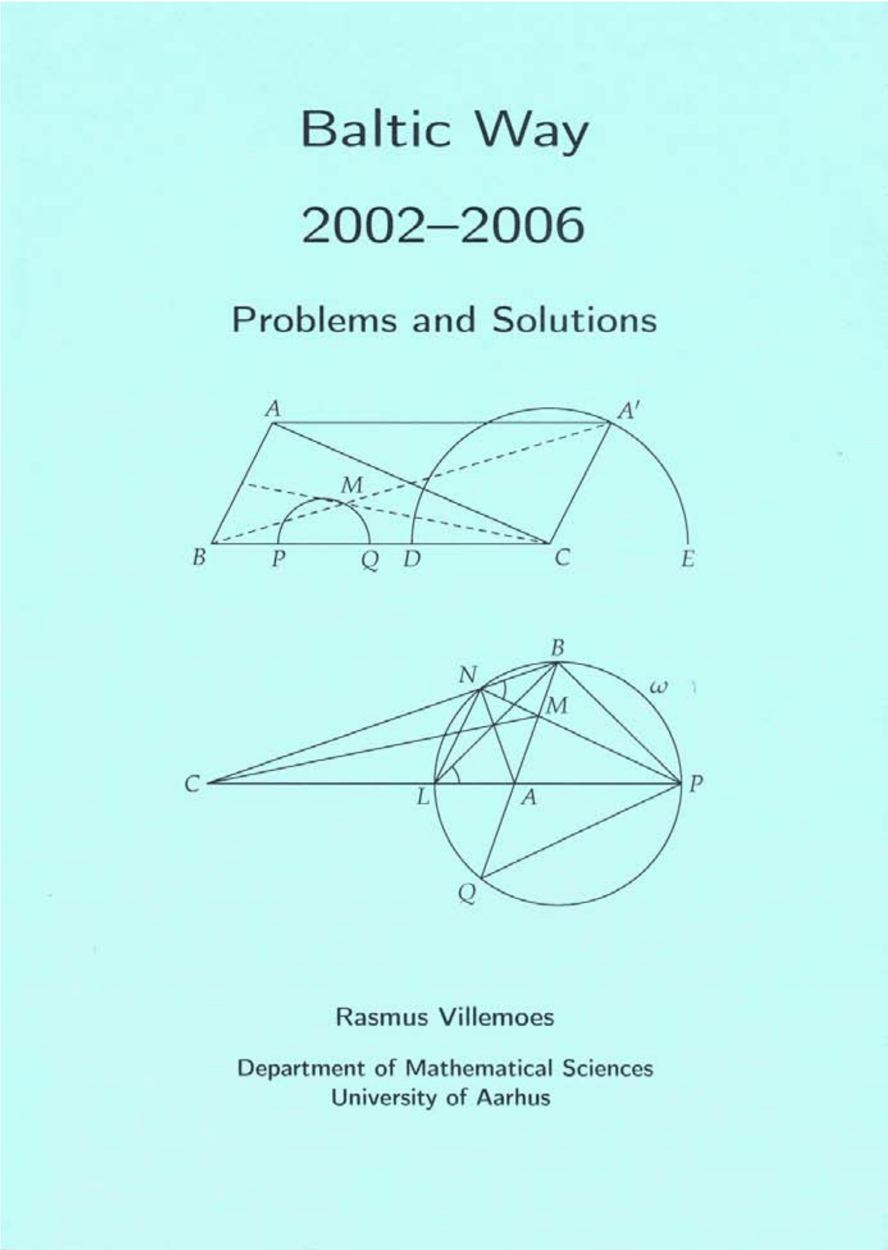


Le livre d’ Arkadii Slinko nous donne un vraie bouquet des Olympiades russes (soviétiques) juscqu’à la dernière de la CEI (Communauté des États Indépendents) en 1992. Il contient aussi les problèmes de l’IMO 1992, developpée à Moscou en juillet 1992 et dans laquelle Slinko a été le « Chef Coordinator ». Peu après cette IMO, Slinko s’est transladé à la Nouvelle Zélande, à l’Université de Auckland.

L’auteur du problème que nous avons presenté, Dmitri Tereshin, est un des plus prolifiques auteurs des problèmes pour les Olympiades russes et aussi accompagne les étudiants russes dans l’IMO.

Problème 6

Un problème du « Baltic Way »



Dans le préface de ce livre, l'auteur exprime les premiers années du concours, qui commença en 1990 avec la participation des étudiants de l'Estonie, la Latvie et la Litouanie, en adoptant en plus le nom de la concentration massive des habitants des trois pays baltiques en Août 1989, 50-ième anniversaire du Pacte Molotov-Ribbentrop en formant une longue chaine humaine de Tallinn juscqu'à Vilnius. Depuis 1997 les étudiants des pays autour du Baltique, plus Norvêge et Islandie, participent dans cette compétition, avec équipes de 5 personnes. La compétition n'est pas individuel : on demande aux 5 membres de chaque équipe de donner une solution commune à chacun des 20 problèmes, pendant 4 heures et demie.

Chaque équipe doit donner une seule solution à chaque problème (des 20 !). Voici un des problèmes de l'édition de 2003 : une des plusieurs inégalités de l'ensemble de problèmes proposés aux étudiants :

Soient** a,b,c **des nombres réels positives. Prouver que

$$\frac{2a}{a^2+bc}+\frac{2b}{b^2+ca}+\frac{2c}{c^2+ab}\le\frac{a}{bc}+\frac{b}{ca}+\frac{c}{ab}.$$

Solution

Étant donné que $a^2+bc\ge 2a\sqrt{bc}$, etc, il suffit prouver que

$$\frac{1}{\sqrt{bc}}+\frac{1}{\sqrt{ca}}+\frac{1}{\sqrt{ab}}\le\frac{a}{bc}+\frac{b}{ca}+\frac{c}{ab},$$

et ceci on peut avoir en « insertant » $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$ entre les deux membres de l'inégalité précedant.

Observation

Je viens de connaître la suivante généralisation de cette inégalité, dans le livre (en roumain) ***Inégalités algébriques***, de ***Marin Chirciu*** (Editura Paralela 42, Pitesti, 2014) :

Si** n>0, **on a

$$4n\left(\frac{a}{a^2+nbc}+\frac{b}{b^2+nca}+\frac{c}{c^2+nab}\right)\le(n+1)\left(\frac{a}{bc}+\frac{b}{ca}+\frac{c}{ab}\right).$$

En effet, nous pouvons observer que

$$\left(a^2+nbc\right)^2\ge 4na^2bc\Leftrightarrow\left(a^2-nbc\right)^2\ge 0\Rightarrow\frac{na}{a^2+nbc}\le\frac{a^2+nbc}{4abc}$$

Et ainsi le premier membre de l'inégalité proposé (M_g) vérifie

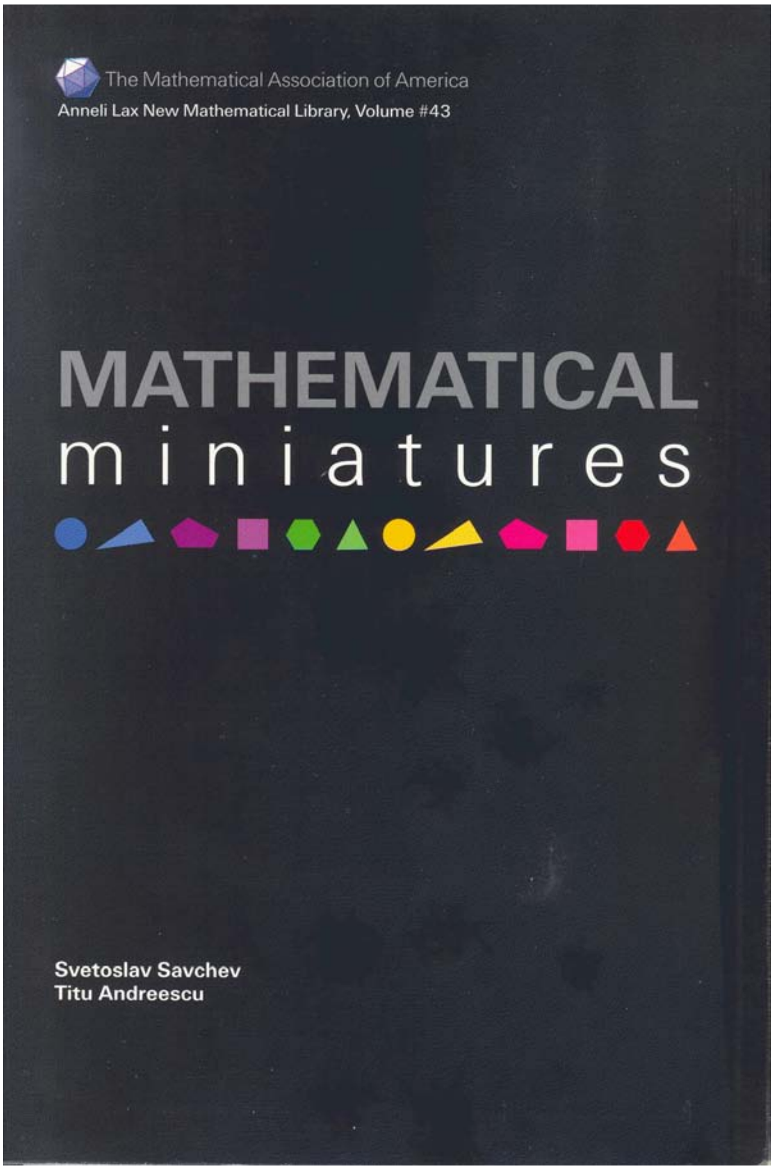
$$M_g\le\sum_{ciclique}\frac{a^2+nbc}{abc}\le\frac{(n+1)\sum a^2}{abc}=(n+1)\left(\frac{a}{bc}+\frac{b}{ca}+\frac{c}{ab}\right)=M_d$$

et la généralisation est terminée.

Problème 7

Un autre problème de la compétition Kürschak (1983)

(emprunté du livre « Mathematical Miniatures », de Savchev et Andreescu)



Selon racontent les auteurs (Savchev de Bulgarie ; Andreescu de Roumanie), pendant l'IMO 1993 en Istanbul ils ont décidé d'écrire un livre sur la résolution de problèmes de Mathématiques. Il ne fût que l'année 2003 que le livre a été publié.

Il y a beaucoup des problèmes de ce livre qui mériteraient être inclus dans une presentation comme celle-ci, concernant des problèmes de concours européens. J'ai choisie un autre problème de la Compétition hongroise Kürschak, dans ce cas de 1983.

Le polynôme

$$f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + 1$$

avec des coefficients réels no negatifs, a n ***racines réelles.***

Prouver que $f(2) \geq 3^n$***.***

Solution

Il est clair que f(x) prend valeurs positives pour $x \geq 0$, et donc ses racines, en étant réelles par hypothèse, seront negatives. Soient celles-ci

$$-\alpha_1, -\alpha_2, \cdots, -\alpha_n$$

et donc $f(x) = (x+\alpha_1)(x+\alpha_2)\cdots(x+\alpha_n)$. Par les rélations de Viête nous avons

$$\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_n = 1 .$$

Par application de l'inégalité des moyennes arithmétique et géometrique, nous avons

$$2+\alpha_k = 1+1+\alpha_k \geq 3\sqrt[3]{1 \cdot 1 \cdot \alpha_k} = 3\sqrt[3]{\alpha_k}$$

pour tout $k = 1, 2, ..., n$. Alors nous avons

$$f(2) = (2+\alpha_1)(2+\alpha_2)\cdots(2+\alpha_n) \geq 3^n \sqrt[3]{\alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdots \cdot \alpha_n} = 3^n .$$

Problème 8

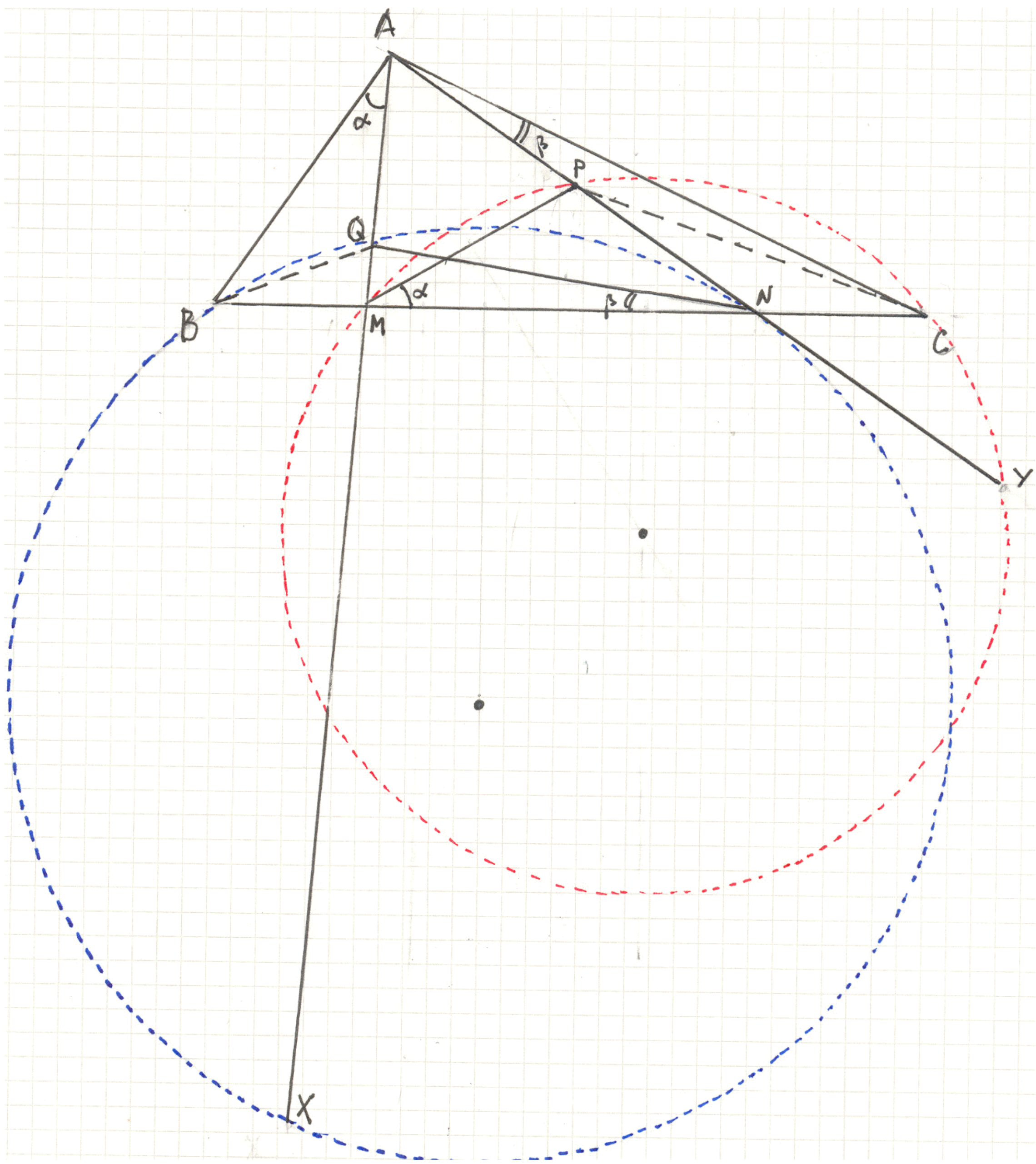
Un problème de Géométrie de l'Olympiade espagnole 2015

Soient M et N points du coté BC du triangle ABC, tels que BM = CN (on suppose que M est placé entre B et N). Et soient P, Q points placés respectivement dans AN et AM en vérifiant les conditions

$$\measuredangle PMC = \measuredangle MAB \text{ et } \measuredangle QNB = \measuredangle NAC.$$

Seront $\measuredangle QBC = \measuredangle PCB$ ***?***

Solution



L'idée clé de la solution est considérer les circonferences circonscrites aux triangles BNQ et PMC. Si AM coupe la circonférence (BNQ) dans X, et AN coupe la circonférence (PMC) dans Y, il est évident que les quadrilatères BQNX et MPCY sont inscrits.

Comme $\measuredangle QBC = \measuredangle QBN$ et $\measuredangle PCB = \measuredangle PCM$, les angles de l'énoncé seront égaux si les angles $\measuredangle \mathrm{QBN}$ et $\measuredangle PCM$ sont aussi égaux.

Mais nous avons

$$\measuredangle QBN = \measuredangle QXN = \measuredangle MXN \text{ ,}$$

et d'autre part,

$$\measuredangle PCM = \measuredangle PYM = \measuredangle NYM \text{ .}$$

Alors le problème sera résolu par l'affirmative si nous démontrons que $\measuredangle MXN = \measuredangle NYM$, et ceci n'est pas une autre chose que dire que les quatre points M, N, Y, X sont cocycliques. Pour ça, nous pouvons essayer de montrer que

$$AM \cdot AX = AN \cdot AY \Leftrightarrow \frac{AM}{AN} = \frac{AY}{AX} \quad (1) \text{ .}$$

Pour arriver à notre but, nous faisons le raisonnement suivant :

Les triangles ABM et ACN ont la même surface, car ses bases sont égaux par hypothèse et ses hauteurs depuis A sont égaux aussi ; alors

$$AM \cdot AB \cdot \sin\alpha = \mathrm{AN} \cdot \mathrm{AC} \cdot \sin\beta \qquad (2),$$

oú nous appellons $\alpha = \measuredangle MAB; \beta = \measuredangle NAC$.

D'autre part, deux des angles du triangle ABX sont α et $\measuredangle BXQ = \measuredangle QNB = \beta$ (dans la circonférence (BNQ)).

D'une manière semblable, deux des angles du triangle ACY sont β et α. Alors les triangles ABX et ACY sont semblables et nous avons

$$\frac{AY}{AX} = \frac{CY}{AB} \quad (3) \text{ .}$$

Finalement, en appliant the théorème des sinus dans ACY, nous avons

$$\frac{AC}{sen\alpha} = \frac{CY}{sen\beta} \Leftrightarrow \frac{sen\beta}{sen\alpha} = \frac{CY}{AC}$$

Et alors nous pouvons écrire (2) dans la forme

$$\frac{AM}{AN}=\frac{AC\cdot sen\beta}{AB\cdot sen\alpha}=\frac{AC}{AB}\cdot\frac{CY}{AC}=\frac{CY}{AB}=\frac{AY}{AX}\ \text{ par (3) .}$$

Ainsi, nous avons prouvé l’égalité des angles de l’énoncé.

Bibliographie

1) **Kuczma, M.E.** ***144 Problems of the Austrian-Polish Mathematics Competition 1978-1993. The Academic Distribution Center, Freeland, Maryland, 1994***
2) **UK Mathematical Olympiad 2013-2014.** ***The UK Mathematical Trust 2014.***
3) **Romanian Mathematical Competitions 1994.** ***Romanian Mathematical Society, Bucharest.***
4) **Hungarian Problem Book 1.** ***The New Mathematical Library. Random House & L.W. Singer, 1963.***
5) **Slinko, A.M.** ***USSR Mathematical Olympiads 1989-1992. Australian Mathematics Trust, 1994.***
6) **Villemoes R.** ***Baltic Way 2002-2006. Problems and Solutions. University of Aarhus, 2007.***
7) **Savchev S. & Andreescu T.** ***Mathematical Miniatures. Mathematical Association ofAmerica, Anneli Lax New Mathematical Library vol#43, 2003***
8) **Real Sociedad Matemática Española. Problemas propuestos en la Fase Nacional de la LI Olimpiada Matemática Española. Badajoz 2015.**