Mathématiques au VI^{e} siècle : Boèce et son *Arithmétique*

François Goichot - UVHC & IREM de Lille

Congrès 2016 de la SBPMef

23 août 2016

François Goichot,

- Université de Valenciennes et du Hainaut - Cambrésis, Laboratoire de Mathématiques et leurs Applications de Valenciennes
- IREM de Lille, groupe EMTA (*Enseignement des Mathématiques et Textes Anciens*)

Médiathèque de Cambrai

Directeur : David-Jonathan Benrubi

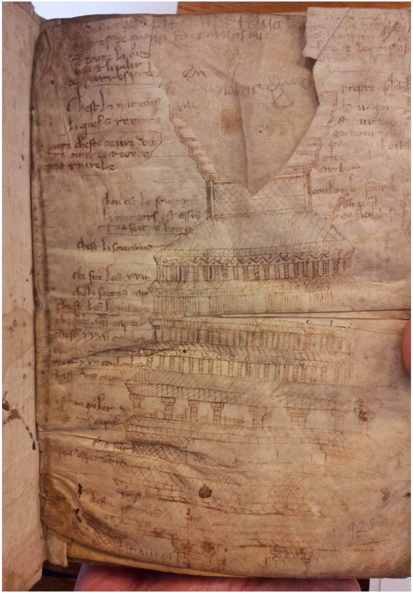


Figure : source : Cambrai, MAC, ms. 928

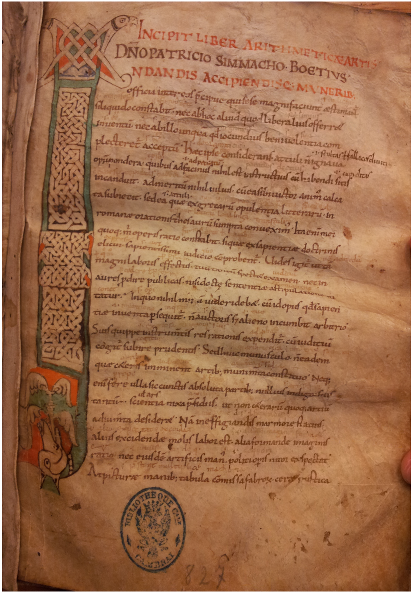


Figure : source : Cambrai, MAC, ms. 928

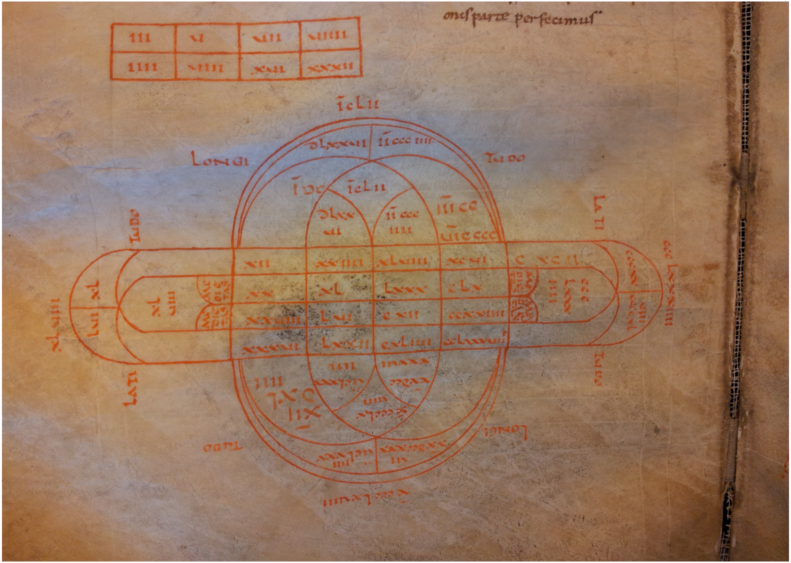


FIGURE : source : Cambrai, MAC, ms. 928

1. Les âges sombres
2. La vie de Boèce
3. L'Arithmétique de Boèce
   - Sources
   - Classifications des nombres
4. L'énigme du tableau
   - La présentation de Boèce
   - En classe
5. Nombres parfaits
6. Nombres polygonaux

Les âges sombres

Figure : Un des sacs de Rome : 455, par les Vandales de Geiseric (tableau de Karl Briullov, 1799-1852)

Les âges sombres

Figure : L'Europe vers l'an 500

Boèce

Figure : source : MacTutor

Anicius Manlius Severinus Boethius

- né vers 480, probablement à Rome
- élevé par Symmaque
- consul en 510, conseiller du roi Théodoric
- accusé de collusion avec Constantinople, emprisonné, jugé et exécuté en 524.

Anicius Manlius Severinus Boethius

- est surtout connu pour sa *Consolation de Philosophie*, écrite en prison
- a inventé le mot "quadrivium" (arithmétique, géométrie, musique, astronomie), après le *trivium* (grammaire, logique, and rhétorique)
- a traduit Aristote (*Catégories, De Interpretatione*,. . .), Platon (?). . .
- est aussi connu pour *De Institutione Musica* et plusieurs traités théologiques
- reconnu plus tard comme martyr par l'église catholique ; et déclaré saint en 1883

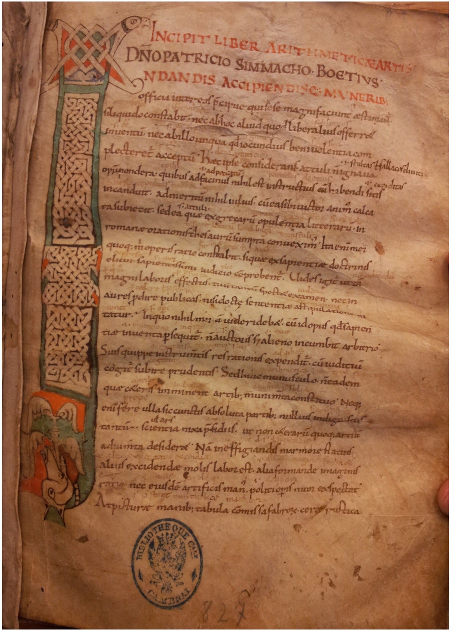
L'*Arithmétique* de Boèce

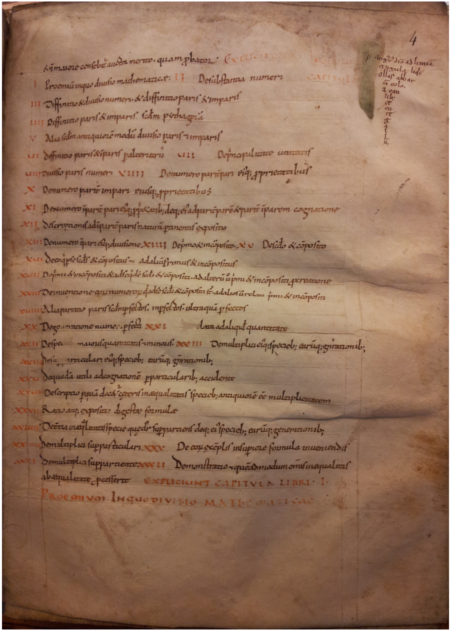
- traduite de l'*Introduction à l'Arithmétique* (en grec) de Nicomaque de Gérase (env. 40 - env. 120)
- 186 manuscrits connus : un (incomplet) daté 6-7^e, les autres du 9^e au 16^e
- plus de 25 éditions entre 1488 et 1570

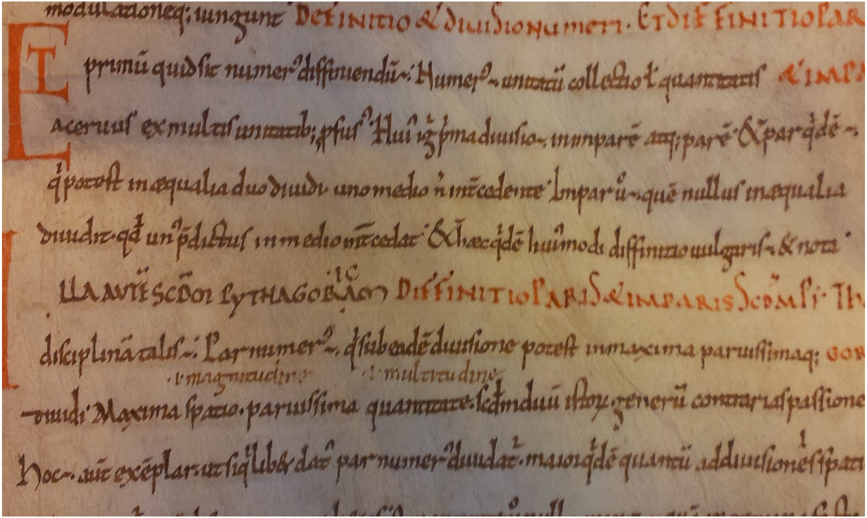
Sources pour l'*Arithmétique* de Boèce :

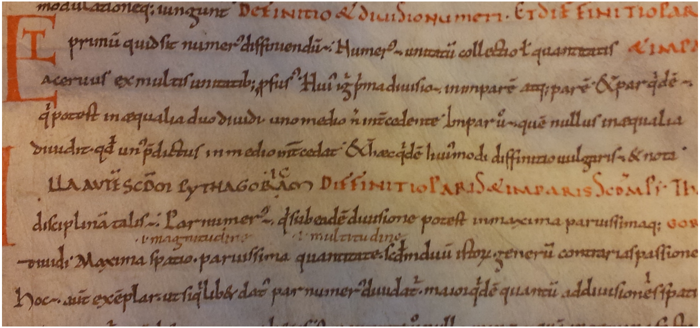
- première édition : *Arithmetica Boetii*, E. Ratdolt, Augsbourg, 1488.
- édition de référence : Boetii *De Institutione Arithmetica Libri duo*, G. Friedlein, Teubner, Leipzig, 1867
- première traduction en anglais : M. Masi, Studies in Classical Antiquities, Amsterdam, 1983
- première traduction en français (et nouvelle édition de référence) : J.-Y. Guillaumin, Les Belles Lettres, Paris, 1995

À partir d'ici, toutes les images viennent du manuscrit 928 de la Médiathèque de Cambrai









Definitio et divisio numeri et definitio paris et imparis.
Et primum quid sit numerus definiendum est. Numerus est unitatum collectio, uel quantitatis aceruus ex unitatibus profusus (...)
Definitio numeri paris et imparis secundum Pythagoram.
Illa autem secundum pythagoricam disciplinam talis est : par numerus est qui sub eadem divisione potest in maxima paruissimaque diuidi, (...)

Boèce 1,3 and 1,4, traduction française (J.-Y. Guillaumin)

Définition et division du nombre ; définition du pair et de l'impair. Il faut d'abord donner la définition du nombre. Le nombre est une collection d'unités, ou encore un entassement de quotité, dont le flux est composé d'unités. Sa première division se fait en pair et impair. Est pair le nombre qui peut être partagé en deux parties égales (. . .)

Définition du nombre pair et du nombre impair selon Pythagore. Mais en voici une autre, selon la doctrine pythagoricienne : le nombre pair est celui qui peut être divisé par une seule et même division en ensembles les plus grands et les plus petits : les plus grands en taille, les plus petits en quotité (. . .)

Une autre classification

Boèce 1,8 et 1,9

Le nombre pair comprend trois espèces. L'une est celle que l'on appelle le pairement pair, une autre le pairement impair, la troisième l'impairement pair. Le pairement pair et le pairement impair apparaissent comme des contraires, jouant le rôle des extrêmes. Une sorte de moyen terme, qui participe de l'un et de l'autre, est le nombre appelé impairement pair.
Le nombre pairement pair est celui qui peut être divisé en deux parties paires, et sa partie en deux autres parties paires, et la partie de cette partie en deux autres parties paires, et ainsi de suite, jusqu'à ce que la division des parties parvienne à l'unité, qui est indivisible par nature. Par exemple, le nombre 64...

Une autre classification

Boèce 1,10

Le nombre pairement impair est celui qui possède bien, lui aussi, la nature et la substance du pair, mais qui s'oppose à la nature du pairement pair par la division en parties contraires. On va montrer, en effet, toute la différence que présente sa division. Puisqu'il est pair, il admet la division en parties égales, mais ses parties demeureront immédiatement indivisibles et insécables. Exemples : 6, 10, 14, 18, 22 et les nombres qui leur sont semblables.

Une autre classification

Boèce 1,11

(...) Le nombre impairement pair est celui qui est fait de ces deux espèces de nombres et qui joue le rôle d'un moyen terme entre ces deux extrêmes, en sorte que ce qui le distingue de l'un des deux est précisément ce qui l'apparente à l'autre. C'est un nombre qui se divise en deux parties égales, dont la partie peut se diviser en d'autres parties égales et dont même, quelquefois, les parties des parties se divisent ; mais cette division en parties égales ne va pas jusqu'à l'unité. Exemples : 24 et 28. (...)

Une autre classification

Pour résumer en termes modernes, un entier pair n est :

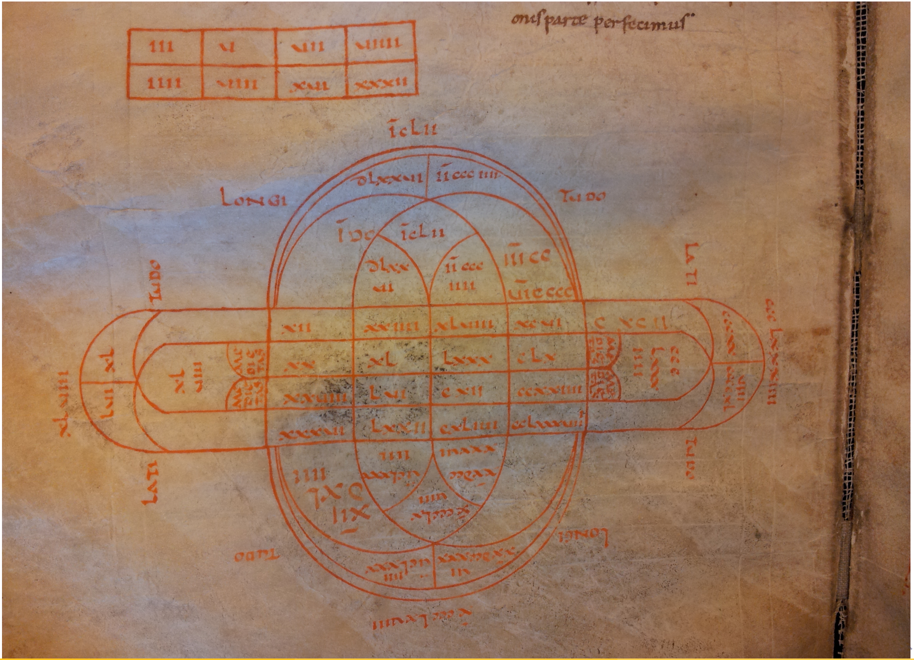
- pairement pair si $n = 2^k, \quad k \geq 1$
- pairement impair si $n = 2(2l+1), \quad l \in \mathbb{N}^*$
- impairement pair dans tous les autres cas, c'est-à-dire $n = 2^k(2l+1), \quad k \geq 2, l \in \mathbb{N}^*$

Une autre classification

Ce n'est pas la terminologie d'Euclide, où

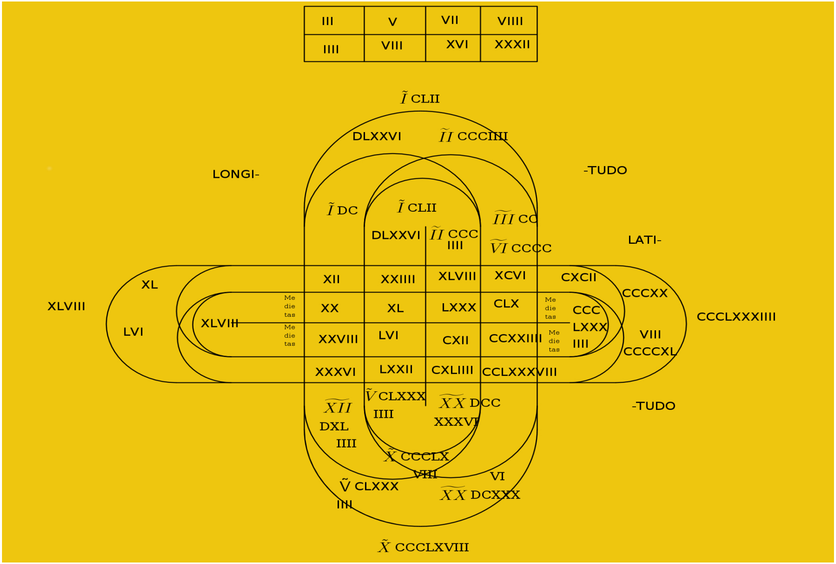
- le nombre pairement pair est celui qui est mesuré par un nombre pair selon un nombre pair
- le nombre pairement impair est celui qui est mesuré par un nombre pair selon un nombre impair
- le nombre impairement impair est celui qui est mesuré par un nombre impair selon un nombre impair

(VII, définitions 8 à 10)

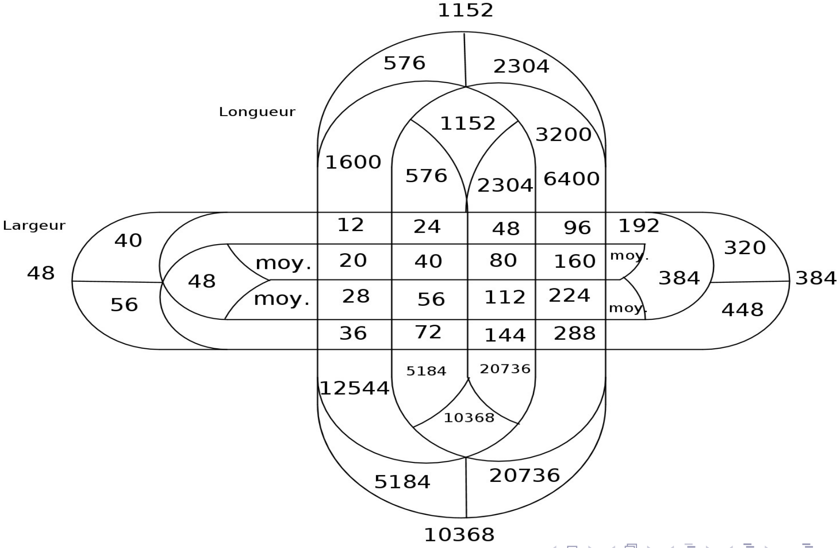

LONGI
TUDO
LATI

L'énigme du tableau

Boèce 1,11,12
Le tableau ci-dessous est fait de la façon suivante : tous les nombres de la série des nombres pairement pairs que le nombre 3 a multipliés, ceux qui sont nés de lui, quels qu'ils soient, ont été disposés sur la première ligne ; de même, ceux qui sont nés de la multiplication des mêmes nombres par 5 ont été placés sur la seconde rangée, et ensuite, ceux que le nombre 7 a engendrés en multipliant les autres, nous les avons écrits sur la troisième rangée, et nous avons fait de même pour le reste du tableau.


III
V
VII
VIIII
IIII
VIII
XVI
XXXII
Ĩ CLII
DLXXVI
ĨĨ CCCIIII
LONGI-
-TUDO
Ĩ DC
Ĩ CLII
ĨĨĨ CC
DLXXVI
ĨĨ CCC IIII
ṼĨ CCCC
LATI-
XLVIII
XL
LVI
XLVIII
Me die tas
XII
XXIIII
XLVIII
XCVI
CXCII
CCCXX
CCCLXXXIIII
XX
XL
LXXX
CLX
CCC LXXX IIII
VIII
CCCCXL
XXVIII
LVI
CXII
CCXXIIII
XXXVI
LXXII
CXLIIII
CCLXXXVIII
-TUDO
ṼCLXXX IIII
X̃ĨĨ DXL IIII
X̃X̃ DCC XXXVI
X̃ CCCLX VIII
VI
Ṽ CLXXX IIII
X̃X̃ DCXXX
X̃ CCCLXVIII

3	5	7	9
4	8	16	32


1152
576
2304
Longueur
1152
3200
1600
576
2304
6400
Largeur
40
48
56
48
moy.
moy.
12 24 48 96
20 40 80 160
28 56 112 224
36 72 144 288
192
moy.
moy.
384
320
384
448
12544
5184
20736
10368
5184
20736
10368

Boèce 1,12

Commentaire du tableau relatif à la nature de l'impairement pair

Le tableau ci-dessus a été organisé selon la règle que voici : si on le regarde selon la largeur, là où il y a un seul moyen entre deux termes, et si l'on additionne les termes eux-mêmes, on trouvera qu'ils sont le double du moyen qui leur correspond : par exemple (. . .) Mais quand il y a deux moyens, la somme des extrêmes est égale à celle des moyens : par exemple (. . .) Et cela selon l'espèce du nombre pairement impair, dans lequel existe cette propriété, comme on l'a déjà dit plus haut.

Boèce 1,12 (suite)

Commentaire du tableau relatif à la nature de l'impairement pair

Maintenant, si l'on regarde selon la longueur, là où deux termes ont un seul moyen, le résultat de la multiplication des extrêmes est le même que ce qui est produit si le moyen terme reçoit l'augmentation de sa propre pluralité. Car 12 fois 48 font (. . .) Là où deux termes incluent deux moyens, le résultat de la multiplication des extrêmes est égal au résultat de la multiplication des moyens l'un par l'autre. Car (. . .) Et cela se fait selon la ressemblance et la parenté avec le nombre pairement pair, duquel est tirée, par participation, cette propriété qui se retrouve dans la nature de l'impairement pair.

En classe ?

En classe ?

- première expérience : en formation initiale d'enseignants (master "MEÉF")

En classe ?

- première expérience : en formation initiale d'enseignants (master "MEÉF")
- deuxième expérience : stage *Faire des mathématiques autrement* Animath (MathC2+) - UVHC ; juin 2015, élèves de seconde (française : 16 ans environ), deux groupes d'une vingtaine d'élèves, une séance de 1h30 à 2h pour chaque groupe

En classe ?

- première expérience : en formation initiale d'enseignants (master "MEÉF")
- deuxième expérience : stage *Faire des mathématiques autrement* Animath (MathC2+) - UVHC ; juin 2015, élèves de seconde (française : 16 ans environ), deux groupes d'une vingtaine d'élèves, une séance de 1h30 à 2h pour chaque groupe
- bilan : intérêt pour le contexte, mais trop de temps pour la traduction des nombres, et surtout difficulté à suivre la démarche de Boèce

En classe ?

- première expérience : en formation initiale d'enseignants (master "MEÉF")
- deuxième expérience : stage *Faire des mathématiques autrement* Animath (MathC2+) - UVHC ; juin 2015, élèves de seconde (française : 16 ans environ), deux groupes d'une vingtaine d'élèves, une séance de 1h30 à 2h pour chaque groupe
- bilan : intérêt pour le contexte, mais trop de temps pour la traduction des nombres, et surtout difficulté à suivre la démarche de Boèce
- nouveau scénario, plus guidé

Nombres parfaits

Les *Éléments* d'Euclide (trad. B. Vitrac, 1998), VI, définition 23 :
Un nombre parfait est celui qui est égal à ses parties.

Les *Éléments* d'Euclide (trad. B. Vitrac, 1998), VI, définition 23 :
Un nombre parfait est celui qui est égal à [la somme de] ses parties.

en termes modernes :
égal à la somme de ses diviseurs.

Ex. : $6 = 1 + 2 + 3$

Boèce 1,19,2

Autre division du pair : nombres parfaits, imparfaits et plus-que-parfaits.

(. . .) Revenons aux nombres pairs, pour en donner une seconde division, comme suit. Parmi ces nombres, les uns sont abondants, d'autres déficients, selon les deux aspects que peut présenter l'inégalité : toute inégalité se considère soit dans des termes plus grands soit dans des termes plus petits. Les premiers de ces nombres, par une plénitude, si l'on peut dire, immodérée de leur propre corps, l'emportent en quotité sur le nombre de leurs parties ; quant aux autres, une sorte de pauvreté les rend indigents, écrasés par une sorte d'indigence de leur propre nature, et la somme des parties qui les composent est inférieure à eux-mêmes.

Ceux dont le nombre des parties va au-delà de ce qui est suffisant sont appelés abondants. Exemples : 12, 24. (. . .) Le nombre 12 a une moitié, 6, un tiers, 4, un quart, 3, un sixième, 2, un douzième, 1, et le total de tout cela est en excès : il monte à 16, et il dépasse la valeur du corps tout entier du nombre. (. . .)

Boèce 1,19,8

Ces nombres sont tels que le premier, celui que ses parties surpassent, ressemble à un être qui serait né avec des mains en grand nombre, plus qu'il n'est naturel, comme le géant aux cent mains, ou avec trois corps réunis, comme le triple Géryon - ou toute monstruosité produite par la multiplication des parties naturelles ; tandis que l'autre peut se comparer à un être qui naîtrait privé par la nature d'une partie indispensable, ou avec un œil en moins, horreur qui signalait le front du Cyclope, ou qui, amputé de quelque autre membre, serait condamné par la nature à la perte de son entière plénitude.

Les *Éléments* d'Euclide (trad. B. Vitrac, 1998), IX.36 :
Si, à partir de l'unité, des nombres en quantité quelconque sont consécutivement posés en proportion double jusq'à ce qu'additionnés, leur total devienne premier, et que ce total, multiplié par le dernier, produise un certain [nombre], ce produit sera parfait

Les *Éléments* d'Euclide (trad. B. Vitrac, 1998), IX.36 :
Si, à partir de l'unité, des nombres en quantité quelconque sont consécutivement posés en proportion double jusq'à ce qu'additionnés, leur total devienne premier, et que ce total, multiplié par le dernier, produise un certain [nombre], ce produit sera parfait

ou, en termes modernes :
$\forall n$, si $1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{n-1} (= S_n)$ est premier, alors $S_n \cdot 2^{n-1}$ est parfait.

Les *Éléments* d'Euclide (trad. B. Vitrac, 1998), IX.36 :
Si, à partir de l'unité, des nombres en quantité quelconque sont consécutivement posés en proportion double jusq'à ce qu'additionnés, leur total devienne premier, et que ce total, multiplié par le dernier, produise un certain [nombre], ce produit sera parfait

ou, en termes modernes :
$\forall n$, si $1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{n-1} (= S_n)$ est premier, alors $S_n \cdot 2^{n-1}$ est parfait.

N.B. : $S_n = 2^n - 1$ est énoncé et prouvé par Euclide (IX.35, sous une forme plus générale), seulement énoncé par Boèce (1,9,9)

Boèce 1,20

Génération du nombre parfait.

Il y a dans ces nombres aussi une grande similitude avec le vice et la vertu. C'est que les nombres parfaits ne se découvriront que rarement ; faciles à compter, parce qu'ils sont peu nombreux, et produits dans un ordre extrêmement régulier. (...) Les nombres parfaits sont : jusqu'au nombre 10, 6 ; jusqu'au nombre 100, 28 ; jusqu'au nombre 1000, 496 ; jusqu'à 10 000, 8 128. Ces nombres sont toujours terminés par les deux nombres pairs 6 et 8, qui apparaîtront toujours, alternativement, à la fin des termes, pour ces nombres. En effet, il y a d'abord 6, puis 28, et après eux 496 : même nombre 6 que le premier ; après 496, 8 128 : même nombre 8 que le second.

Boèce 1,20 (suite)

Leur génération et leur naissance est bien fixée et infaillible : ils ne peuvent être produits d'une autre façon ; et s'ils sont produits de cette façon, aucun autre ne peut être produit d'une façon quelconque. Disposant à partir de l'unité tous les nombres pairement pairs dans leur série jusqu'où l'on voudra, on ajoutera le second au premier et si cet entassement produit un nombre premier et non composé, on multipliera le total par le nombre que l'on avait ajouté en second lieu. Mais si, faisant l'addition, on trouve non pas un nombre premier, mais un nombre second et composé, on le passe et on ajoute le suivant. Si l'on n'a toujours pas un nombre premier et non composé, on ajoute le suivant et l'on voit ce que ça donne.
(puis exemples jusqu'à 496)

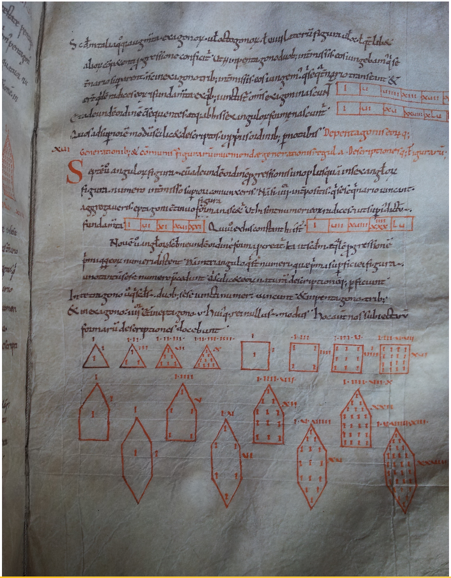
Les premiers nombres parfaits *de nos jours* :

- $6 = 2^1 \cdot (2^2 - 1)$
- $28 = 2^2 \cdot (2^3 - 1)$
- $496 = 2^4 \cdot (2^5 - 1)$
- $8\,128 = 2^6 \cdot (2^7 - 1)$
- $33\,550\,336 = 2^{12} \cdot (2^{13} - 1)$
- $8\,589\,869\,056 = 2^{16} \cdot (2^{17} - 1)$
- $137\,438\,691\,328 = 2^{18} \cdot (2^{19} - 1)$
- $2\,305\,843\,008\,139\,952\,128 = 2^{30} \cdot (2^{31} - 1)$

Les *Éléments* d'Euclide (trad. B. Vitrac, 1998), IX.36 :
Si, à partir de l'unité, des nombres en quantité quelconque sont consécutivement posés en proportion double jusq'à ce qu'additionnés, leur total devienne premier, et que ce total, multiplié par le dernier, produise un certain [nombre], ce produit sera parfait

En effet, qu'à partir de l'unité, des nombres en quantité quelconque soient posés en proportion double : A, B, C, D jusqu'à ce qu'additionnés, leur total devienne premier, et que E soit égal à ce total. Et que E multipliant D produise FG. Je dis que FG est parfait.
En effet (...) [plus de deux pages de preuve, utilisant huit résultats préliminaires différents des livres VII et IX]

Nombres polygonaux



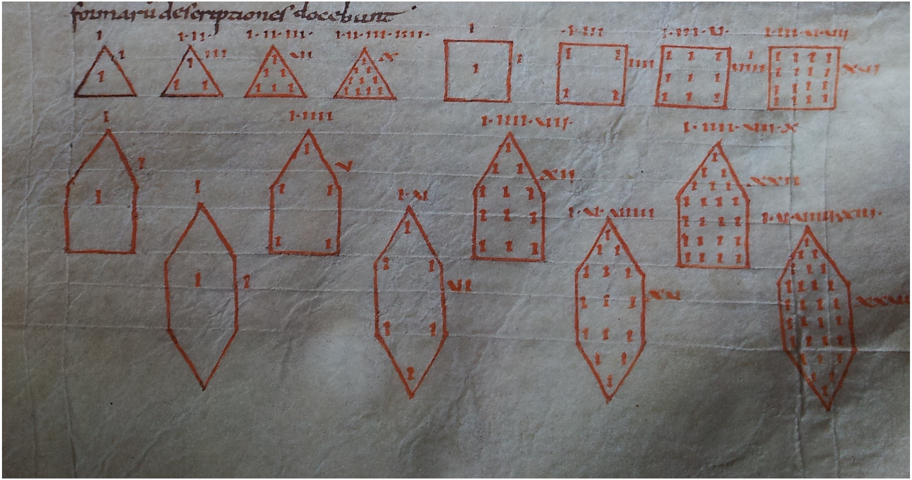
Boèce 2,4,10

Le point est donc le principe de la première dimension mais il n'est pas une dimension, et il est le principe de la ligne, sans être encore une ligne, de même que la ligne est aussi le principe de la surface, sans être encore une surface, et le principe de la seconde dimension, sans posséder cependant elle-même la seconde dimension. Même propriété pour la surface, qui possède par nature le principe du corps solide et de la troisième dimension, sans avoir l'extension en trois dimensions ni l'épaisseur du solide.

Boèce 2,5

C'est de cette manière que dans le nombre, l'unité, sans être elle-même un nombre linéaire, est pourtant le principe du nombre qui a une extension en longueur, et que le nombre linéaire, lui-même privé de toute largeur, est pourtant l'origine du nombre qui a une extension dans une autre dimension, celle de la largeur. Quant à la surface dans les nombres, bien qu'elle ne soit pas elle-même un corps solide, elle est cependant le principe du corps solide, qui vient après la largeur. Cela sera plus clair, et limpide, grâce aux exemples suivants. Le nombre linéaire est un entassement de quantité qui se déploie à partir de 2, si l'on ajoute toujours une unité sur une seule et même ligne, comme ci-dessous :

II III IIII IIIII IIIIII IIIIIII IIIIIIII


formarũ descriptiones docebunt