LES MATHS DU TRAITEMENT D'IMAGES

Michel Roelens

en collaboration avec **Gerd Hautekiet**

UC Leuven-Limburg (formation de profs pour le secondaire)

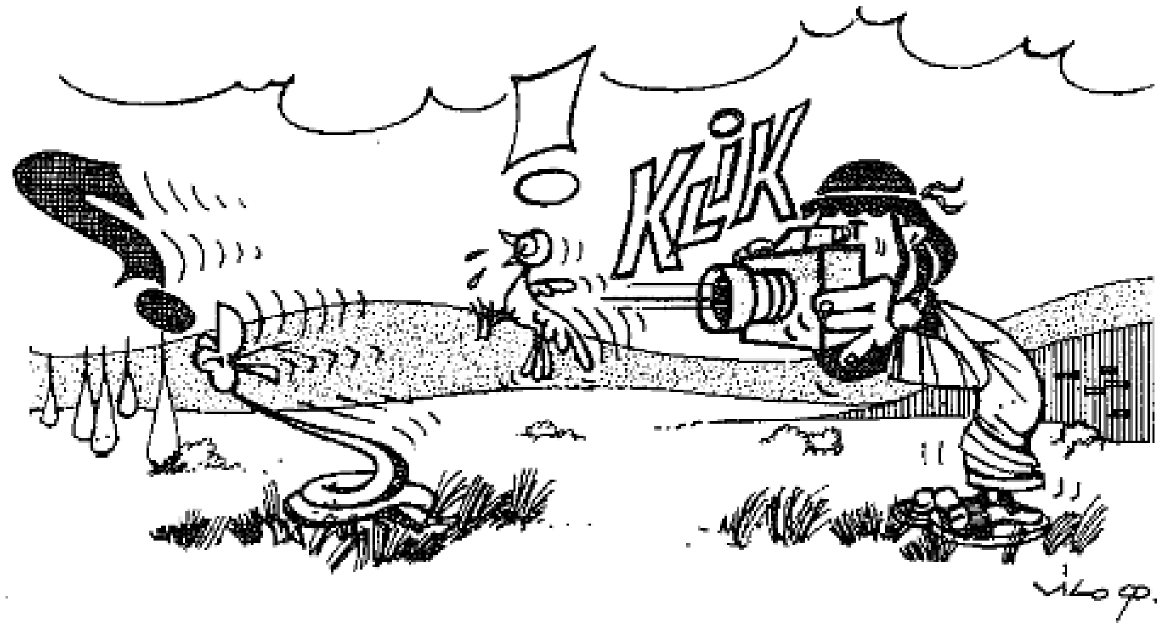
Maria-Boodschaplyceum Brussel (école secondaire)

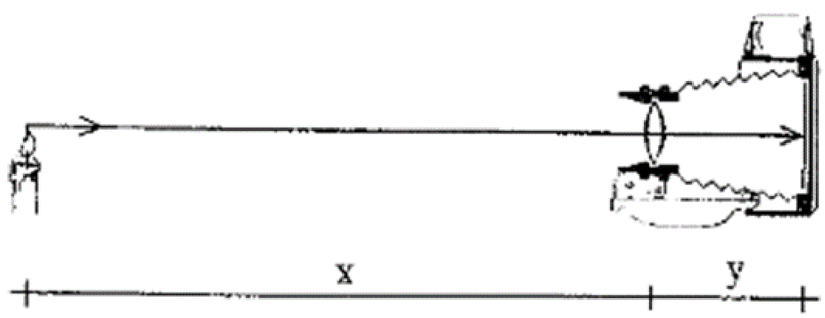
Uitwiskeling (votre revue)

APERÇU

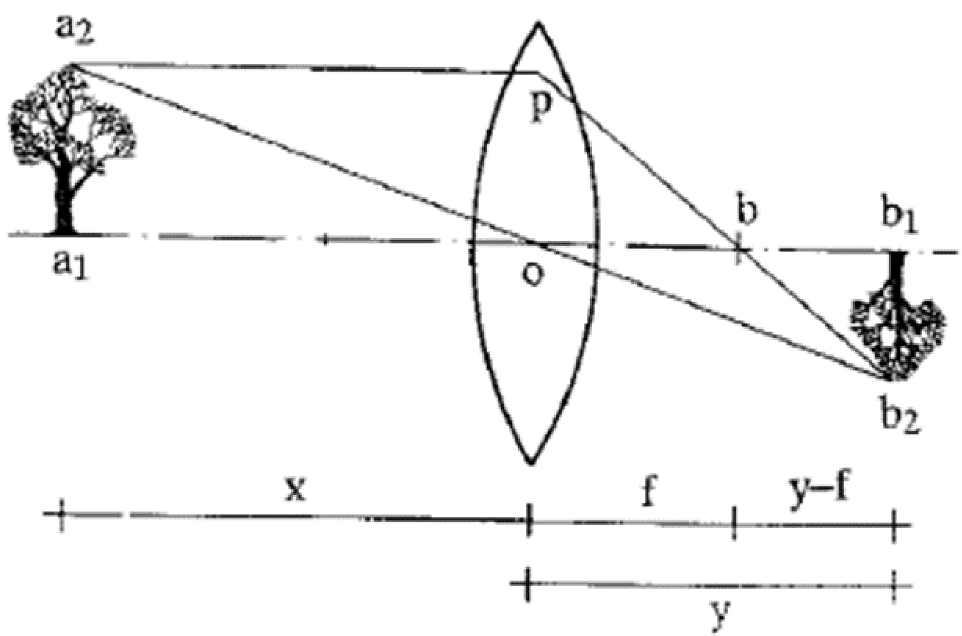
- En 1990 : distance focale, chambre noir…
- En 2016 : images digitales
- Transformer l'échelle des gris
- Histogrammes sur l'écran d'un appareil photo
- Cacher une image dans un autre
- Compression d'une fractale
- Compression fractale d'une image quelconque

EN 1990





EN 1990



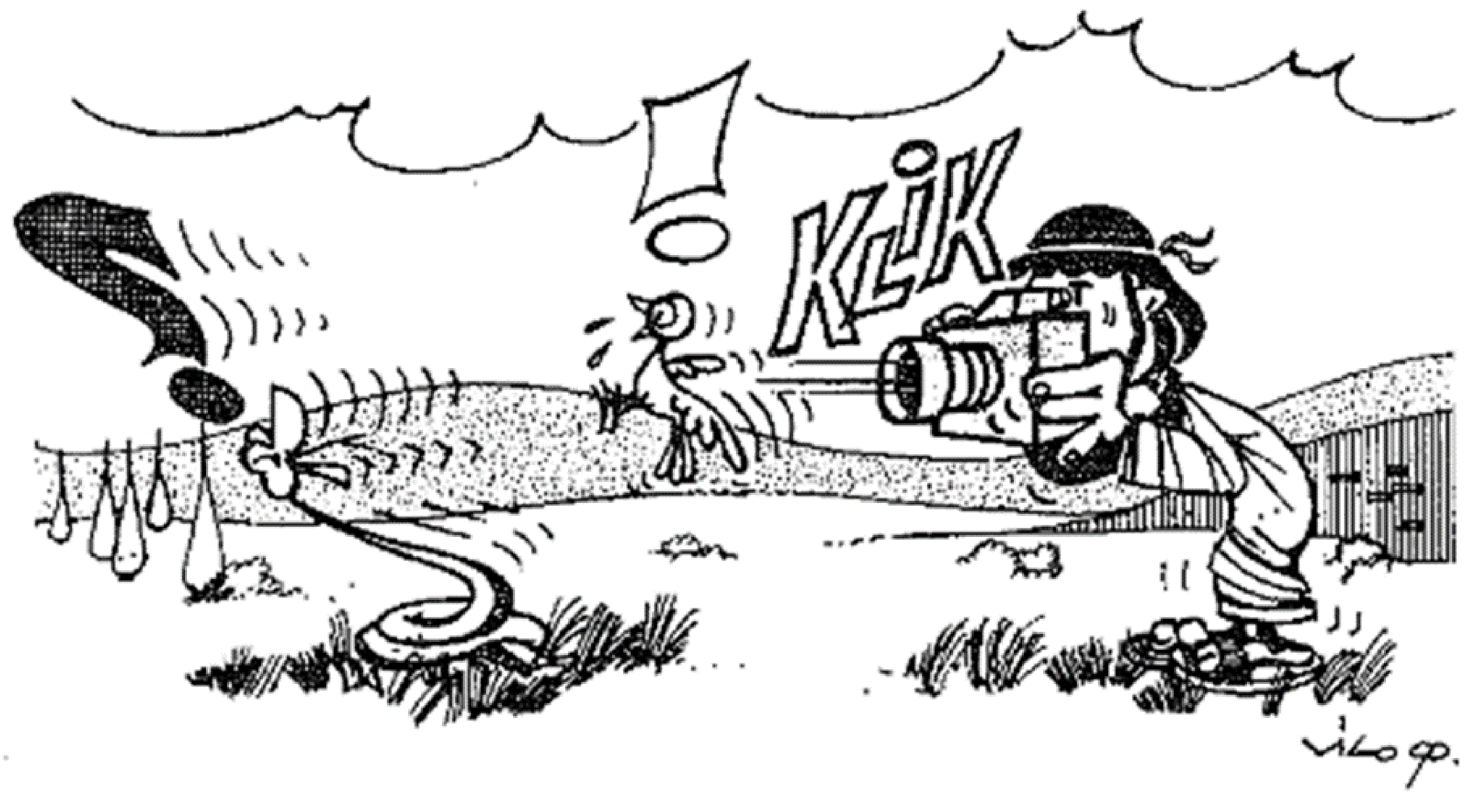
[…]

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{f} \cdot$$

Waarom, denk je, kan je geen scherpe foto's meer maken als het voorwerp te dicht bij de lens staat ?

EN 1990

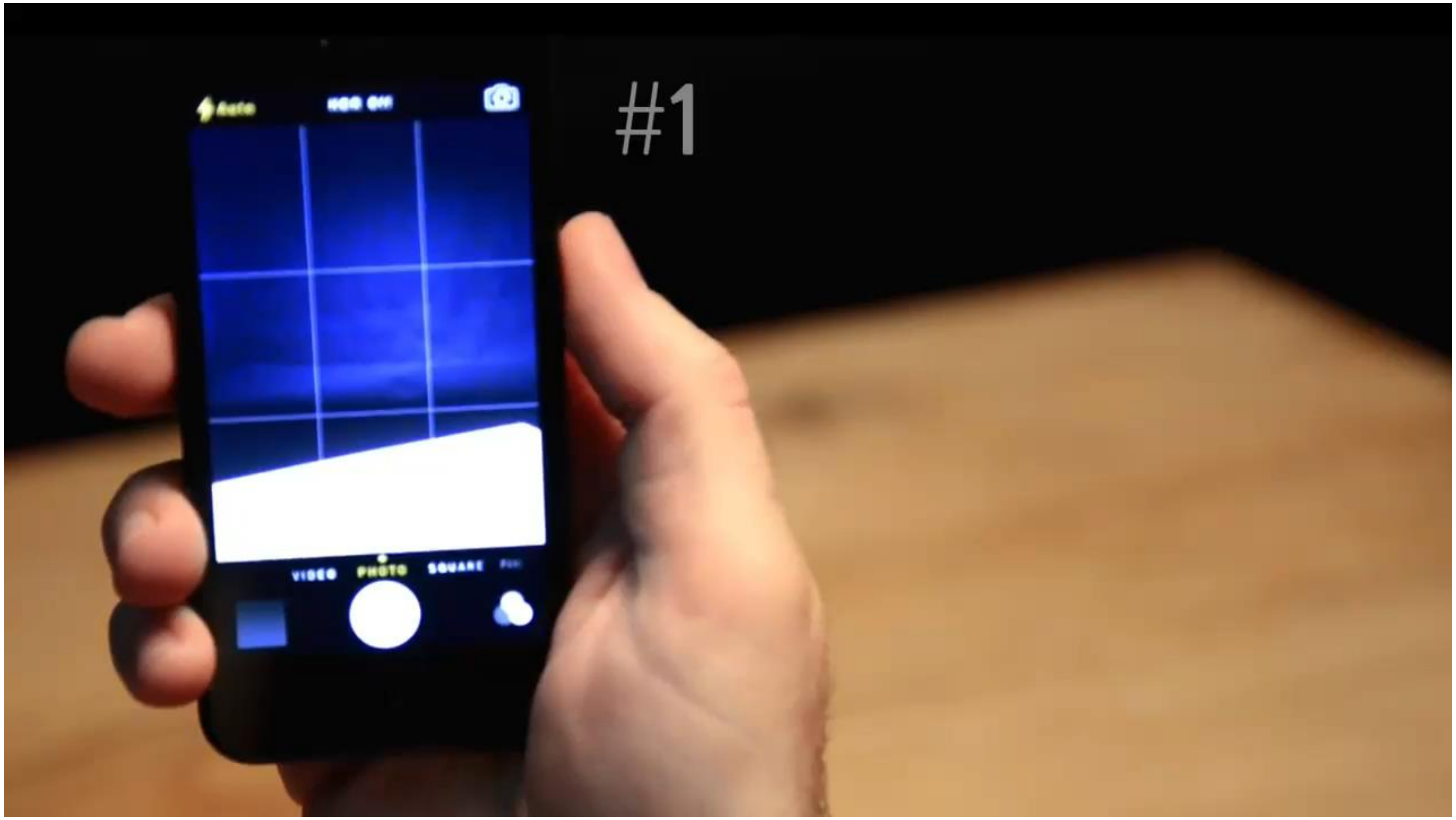
En had je ooit gedacht, terwijl je "naar het vogeltje keek", dat er zo veel wiskunde in het fototoestel zat ?



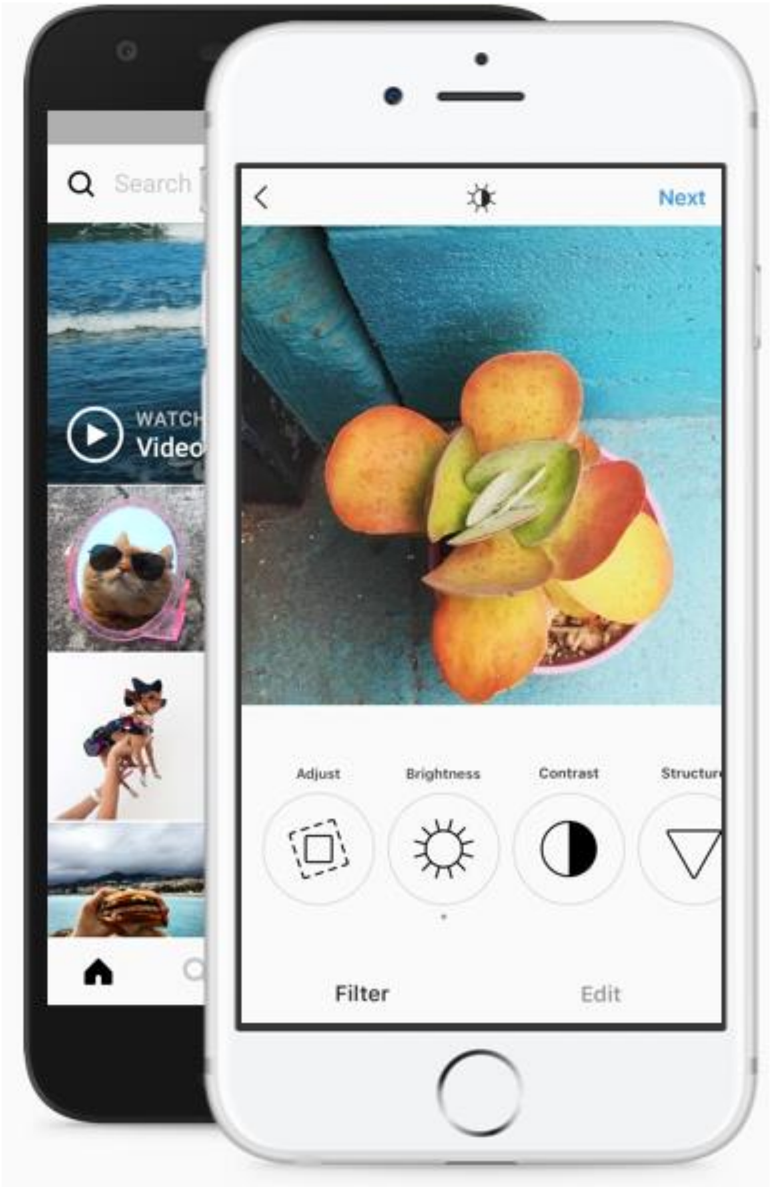
EN 2016

EN 2016

EN 2016

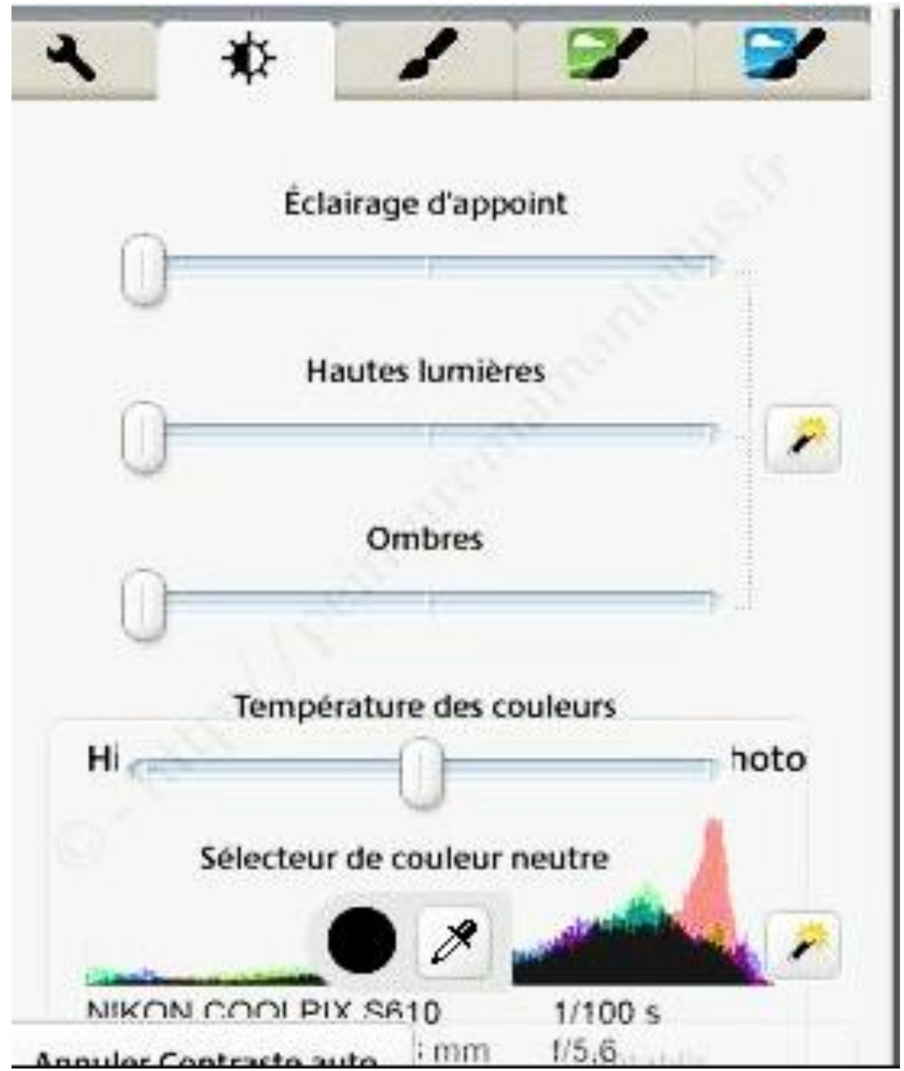


EN 2016


Search
WATCH
Video
Next
Adjust
Brightness
Contrast
Filter
Edit

EN 2016

Recadrer
Redresser
Yeux rouges
J'ai de la chance
Contraste auto
Couleur auto
Retoucher
Texte
Retoucher dans Picnik
Histogramme et infos sur l'appareil photo
Éclairage d'appoint
NIKON COOLPIX S610
Longueur focale : 20.0 mm
(équivalent à 35 mm :
1/80 s
f/5.8
ISO : 400



Éclairage d'appoint
Hautes lumières
Ombres
Température des couleurs
Sélecteur de couleur neutre
NIKON COOLPIX S610
1/100 s
f/5.6

EN 2016


Cancel
Apply
Brightness
-122
Brightness
Contrast
Saturation
Hue
Shadows
Highlights
Temp


Erase
Tap for settings

EN 2016


Cancel
Apply
Horizontal
Vertical
Mode1
Mode2
Offset
81
None
Mirror
Pixelize
Caricature
Fish Eye
Swirled


Cancel
Apply
Size
100

EN 2016

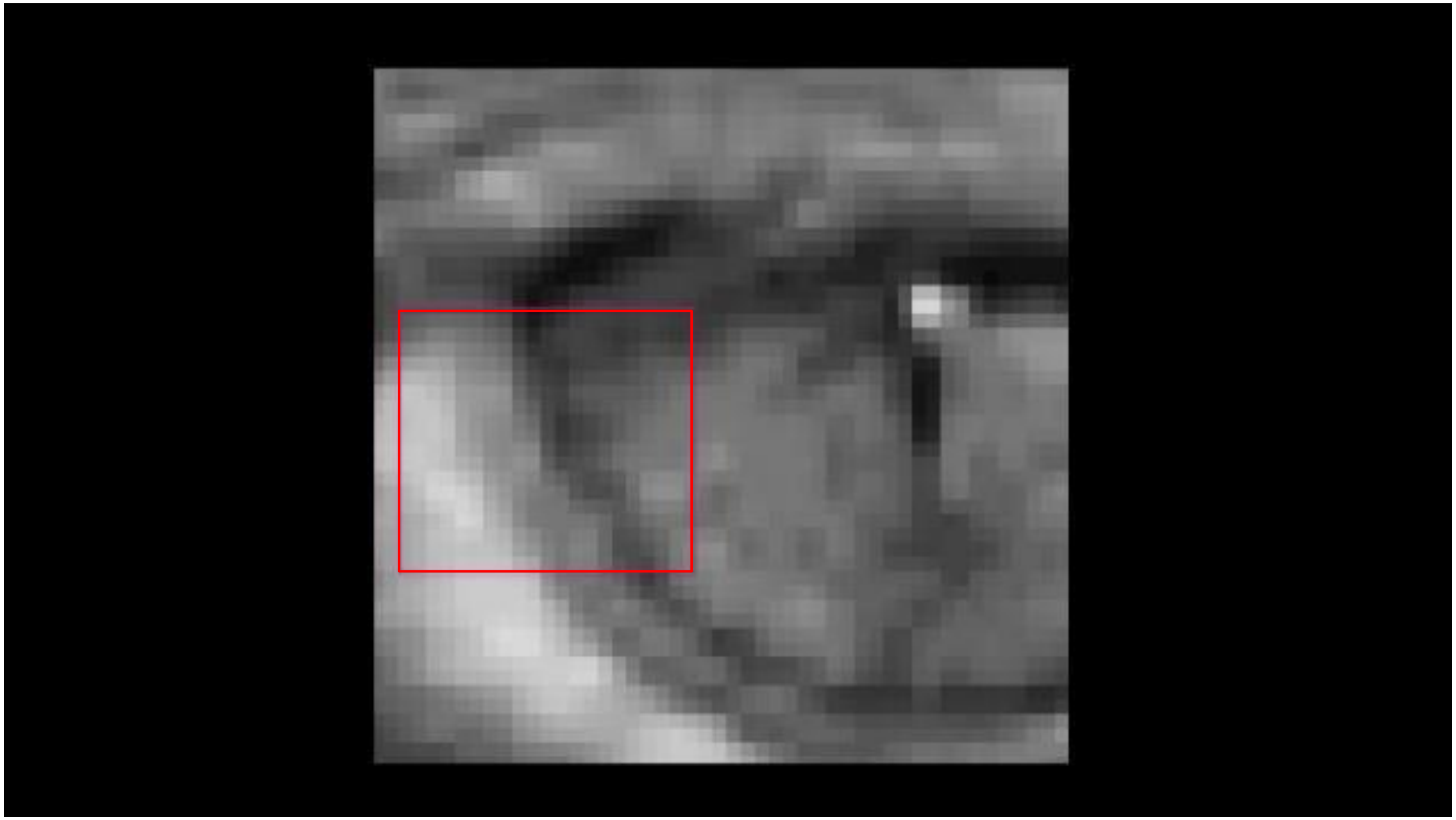
–4 stops | –2 stops | +2 stops | +4 stops

Results after processing

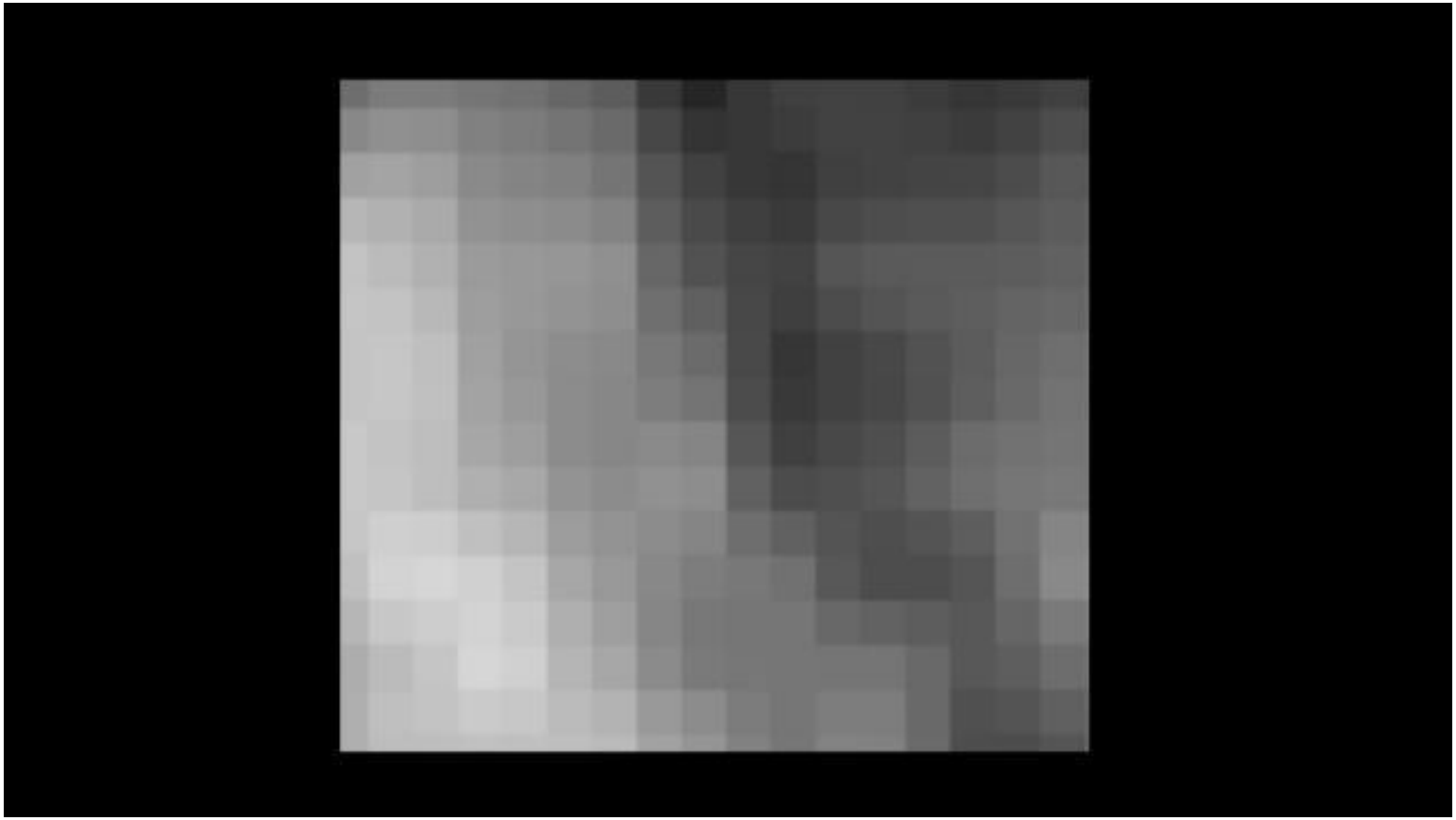
High Dynamic Range

UNE IMAGE DIGITALE

UNE IMAGE DIGITALE



UNE IMAGE DIGITALE



UNE IMAGE DIGITALE

10	52	56	56	56	55	53	52	51	47	45	42	38	27	21	17	17	22	24
20	103	110	112	111	106	102	99	97	91	88	81	74	54	45	34	34	40	44
24	121	125	125	124	117	112	107	105	100	96	90	83	62	53	42	39	42	43
26	131	135	132	132	122	114	111	109	105	101	95	88	67	57	47	43	42	42
29	146	147	145	142	130	121	115	113	112	109	102	95	74	64	53	48	43	41
31	156	155	151	148	135	124	120	120	116	114	108	101	78	67	57	51	47	44
34	167	163	159	155	140	130	125	124	121	120	116	108	83	73	60	56	49	48
36	174	169	165	160	145	135	132	130	128	126	122	114	89	77	66	59	53	50
37	179	175	169	162	149	138	136	134	133	132	129	121	94	81	69	63	56	52
37	182	180	173	169	153	141	136	134	132	129	126	120	97	87	77	68	58	52
37	183	184	177	172	155	142	136	134	130	128	124	120	100	90	82	72	59	53
37	183	184	181	177	159	145	136	132	125	123	120	116	104	97	90	78	61	52
37	183	186	182	180	160	146	138	131	125	121	120	116	106	99	93	80	62	51
37	183	186	182	180	162	148	138	133	126	120	118	115	107	104	98	86	64	53
37	184	185	182	180	162	148	139	136	126	120	118	115	109	107	103	90	66	55
38	187	183	180	176	163	150	145	139	127	120	117	116	119	117	115	100	74	60
38	187	184	180	176	164	154	148	144	129	123	119	118	119	120	119	104	77	64
38	188	184	181	177	168	161	155	151	136	129	123	122	125	125	124	111	84	71
38	188	188	186	183	173	168	161	156	140	132	125	124	125	124	121	110	87	76
37	189	194	196	194	186	181	172	168	149	140	132	128	123	120	116	108	95	87
37	188	197	199	198	193	186	179	174	154	145	135	130	122	117	113	106	98	91
36	185	199	203	206	202	198	190	184	162	149	139	133	122	115	108	104	101	99
34	181	192	197	199	199	199	193	187	166	153	143	137	121	113	106	102	100	99
33	173	184	190	192	198	200	195	191	170	160	147	139	121	113	104	100	100	99
32	168	176	183	187	197	202	199	195	174	163	151	145	125	115	105	101	100	100
32	162	171	178	183	193	203	199	196	177	167	157	149	129	119	108	104	101	100
32	165	174	179	183	189	193	192	188	178	170	163	157	138	129	118	113	105	102
32	165	176	179	180	185	187	187	185	178	174	168	162	144	134	126	119	109	104
20	107	113	115	115	116	118	116	116	114	114	112	108	96	91	86	80	73	68

UNE IMAGE DIGITALE

Chaque niveau de gris est un nombre de 0 à 255.

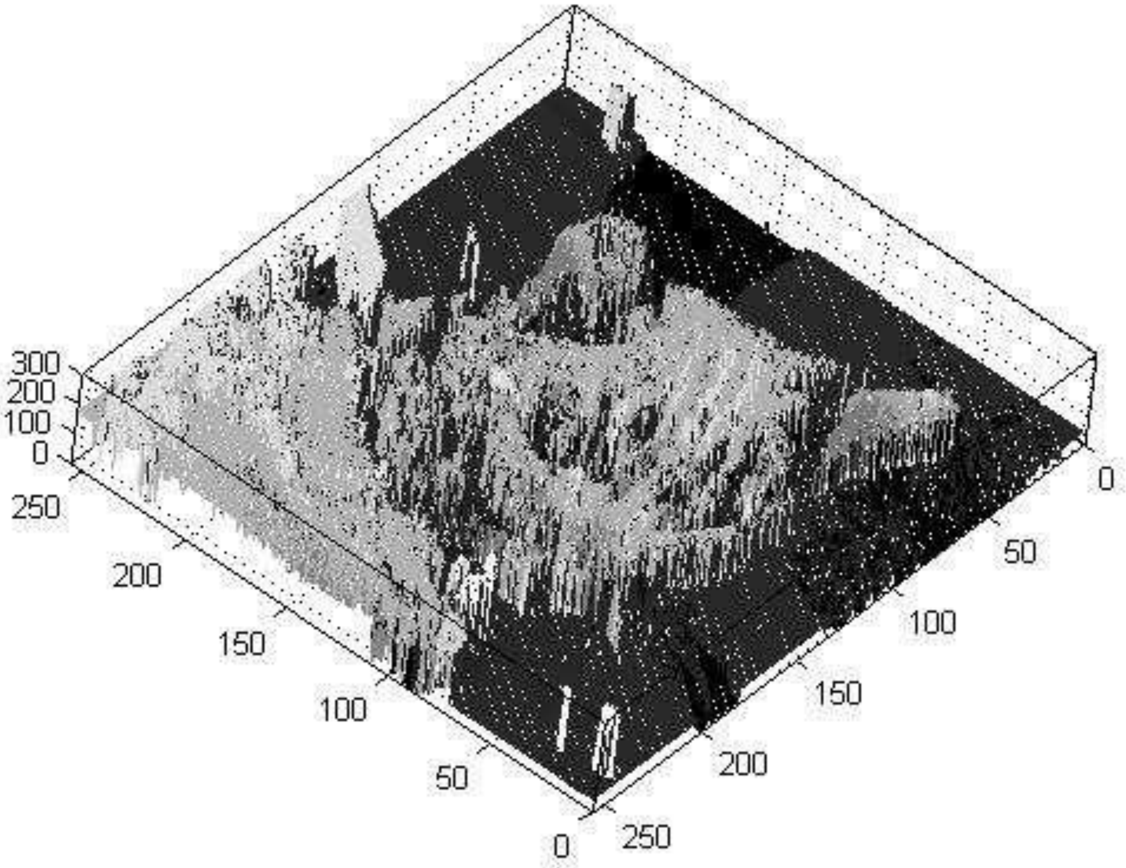
- 1 octet = 8 bits, 8 fois 0 ou 1 (par exemple 01000111)
- Il y a donc $2^8 = 256$ possibilités.

0 = noir ; 255 = blanc

Une image digitale est donc une matrice de nombres naturels de 0 à 255.

- Le nombre de pixels est le produit des dimensions de cette matrice.

UNE IMAGE DIGITALE



$$(i, j) \longmapsto A_{ij}$$

UNE IMAGE DIGITALE

A_{ij}

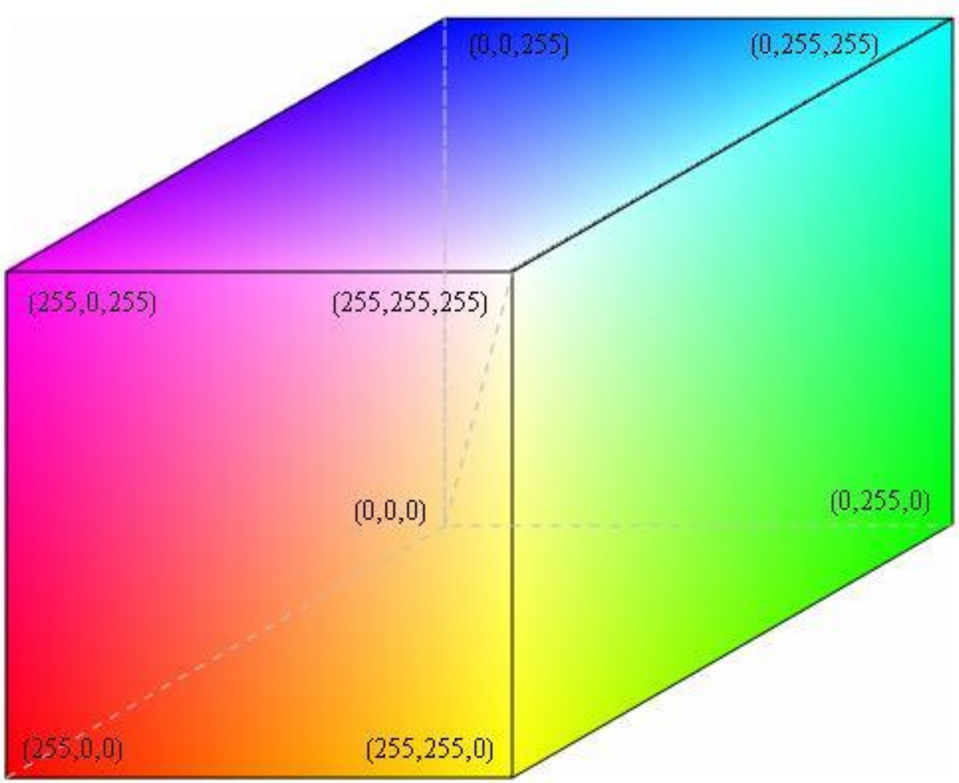
$A'_{ij} = A_{n+1-i,\, j}$

Lena

$(A : n \times n)$

UNE IMAGE DIGITALE

Photo couleur : trois matrices de nombres entre 0 et 255 : rouge, vert, bleu. Ou matrice de triplets.



(0, 0, 0) : noir

(255, 0, 0) : rouge

(0, 255, 0) : vert

…

(255, 255, 255) : blanc

UNE IMAGE DIGITALE

UNE IMAGE DIGITALE

UNE IMAGE DIGITALE

UNE IMAGE DIGITALE

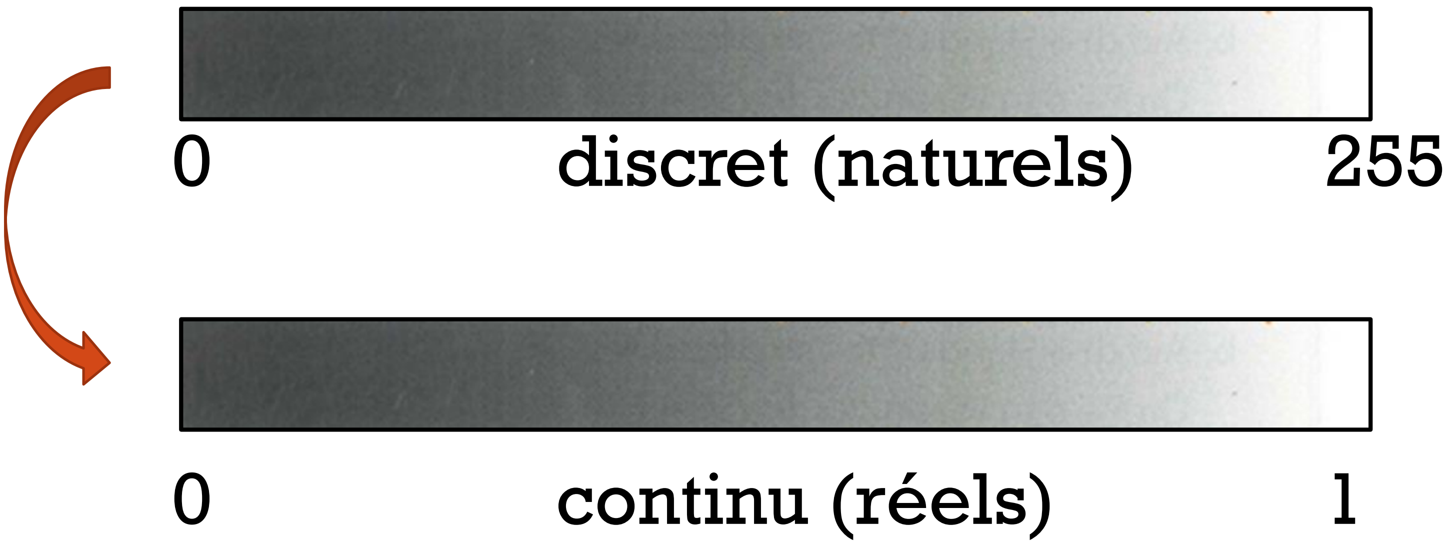
UNE IMAGE DIGITALE

TRANSFORMER L' ÉCHELLE DES GRIS

Quelle transformation l'image du caméraman a-t-elle subi ?

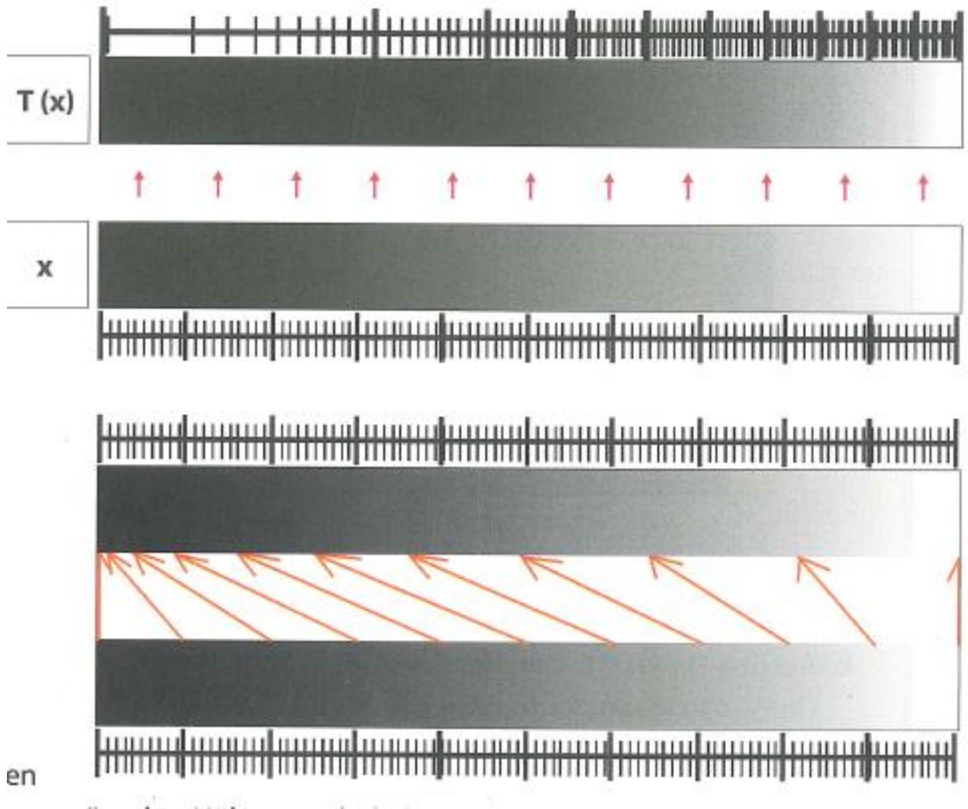
TRANSFORMER L'ÉCHELLE DES GRIS

Simplifions



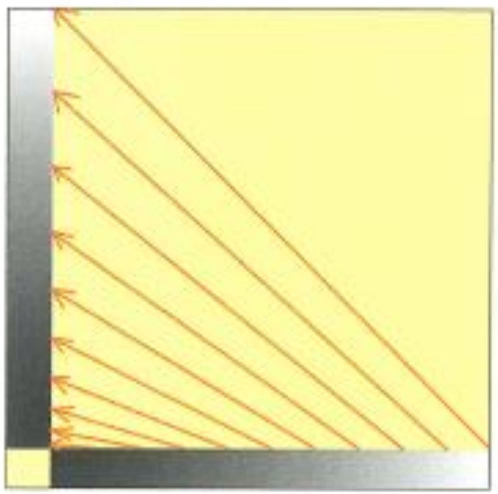
TRANSFORMER L'ÉCHELLE DES GRIS

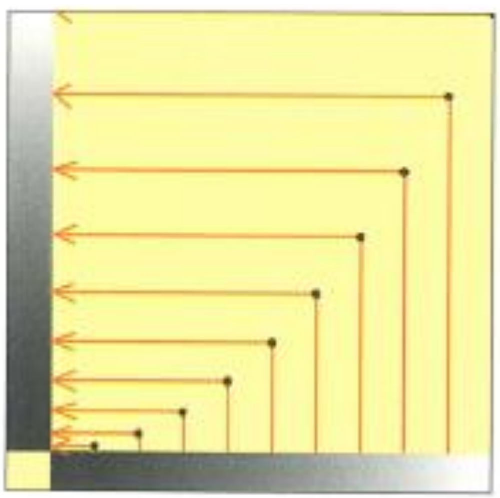
Plusieurs représentations d'une même transformation T.

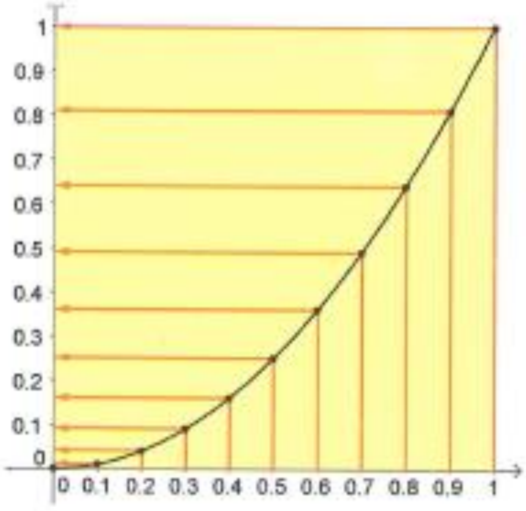


TRANSFORMER L'ÉCHELLE DES GRIS

Encore la même transformation.







$$T(x) = x^2$$

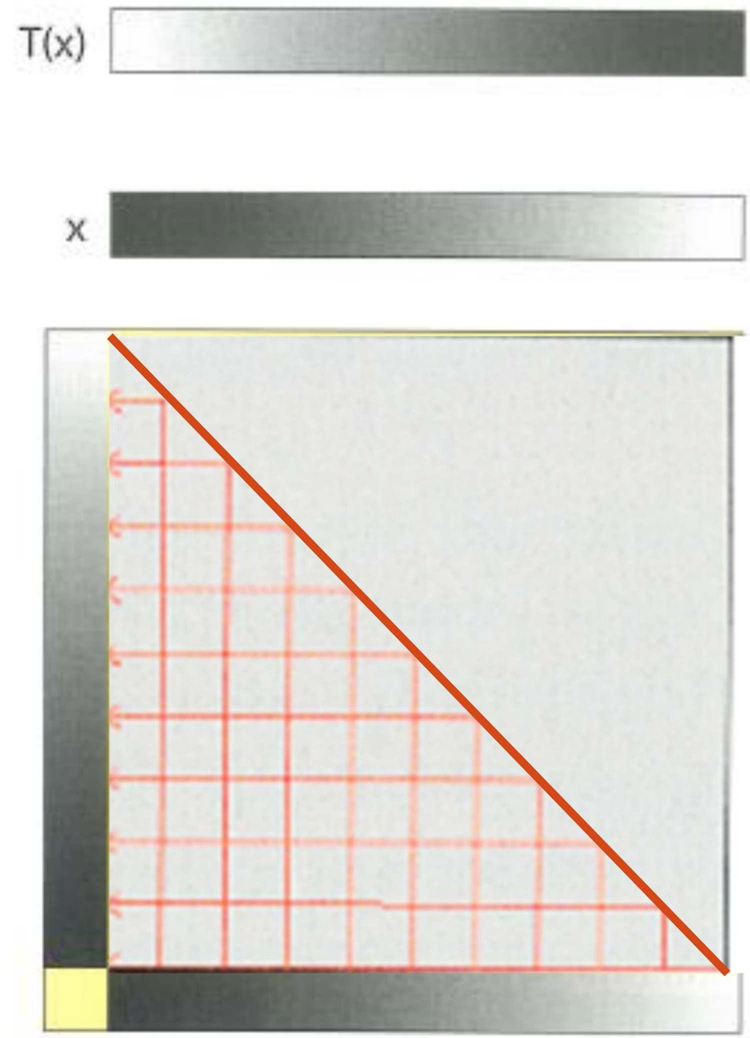
TRANSFORMER L'ÉCHELLE DES GRIS

Une autre transformation.

Formule ? $T(x) = 1 - x$

Interprétation ?

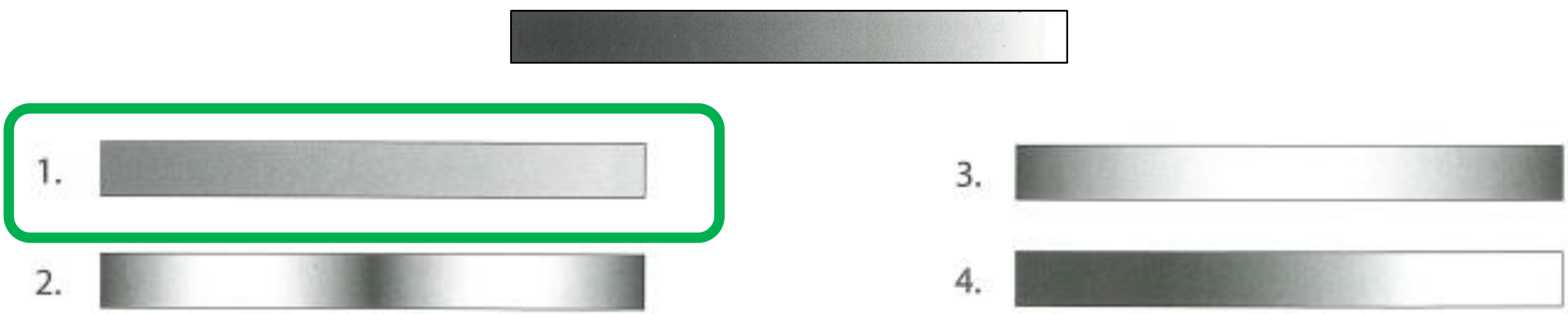
négatif



TRANSFORMER L'ÉCHELLE DES GRIS

$T(x) = 0{,}5x + 0{,}25$

Quelle est l'image de l'échelle standard ?

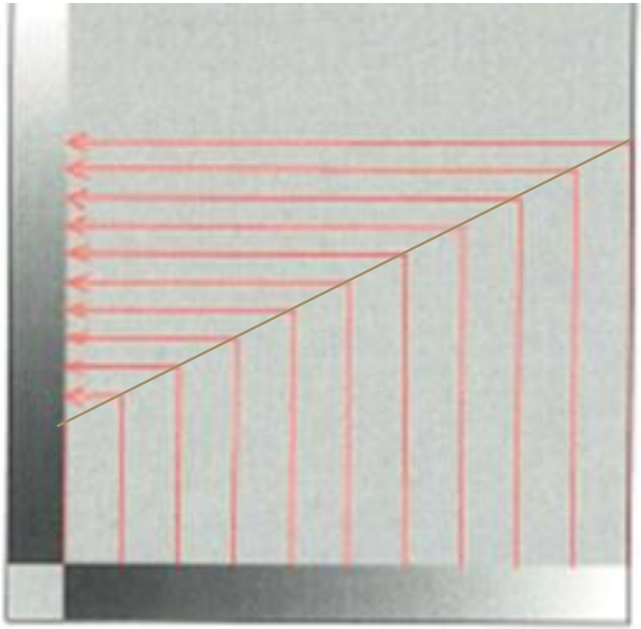


Quelle est l'effet sur une image ?

diminuer le contraste

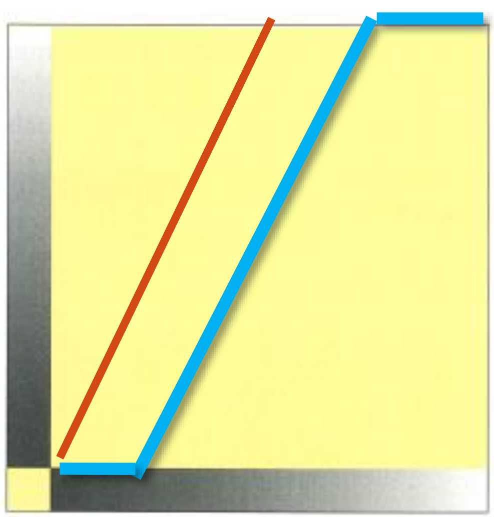
TRANSFORMER L'ÉCHELLE DES GRIS

$T(x) = 0{,}5x + 0{,}25$



TRANSFORMER L'ÉCHELLE DES GRIS

Comment augmenter le contraste avec une fonction du premier degré ?



Problème : on sort de $[0, 1]$.

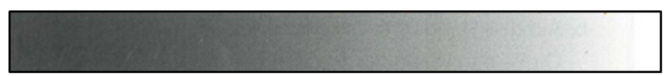
$$\boldsymbol{T^*(x) = \begin{cases} 0 & (T(x) < 0) \\ T(x) & (T(x) \in [0, 1]) \\ 1 & (T(x) > 1) \end{cases}}$$

$T(x) = 2x$ $\qquad$ $T(x) = 2x - 0{,}5$

TRANSFORMER L'ÉCHELLE DES GRIS

$$T(x) = 4x(1-x)$$

Quelle est l'image de l'échelle standard ?

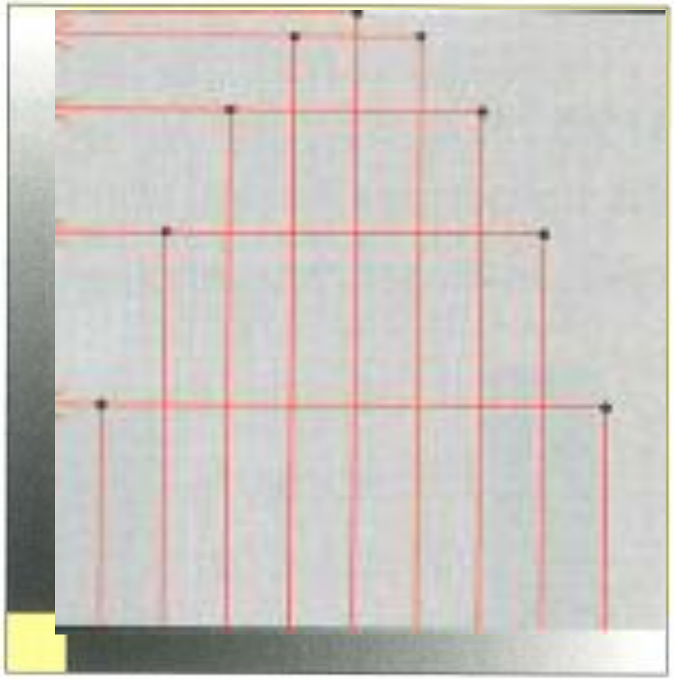


TRANSFORMER L'ÉCHELLE DES GRIS

$$T(x) = 4x(1 - x)$$

Quel est le problème ?

T n'est pas inversible

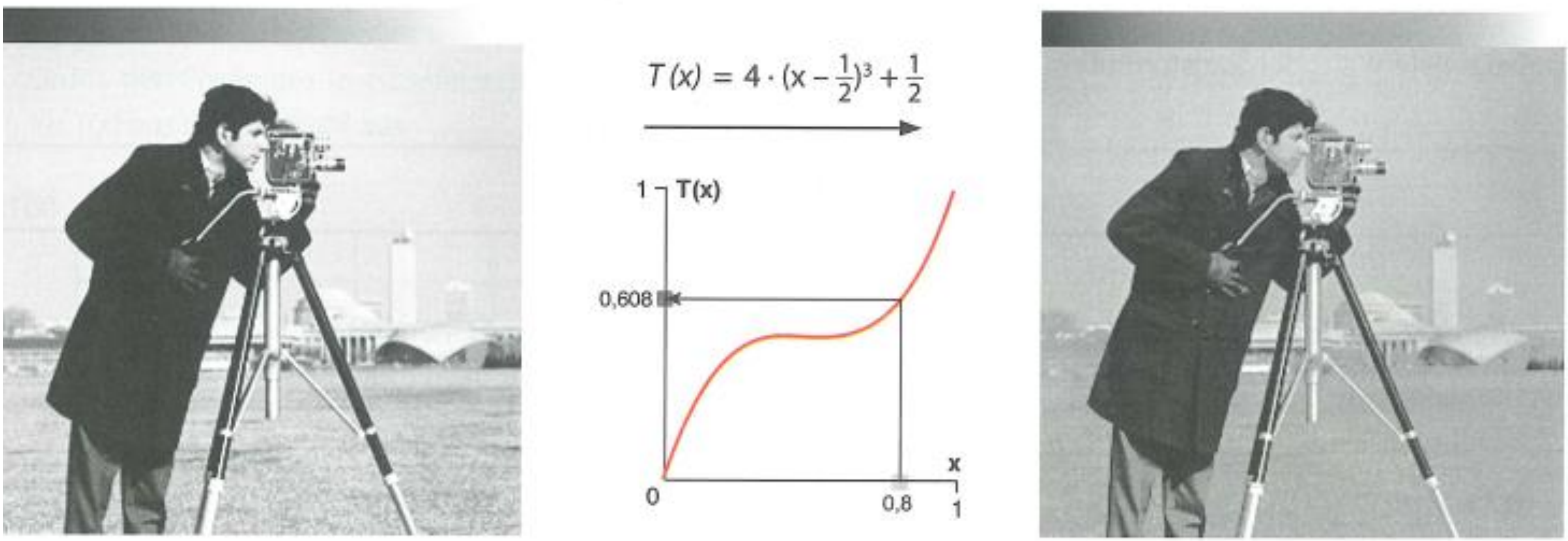


TRANSFORMER L'ÉCHELLE DES GRIS

L'importance de l'inversibilité…

TRANSFORMER L'ÉCHELLE DES GRIS

Réduire le contraste sans perdre le noir et le blanc



TRANSFORMER L'ÉCHELLE DES GRIS

$$T(x) = \begin{cases} 0{,}5x, & (0 \leq x < 0{,}4) \\ 3x - 1 & (0{,}4 \leq x < 0{,}6) \\ 0{,}5x + 0{,}5 & (0{,}6 \leq x \leq 1) \end{cases}$$

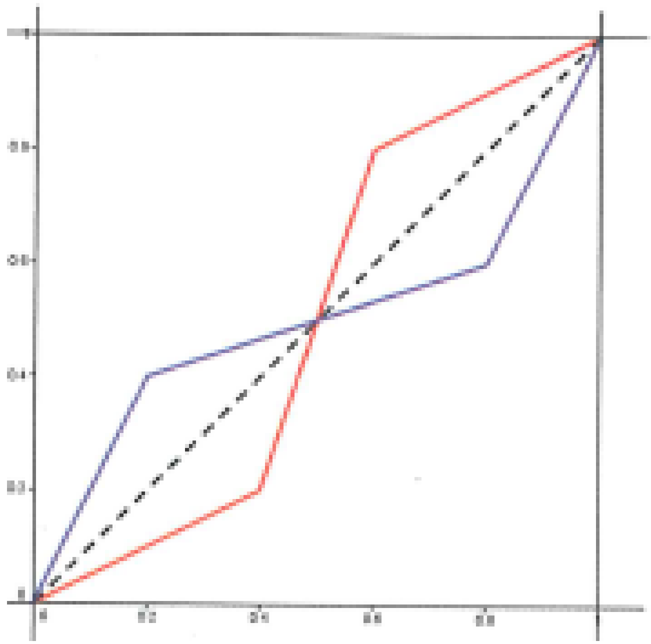
Effet sur l'image ?

Plus de contraste dans les gris

Moins de contraste dans les 'blancs' et les 'noirs'

Inverse ?

TRANSFORMER L'ÉCHELLE DES GRIS

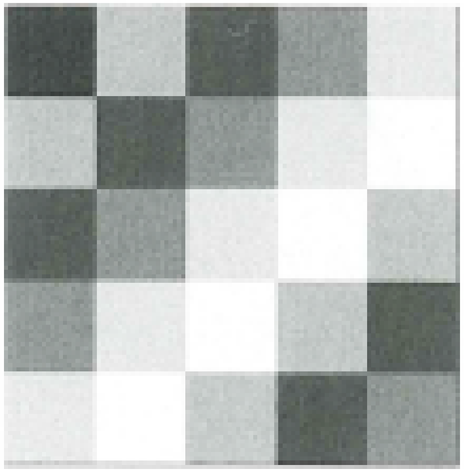


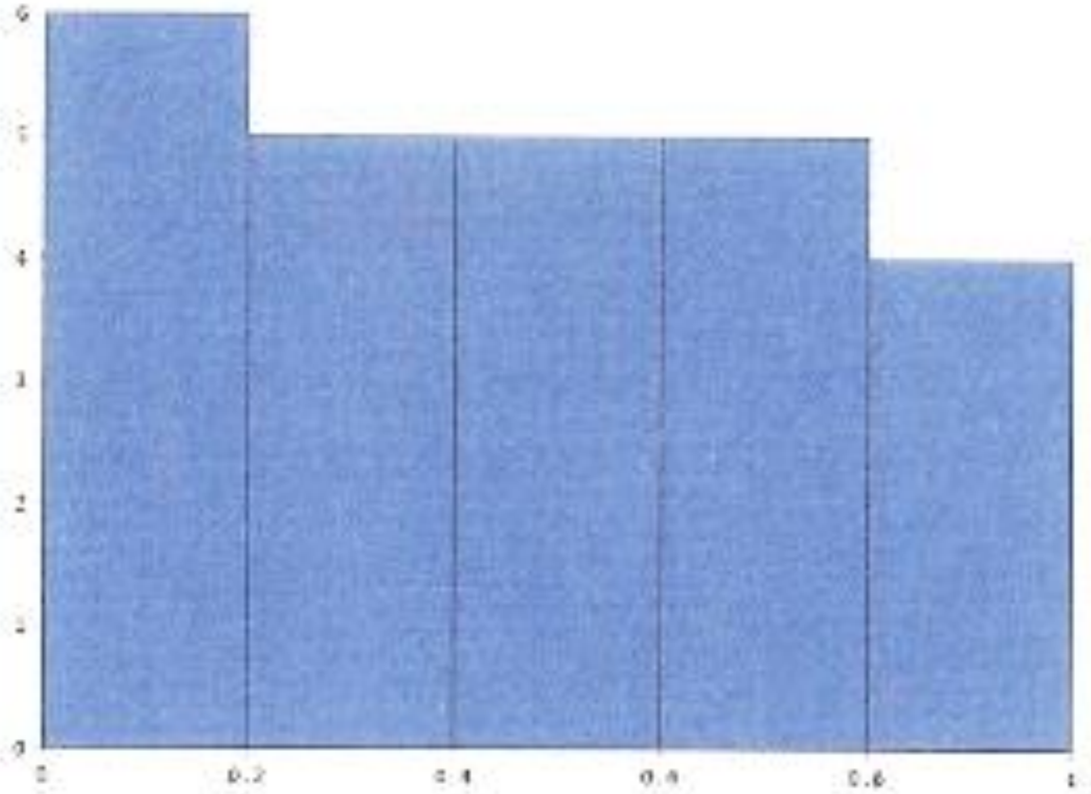
$$T(x) = \begin{cases} 0{,}5x, & (0 \le x < 0{,}4) \\ 3x - 1 & (0{,}4 \le x < 0{,}6) \\ 0{,}5x + 0{,}5 & (0{,}6 \le x \le 1) \end{cases}$$

$$T^{-1}(x) = \begin{cases} 2x & (0 \le x < 0{,}2) \\ \frac{1}{3}x + \frac{1}{3} & (0{,}2 \le x \le 0{,}8) \\ 2x - 1 & (0{,}8 \le x < 1) \end{cases}$$

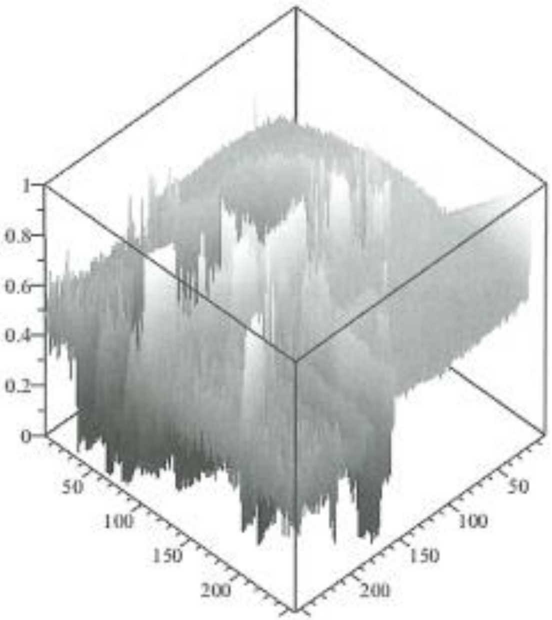
HISTOGRAMME DES GRIS

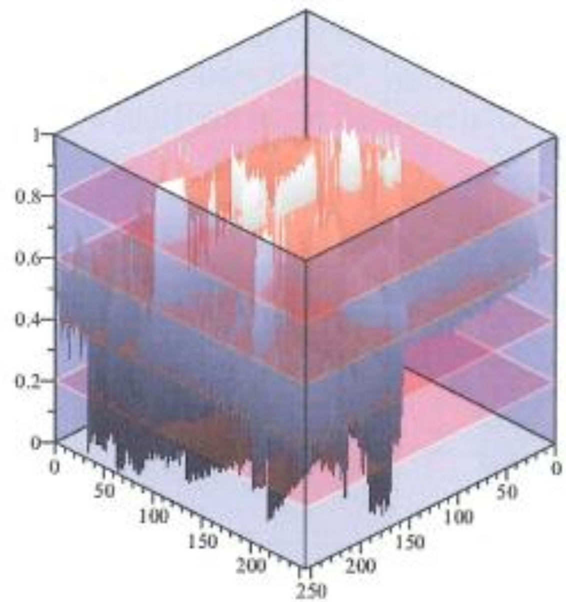
HISTOGRAMME DES GRIS

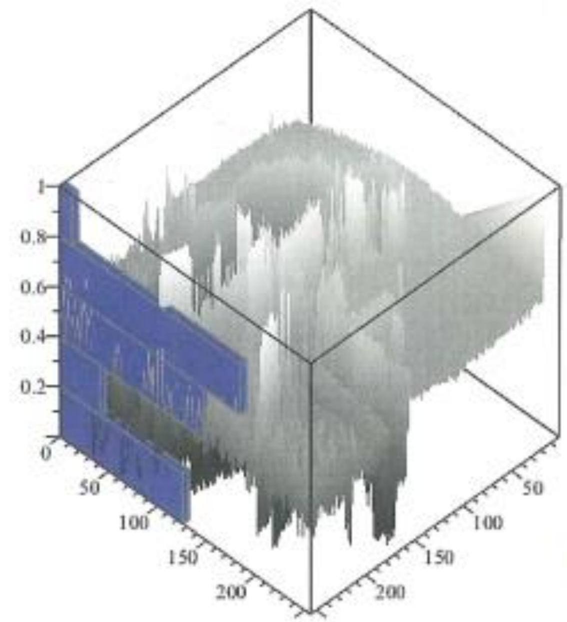




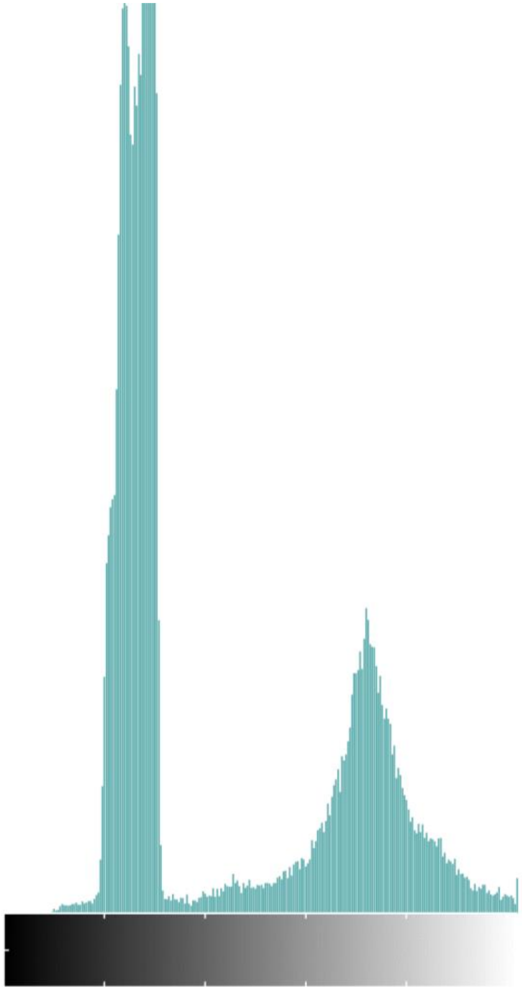
HISTOGRAMME DES GRIS



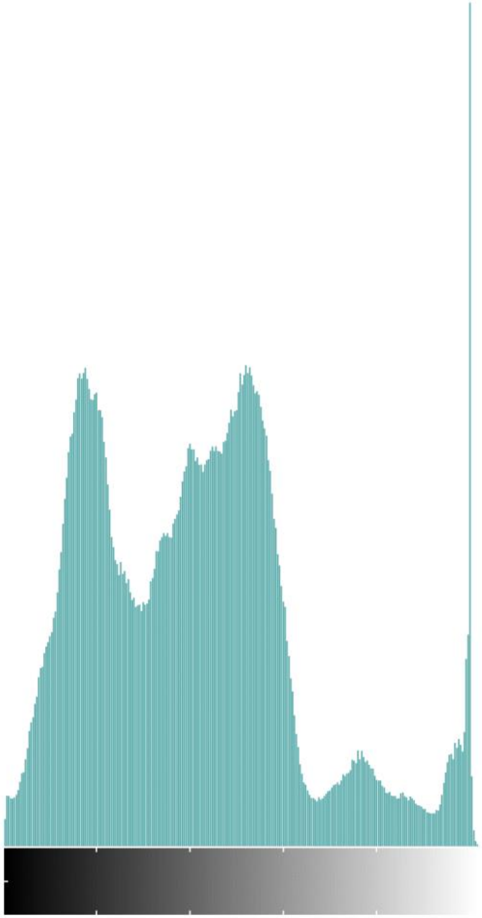




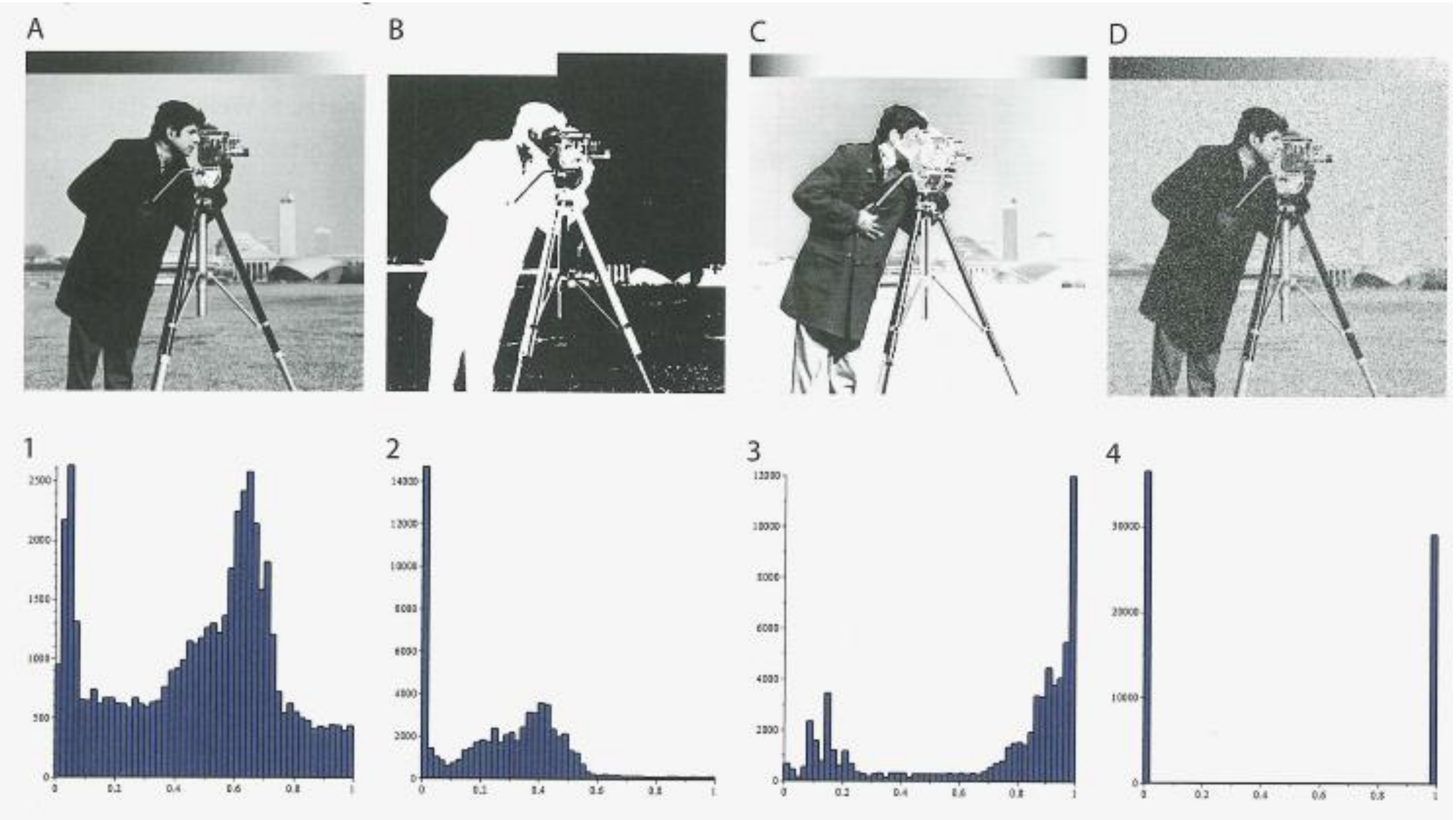
HISTOGRAMME DES GRIS



HISTOGRAMME DES GRIS

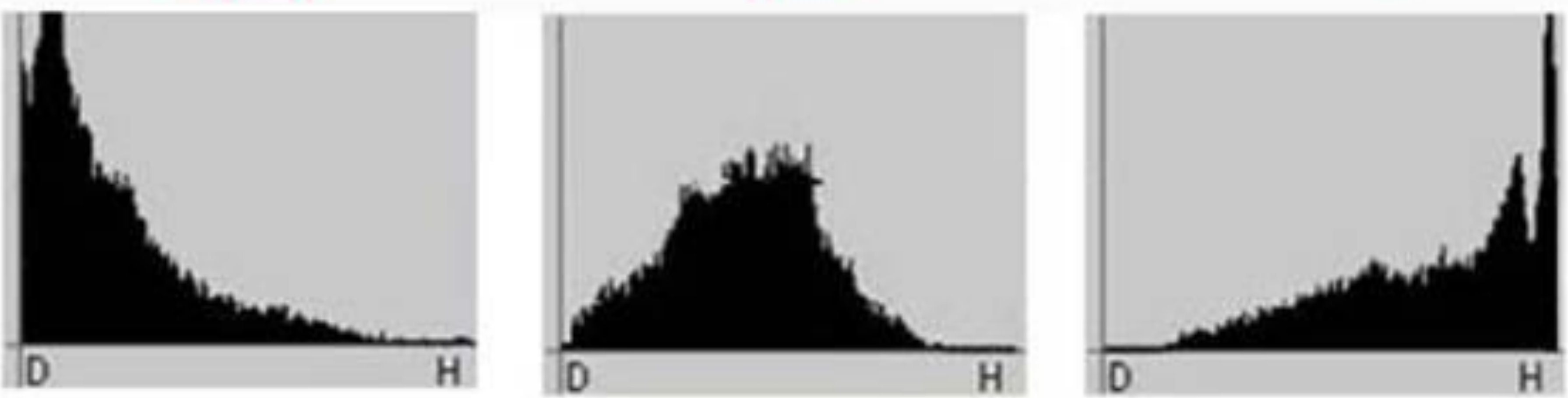


HISTOGRAMME DES GRIS



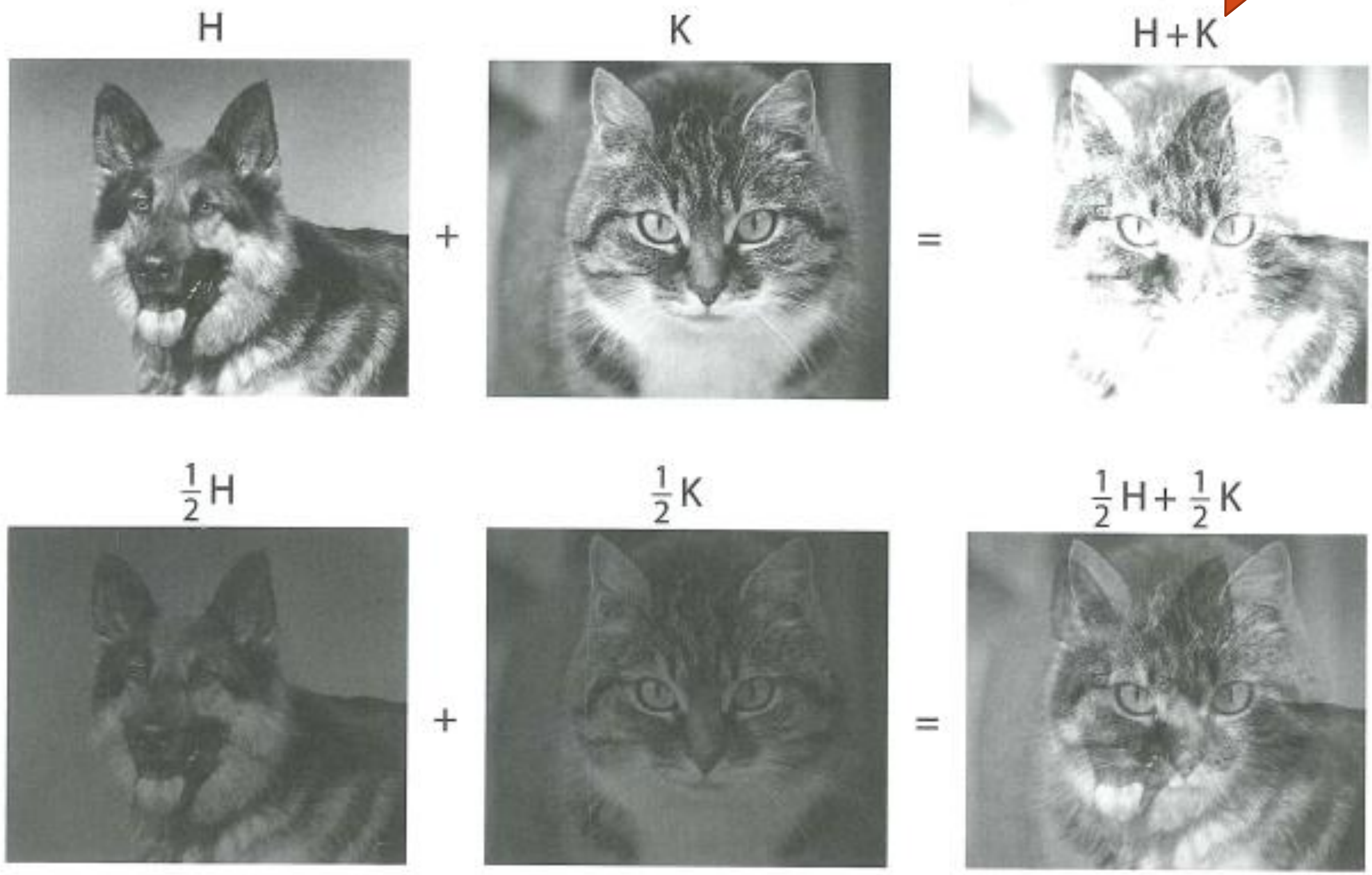
HISTOGRAMME DES GRIS

sous-exposé OK surexposé



ADDITIONNER DEUX IMAGES

$(H+K)^*$



ADDITIONNER DEUX IMAGES

Remarquons…

$\frac{1}{2}H + \frac{1}{2}K$

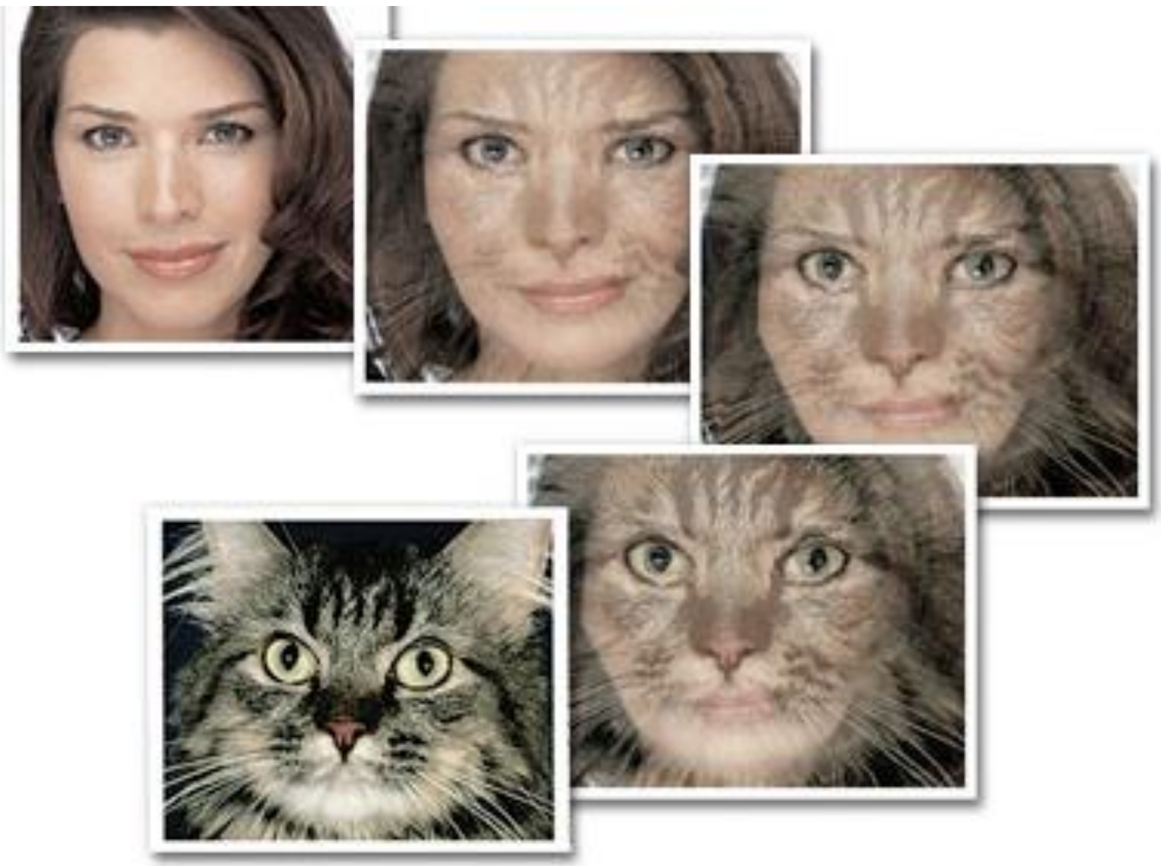
$\neq$

Pourquoi ?

$\frac{1}{2} \cdot (H + K)^*$

$\frac{1}{2}(H+K)$

ADDITIONNER DEUX IMAGES



$$(1-t)H + tK$$

$$t = 0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1$$

SOUSTRAIRE DEUX IMAGES

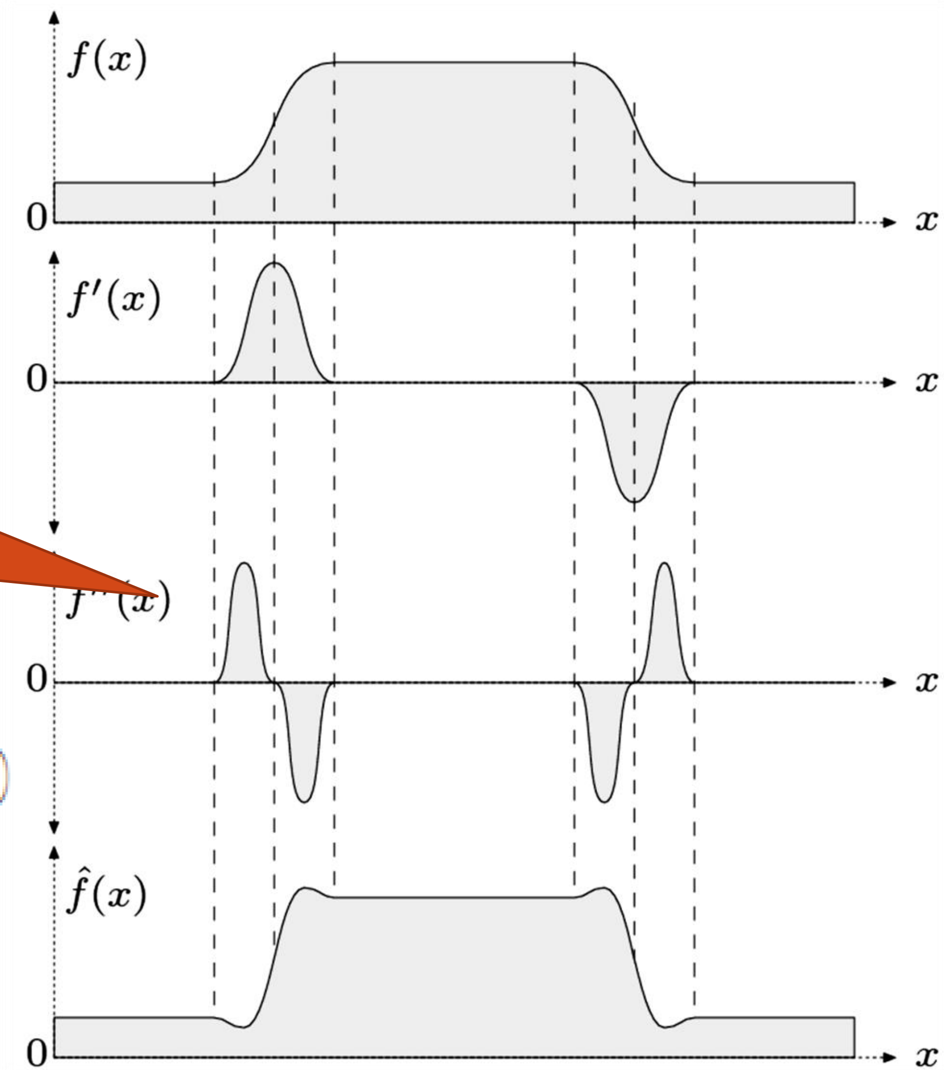
Pour détecter les différences

RENDRE PLUS NET

On est dans le plan :

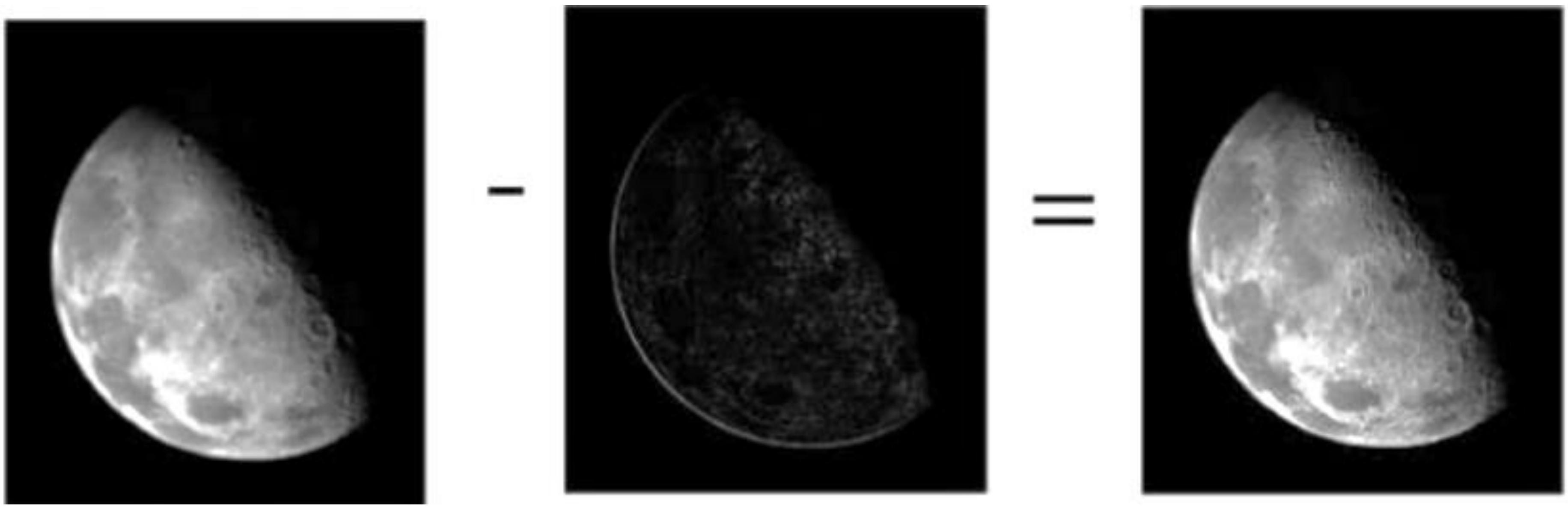
Laplacian au lieu de f''

$$(\nabla^2 f)(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial^2 x}(x,y) + \frac{\partial^2 f}{\partial^2 y}(x,y)$$



Soustraire la deuxième dérivée : $\hat{f} = f - f''$

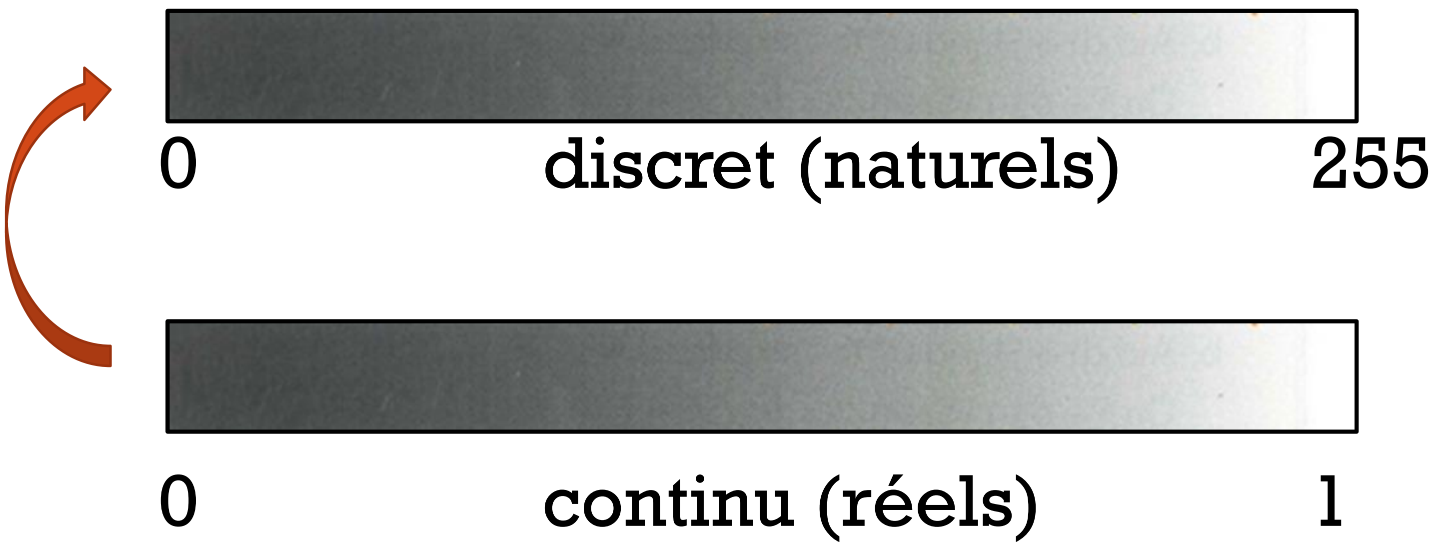
RENDRE PLUS NET



RENDRE PLUS NET

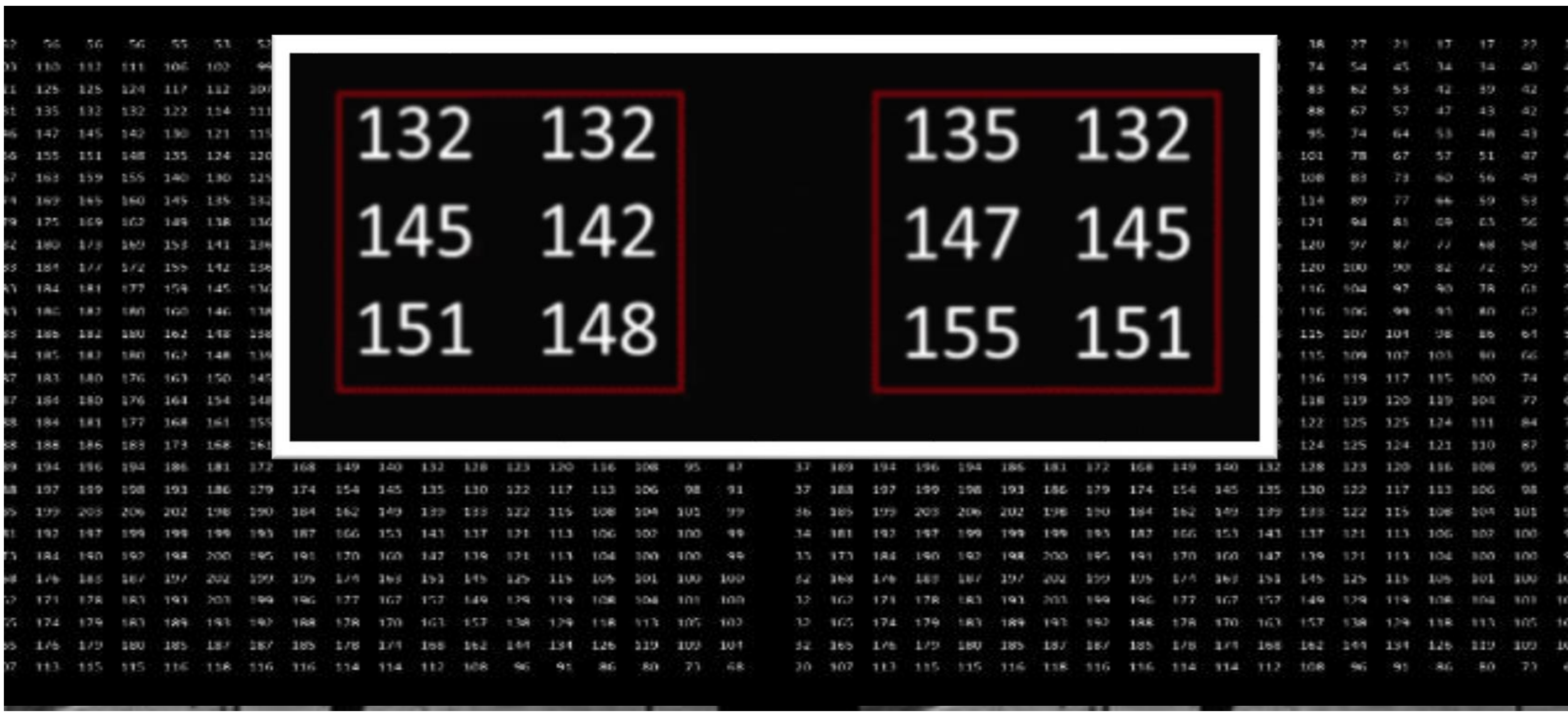
CACHER UNE IMAGE DANS UNE AUTRE

Retournons aux entiers



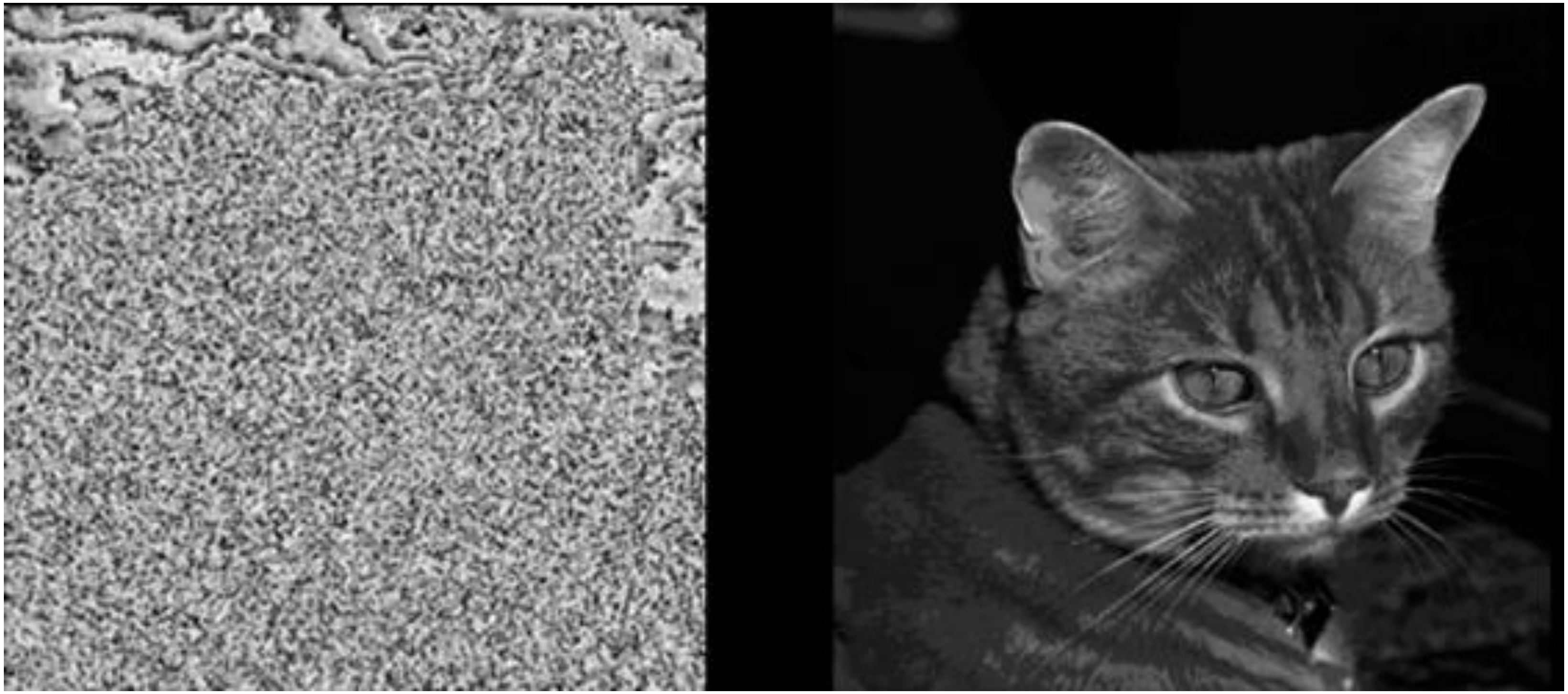
CACHER UNE IMAGE DANS UNE AUTRE

Différences ?



CACHER UNE IMAGE DANS UNE AUTRE

On applique $T(x) = x \bmod 4$. Resultat :



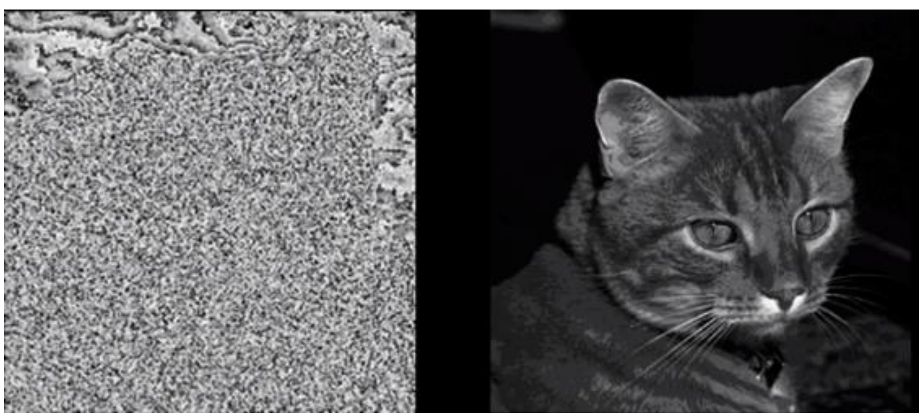
CACHER UNE IMAGE DANS UNE AUTRE

Explication

Chat : seulement 2 bits par pixel

(00, 01, 10, 11)

On remplace les deux derniers bits par ceux du chat.



$T(x) = x \bmod 4$ → les deux derniers bits, ceux du chat

CACHER UNE IMAGE DANS UNE AUTRE

En réalité, ce ne sont pas des chats que l'on cache.

Exemple

- Cinéma : on cache dans le film le nom de la salle et la date.
- Copie illégale : on peut savoir où et quand elle a été faite.

COMPRIMER UNE IMAGE

Une image de 1712 x 2560 pixels, ça prend combien de place ? (Sans compression)

$$1712 \cdot 2560 \cdot 3 \cdot 8 \text{ bits} = 105\,185\,280 \text{ bits}$$

En mégaoctets ?

$$1\text{Mo} = 2^{20}\text{octets} = 2^{23}\text{bits}$$

Donc :

$$\frac{105\,185\,280}{2^{23}} = 12{,}54 \text{ Mo}$$

COMPRIMER UNE IMAGE

- Compression fractale (Michael Barnsley, vers 1990)

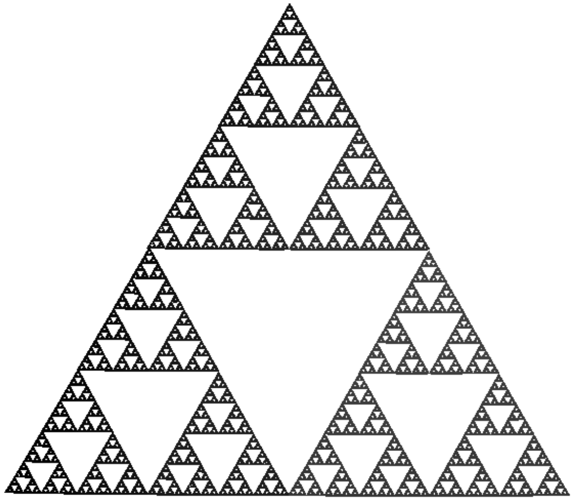
- Compression par ondelettes (jpeg2000, Ingrid Daubechies)
- Autres…

COMPRIMER UNE IMAGE

Image 100 fois plus petite

COMPRIMER UNE FRACTALE

Triangle de Waclaw Sierpienski

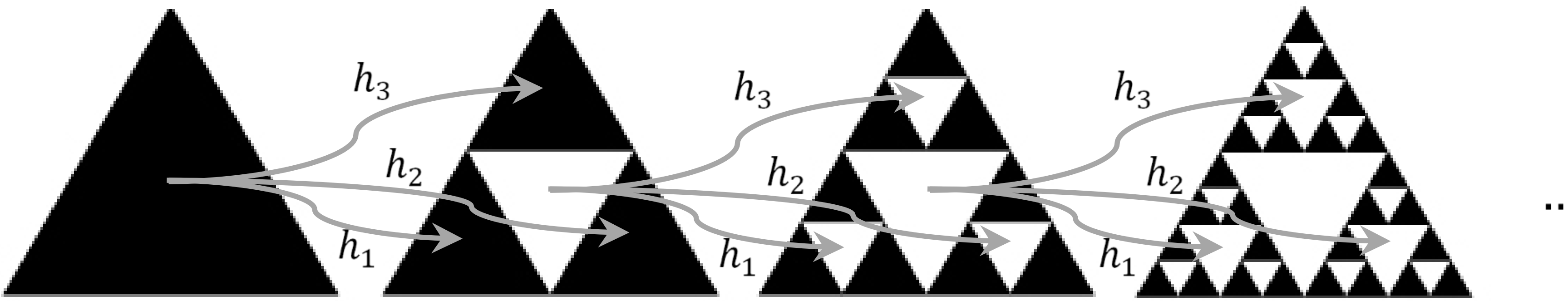


Pour simplifier, nous travaillons dans le plan euclidien au lieu de dans une matrice de pixels. Nous ne distinguons que le noir et le blanc (pas de gris).

Exploitons l'auto-similitude !

COMPRIMER UNE FRACTALE

Trois homothéties se répètent



$$\begin{cases} F_1 = F \\ F_{n+1} = h_1(F_n) \cup h_2(F_n) \cup h_3(F_n) \end{cases}$$

Système de fonctions itérées

COMPRIMER UNE FRACTALE

- $h_1 : \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \longmapsto \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} \\ 0 \end{bmatrix}$
- $h_2 : \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \longmapsto \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ 0 \end{bmatrix}$
- $h_3 : \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \longmapsto \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{4} \end{bmatrix}.$

COMPRIMER UNE FRACTALE

Et si on part d’une autre figure initiale ?

COMPRIMER UNE FRACTALE

Et si on part d’une autre figure initiale ?

COMPRIMER UNE FRACTALE

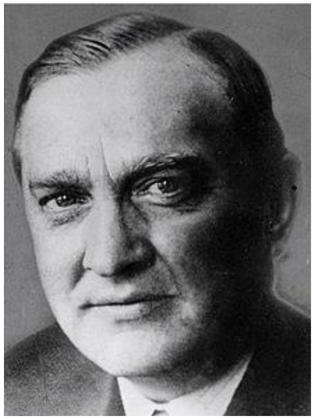
La figure initiale n'a pas d'influence sur la fractale (limite).

COMPRIMER UNE FRACTALE

Théorème du point fixe (Stefan Banach)

Chaque contraction a un point fixe.

Itération : la limite est ce point fixe.

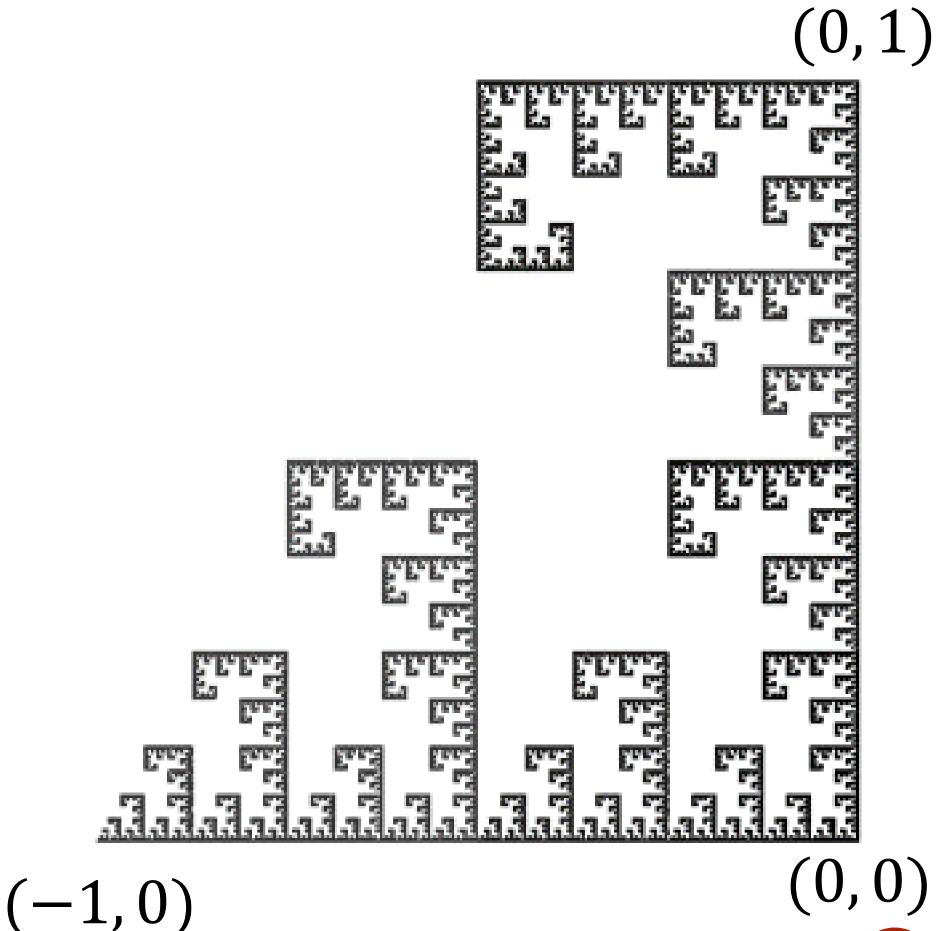


Théorème du collage (Michael Barnsley)

Une union de contractions du plan est une contraction dans l'espace des figures compactes, pour la métrique de Hausdorff.

COMPRIMER UNE FRACTALE

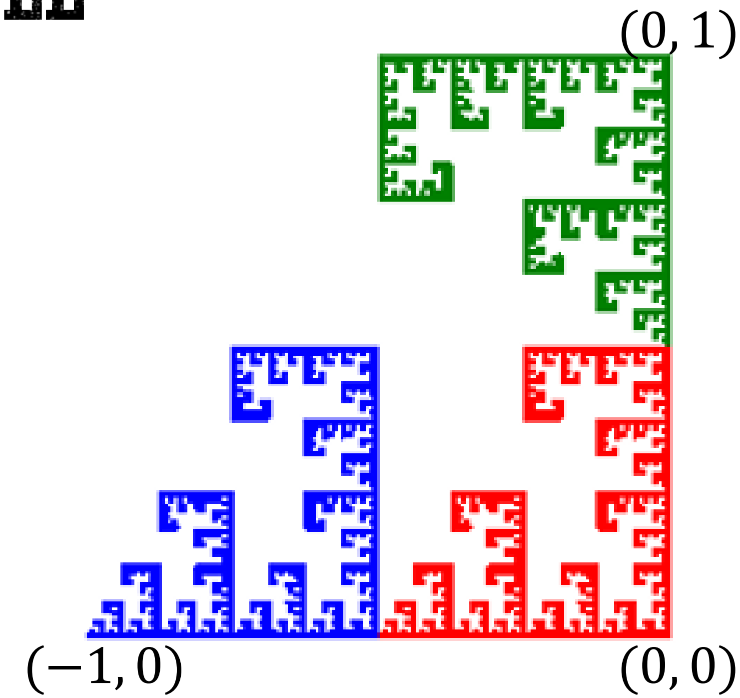
Quelles contractions ?



COMPRIMER UNE FRACTALE

Quelles contractions ?

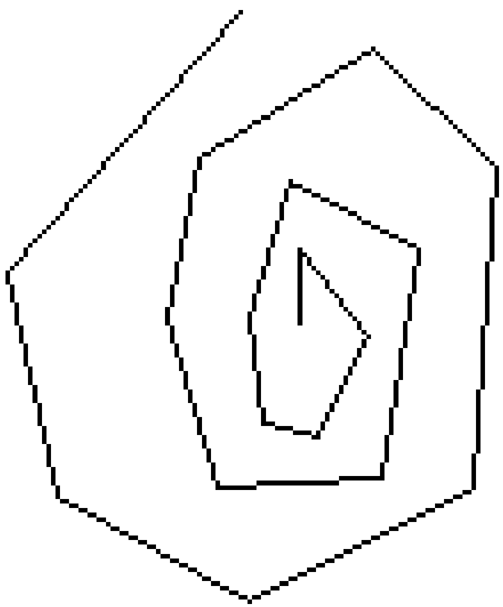
- f_1 : $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \longmapsto \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$
- f_2 : $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \longmapsto \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix}$
- f_3 : $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \longmapsto \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \left(\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$



COMPRIMER UNE FRACTALE

Regardons le résultat (IFS Construction Kit)

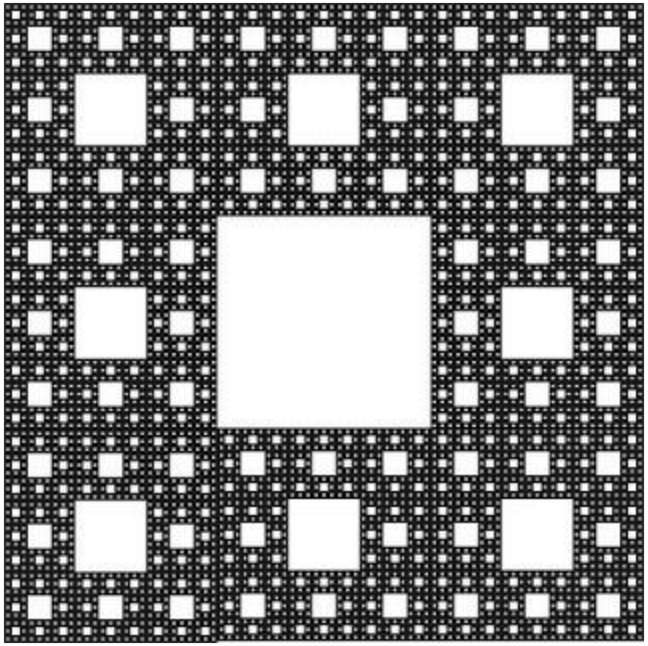
COMPRIMER UNE FRACTALE



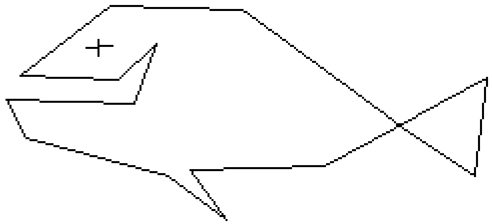
COMPRIMER UNE FRACTALE

Autre exemple : le tapis de Sierpinski

Combien de contractions ? 8



COMPRIMER UNE FRACTALE



APPROXIMER UNE IMAGE PAR UNE FRACTALE

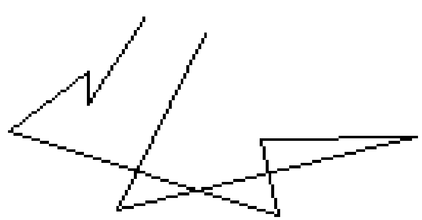
Fractales dans la nature : fougères, choux-fleurs, nuages, feuilles…

APPROXIMER UNE IMAGE PAR UNE FRACTALE

J'ai essayé pour la fougère (IFS Construction Kit).

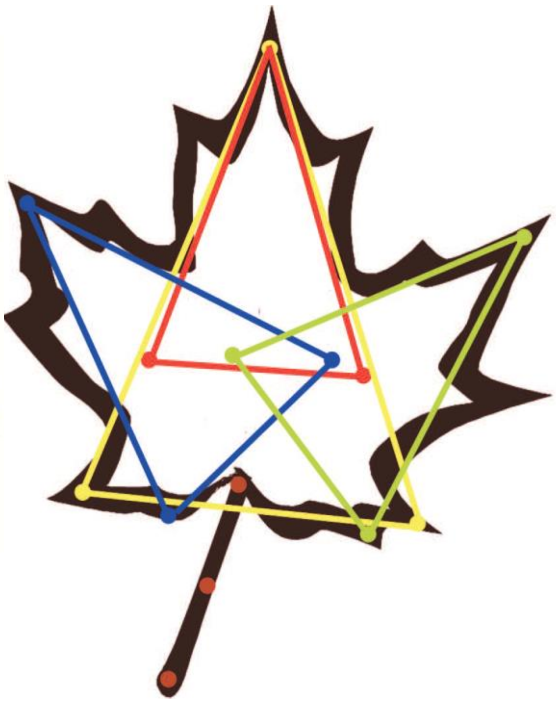
APPROXIMER UNE IMAGE PAR UNE FRACTALE

J'ai essayé pour la fougère (IFS Construction Kit).



APPROXIMER UNE IMAGE PAR UNE FRACTALE





APPROXIMER UNE IMAGE PAR UNE FRACTALE

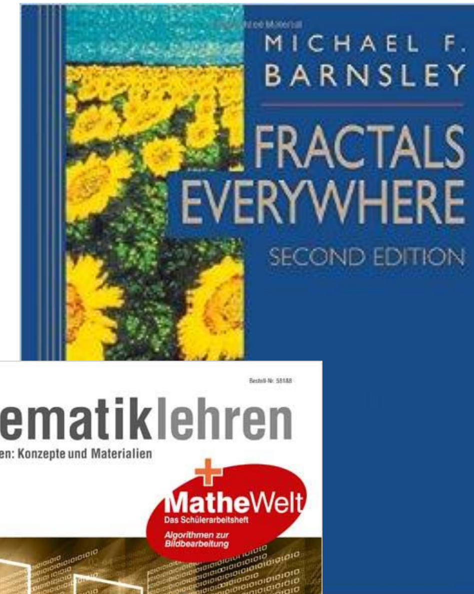
Jusqu'ici j'ai compris.

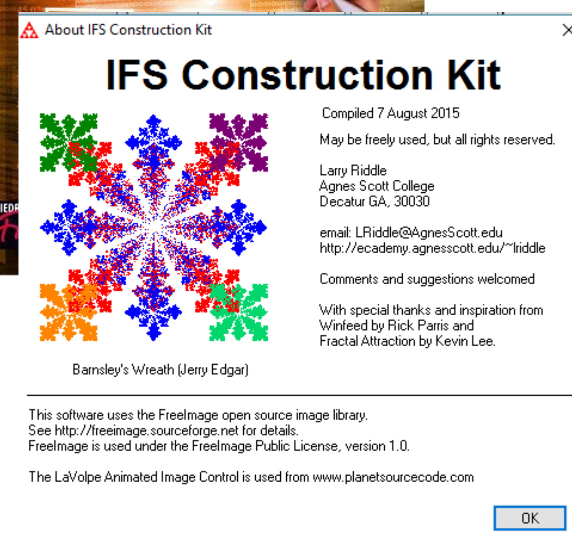
Ce qui suit : pas vraiment.

COMPRESSION FRACTALE D'UNE IMAGE

COMPRESSION FRACTALE D'UNE IMAGE

POUR EN SAVOIR (ENCORE) PLUS





Hautekiet, G., Roelens, M., (automne 2016). Wiskunde achter beeldverwerking, *Uitwiskeling 32/4* (c'est nous !)

Barnsley, M.F (1993). *Fractals everywhere*. AP Professional

Kern, F. Burgeth, B, Eichhorn, D. (2015). Algoritmen zur Bildbearbeitung. MatheWelt. *Mathematik Lehren 188*

Riddle, L. (2016). *IFS Construction Kit.* (gratuit, sur internet)

MERCI !

Maths et néerlandais, d'une pierre deux coups :

Abonnez-vous à UITWISKELING !