

Exploration de problèmes avec GeoGebra

J-B. Coulaud, C. de Kerchove



HELHa

26 août 2015

1/31

jean-baptiste.coulaud@helha.be



Objectifs du propos

- Quelles sont les utilisations les plus fréquentes de GeoGebra (ou logiciels similaires) ?
- L'élève peut-il vraiment s'approprier utilement cet outil sans rester au niveau du gadget ?
- Que peut-il sortir de cette appropriation ?

4/31

jean-baptiste.coulaud@helha.be



Plan

- 1 Objectifs du propos
- 2 GeoGebra
- 3 Problème, vous avez dit « problème » ?
- 4 Quelques problèmes à explorer
- 5 Évaluation

2/31

jean-baptiste.coulaud@helha.be



Pourquoi GeoGebra ? (avis d'un utilisateur anglophone)

- 1 C'est libre.
- 2 C'est ouvert, collaboratif et « communautaire »
- 3 Multi-plateformes (Windows, Mac, Linux, etc.).
- 4 Multi-soutils (ordinateurs, smartphones, tablettes).
- 5 Encourage l'intégration de notions multiples (algèbre, géométrie, analyse, statistiques, etc.).
- 6 En soulignant plusieurs points de vues ou représentations (équations, graphes, tableaux).
- 7 C'est intuitif, « user-friendly », et facile à utiliser.
- 8 Facile à publier en ligne.
- 9 Exports nombreux (png, pdf, eps, \LaTeX , gifs animés, etc.).
- 10 Intègre le format \LaTeX .
- 11 Intègre un tableur, du calcul formel et de la 3D (GGB 5.0).
- 12 Apparence élégante.
- 13 Valable de la primaire à l'université.
- 14 Son évolution est constante.

6/31

jean-baptiste.coulaud@helha.be



- Illustrer, outil d'édition,
- Présenter, outil d'animation,
- Préparer / renforcer, outil web,
- Encadrer, outil de construction de savoirs, d'acquisition et développement de compétences...



Selon Jean Brun, philosophe français du XX^{ième} siècle

- Un problème est généralement défini comme une situation initiale, avec un but à atteindre, demandant au sujet d'élaborer une suite d'actions ou d'opérations pour atteindre ce but.
- Il n'y a problème, dans un rapport sujet/situation, que si la solution n'est pas disponible d'emblée, mais possible à construire.
- C'est à dire aussi qu'un problème pour un sujet donné peut ne pas être un problème pour un autre sujet, en fonction de leur niveau de développement intellectuel par exemple.



Roland Charnay, *Pourquoi des mathématiques à l'école ?*

- 1 Problème d'application ou de réinvestissement d'une notion connue.
- 2 Problème pour apprendre une nouvelle notion : situation problème.
- 3 Problème d'investigation dit "ouvert" dont l'objectif principal est d'apprendre à chercher.



4 étapes

- 1 Comprendre le problème
- 2 Concevoir un plan
- 3 Mettre le plan à exécution
- 4 Examiner la solution obtenue



Que nous dit le référentiel ?

Nouvelle réforme (2015)

- Développer un niveau "méta" chez l'élève. Il doit savoir ce qu'il peut faire de ses connaissances.
- Transférer signifie mobiliser des acquis dans le traitement de situations nouvelles.
- Pour transférer : autonomie - recontextualisation - capacité d'ajuster - capacité d'assembler/intégrer.
- L'outil informatique est plus présent : logiciels didactiques, géométrie dynamique, tableurs, calcul formel, simulations, etc.
- Démarches d'investigation aidées par les outils informatiques.

12/31

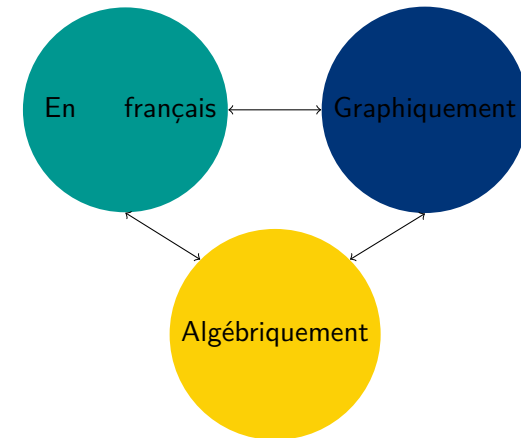
jean-baptiste.coulaud@helha.be



Maîtrise d'un énoncé

Nicolas Boileau-Despréaux

Ce qui se conçoit bien s'énonce clairement,
Et les mots pour le dire arrivent aisément.



13/31

jean-baptiste.coulaud@helha.be



Apports d'un logiciel sur l'étude de problèmes

- Interpréter un énoncé correctement et **traduire** ce dernier à partir du « langage » du logiciel
- Construire / modéliser un problème
- Explorer, tester, observer
- Résoudre numériquement

Un préalable

Les élèves doivent avoir déjà manié un peu GeoGebra :

- connaissance d'outils de base (points, droites, segments, cercles, transformations, intersections)
- utilisation dynamique (point mobile, curseurs, trace)
- bases des commandes de la barre de saisie (points en coordonnées, fonctions, calculs avec des variables)

14/31

jean-baptiste.coulaud@helha.be



Démarches possibles

- Reprendre la démarche de Polya, avec un regard logiciel / constructif (définition de variables, plan de résolution,)
- Par exemple, aborder d'abord l'aspect construction, modélisation en soi, avec un rapport écrit du protocole, identifiant les paramètres/variables de base du problème (points ou scalaires) puis les étapes qui partent de ces variables : on aborde déjà en partie les 4 points de Polya.
- Dans un second temps ajouter un objectif plus analytique ou algébrique : une variable (surface, volume, coordonnée, longueur...) exprimée en **fonction** d'une autre, une courbe et son **équation**, un **optimum**, ou encore une relation géométrique

15/31

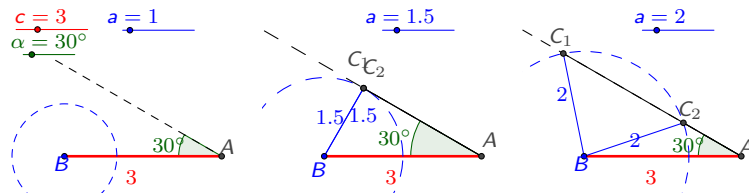
jean-baptiste.coulaud@helha.be



Construction d'un triangle, avec 2 côtés, et l'angle opposé à l'un des 2 côtés

On veut construire un triangle ABC connaissant a , c et \hat{A} .
De manière générale, ce problème a-t-il une solution unique ?

- On peut donner des valeurs de départ.
- Dans un second temps, on peut demander qu'un des 3 paramètres soit libre (l'angle par exemple), puis 2.
- L'idée est de faire émerger les 3 ou 4 cas possibles (pas de solution, 1 solution double avec angle droit, 1 solution avec $c > a$, 2 solutions distinctes).



17/31

jean-baptiste.coulaud@helha.be



Construction d'un triangle, solution formelle

Pour la résolution formelle, deux chemins possibles :

- Al-Kashi (Pythagore généralisé), avec $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A}$ qui donne une équation du 2nd degré pour b , avec 0, 1 ou 2 solutions (dont une peut-être négative et donc impossible)
- la règle des sinus $\frac{\sin \hat{A}}{a} = \frac{\sin \hat{C}}{c}$, qui donne 0 à 2 angles \hat{C} possibles entre 0 et 180° , avec la possibilité qu'un des 2 angles soit à éliminer (notamment parce que la somme des angles \hat{A} et \hat{C} dépassent 180°).

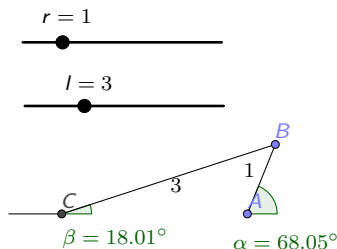
18/31

jean-baptiste.coulaud@helha.be



Animation d'un système bielle-manivelle

- À l'aide de GeoGebra, produisez une animation d'un système bielle-manivelle tel que celui-ci, où A est fixe, C est sur une droite horizontale passant par A , et les segments $[AB]$ et $[BC]$ ont des longueurs fixées par les curseurs r et l .
- Représentez sur un graphe (à l'aide d'une trace d'un point par exemple) la fonction donnant la longueur AC en fonction de l'angle α .



19/31

jean-baptiste.coulaud@helha.be



Tracer de courbes classiques

- Animez avec GeoGebra la rotation simultanée de la Terre autour du Soleil et de la Lune autour de la Terre.
- Utilisez GeoGebra pour animer le roulement d'une roue de vélo, et observer la courbe décrite par un point du pneu durant le mouvement.

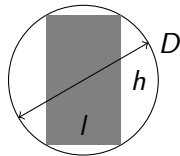
20/31

jean-baptiste.coulaud@helha.be



Découpe d'une poutre

En supposant que la résistance à la flexion d'une poutre de section rectangulaire est proportionnelle au produit de la largeur de la section par le cube de sa hauteur, on demande de déterminer les dimensions de la poutre de résistance maximale que l'on peut débiter à partir d'un cylindre de bois de diamètre D .



21/31

jean-baptiste.coulaud@helha.be



Conception d'un boiler (ou d'une boîte de conserve)

Un concepteur de boiler veut créer un nouveau modèle cylindrique, de hauteur h et de rayon r . Celui-ci doit avoir un volume $V = 80$ L. Pour simplifier, on considérera qu'il s'agit d'un cylindre isolé sur toute sa surface extérieure S .

Trouvez la valeur des variables qui donne la surface minimale (et donc permet des économies d'énergie, puisqu'il limite les échanges de chaleur avec l'extérieur).

23/31

jean-baptiste.coulaud@helha.be



Découpe d'une poutre, résolution (résumée)

- Comme la section rectangulaire est inscrite dans un disque d'un diamètre de D , le lien entre la hauteur h et la largeur l de la section est : $h^2 + l^2 = D^2$.
- Par ailleurs, on sait que la résistance R de la poutre est proportionnelle (d'un facteur que nous appellerons k) à l et au cube de h , d'où : $R = k l h^3$.

- Par la relation entre h et l on a : $R = k h^3 \sqrt{D^2 - h^2}$

- Dérivons R ,...après simplification :

$$\frac{dR}{dh} = \frac{k h^2}{\sqrt{D^2 - h^2}} (3D^2 - 4h^2)$$

- Résoudre $\frac{dR}{dh} = 0$ conduit, pour $0 < h < D$ à la hauteur de la

résistance maximale : $h = \frac{\sqrt{3}}{2} D$ et $l = \frac{1}{2} D$.

22/31

jean-baptiste.coulaud@helha.be



Distance d'un point à une courbe

- Le concepteur d'un jeu vidéo en 2D décrit le mouvement d'un personnage ponctuel dans un plan où se trouvent des obstacles. La forme de chaque obstacle est définie par une fonction. Pour que son jeu fonctionne il a besoin de connaître la distance entre le personnage et chaque obstacle. Aidons le à trouver une procédure pour calculer cette distance.
- Soit un point A , et une courbe \mathcal{C} d'équation $y = f(x)$, où f est une fonction dérivable. Quelle démarche adopter pour obtenir la distance de A à la courbe \mathcal{C} ?

24/31

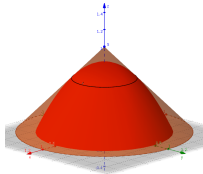
jean-baptiste.coulaud@helha.be



Architecture urbaine I

L'architecte de Conick souhaite construire un dôme original ayant une forme de paraboloïde de révolution. La commune lui impose des restrictions pour que le champ visuel des passants ne soit pas trop limité. L'architecte veut produire un dôme de volume maximal, ce qui revient à trouver le maximum du volume d'une tranche de paraboloïde contrainte sous un cône droit comme représenté sur la figure ci-dessous.

- 1 Représentez clairement la situation en coupe verticale en indiquant les paramètres importants, sachant que la coupe du paraboloïde a alors une équation de la forme $z = p - mx^2$
- 2 Sachant que le cône et le paraboloïde sont tangents suivant un cercle de rayon $a \in]0, 1]$, trouvez les paramètres m et p .
- 3 Quelle est la valeur du paramètre a qui maximise le volume de la tranche de paraboloïde.



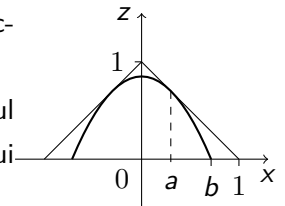
Architecture urbaine II

L'architecte de Conick souhaite construire un tunnel original de coupe parabolique (ha ?). L'architecte souhaite produire un tunnel de section maximale, ce qui revient à trouver le maximum de l'aire d'une arche de parabole contrainte sous un triangle rectangle comme représenté sur la figure ci-dessous.

- 1 La branche de parabole ayant une équation de la forme $y = mx^2 + p$, trouvez m et p pour qu'elle soit tangente au côté du triangle en $x = a$, avec $0 < a \leq 1$.
- 2 Donnez l'abscisse $b(a)$ où la parabole touche le sol.

Sachant que la surface de la section en fonction de b , m et p est donnée par

- 3 $\mathcal{A} = 2m \frac{b^3}{3} + 2pb$ (on vous épargne le calcul d'une intégrale), trouvez la valeur de a qui offre la section maximale.



Chute d'échelle...

- Le Schtroumpf Bricoleur s'apprête à réparer un plafond, et monte sur une échelle, sans s'apercevoir que le Schtroumpf Farceur à savonné les pieds de cette dernière... et bien sûr l'échelle glisse !
- Pourriez-vous déterminer la courbe que le Schtroumpf Bricoleur suit dans sa chute, sachant qu'il reste cramponné à l'un des barreaux de l'échelle pendant que celle-ci glisse ?
- **Pour aller plus loin** : pendant sa chute, l'échelle balaie tout une surface, serez-vous capable de déterminer sa frontière (c'est-à-dire l'enveloppe de toutes les positions de l'échelle) ?
- Après (ou avant) ce problème on peut demander à quelle condition une échelle de longueur l peut passer le coin de deux couloirs de largeurs respectives a et b qui se rejoignent perpendiculairement (la résolution d'un problème permet de répondre à l'autre, mais les démarches auxquelles on pense peuvent être un peu différentes).



Paraboles et tangentes

Deux problèmes :

- 1 Un miroir parabolique est vu en coupe avec une équation de type $y = ax^2$. On s'intéresse au trajet des rayons lumineux qui viennent se réfléchir sur le miroir en arrivant parallèlement à l'axe de celui-ci.
 - Représentez un tel rayon et sa partie réfléchie. Faites en sorte que l'on puisse changer son abscisse d'origine.
 - Si vous faites varier le rayon lumineux, vous remarquerez qu'il existe un point fixe par lequel il passe toujours. Ce point s'appelle le foyer du miroir (ou de la parabole). Trouver le moyen de le construire.
 - En faisant varier le paramètre a , émettez une conjecture sur une relation entre a et l'ordonnée du foyer.
- 2 Soit \mathcal{P} la parabole d'équation $y = x^2$. À quelle(s) condition(s) sur les paramètres a , b et c la parabole \mathcal{P}' d'équation $y = ax^2 + bx + c$ admet-elle des tangentes communes avec \mathcal{P} ?



- Si en temps libre, travailler en binôme.
- En salle informatique : GeoGebraExam pour Windows et Mac
- Toujours prévoir un petit rapport à rendre (par exemple dans un formulaire préimprimé).
- Fichier GGB récupéré par mail ou sur un lecteur réseau



- Il y a de vraies compétences à développer pour l'élève !
- Il faut du temps, et ne pas s'attendre à ce que la démarche de résolution de problèmes aille de soi après seulement 4 ou 5 essais.
- L'approche logicielle est complémentaire des outils traditionnels sans s'y substituer !
- La démarche de résolution de problèmes en général, et l'utilisation d'un logiciel pour la compléter en particulier, sont
 - plus aisées,
 - plus cohérentes
 - et **beaucoup plus efficaces**

si elles relèvent d'un travail d'équipe de la part des enseignants, éventuellement de manière interdisciplinaire.

