Problèmes d'arpenteurs

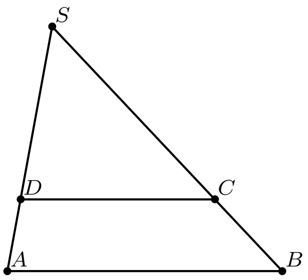
Corrigés

SBPM
41^e**congrès**
Mons

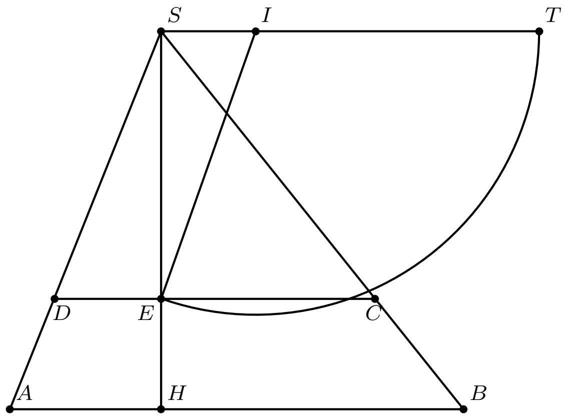
Présentation :
Le livre « Histoires de géomètres…et de géométrie » (Éditions Le Pommier), écrit par Jean-Louis Brahem, architecte, apporte, sur des problèmes de géométrie, un éclairage différent de celui que l'on rencontre habituellement dans les manuels de mathématiques pour le collège et le lycée.
L'ambition de cet atelier est d'étudier quelques-uns des problèmes présentés dans cet ouvrage en proposant des justifications accessibles au plus grand nombre.

I.- Partager, par un segment parallèle à l'une de ses bases, un triangle en deux surfaces égales.

SAB est un triangle. On cherche $D \in [SA]$ et $C \in [SB]$, tels que $(DC)//(AB)$ de sorte que l'aire du triangle SCD soit égale à celle du trapèze $ABCD$.



Méthode :
- On note $[SH]$ la hauteur issue de S du triangle SAB.
- Sur la parallèle à (AB) passant par S, on place un point T tel que $ST = SH$.
- Sur le segment $[ST]$, on place le point I tel que $SI = \dfrac{1}{4}ST$.
- Le cercle de centre I, de rayon IT coupe $[SH]$ en E.
- La parallèle à (AB) passant par E coupe $[SA]$ en D et $[SB]$ en C.



Preuve :

Par la propriété de Thalés : $\dfrac{SE}{DC} = \dfrac{SH}{AB}$; par hypothèse : $SH = ST$; $IE = IT = \dfrac{3}{4}SH$;
Pythagore dans ISE :

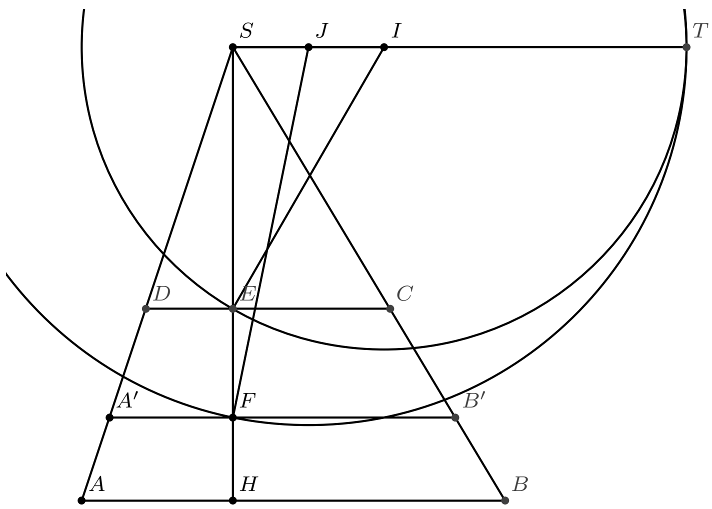
$$\begin{aligned} SE^2 &= IE^2 - SI^2 \\ &= \frac{9}{16}SH^2 - \frac{1}{16}SH^2 \\ &= \frac{1}{2}SH^2 \end{aligned}$$

d'où $SE = \dfrac{1}{\sqrt{2}}SH$ puis $DC = \dfrac{AB \times SE}{SH} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}AB$. On en déduit :
$aire(SDC) = \dfrac{1}{2}DC \times SE = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{2}}AB \cdot \dfrac{1}{\sqrt{2}}SH = \dfrac{AB \times SH}{4} = \dfrac{1}{2}aire(SAB)$.

II.- Partager, par deux segments parallèles à l'une de ses bases, un triangle en trois surfaces égales.

Méthode :

- On note $[SH]$ la hauteur issue de S du triangle SAB.
- Sur la parallèle à (AB) passant par S, on place un point T tel que $ST = SH$.
- Sur le segment $[ST]$, on place les points I et J tels que $SI = \dfrac{1}{3}ST$ et $SJ = \dfrac{1}{6}ST$.
- Le cercle de centre I, de rayon IT coupe $[SH]$ en E.
- La parallèle à (AB) passant par E coupe $[SA]$ en D et $[SB]$ en C.
- Le cercle de centre J, de rayon JT coupe $[SH]$ en F.
- La parallèle à (AB) passant par F coupe $[SA]$ en A' et $[SB]$ en B'.



Remarque : Le trapèze $ABCD$ est, dans ce cas, un trapèze babylonien. Il est partagé par le segment $[A'B']$ en deux trapèzes de même aire.

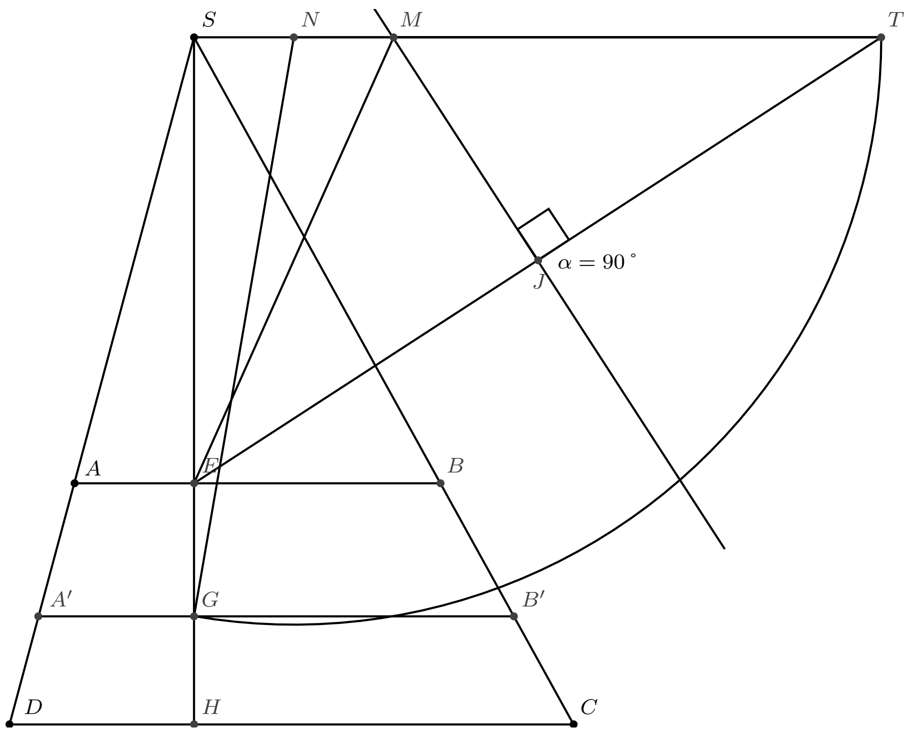
Preuve résumée :

En s'inspirant de la preuve précédente, on établit que $SE = \sqrt{\dfrac{1}{3}}SH$, $SF = \sqrt{\dfrac{2}{3}}SH$,

puis $DC = \sqrt{\dfrac{1}{3}}AB, A'B' = \sqrt{\dfrac{2}{3}}AB$, ce qui conduit au résultat attendu.

III.- Trapèze babylonien.

Étant donné un trapèze $ABCD$ avec $(AB)//(DC)$, on cherche $A' \in [AD]$ et $B' \in [BC]$ avec $(A'B')//(AB)$ de sorte que les trapèzes $ABB'A'$ et $A'B'CD$ aient la même aire.



Méthode :

• On note S l'intersection des droites (AD) et (BC).
• On note $[SH]$ la hauteur issue de S du triangle SCD.
• $[SH]$ et $[AB]$ se coupent en E
• Sur la parallèle à (DC) passant par S, on place un point T tel que $ST = SH$.
• La médiatrice du segment $[ET]$ coupe (ST) en M.
• N est le milieu du segment $[SM]$.
• Le cercle de centre N, de rayon NT coupe $[SH]$ en G.
• La parallèle à (DC) passant par G coupe $[AD]$ en A' et $[BC]$ en B'.

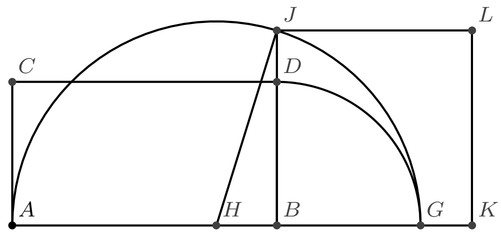
Preuve résumée :

On pose $SN = a$ donc $SM = 2a$.
En s'inspirant de la preuve I, on établit que $aire(ABCD) = 2a \cdot DC$.
En effet : $NT = NG = SH - a$; $MT = ME = SH - 2a$; $\dfrac{SE}{AB} = \dfrac{SG}{A'B'} = \dfrac{SH}{DC}$
d'où $AB = \dfrac{SE \times DC}{SH}$ et $A'B' = \dfrac{SG \times DC}{SH}$
$SG^2 = NG^2 - SN^2 = (SH - a)^2 - a^2 = SH^2 - 2a \cdot SH$
$SE^2 = ME^2 - SM^2 = (SH - 2a)^2 - (2a)^2 = SH^2 - 4a \cdot SH$

$$\begin{aligned}
aire(ABCD) &= \frac{DC + AB}{2} \times HE = \frac{1}{2}\left(DC + \frac{SE \times DC}{SH}\right) \times (SH - SE) \\
&= \frac{DC \times SH + DC \times SE}{2 \cdot SH} \cdot (SH - SE) \\
&= \frac{DC(SH + SE)}{2 \cdot SH} \times (SH - SE) \\
&= \frac{DC(SH^2 - SE^2)}{2 \cdot SH} = \frac{DC \times 4a \cdot SH}{2 \cdot SH} = 2a \cdot DC
\end{aligned}$$

Par un calcul analogue, on montre que
$aire(A'B'CD) = a \cdot DC$. Ce qui établit le résultat.

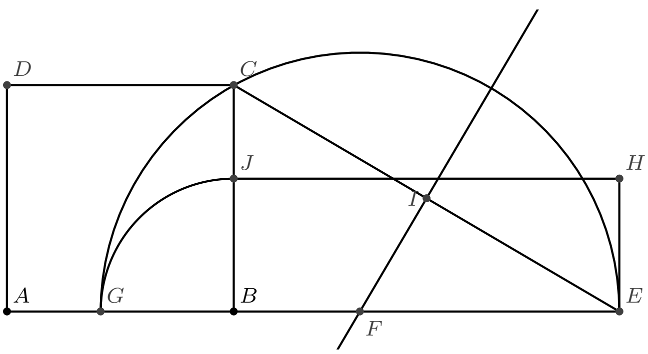
IV.- Quadrature d'un rectangle.
Construire un carré ayant la même aire qu'un rectangle donné.



Méthode :
$ABDC$ est un rectangle.
• Sur la droite (AB), à l'extérieur du segment $[AB]$, on place le point G tel que $BG = BD$.
• H est le milieu du segment $[AG]$.
• Le demi-cercle de diamètre $[AG]$ coupe la droite (BD) en J.
• BJ est le côté du carré cherché.

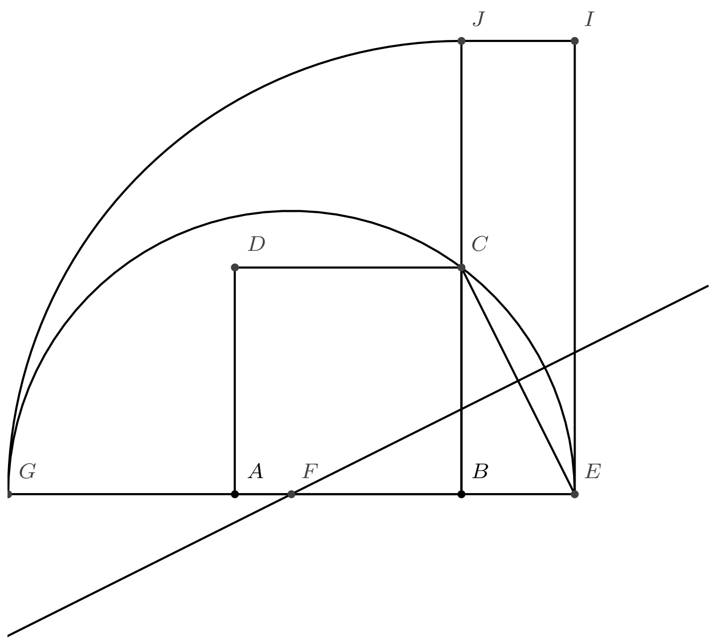
Preuve :
On pose $AB = a$ et $AC = b$, donc par construction $AG = a + b$, d'où $AH = \dfrac{a+b}{2}$ mais aussi $HJ = \dfrac{a+b}{2}$.
En outre, $HB = \dfrac{a+b}{2} - b = \dfrac{a-b}{2}$.
Pythagore dans HBJ donne : $BJ^2 = \left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\dfrac{a-b}{2}\right)^2 = ab$. Ce qui prouve le résultat.

V.- Un carré de côté c étant donné, construire un rectangle de même aire dont la longueur L est donnée. $L \geqslant c$



Preuve : par hypothèse : $AB = c$ et $BE = L$.
I est le milieu de $[CE]$. La médiatrice de $[CE]$ coupe (AB) en F.
Un demi-cercle de centre F de rayon FE coupe (AB) en G.
On place J sur $[BC]$ tel que $BJ = BG$.
Les triangles rectangles CBE et EIF sont semblables. On a alors : $\dfrac{\sqrt{L^2+c^2}}{L} = \dfrac{EF}{\frac{\sqrt{L^2+c^2}}{2}}$ soit $EF = \dfrac{L^2+c^2}{2L}$.
Il en résulte que $GE = \dfrac{L^2+c^2}{L}$ puisque $GE = 2 \cdot EF$. Comme $BG = GE - BE$,
on a $BG = BJ = \dfrac{L^2+c^2}{L} - L = \dfrac{c^2}{L}$. Ainsi, l'aire du rectangle $BEHJ$ est égale à c^2.

VI.- Un carré de côté c étant donné, construire un rectangle de même aire dont la largeur l est donnée. $0 < l \leqslant c$

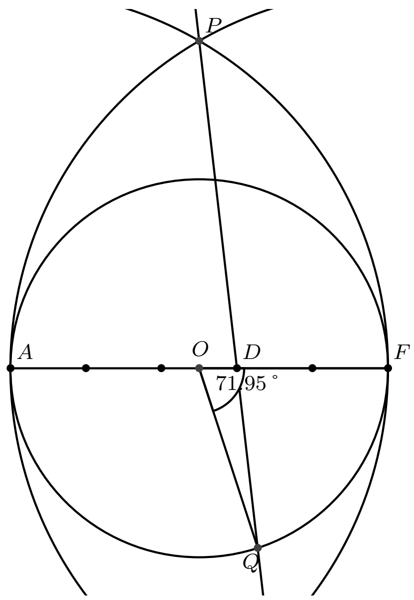


Preuve résumée : Un raisonnement analogue au précédent s'adapte à cette situation.

VII.- Le pentagone du bijoutier.

Un jardinier désire créer un massif en forme de pentagone régulier inscrit dans un cercle. Il utilise pour son tracé la méthode du bijoutier.

« Le bijoutier trace un cercle, il divise son diamètre en cinq, puis il trace deux arcs de cercles centrés sur ses extrémités et de rayon égal au diamètre du cercle. Il joint leur intersection à la deuxième marque et ainsi trouve le côté du pentagone »



Cherchons l'erreur commise lorsque l'on prend QF pour côté du pentagone.

On considère le cercle $\mathscr{C}$ de centre O, de diamètre $[AF]$. $[AF]$ est partagé en cinq segments de même longueur. On supposera que $AF = 5$ pour la commodité des calculs.

Les arcs de cercles de centres respectifs A et F, de rayon AF se coupent en P. AFP est donc un triangle équilatéral. La deuxième marque sur le segment $[AF]$ est D. La droite (DP) coupe $\mathscr{C}$ en Q. Dans le triangle ADP, le théorème d'Al Kashi donne :

$$\begin{aligned}DP^2 &= AD^2 + AP^2 - 2 \cdot AD \cdot AP \cdot \cos 60\,^\circ \\ &= 9 + 25 - 2 \times 3 \times 5 \times \frac{1}{2} \\ &= 19\end{aligned}$$

Ainsi, $DP = \sqrt{19}$ et la formule des sinus dans le triangle ADP donne : $\dfrac{DP}{\sin \widehat{DAP}} = \dfrac{AP}{\sin \widehat{ADP}}$ soit $\dfrac{\sqrt{19}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \dfrac{5}{\sin \widehat{ADP}}$ d'où $\sin \widehat{ADP} = \dfrac{5\sqrt{3}}{2\sqrt{19}}$

On en déduit que $\widehat{ADP} \approx 83,41\,^\circ$, d'où, pour son supplémentaire $\widehat{ODQ} \approx 96,59\,^\circ$, puis, dans le triangle ODQ : $\dfrac{OQ}{\sin \widehat{ODQ}} = \dfrac{OD}{\sin \widehat{OQD}}$ soit $\dfrac{\frac{5}{2}}{\frac{5\sqrt{3}}{2\sqrt{19}}} = \dfrac{\frac{1}{2}}{\sin \widehat{OQD}}$. Ce qui donne $\sin \widehat{OQD} = \dfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{19}}$, soit $\widehat{OQD} \approx 11,46\,^\circ$. Finalement, $\widehat{QOD} \approx 180 - 11,46 - 96,59$, soit $\widehat{QOD} \approx 71,95\,^\circ$

Ainsi QF est approximativement la longueur du côté du pentagone régulier inscrit dans le cercle $\mathscr{C}$.

Le ministère de la défense des États-Unis a la forme d'un pentagone régulier de 280 m de côté. Il est inscrit dans un cercle de rayon r vérifiant :

$$280^2 = r^2 + r^2 - 2r^2 \cos 72\,^\circ \quad \text{sachant que} \cos 72\,^\circ = \frac{\sqrt{5}-1}{4}, \text{on en déduit que}$$

$$280^2 = r^2 \left(2 - \frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$$

$$280^2 = r^2 \left(\frac{5-\sqrt{5}}{2}\right)$$

Soit $r \approx 238,1822$ m.

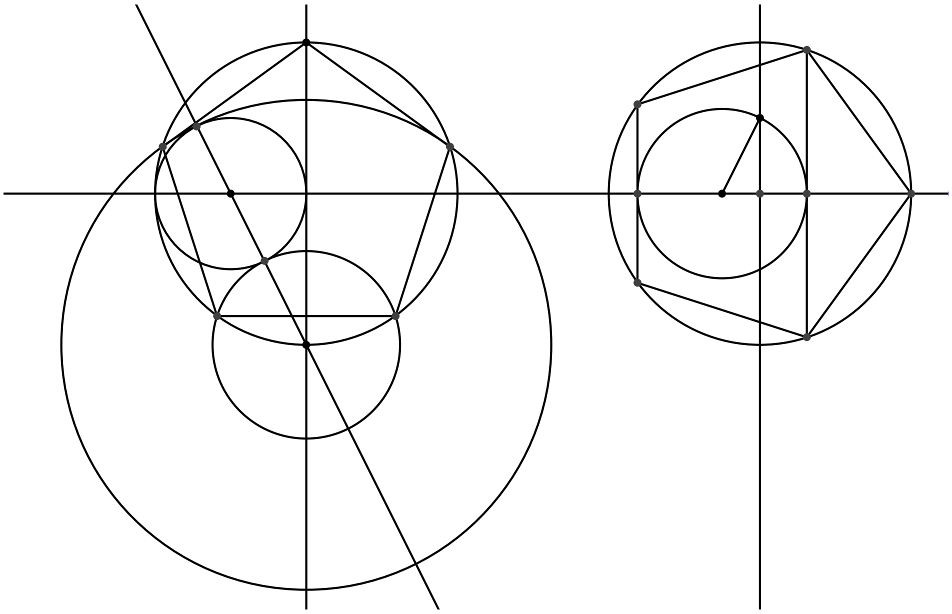
Pour un cercle d'un tel rayon, en prenant la méthode du bijoutier, on obtient un côté c vérifiant :

$$\begin{aligned}c^2 &= r^2 + r^2 - 2r^2 \cos 71,95\,^\circ \\ &= r^2(2 - 2\cos 71,95\,^\circ)\end{aligned}$$

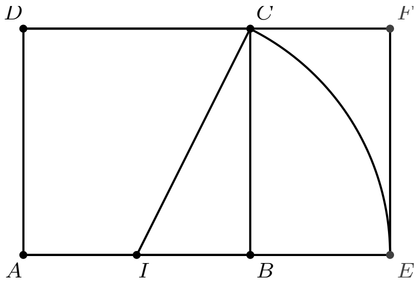
Ce qui donne $c \approx 279,8318$ m. Il manquerait 16,82 cm.

Remarque : $\cos 72\,^\circ = \dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$ résulte du résultat suivant :
pour tout réel x, $1 - \cos 5x = (1 - \cos x)(4\cos^2 x + 2\cos x - 1)^2$.

Deux méthodes pour une construction exacte :



VIII.- Rectangle d'or, équerre d'argent.
$ABCD$ est un carré de côté 1.
I est le milieu de $[AB]$.
E est le point de (AB), sur la demi-droite d'origine B ne contenant pas A, tel que $IE = IC$.
F est l'intersection de (DC) et de la perpendiculaire à (AB) pasant par E.
$AEFD$ est un rectangle appelé *rectangle d'or*.

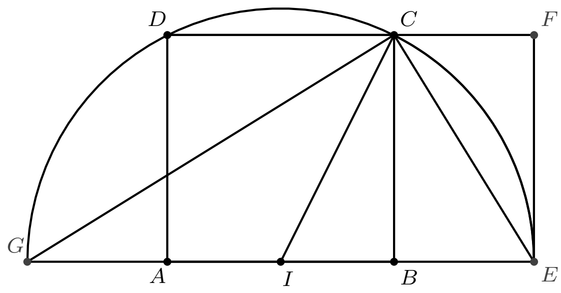


En effet, $IC^2 = IB^2 + BC^2$ soit $IC^2 = \dfrac{1}{4} + 1 = \dfrac{5}{4}$, d'où $IC = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$, comme $IE = IC$ et $AI = \dfrac{1}{2}$, on a :

$$AE = AI + IC = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \varphi$$

φ est le *nombre d'or*.
Le rapport *longueur* sur *largeur* dans le rectangle $AEFD$ est bien φ, d'où son nom.
Le nombre d'or vérifie $\varphi^2 - \varphi = 1$ soit, $\varphi = \dfrac{1}{\varphi - 1}$ ce qui donne : $\dfrac{AE}{AB} = \dfrac{AB}{BE}$.
« AE est à AB ce que AB est à BE ».

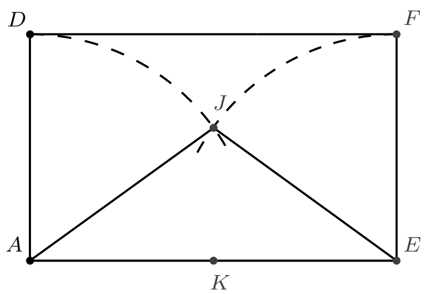
On peut retrouver ce résultat en considérant le demi-cercle de centre I d'origine E, passant par C. On note G l'intersection de ce demi-cercle avec (AB).



Dans le triangle rectangle ECG, $[CB]$ est la hauteur issue de C. On a :

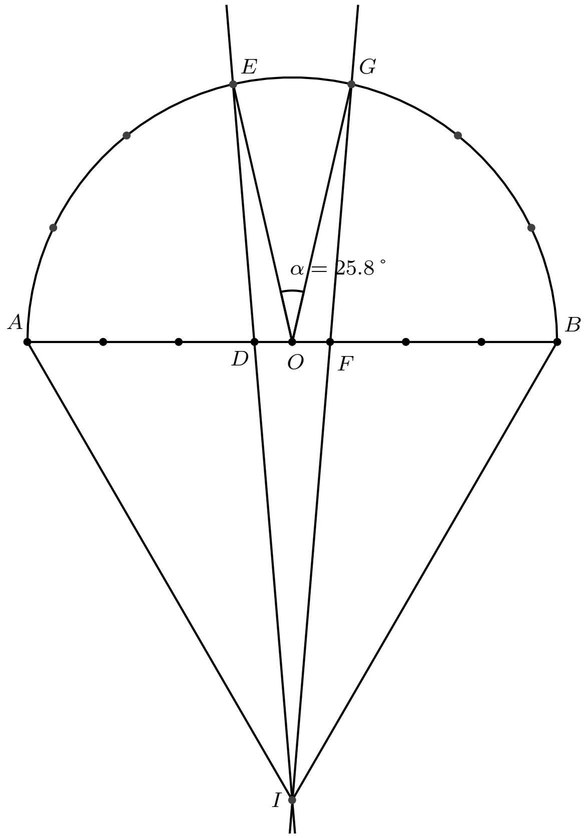
$$CB^2 = GB \times BE \text{ or } CB = AB \text{ et } GB = AE$$
$$\text{d'où } AB^2 = AE \times BE.$$

Les arcs de cercles de centres respectifs E et A, de rayon 1 se coupent à l'intérieur du rectangle $AEFD$ en J.



Le triangle isocèle AEJ est une représentation de l'*équerre d'argent*. C'est elle qui permet le tracé d'un pentagone régulier.
On vérifie que l'angle $\widehat{AJE}$ mesure 108 ˚. En effet, l'angle $\widehat{AEJ}$ a pour cosinus $\dfrac{\varphi}{2}$ ce qui montre qu'il a 36 ˚ pour mesure. D'où le résultat.

IX.- Méthode approximative pour partager un angle plat en sept parties égales.
Jadis utile pour tracer le chevet d'une abbatiale à sept quartiers.



Le diamètre $[AB]$ d'un demi-cercle de centre O est partagé en sept parties égales. Pour cela, on a placé six marques sur le segment $[AB]$. On note D et F les troisième et quatrième marques.
Dans le demi-plan de frontière (AB) ne contenant pas le demi-cercle, on trace deux arcs de cercles de centres respectifs A et B, de rayon AB. Ils se coupent en I.
Les droites (ID) et (IF) coupent le demi-cercle en E et G.
Alors, l'angle $\widehat{EOG} \approx 25,8^\circ$, peu différent de $\dfrac{180^\circ}{7}$.

Preuve résumée :
Pour la commodité des calculs on posera $AB = 7$.
Le théorème d'Al kashi, puis la formule des sinus dans le triangle AIB conduisent d'abord à $ID = \sqrt{37}$ et ensuite à $\sin \widehat{ADI} = \dfrac{7\sqrt{3}}{2\sqrt{37}}$. Ce qui permet de déduire que $\widehat{ODE} \approx 94,715^\circ$.
De même, dans le triangle ODE, on obtient $ED \approx 3,4232$ puis $\widehat{EOD} \approx 77,1^\circ$, ce qui donne $\widehat{EOG} \approx 25,8^\circ$ alors que $\dfrac{180^\circ}{7} \approx 25,714^\circ$.

X.- Le cloître rectangulaire

À l'intérieur d'un cloître, un espace rectangulaire doit être aménagé. Il est prévu une zone rectangulaire centrale engazonnée, entourée d'une allée à bords parallèles. On désire que l'allée et le pré central aient la même aire.

Cet équilibre, espère-t-on, sera propice à la méditation.

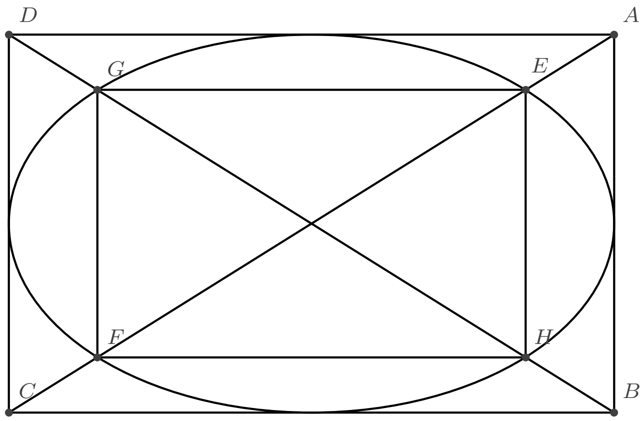
À l'intérieur d'un rectangle, tracer un rectangle aux côtés parallèles au premier dont l'aire est la moitié de celle du rectangle initial.

Méthode :

À l'intérieur de ce rectangle, on trace l'ellipse tangente à ses quatre côtés.

Les diagonales du rectangle rencontrent l'ellipse en quatre points nommés E, H, F, G.

Le rectangle $EHFG$ a une aire moitié de celle du rectangle initial.



Preuve :

Un repère orthonormal est choisi de sorte que $A(a, b), B(a, -b), C(-a, -b)$ et $D(-a, b)$.

Ainsi, $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ est une équation de l'ellipse tangente aux quatre côtés du rectangle $ABCD$.

Et les diagonales de ce rectangle ont pour équations : $y = \dfrac{b}{a}x$ et $y = -\dfrac{b}{a}x$.

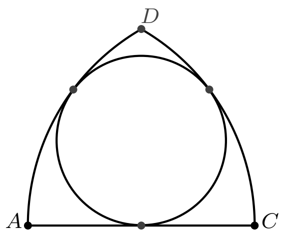
L'étude de l'intersection de cette ellipse et des diagonales du rectangle fournit les quatre points : $E(\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{b}{\sqrt{2}}), H(\frac{a}{\sqrt{2}}, -\frac{b}{\sqrt{2}}), F(-\frac{a}{\sqrt{2}}, -\frac{b}{\sqrt{2}})$ et $G(-\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{b}{\sqrt{2}})$.

Ces quatre points sont les sommets d'un rectangle $EHFG$ dont les dimensions sont : $\frac{2a}{\sqrt{2}}$ et $\frac{2b}{\sqrt{2}}$.

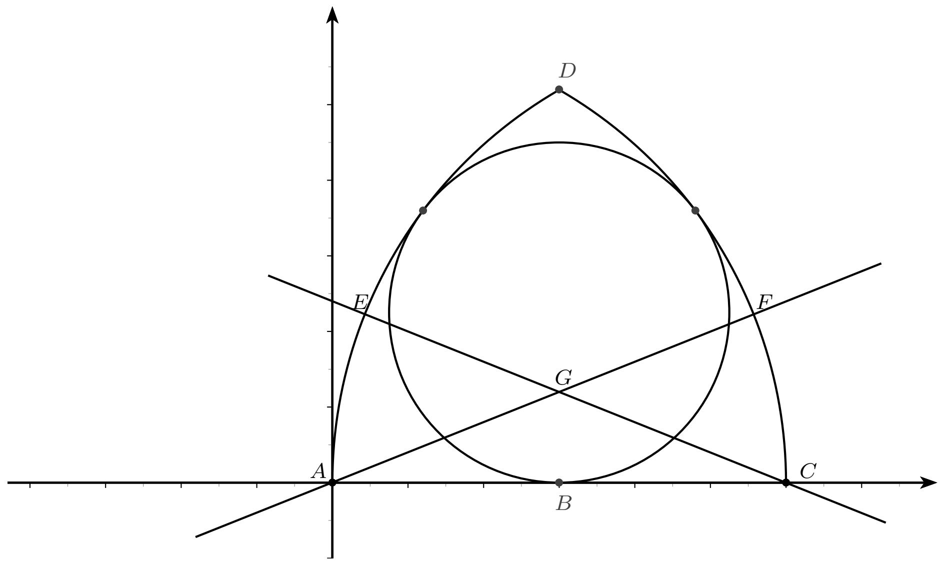
L'aire de $EHFG$ est $2ab$. C'est bien la moitié de celle de $ABCD$: $4ab$.

XI.- Rosace entre deux arcs et un linteau.

Un segment $[AC]$ est donné. On trace les arcs de cercles de rayon AC, de centres respectifs A et C. On note D l'un des points d'intersection des deux arcs.
Tracer un cercle tangent aux deux arcs et au segment $[AC]$.

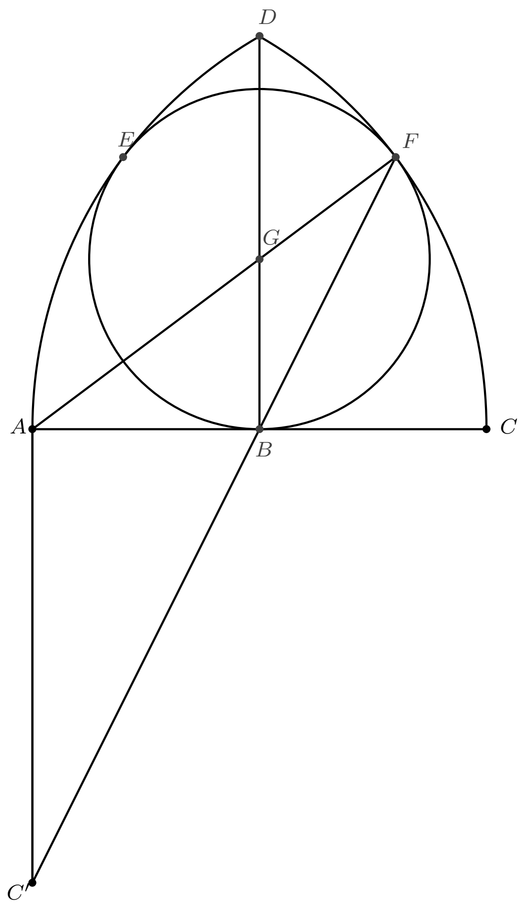


Preuve :



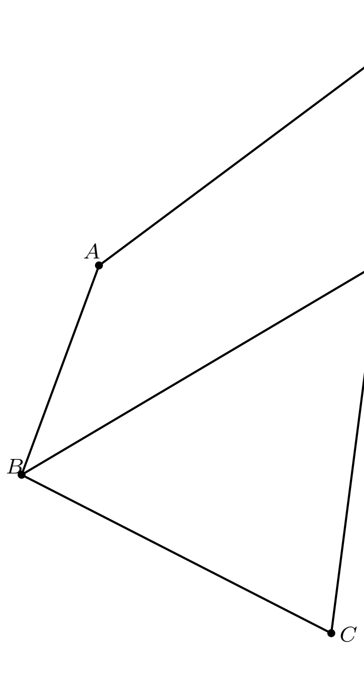
On choisit un repère orthonormé de sorte que $A(0,0)$ et $C(1,0)$.
G est le centre de la rosace.
La droite (AG) a pour équation : $y = ax \quad a > 0$, et (GC) : $y = -a(x-1)$.
Ainsi G a pour coordonnées $\left(\frac{1}{2}, \frac{a}{2}\right)$, en notant B le milieu de $[AC]$, $GB = \frac{a}{2}$ et $AG = \frac{\sqrt{a^2+1}}{2}$.
On note F, l'intersection de (AG) et de l'arc de centre A.
On a $GF = AF - AG = 1 - \frac{\sqrt{a^2+1}}{2}$.
La condition pour que le cercle de centre G soit tangent à (AC) et à l'arc de centre A est que $GB = GF$.
En notant E l'intersection de (GC) et de l'arc de centre C, on aura, par symétrie, $GF = GE$.
$GB = GF$ se traduit par $\frac{a}{2} = 1 - \frac{\sqrt{a^2+1}}{2}$ ce qui donne $a = \frac{3}{4}$.
On en déduit que G a pour coordonnées $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{8}\right)$ et $\frac{3}{8}$ est le rayon de la rosace.

Une construction possible pour déterminer la position du centre de la rosace :

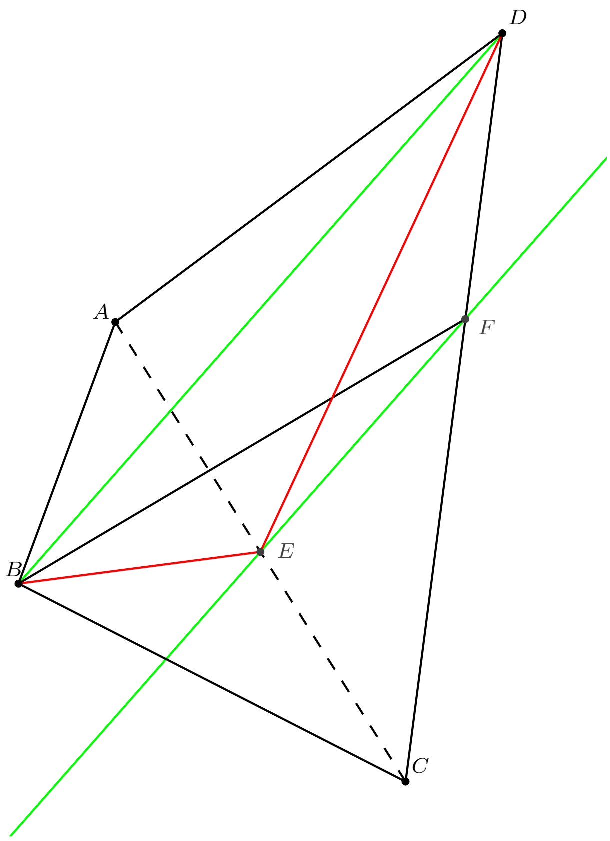


XII.- Partager, par un segment issu d'un sommet, un quadrilatère quelconque en deux surfaces égales.

$ABCD$ est un quadrilatère. On cherche un point F, sur $[AD]$ ou sur $[DC]$, tel que $[BF]$ partage le quadrilatère en deux surfaces de même aire.



Méthode :
- E est le milieu de $[AC]$.
- La parallèle à (BD) passant par E coupe $[DC]$ en F dans le cas de la figure proposée en énoncé.
- $[BF]$ est le segment cherché.



Preuve :
- Les triangles ABE et EBC ont la même aire puisqu'ils ont un sommet commun, leurs bases de même longueur ($AE = EC$) incluses dans (AC).
- De même pour les triangles AED et DEC.
- Les quadrilatères $ABED$ et $EBCD$ ont donc la même aire et cette aire est la moitié de celle du quadrilatère $ABCD$.
- (EF) et (BD) étant parallèles, les triangles BED et BFD ont la même aire (base commune et même hauteur).
- Les quadrilatères $ABED$ et $ABFD$ ont donc la même aire, c'est-à-dire, la moitié de l'aire de $ABCD$.
- Puisque l'aire de $ABFD$ est la moitié de celle de $ABCD$, $ABFD$ et BCF ont bien la même aire.

Il est possible que F soit sur $[AD]$: