Curiosités des fonctions du 3^e degré

Y. Haine, E. Moitroux

Congrès de la SBPMef à Mons

26 août 2015

Sommaire

Sommaire

Sommaire

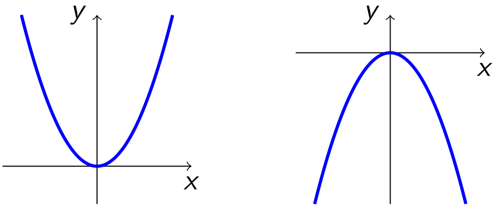
Graphique : objectif

Quelle est l'identité graphique
d'une fonction polynomiale du 3^{e} degré ?

Quelques identités graphiques marquées

- Classe des fonctions : $f(x) = ax^2 + bx + c, \quad a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$

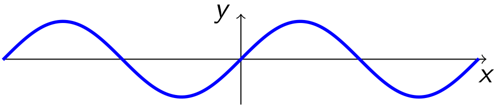
  Le graphique d'une fonction de cette famille est



  à une translation et/ou une affinité orthogonale d'axe parallèle à Ox ou Oy de rapport strictement positif près.

Quelques identités graphiques marquées

- Classe des fonctions : $f(x) = ax + b$
- Classe des fonctions : $f(x) = A\sin(\omega x + \varphi) + B,\ A, \omega \neq 0$



- $f(x) = C\,\mathrm{e}^{k\,x} + D,\ C, k \neq 0$

dont les graphiques sont les images des fonctions de référence $x, \sin x, \mathrm{e}^x$ par une translation et/ou une affinité orthogonale d'axe Ox ou Oy.

- Si une famille de fonctions a une identité graphique forte, son étude se base notamment sur le rôle de chaque paramètre et leur influence sur le graphique.

- Application dans la résolution de problèmes :
  trouver une fonction qui modélise un phénomène donné par un tableau de nombres ou un nuage de points
  $\rightarrow$ Intérêt de connaître quelques identités graphiques pour orienter le choix de la famille de fonctions qui va modéliser le phénomène.

Identité graphique ?

Quelle est l'identité graphique d'une fonction polynomiale du 3e degré

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d, \quad a, b, c, d \in \mathbb{R}, a \neq 0 \quad ?$$

Identité graphique ?

Quelle est l'identité graphique d'une fonction polynomiale du 3e degré

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d, \quad a, b, c, d \in \mathbb{R}, a \neq 0 \ \ ?$$

À vous de travailler !

Identité graphique ?

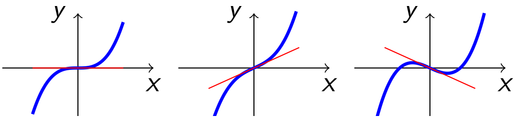
Observations

- Changement de signes de la fonction en $+\infty$ et $-\infty$
- Absence ou présence simultanée d'un minimum et d'un maximum
- Présence d'un point d'inflexion avec une tangente horizontale ou oblique

Identité graphique ?

Observations

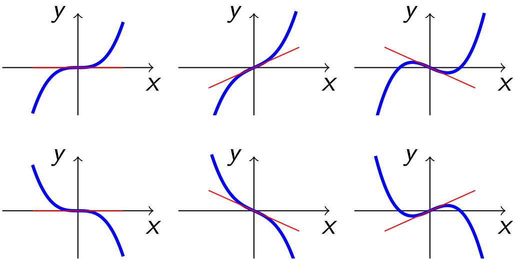
Le graphique de la fonction $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d, a \neq 0$ est



Identité graphique ?

Observations

Le graphique de la fonction $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d,\ a \neq 0$ est



à une translation et/ou une affinité d'axe Ox ou Oy près.

Identité graphique ?

Observations

L'identité graphique de cette famille est moins forte :
on ne peut pas obtenir le graphique de f en faisant subir une translation et/ou une affinité orthogonale d'axe Ox ou Oy au graphique de x^3.

Identité graphique ?

Validation

- La fonction f change de signe
  car $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ ou $-\infty$

  Conséquences

  - La fonction a au moins un zéro réel.
  - Le polynôme peut avoir trois zéros réels
    ou un zéro simple réel et deux zéros complexes conjugués.

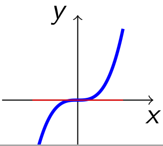
Identité graphique ?
Validation

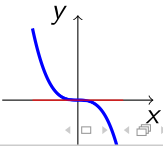
- Variations de la fonction f

  $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

  Signe de f' : ?
  $\Delta^* = 4b^2 - 12ac = 4(b^2 - 3ac)$

  - Si $\Delta^* = 0$: $f'(x) = 3a\left(x + \frac{b}{3a}\right)^2 \geq 0$
    $f(x) = a\left(x + \frac{b}{3a}\right)^3 + k$





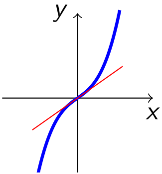
Identité graphique ?

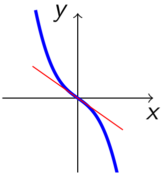
Validation

- Variations de la fonction f : $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

$$\Delta^* = 4b^2 - 12ac = 4(b^2 - 3ac)$$

  - Si $\Delta^* < 0$: $f'(x)$ a le même signe que a
    la fonction f est donc strictement croissante ou décroissante selon que $a > 0$ ou $a < 0$;





Identité graphique ?

Validation

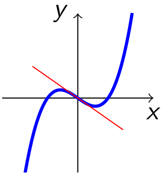
- Variations de la fonction f : $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

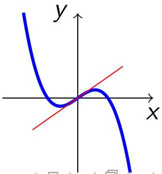
$$\Delta^* = 4b^2 - 12ac = 4(b^2 - 3ac)$$

- Si $\Delta^* > 0$:

x		x'		x''	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	M	$\searrow$	m	$\nearrow$

x		x'		x''	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	m	$\nearrow$	M	$\searrow$





Identité graphique ?

Validation

- Concavité du graphique de la fonction f

$$f''(x) = 6ax + 2b$$

x		$-\frac{b}{3a}$	
$f''(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\cap$	PI	$\cup$

x		$-\frac{b}{3a}$	
$f''(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\cup$	PI	$\cap$

Le graphique de f a toujours un point d'inflexion.

Identité graphique ?

Complément

On peut écrire

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d = a\left(x + \frac{b}{3a}\right)^3 - \frac{\Delta^*}{12a}\left(x + \frac{b}{3a}\right) + k.$$

Le graphique de f est donc l'image, par une translation, du graphique d'une fonction de la famille simplifiée

$$F(x) = Ax^3 + Bx, A \neq 0.$$

Identité graphique ?

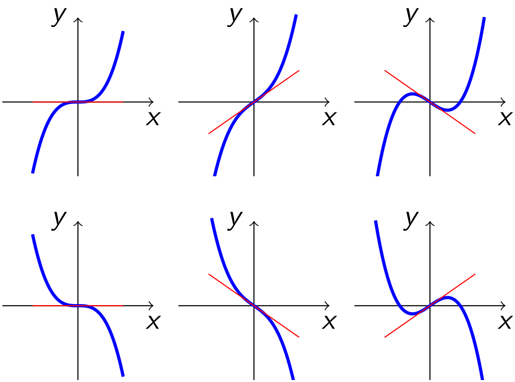
Complément

Fonctions de la famille $F(x) = Ax^3 + Bx, A \neq 0$

- Le graphique de cette fonction admet $O(0,0)$ comme point d'inflexion.
- Le graphique est symétrique par rapport à O.
  Par conséquent, le graphique d'une fonction du 3e degré est symétrique par rapport à son point d'inflexion.
- La tangente au point d'inflexion a pour équation $y = Bx$

  car $F'(x) = 3Ax^2 + Bx$ et $F'(0) = B$.

Identité graphique ?
Complément



Propriété d'une tangente

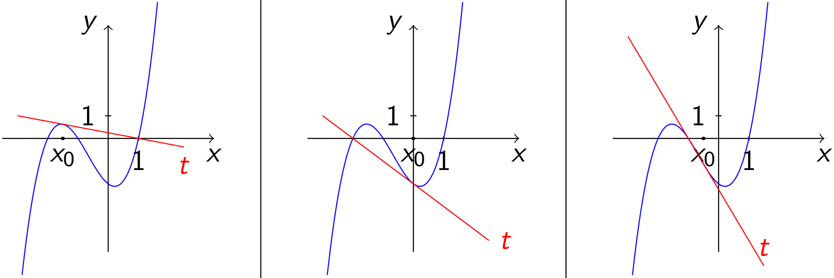
Position du problème

Soit $f(x) = (x+2)\cdot(x+1)\cdot(x-1)$ et
x_0 le milieu de l'intervalle déterminé par deux des zéros de f .
Traçons la tangente t au graphique de f au point d'abscisse x_0.
Qu'observe-t-on ?

Observation

Désignons par a, b et c les trois zéros de f.
Trois possibilités

x_0 milieu de $[a, b]$ | x_0 milieu de $[b, c]$ | x_0 milieu de $[a, c]$



Conjecture

La tangente au graphique de la fonction f au point dont l'abscisse est le milieu de l'intervalle déterminé par deux zéros passe par le troisième point d'intersection du graphique avec l'axe des abscisses.

Questions

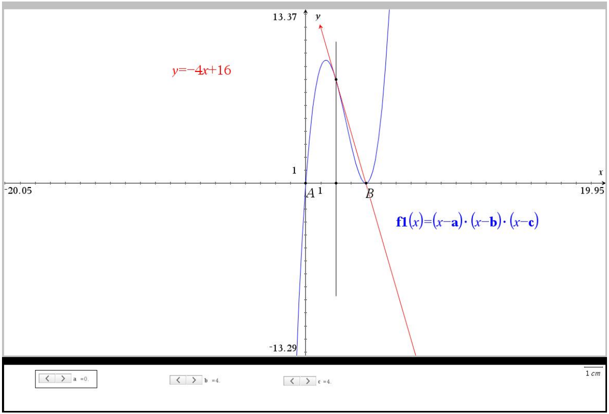
Questions

1. La tangente passe-t-elle réellement par "le 3e zéro" ?
2. Cette propriété est-elle vraie pour toute fonction du type

$$f(x) = k(x-a)\cdot(x-b)\cdot(x-c)$$

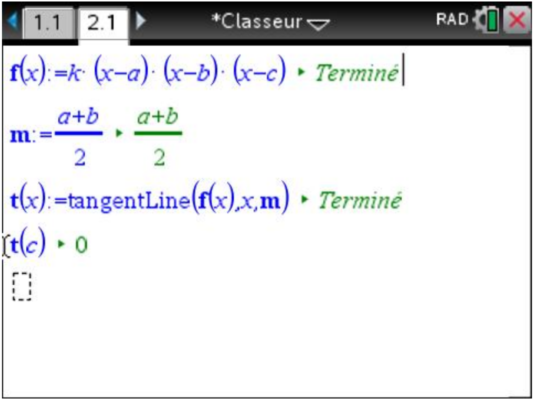
   où a, b, c sont des réels distincts ?
3. Cette propriété est-elle vraie pour toute fonction du 3e degré admettant trois zéros réels éventuellement confondus ?

Simulation avec TI-Nspire



Propriété d'une tangente

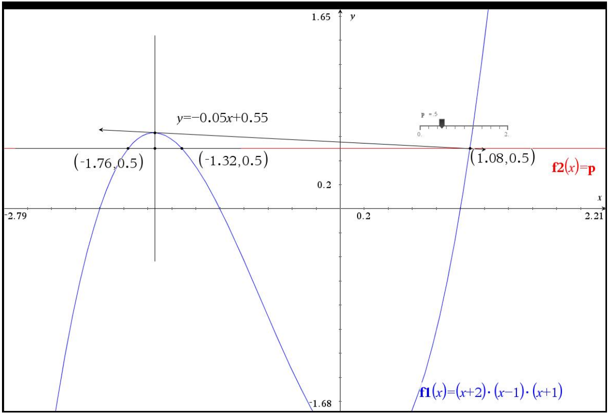
Démonstration



Remarque

- Cette propriété peut également servir de méthode pour tracer la tangente au graphique d'une fonction du 3ᵉ degré en un point milieu du segment déterminé par deux zéros.

Généralisation



Généralisation

Si une droite d parallèle à l'axe des abscisses coupe le graphique d'une fonction f du 3e degré en trois points, alors la tangente au graphique de f dont l'abscisse est la même que celle du milieu du segment déterminé par deux des points d'intersection avec d passe par le troisième point d'intersection.

Droite sécante à une cubique

Problème

Soit la fonction

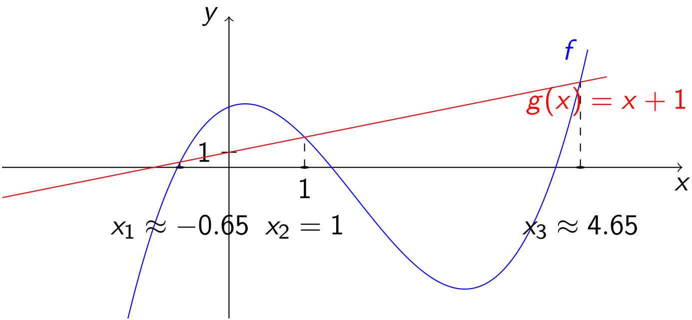
$$f(x) = x^3 - 5x^2 + 2x + 4$$

et une fonction

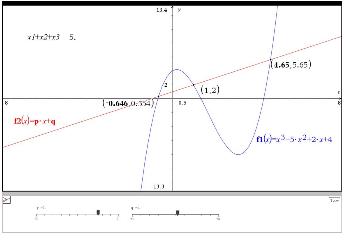
$$g(x) = p\,x + q$$

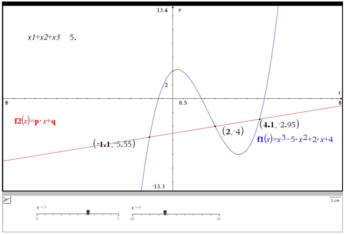
où p et q sont deux paramètres réels.
Supposons que les graphiques de f et g se rencontrent en 3 points d'abscisse x_1, x_2 et x_3.
Que vaut la somme $x_1 + x_2 + x_3$?

Exploration



$$x_1 + x_2 + x_3 = -0.65 + 1 + 4.65 = 5$$





$$\sum_{i=1}^{3} x_i = -0.65 + 1 + 4.65 = 5 \qquad \sum_{i=1}^{3} x_i = -1.1 + 2 + 4.1 = 5$$

Conjecture

Si la droite d'équation $y = p \cdot x + q$ rencontre le graphique de la fonction $f(x) = x^3 - 5x^2 + 2x + 4$ en trois points, alors la somme des abscisses des points d'intersection du graphique de f avec la droite est indépendante de p et q.

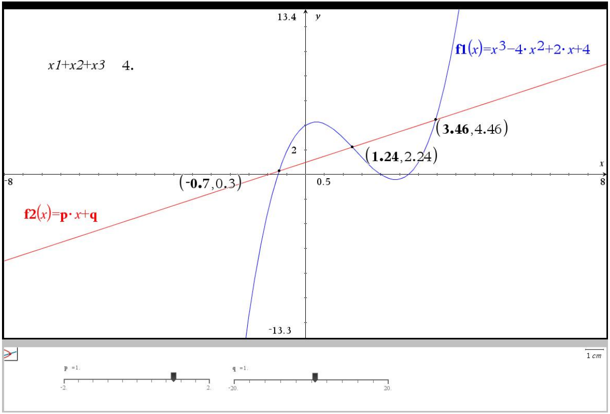
Questions

Questions

- La somme est-elle vraiment indépendante de p et q ?
- Cette propriété est-elle vraie pour d'autres fonctions du 3^{e} degré ?
- Peut-on déterminer la valeur de la constante sans calculer les abscisses des points d'intersection ?

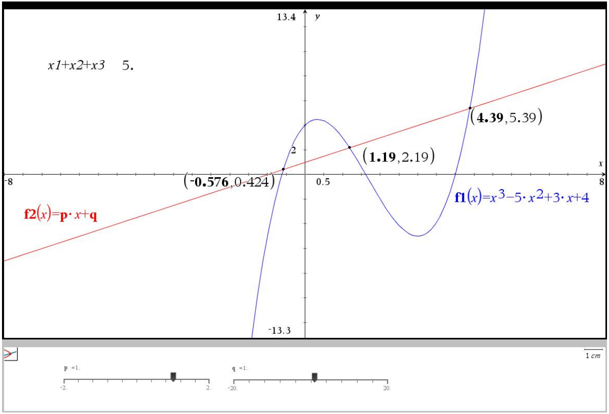
Simulations avec TI-Nspire

Modification du coefficient de x^2



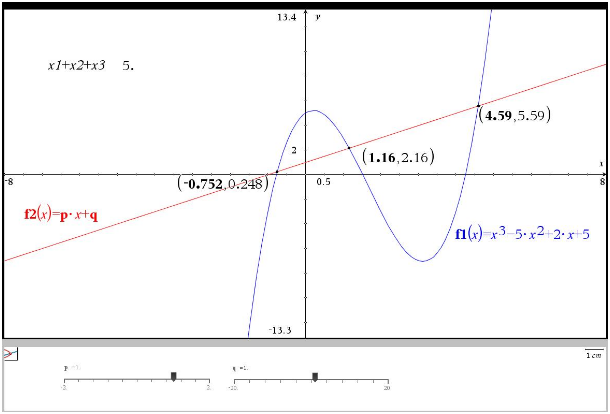
Simulations avec TI-Nspire

Modification du coefficient de x



Simulations avec TI-Nspire

Modification du terme indépendant



Conjecture affinée

La somme des abscisses des points d'intersection du graphique de la fonction $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ avec la droite d'équation $y = px + q$ est égale à $-a$.

Démonstration

Méthode dite "du ménapien courageux"

- rechercher les solutions de l'équation $f(x) = px + q$
- calculer leur somme

Démonstration

Méthode dite "du ménapien courageux"

- rechercher les solutions de l'équation $f(x) = px + q$
- calculer leur somme

$$\mathrm{solve}(\mathbf{f}(x)=\mathbf{d}(x),x) \;\blacktriangleright\; x=\frac{2\cdot\sqrt{a^2-3\cdot(b-p)}\cdot\cos\left(\frac{\sin^{-1}\left(\frac{2\cdot a^3-9\cdot a\cdot(b-p)+27\cdot(c-q)}{2\cdot\left(a^2-3\cdot(b-p)\right)^{\frac{3}{2}}}\right)}{3}+\frac{\pi}{6}\right)-a}{3} \text{ or } x=\frac{-\left(2\cdot\sqrt{a^2-3\cdot(b-p)}\cdot\sin\left(\frac{\sin^{-1}\left(\frac{2\cdot a^3-9\cdot a\cdot(b-p)+27\cdot(c-q)}{2\cdot\left(a^2-3\cdot(b-p)\right)^{\frac{3}{2}}}\right)}{3}+\frac{\pi}{3}\right)+a\right)}{3} \text{ or } x=\frac{2\cdot\sqrt{a^2-3\cdot(b-p)}\cdot\sin\left(\frac{\sin^{-1}\left(\frac{2\cdot a^3-9\cdot a\cdot(b-p)+27\cdot(c-q)}{2\cdot\left(a^2-3\cdot(b-p)\right)^{\frac{3}{2}}}\right)}{3}\right)-a}{3}$$

HORREUR

Démonstration
Méthode efficace

Les solutions de l'équation $f(x) = px + q$ sont les zéros de

$$h(x) = f(x) - (px + q) = x^3 + ax^2 + (b - p)x + (c - q).$$

Comme la droite rencontre le graphique de f en 3 points d'abscisse x_1, x_2 et x_3, $h(x)$ peut s'écrire sous la forme

$$h(x) = (x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot (x - x_3)$$

ou encore

$$h(x) = x^3 - (x_1 + x_2 + x_3)x^2 + (x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)x - x_1x_2x_3$$

En comparant les deux expressions de $h(x)$, on en déduit

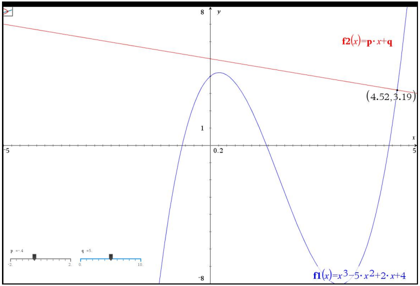
$$x_1 + x_2 + x_3 = -a.$$

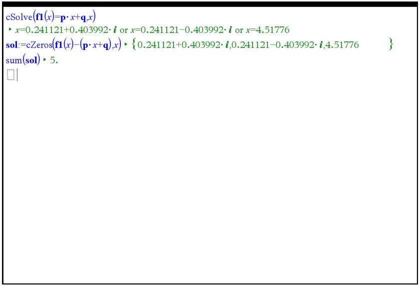
Autres configurations possibles

Que se passe-t-il dans les cas suivants ?

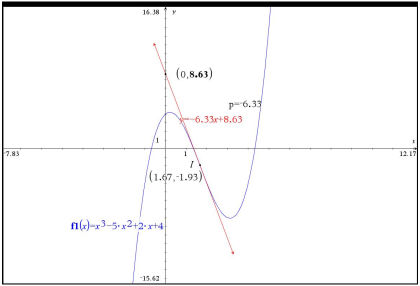
- La droite est sécante au graphique qu'en un seul point
- La droite est tangente au graphique au point d'inflexion
- La droite est tangente au graphique en un point et sécante en un autre point

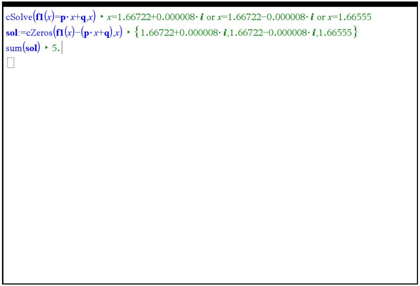
Autres configurations possibles



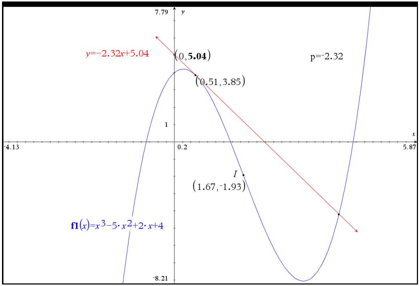


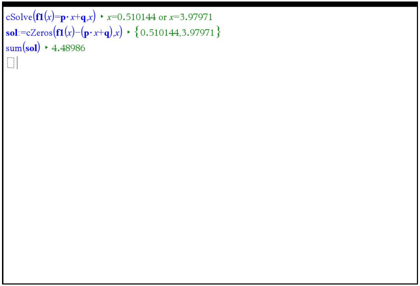
Autres configurations possibles





Autres configurations possibles





Généralisations

- La propriété reste-t-elle vraie si le coefficient de x^3 est différent de 1 ?
- La propriété reste-t-elle vraie pour une polynôme de degré 4, 5, ..., ?

A vous de chercher !

Bibliographie

- Krysinska M., Schneider M., *Émergence de modèles fonctionnels*, Éditions de l'Université de Liège, 2010
- Stulens Koen, Cubic Curiosities, Texas Instrument, 2011