La quadrature du cercle

Francis Borceux

SBPM, mardi 23 août 2016

La *quadrature du cercle* ce n'est pas, comme certains pourraient l'imaginer, cette quête désespérée d'un mathématicien fou s'entêtant à vouloir démontrer qu'un cercle est carré. Mais non, mais non : un cercle ce n'est pas carré, c'est rond !

Qu'est-ce donc, le problème de la *quadrature du cercle* ? Ou plus généralement, qu'est-ce donc le problème de la *quadrature* d'une figure géométrique ? Essentiellement, c'est la détermination de l'aire de cette figure géométrique … avec les moyens du bord !

Historiquement, le problème a été posé par les mathématiciens Grecs, plusieurs siècles avant Jésus-Christ. Et les "moyens du bord" de leur géométrie étaient la règle et le compas. Les mathématiciens Grecs ne cherchaient donc pas un nombre qui mesure l'aire de la figure géométrique : pour eux, déterminer l'aire d'une figure, c'était construire à la règle et au compas un carré qui ait la même aire que la figure géométrique donnée. Un carré, car quand on veut comparer les aires de deux figures géométriques, il suffit de superposer les deux carrés correspondants et on voit au premier coup d'œil lequel est le plus grand.

1 La quadrature d'un polygone

Rappelons tout d'abord qu'il est banal, à la règle et au compas, de construire des parallèles, des perpendiculaires, déterminer le milieu d'un segment, etc.

Les Grecs ont commencé par le cas le plus fondamental : la quadrature d'un triangle. L'aire d'un triangle est la même que celle d'un rectangle construit sur la base du triangle et la moitié de sa hauteur, ce qui ramène aussitôt le problème de la quadrature du triangle à celui de la quadrature d'un rectangle.

Considérons donc un rectangle de côtés a et b. Portons ces deux segments bout à bout et construisons le cercle de diamètre $a + b$ (voir la Figure 1.1). Élevons encore la corde perpendiculaire à ce diamètre, au point P de contact des deux segments a, b, et notons c la longueur de la demi-corde.

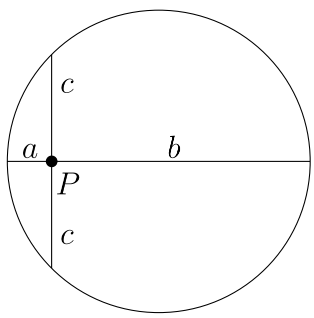

Figure 1.1

Le théorème concernant la puissance du point P par rapport au cercle nous apprend que $a \cdot b = c \cdot c$ ... donc c est le côté du carré ayant même aire que le rectangle de côtés a et b.

Les Grecs observent alors que de manière banale, cela résoud le problème de la quadrature d'une figure bordée par une ligne polygonale quelconque (voir la Figure 1.2).

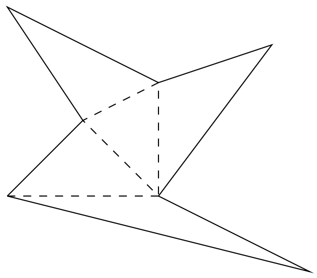

FIGURE 1.2

Ils commencent par décomposer le polygone en une somme de triangles et réalisent la quadrature de chacun de ces triangles. Il reste alors à "additionner" tous ces carrés pour en faire un carré unique.

Le théorème de Pythagore nous apprend que si nous disposons de deux carrés de côtés respectifs a et b, le triangle rectangle construit sur ces deux côtés a et b possède précisément une hypothénuse c telle $c^2 = a^2 + b^2$ (voir Figure 1.3). Cela permet de remplacer la somme de deux carrés par un carré unique, et de proche en proche, la somme d'un nombre quelconque de carrés par un carré unique.

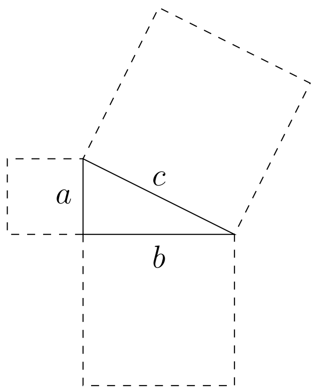

FIGURE 1.3

Cela résoud donc le problème de la quadrature d'un polygone quelconque.

2 La quadrature du cercle

Après avoir résolu le problème de la quadrature d'un polygone, l'étape suivante était naturellement la quadrature de figures géométriques plus compliquées, faisant intervenir des arcs de cercles et des segments. Et parmi ces figures, la plus simple était bien entendu le cercle lui-même.

Plutarque, vers les années 100 de notre ère, attribue la paternité du problème de la quadrature du cercle à *Anaxagore*, qui vivait au cinquième siècle avant Jésus-Christ. *Anaxagore* se serait intéressé à ce problème ... histoire de tuer le temps, alors qu'il était emprisonné à Athènes pour cause de blasphème. Et il y avait de quoi ! Figurez-vous que cet irrespectueux personnage avait osé affirmer publiquement que le Soleil n'était pas un dieu, mais une grosse pierre chauffée au rouge, et qu'en outre la lumière de la Lune n'était que le reflet de celle du Soleil.

Nous savons aujourd'hui que la quadrature du cercle est impossible. On pourrait bien entendu pseudo-philosopher longtemps pour tenter de justifier *a priori* que l'on ne puisse espérer transformer une "figure ronde" en une "figure rectiligne". Mais aucun de ces raisonnements pseudo-philosophiques ne tient la route ! Car en effet, dès l'Antiquité, les mathématiciens grecs ont résolu de nombreux problèmes de quadratures de figures arrondies. J'en citerai un seul, à titre d'exemple ; mais il y en a beaucoup d'autres.

Considérons un carré $ABCD$ inscrit dans un cercle de centre O (voir la Figure 2.1). Construisons encore l'arc de cercle de centre D passant par A et C. Cet arc de cercle, avec le demi-cercle supérieur, constitue une *lune* marquée en trait gras. Nous allons prouver que l'aire de cette *lune* est égale à celle du triangle ABC.

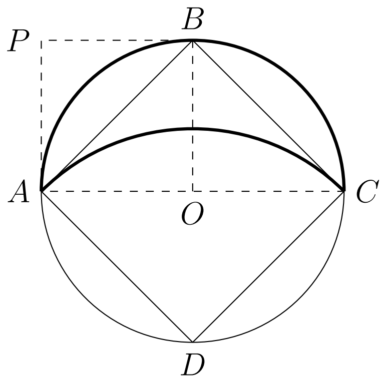

FIGURE 2.1

Les Grecs savaient que si deux figures géométriques sont *semblables*, toutes les longueurs sont multipliées par un même facteur k et par conséquent, toutes les surfaces sont multipliées par le facteur k^2. Le carré $ABCD$ et l'arc de cercle AC de centre D constituent une figure semblable au carré $APBO$ et l'arc de cercle AB de centre O. Le segment AC, diagonale du carré $ABCD$, a une longueur égale à $\sqrt{2}$ fois la longueur du côté AB. Le secteur circulaire bordé par le segment AC et l'arc de cercle de centre D a donc une aire égale à 2 fois le secteur circulaire bordé par le segment AB et l'arc de cercle de centre O. Par symétrie, le secteur circulaire bordé par le segment AC et l'arc de cercle de centre D a donc la même aire que la somme des deux secteurs circulaires bordés par les segments AB, BC et l'arc de cercle de centre O. Cela prouve que la *lune* qui nous intéresse a bien même aire que le triangle ABC.

Comment, après un tel succès – et bien d'autres du genre – ne pas imaginer que la quadrature du cercle – une figure nettement plus simple – soit elle-même possible ?

Et puis *Archimède*, au troisième siècle avant Jésus-Christ, démontrera un résultat qui ne pourra que renforcer l'espoir que la quadrature du cercle soit possible. Chacun sait que si l'on coupe un cône par un plan, on obtient une ellipse, une hyperbole ou une parabole, selon les positions respectives du cône et du plan. Parmi toutes les coniques que l'on peut ainsi obtenir, la plus simple est évidemment le cercle. Alors quand *Archimède* résoud le problème de la quadrature de la parabole, comment ne pas imaginer qu'il s'agisse là d'un premier pas vers la quadrature de toutes les coniques ?

Soient donc la parabole de la Figure 2.2 et deux points A, B de celle-ci, d'abscisses respectives a et b. *Archimède* considère l'abscisse m, milieu du segment ab, et le point M correspondant sur la parabole. Il prouve que l'aire du segment parabolique AMB égale quatre tiers de l'aire du triangle AMB. Avec deux millénaires d'avance, sa preuve par passage à la limite est un

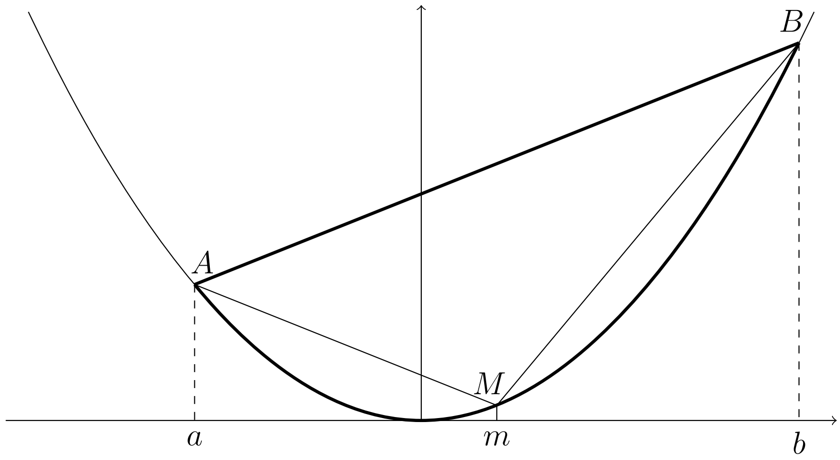

FIGURE 2.2

petit bijou de calcul différentiel et intégral.

Plus prosaiquement, avec les moyens contemporains, considérons l'équation $y = x^2$ de la parabole. Les divers points concernés ont les coordonnées

$$A = (a, a^2), \quad B = (b, b^2), \quad M = \left(\frac{a+b}{2}, \left(\frac{a+b}{2} \right)^2 \right).$$

L'aire du segment parabolique égale l'aire du trapèze $AabB$ diminuée de l'aire comprise entre la courbe et l'axe horizontal, soit

$$\frac{a^2+b^2}{2}(b-a) - \int_a^b x^2\,dx = \frac{a^2+b^2}{2}(b-a) - \left(\frac{b^3}{3} - \frac{a^3}{3} \right).$$

C'est un excellent exercice à soumettre à vos étudiants de vérifier que cette dernière quantité vaut bien quatre tiers de l'aire du triangle AMB.

Un commentaire s'impose ... toujours avec plus de deux millénaires de recul ! Le calcul précédent fait appel à l'intégrale de la fonction $y = x^2$, qui est banale : c'est un polynome, à savoir la fonction $y = \frac{x^3}{3}$. Si nous cherchons à appliquer le même genre de raisonnement au cercle d'équation $x^2 + y^2 = 1$, nous sommes amenés à considérer cette fois la fonction $y = \sqrt{1 - x^2}$ ... dont l'intégrale est drôlement plus sophistiquée et fait appel aux fonctions *sinus* et *arc sinus*. Cela explique *a posteriori* pourquoi la quadrature de la parabole – une figure en apparence plus sophistiquée que le cercle – est en fait beaucoup plus simple et d'une nature totalement différente.

3 L'apport de la géométrie analytique

Rappelons tout d'abord un résultat bien connu des géomètres grecs et consigné dans le *Livre 2* des *Élements d'Euclide*. En termes contemporains, il peut s'exprimer :

> *À la règle et au compas, on peut effectuer des additions, soustractions, multiplications, divisions et racines carrées.*

Plus précisément, fixons une unité de longueur dans le plan. Le résultat affirme qu'étant donnés deux segments de longueurs respectives a et b (disons, $a \geq b > 0$), on peut, à la règle et au compas, construire des segments de longueurs $a + b$, $a - b$, $a \times b$, $\frac{a}{b}$ et $\sqrt{a}$.

Les cas de l'addition et de la soustraction sont triviaux. Celui de la racine carrée a déjà été traité dans la Figure 1.1 : si l'on choisit $b = 1$, il vient $c = \sqrt{a}$. Les cas de la multiplication et de la division résultent aussitôt du théorème de Thales (voir la Figure 3.1).

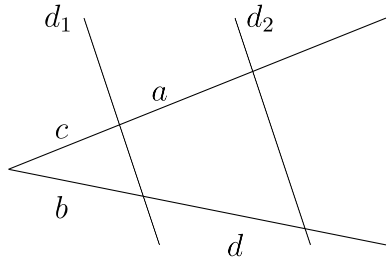

FIGURE 3.1

En effet étant donnés a et b, choisissons $c = 1$ et traçons d_1 par les extrémités de b et c, puis d_2 parallèle à d_1 par l'extrémité de a. Le théorème de Thales fournit $\frac{b}{c} = \frac{d}{a}$, c'est-à-dire $d = ab$. D'autre part étant donnés b et d avec toujours $c = 1$, une construction analogue fournit cette fois $a = \frac{d}{b}$.

Cela permet de reformuler de manière un peu (à peine) différente le problème de la quadrature du cercle. *Archimède* a établi de manière rigoureuse la fameuse formule πR^2 donnant l'aire d'un cercle de rayon R. Prenant le rayon du cercle comme unité de longueur, nous cherchons donc un carré d'aire π, c'est-à-dire de côté $\sqrt{\pi}$. Mais puisque à la règle et au compas on peut faire aussi bien des multiplications que des racines carrées, pouvoir construire un segment de longueur $\sqrt{\pi}$ est équivalent à pouvoir construire un segment de longueur π. Le problème de la quadrature du cercle peut donc se reformuler :

> *Etant donné un segment de longueur 1, construire à la règle et au compas un segment de longueur π.*

Le problème se pose maintenant de déterminer quels sont les "nombres" que l'on peut construire à partir de 1 à la règle et au compas … et voir si π en fait partie. Nous savons déjà qu'il y a tous les nombres que l'on peut construire à partir de 1 par des additions, soustractions, multiplications, divisions et racines carrées … et nous allons vérifier qu'il n'y en a pas d'autres.

Les constructions que l'on peut réaliser à la règle et au compas sont les suivantes :

- construire une droite passant par deux points $P = (a, b)$ et $Q = (c, d)$ déjà construits ;
- construire un cercle ayant pour centre un point $P = (a, b)$ déjà construit, et passant par un autre point $Q = (c, d)$ déjà construit.

Nous connaissons les équations d'une telle droite et d'un tel cercle :

$$(c - a)(y - b) = (d - b)(x - a)$$

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = (c - a)^2 + (d - b)^2.$$

Les coefficients de ces équations s'expriment donc par des additions, soustractions et multiplications à partir des coordonnées des deux points P et Q.

Les nouveaux points que l'on peut construire sont donc :

- l'intersection de deux droites comme ci-dessus ;
- l'intersection d'une droite et d'un cercle comme ci-dessus ;
- l'intersection de deux cercles comme ci-dessus.

Envisageons séparément les trois cas.

- L'intersection deux droites se calcule en résolvant un système d'équations du premier degré. Les solutions s'expriment par des additions, soustractions, multiplications et divisions à partir des coefficients des deux équations.
- Dans le cas d'une droite et d'un cercle, de l'équation de la droite on peut exprimer une coordonnée en fonction de l'autre par une expression du premier degré. Reportant cette expression dans l'équation du cercle, on obtient une équation du second degré qui se résoud par les quatre opérations arithmétiques et une racine carrée.
- Le cas de deux cercles est à peine plus subtil. Imaginons un cercle de centre (a, b) et de rayon R, et l'autre de centre (c, d) et de rayon S. Soustrayant les deux équations

$$
\begin{aligned}
(x-a)^2 + (y-b)^2 &= R^2 \\
(x-c)^2 + (y-d)^2 &= S^2
\end{aligned}
$$

nous obtenons l'équation du premier degré

$$-2ax + a^2 - 2by + b^2 + 2cx - c^2 + 2dy - d^2 = R^2 - S^2$$

et nous sommes ramenés au cas précédent de l'intersection d'une droite et d'un cercle.

Cela prouve que tous les points que l'on peut construire à la règle et au compas à partir d'un segment unitaire sont précisément ceux dont es coordonnées s'expriment par une suite d'additions, soustractions, multiplications, divisions et racines carrées à partir du nombre 1.

Nous aboutissons ainsi à la formulation suivante de la quadrature du cercle :

> *Le nombre π peut-il s'exprimer par des additions, soustractions, multiplications, divisions et racines carrées à partir du seul nombre 1 ?*

Le problème exprimé de la sorte le rend davantage susceptible d'admettre une réponse négative !

4 L'apport de l'algèbre linéaire

Rappelons qu'un *corps de nombres réels* est un ensemble de nombres réels contenant le nombre 1 et stable par additions, soustractions, multiplications et divisions. Observons alors que :

> *Si K est un* corps *de nombres réels et $t > 0$, un nombre réel tel que $t \in K$, $\sqrt{t} \notin K$, alors*
>
> $$L = \{a + b\sqrt{t} \mid a, b \in K\}$$
>
> *est encore un corps de nombres réels.*

Il est trivial que L est stable par additions, soustractions et multiplications. En ce qui concerne la division, étant donnés deux éléments $a + b\sqrt{t}$, $c + d\sqrt{t} \neq 0$ de L, il nous faut trouver $u, v \in K$ tels que

$$\frac{a + b\sqrt{t}}{c + d\sqrt{t}} = u + v\sqrt{t}.$$

Ceci peut se réécrire

$$a + b\sqrt{t} = (cu + dvt) + (cv + du)\sqrt{t}.$$

Il s'agit donc de prouver que le système d'équations en les inconnues u, v

$$\begin{cases} cu + dvt = a \\ cv + du = b \end{cases}$$

possède une solution dans K. Si $c = 0$ ou $d = 0$, la solution est triviale. Si $cd \neq 0$, la solution existe et est unique car le déterminant principal du système

$$cd - cdt = cd(1 - t)$$

est non nul puisque $cd \neq 0$ et $t \neq 1$, vu que $\sqrt{t} \notin K$.

Faisons une dernière remarque à propos de cette construction. Le corps L est par définition même stable pour la multiplication par les éléments de K : c'est donc un *espace vectoriel* sur K. Et c'est un espace vectoriel de dimension 2 sur K, puisque par définition il est plus grand que K et est engendré par les deux éléments 1 et $\sqrt{t}$.

Nous y sommes presque. Nous allons maintenant prouver que

> *Si le nombre π est constructible à la règle et au compas, alors π est racine d'un polynome à coefficients entiers.*

Partons du corps $K_0 = \mathbb{Q}$ des nombres rationnels, c'est-à-dire les fractions de nombres entiers : il s'agit de tous les nombres qui peuvent se construire à partir de 1 au moyen des quatre opérations arithmétiques.

Si le nombre π est constructible à la règle et au compas, c'est qu'il a été obtenu par une suite d'opérations arithmétiques et de racines carrées à partir de 1 ou donc, de manière équivalente, à partir de $K_0 = \mathbb{Q}$. Si $t_1 \in K_0$ est le premier nombre tel que $t_1 \in K_0$, $\sqrt{t_1} \notin K_0$ ait été utilisé dans la construction de π, considérons le corps

$$K_1 = \{a + b\sqrt{t_1} \mid a, b \in K_0\}$$

comme dans l'extension $K \subset L$ ci-dessus. Puis si $t_2 \in K_1$ est le nombre suivant tel que $t_2 \in K_1$, $\sqrt{t_2} \notin K_1$ ait été utilisé dans la construction de π, considérons le corps

$$K_2 = \{a + b\sqrt{t_2} \mid a, b \in K_1\}$$

et répétons le processus jusqu'à avoir épuisé toutes les racines carrées successives apparaissant dans l'expression de π. Nous avons alors obtenu un corps K_n contenant π :

$$\mathbb{Q} = K_0 \subset K_1 \subset K_2 \subset \cdots \subset K_n; \quad \pi \in K_n.$$

Chaque maillon de cette chaîne est de dimension 2, d'où il résulte aussitôt que K_n est un espace vectoriel de dimension 2^n sur $\mathbb{Q}$.

Pour conclure il reste à considérer la suite des éléments suivants dans K_n :

$$1,\ \pi,\ \pi^2,\ \pi^3,\ \cdots\ ,\ \pi^{(2^n)}.$$

Il s'agit d'une suite de $2^n + 1$ éléments dans un espace vectoriel de dimension 2^n : ces $2^n + 1$ éléments ne peuvent donc pas être linéairement indépendants. Cela signifie qu'il existe une combinaison linéaire nulle de ces éléments, c'est-à-dire des nombres rationnels $\frac{a_i}{b_i}$ tels que

$$\frac{a_0}{b_0}1 + \frac{a_1}{b_1}\pi + \frac{a_2}{b_2}\pi^2 + \frac{a_3}{b_3}\pi^3 + \cdots + \frac{a_n}{b_n}\pi^n = 0.$$

Multipliant par le plus petit commun multiple des dénominateurs, nous obtenons des entiers c_i tels que

$$c_0 + c_1\pi + c_2\pi^2 + c_3\pi^3 + \cdots + c_n\pi^n = 0.$$

En d'autres termes, si nous admettons que π est constructible à la règle et au compas, nous venons de prouver que π est racine d'un polynome

$$p(X) = c_0 + c_1X + c_2X^2 + c_3X^3 + \cdots + c_nX^n$$

à coefficients entiers.

5 Les nombres transcendants

Nous venons de mettre en évidence deux catégories importantes de nombres réels :

- les nombres constructibles à la règle et au compas ;
- les nombres qui sont racine d'une équation polynomiale à coefficients entiers ; on les appelle les *nombres algébriques*.

Ajoutons-y

- les *nombres transcendants*, qui ne sont racine d'aucune équation polynomiale à coefficients entiers.

Bien entendu on définit exactement de la même manière les nombres complexes algébriques et les nombres complexes transcendants.

Le raisonnement que nous avons développé à propos de π s'applique tel quel à tout nombre constructible à la règle et au compas, prouvant qu'un tel nombre est nécessairement algébrique. La réciproque est fausse : par exemple $\sqrt[3]{2}$ est algébrique mais n'est pas constructible à la règle et au compas. En 1837, *Pierre-Laurent Wantzel* détermine la forme précise des équations dont sont solutions les nombres constructibles à la règle et au compas.

C'est probablement *Gottfried Leibnitz*, en 1682, qui le premier soupçonna l'existence de nombres transcendants. Il faudra cependant attendre 1844 pour que leur existence soit prouvée par *Joseph Liouville*. Le nombre

$$c = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{10^{n!}} = 0,110001000000000000000001000\cdots$$

(où $n!$ désigne la factorielle de n) est transcendant et d'ailleurs appelé *constante de Liouville*. Le i-ième chiffre après la virgule est donc égal à 1 si i est une factorielle et 0 sinon.

Les nombres transcendants existent donc bien et en 1874, *Georg Cantor* démontre que l'ensemble des nombres algébriques est dénombrable tandis que l'ensemble des nombres réels ne l'est pas. En 1878, il publie même une construction démontrant qu'il y a « autant » de nombres transcendants que de nombres réels. Il y a ainsi en tout cas beaucoup plus de nombres transcendants que de nombres algébriques.

Dans le cas de π, une première étape est franchie par *Jean-Henri Lambert* en 1761 : il prouve que π est irrationnel. Cela ne fait évidemment guère progresser le problème de la quadrature du cercle, puisque de nombreux nombres irrationnels sont constructibles à la règle et au compas, à commencer par les racines carrées de tous les rationnels positifs.

La transcendance de e est prouvée par *Charles Hermite* en 1872. Puis en 1882, *Ferdinand von Lindemann* publie une démonstration de la transcendance de π en utilisant la fonction exponentielle sur les nombres complexes. Il montre d'abord que le nombre e, élevé à n'importe quelle puissance algébrique complexe non nulle, reste transcendant. Et comme $e^{i\pi} = -1$ n'est évidemment pas transcendant, le nombre complexe $i\pi$ ne peut pas être algébrique. Mais comme $i = \sqrt{-1}$ est trivialement algébrique et que le produit de deux nombres algébriques est encore algébrique, le nombre π ne peut pas être algébrique. Vous trouverez les détails d'une possible démonstration dans un intéressant mémoire de licence rédigé par trois étudiants parisiens :

> *Transcendance de e et de π pour les nuls*
> Avissa Hedayati Dezfouli, Marc Laly et Sheedy Shiwpursad
>
> `http://www.logique.jussieu.fr/~alp/e_et_pi_transcendants.pdf`

Le nombre π est donc transcendant : il n'est racine d'aucun polynome à coefficients entiers. Comme nous l'avons vu dans la section précédente, cela prouve que π n'est pas constructible à la règle et au compas et que donc, la quadrature du cercle est impossible à la règle et au compas.