Sur le terrain des fonctions
Rebonds de courbe en courbe

Y. Haine, E. Moitroux

Congrès de la SBPMef à Gembloux

24 août 2016

Balade avec Pikachu

Un Pokémon débarque sur le terrain des mathématiques !

Pikachu se balade en faisant des bonds

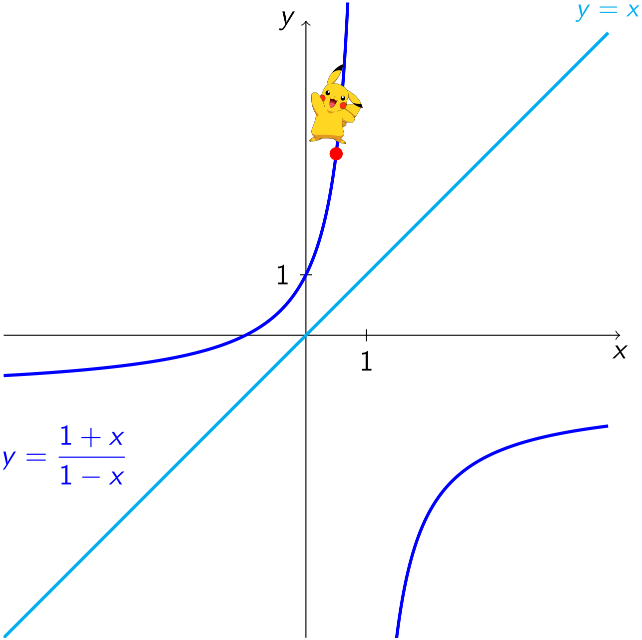
1. en passant d'une hyperbole à une droite et inversément,

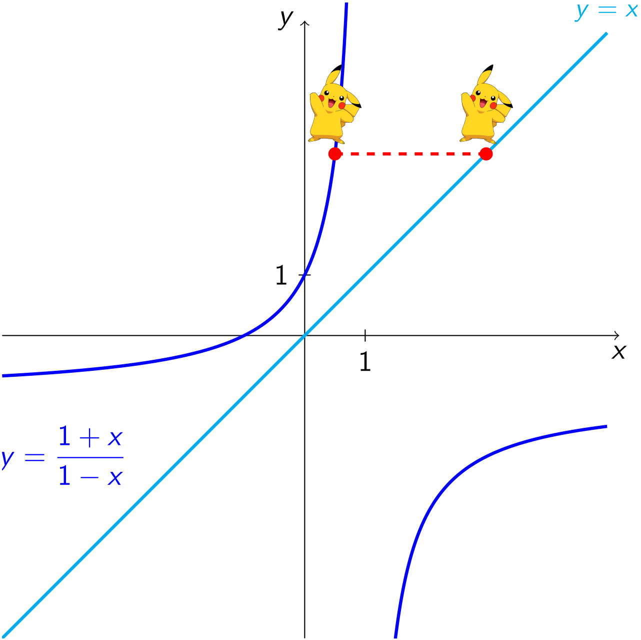
Balade avec Pikachu

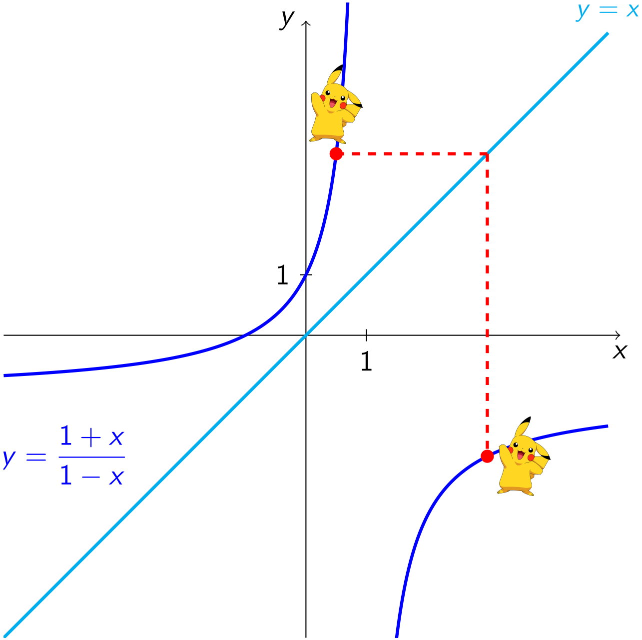
Un Pokémon débarque sur le terrain des mathématiques !

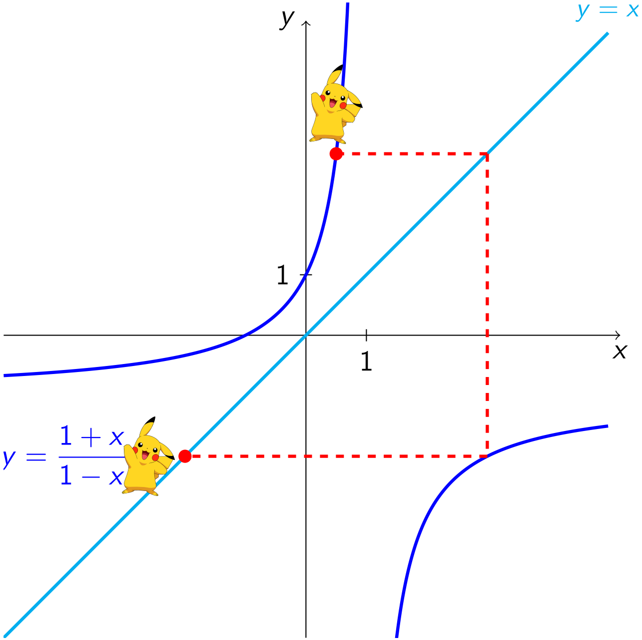
Pikachu se balade en faisant des bonds

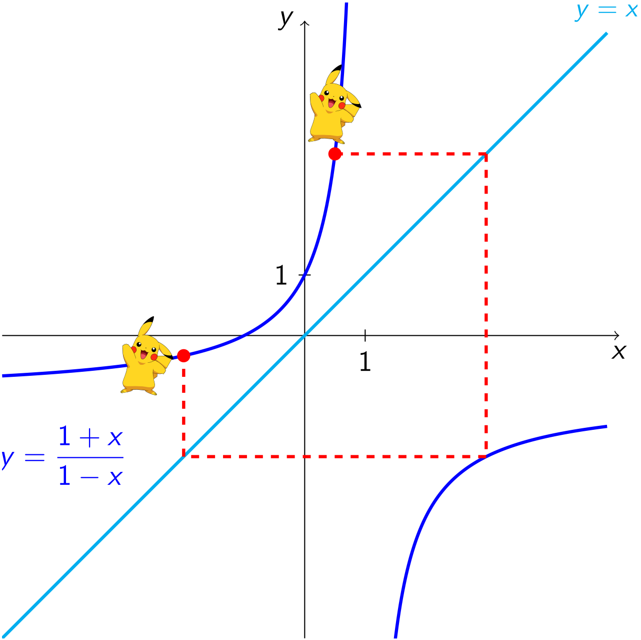
1. en passant d'une hyperbole à une droite et inversément,
2. en se déplaçant parallèlement aux axes du repère alternativement.

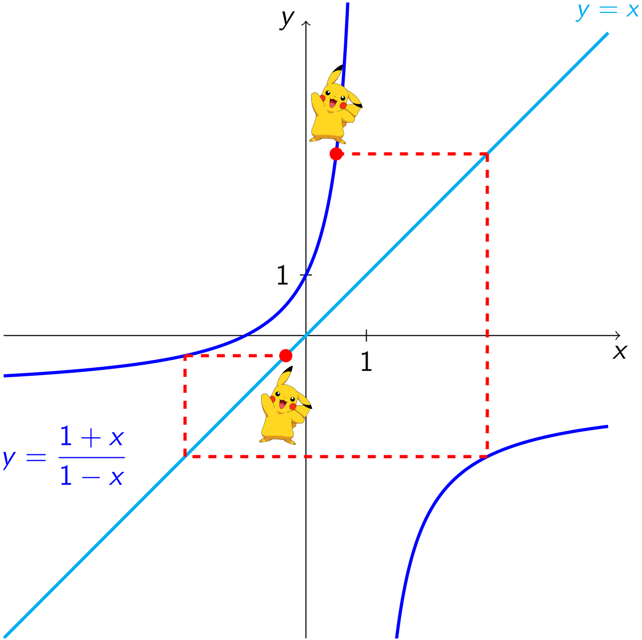

y
y = x
1
1
x
y = (1 + x)/(1 − x)

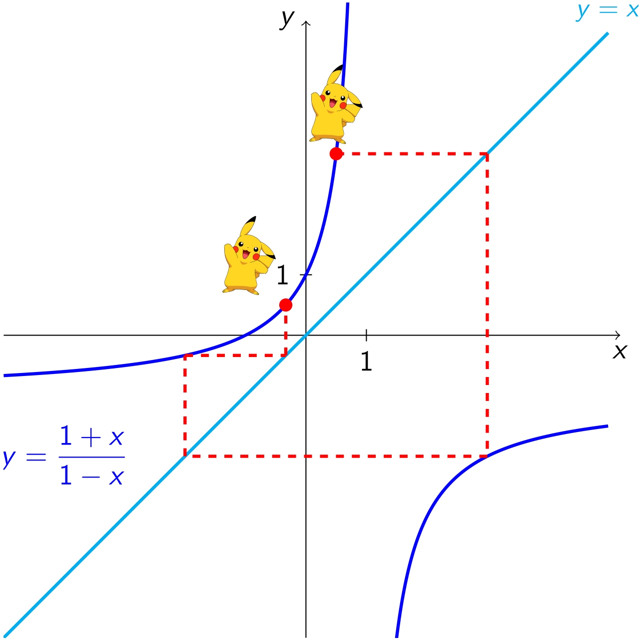

y
$y = x$
1
1
x
$y = \dfrac{1+x}{1-x}$

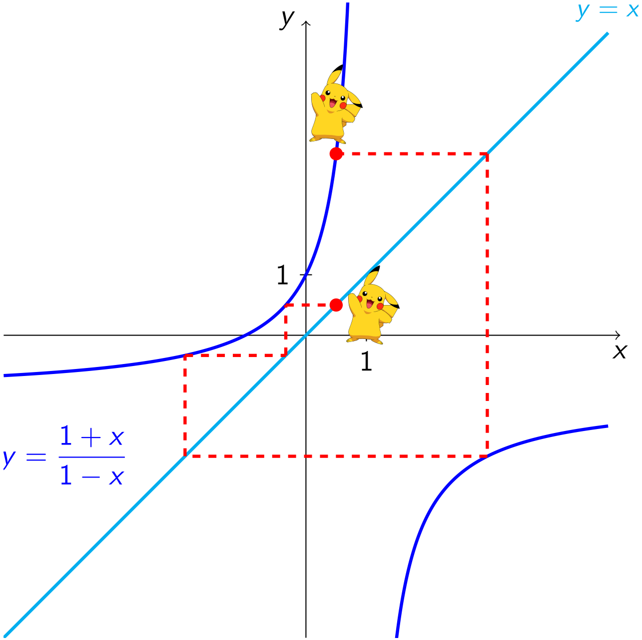

y
$y = x$
1
1
x
$y = \frac{1+x}{1-x}$

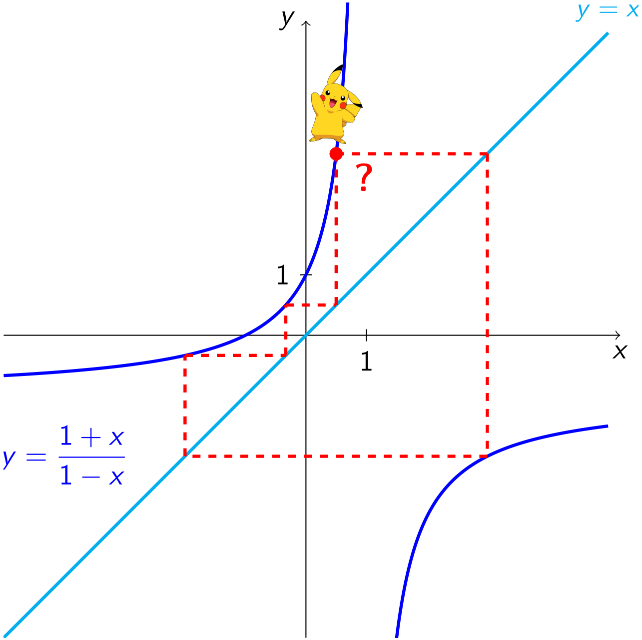

y
x
1
1
y = x
y = (1 + x)/(1 − x)


y
$y = x$
1
1
x
$y = \dfrac{1+x}{1-x}$


y
$y = x$
1
1
x
$y = \dfrac{1+x}{1-x}$


$y = x$
y
x
1
1
$y = \dfrac{1+x}{1-x}$


y
$y = x$
1
1
x
$y = \dfrac{1+x}{1-x}$


$y = x$
y
x
1
1
?
$y = \dfrac{1+x}{1-x}$

Questions

1. Après 8 rebonds, Pikachu revient-il exactement à son point de départ ?

Questions

1. Après 8 rebonds, Pikachu revient-il exactement à son point de départ ?
2. Revient-il toujours au point de départ quelle que soit sa position initiale sur l'hyperbole ?

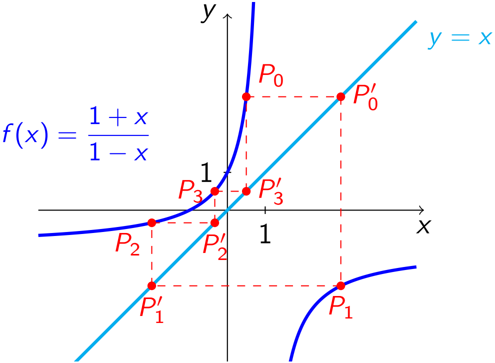
Questions

1. Après 8 rebonds, Pikachu revient-il exactement à son point de départ ?
2. Revient-il toujours au point de départ quelle que soit sa position initiale sur l'hyperbole ?
3. Le nombre de rebonds est-il toujours égal à 8 ?

Questions

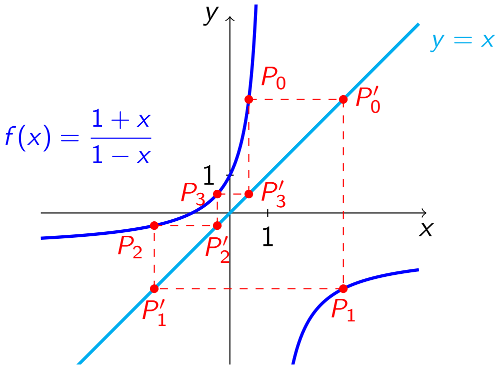
1. Après 8 rebonds, Pikachu revient-il exactement à son point de départ ?
2. Revient-il toujours au point de départ quelle que soit sa position initiale sur l'hyperbole ?
3. Le nombre de rebonds est-il toujours égal à 8 ?
4. Peut-on remplacer cette hyperbole par une autre hyperbole ou le graphique d'une autre fonction ?

À vous !



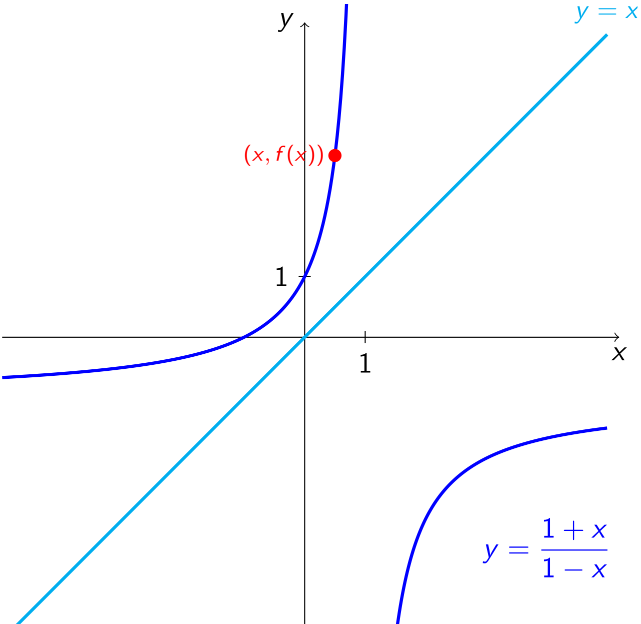
❶ Après 8 rebonds, Pikachu revient-il exactement à son point de départ ?

À vous !

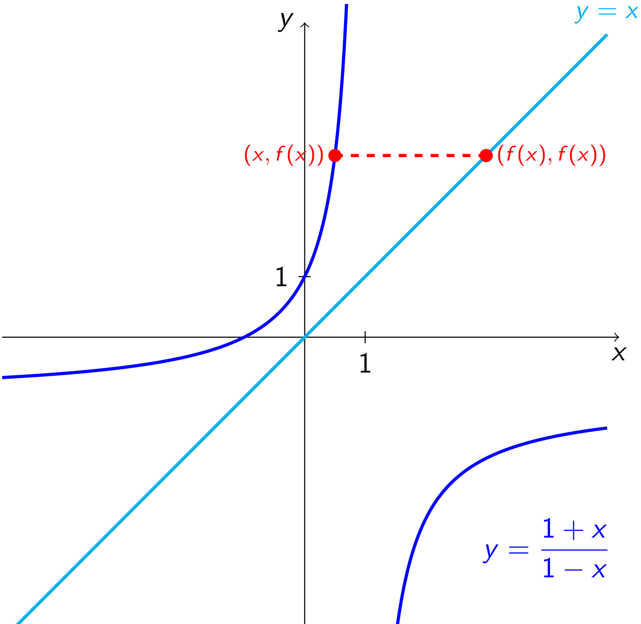


1. Après 8 rebonds, Pikachu revient-il exactement à son point de départ ?
2. Revient-il toujours au point de départ quelle que soit sa position initiale sur l'hyperbole ?

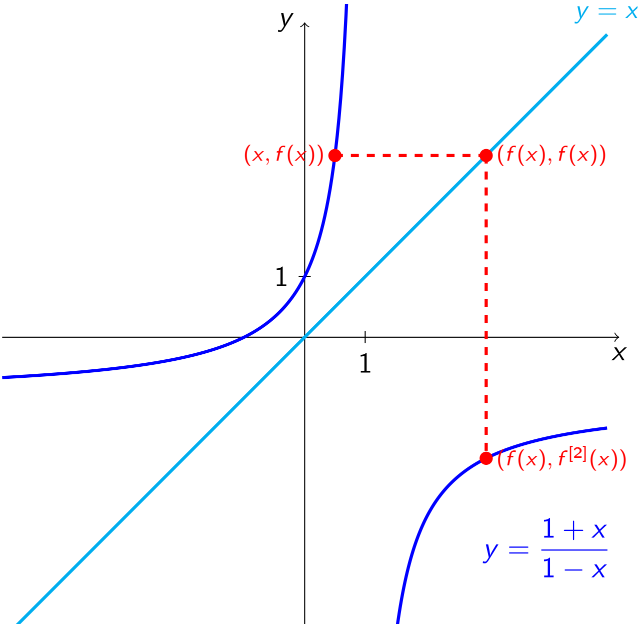
Solution



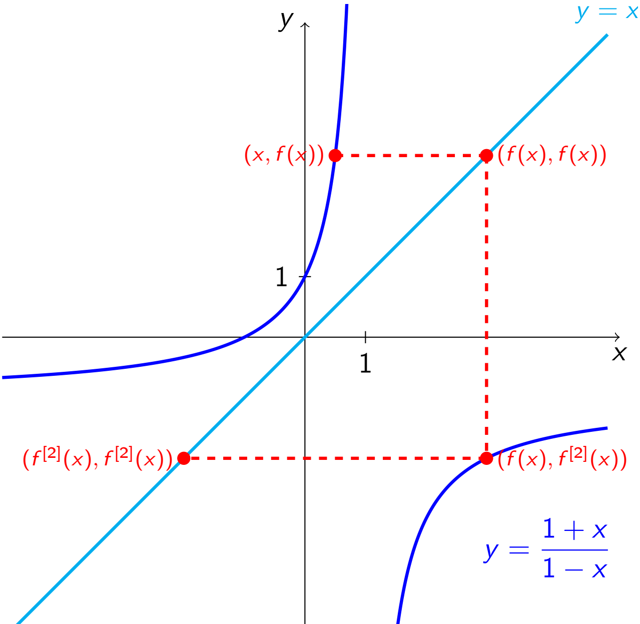
Solution



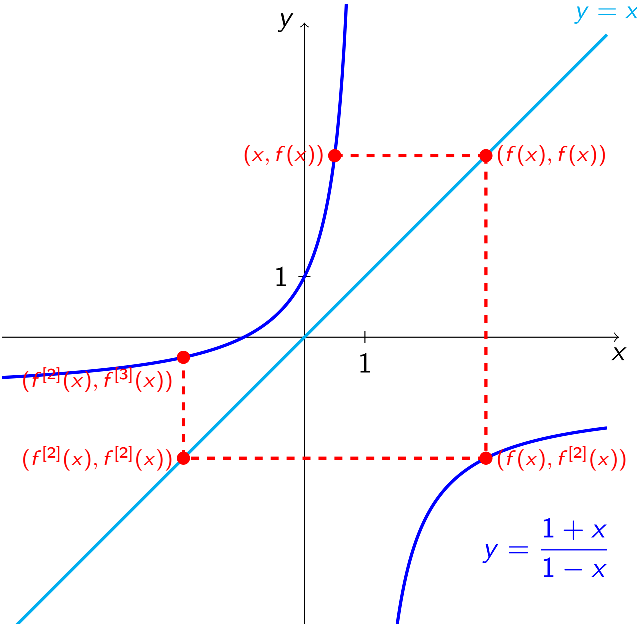
Solution



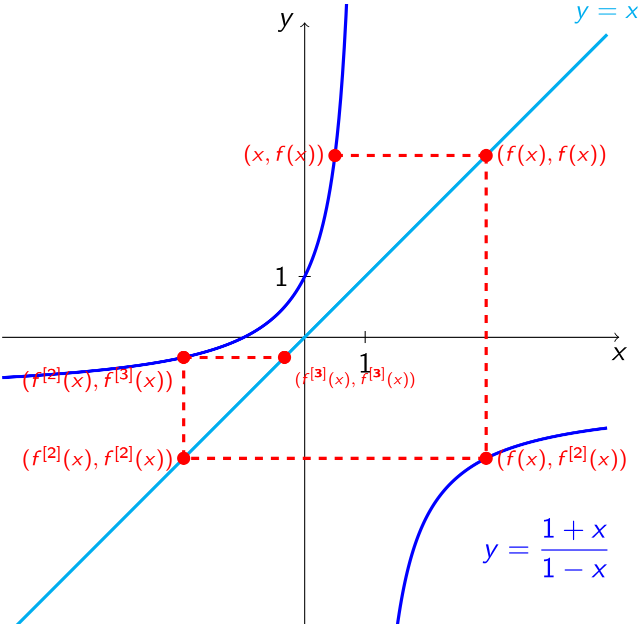
Solution



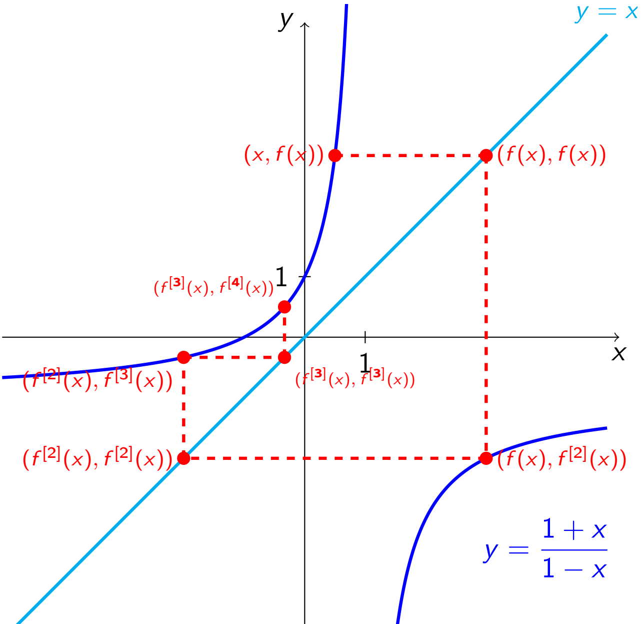
Solution



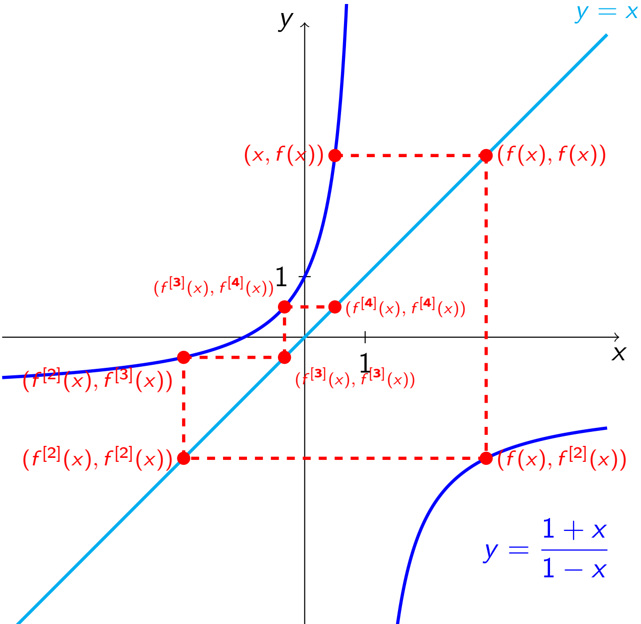
Solution



Solution

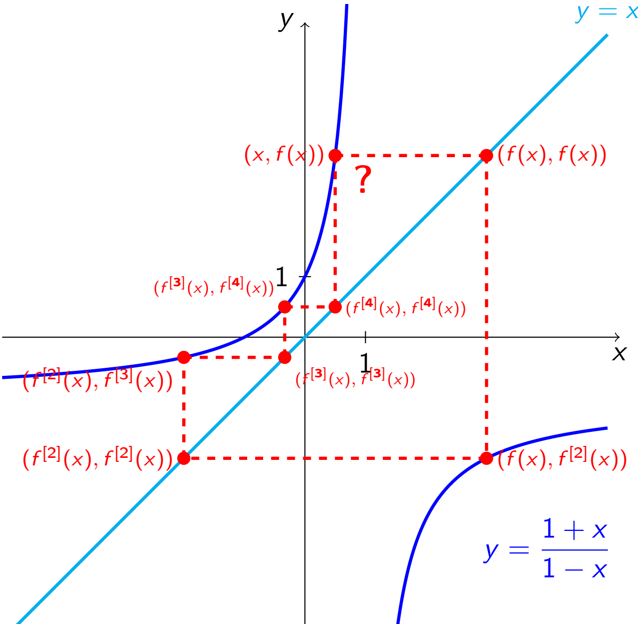

$y = x$
y
x
1
1
$(x, f(x))$
$(f(x), f(x))$
$(f^{[3]}(x), f^{[4]}(x))$
$(f^{[2]}(x), f^{[3]}(x))$
$(f^{[3]}(x), f^{[3]}(x))$
$(f^{[2]}(x), f^{[2]}(x))$
$(f(x), f^{[2]}(x))$
$y = \dfrac{1+x}{1-x}$

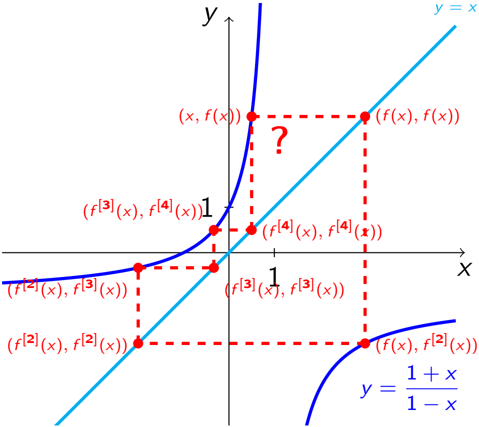
Solution



$y = x$
y
x
1
1
$(x, f(x))$
$(f(x), f(x))$
$(f^{[3]}(x), f^{[4]}(x))$
$(f^{[4]}(x), f^{[4]}(x))$
$(f^{[2]}(x), f^{[3]}(x))$
$(f^{[3]}(x), f^{[3]}(x))$
$(f^{[2]}(x), f^{[2]}(x))$
$(f(x), f^{[2]}(x))$
$y = \dfrac{1+x}{1-x}$

Solution

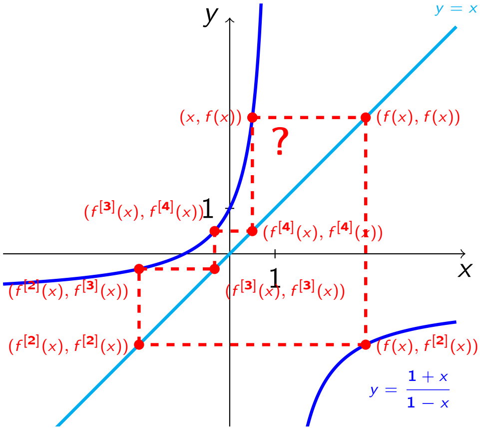

$y = x$
y
x
1
1
$(x, f(x))$
$(f(x), f(x))$
?
$(f^{[3]}(x), f^{[4]}(x))$
$(f^{[4]}(x), f^{[4]}(x))$
$(f^{[2]}(x), f^{[3]}(x))$
$(f^{[3]}(x), f^{[3]}(x))$
$(f^{[2]}(x), f^{[2]}(x))$
$(f(x), f^{[2]}(x))$
$y = \frac{1+x}{1-x}$



Notation

Si n est un entier supérieur à 1, on note

$$f^{[n]} = \underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{n}.$$



À démontrer

$$f^{[4]}(x) = x.$$

Comme $f(x) = \dfrac{1+x}{1-x}$, on a

- $f^{[2]}(x) = -\dfrac{1}{x}$

Comme $f(x) = \dfrac{1+x}{1-x}$, on a

- $f^{[2]}(x) = -\dfrac{1}{x}$
- $f^{[3]}(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$

Comme $f(x) = \dfrac{1+x}{1-x}$, on a

- $f^{[2]}(x) = -\dfrac{1}{x}$
- $f^{[3]}(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$
- $f^{[4]}(x) = x$

Comme $f(x) = \dfrac{1+x}{1-x}$, on a

- $f^{[2]}(x) = -\dfrac{1}{x}$
- $f^{[3]}(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$
- $f^{[4]}(x) = x$

pour tout x du domaine de définition de f ; $f^{[2]}$, $f^{[3]}$

càd pour tout $x \neq -1, 0, -1$.

Conclusion

Supposons que Pikachu est sur le graphique de la fonction

$$f(x) = \frac{1+x}{1-x}.$$

Il effectue un parcours en boucle en 8 bonds à partir de n'importe quel point du graphique d'abscisse $x \neq 0, 1, -1$

car $f^{[4]}(x) = x$ sur $\mathbb{R} \setminus \{0, 1, -1\}$.

Questions

1. Peut-on remplacer cette hyperbole par une autre hyperbole ou le graphique d'une autre fonction ?

Questions

1. Peut-on remplacer cette hyperbole par une autre hyperbole ou le graphique d'une autre fonction ?
2. Peut-on changer le nombre de rebonds ?

Questions

1. Peut-on remplacer cette hyperbole par une autre hyperbole ou le graphique d'une autre fonction ?
2. Peut-on changer le nombre de rebonds ?
    - Le nombre de rebonds est toujours pair, soit $2n$.

Questions

1. Peut-on remplacer cette hyperbole par une autre hyperbole ou le graphique d'une autre fonction ?
2. Peut-on changer le nombre de rebonds ?
   - Le nombre de rebonds est toujours pair, soit $2n$.
   - On doit donc rechercher une fonction f telle que

$$f^{[n]}(x) = x, n \geq 2$$

Cas $n = 2$ - Involution

Définition

Une fonction $f : E \to E$ est une *involution* si $f \circ f(x) = x$ pour tout $x \in E$.

Cas $n = 2$ - Involution

Définition

Une fonction $f : E \to E$ est une *involution* si $f \circ f(x) = x$ pour tout $x \in E$.

Conséquences

- f est une involution de E dans E, ssi $f(x) = f^{-1}(x)$, $\forall x \in E$.
- Dans un plan muni d'un repère orthonormé, le graphique d'une involution est symétrique par rapport à la droite d'équation $y = x$.

Quelques exemples

- $f(x) = x$ est une involution dans $\mathbb{R}$

Quelques exemples

- $f(x) = x$ est une involution dans $\mathbb{R}$
- $f(x) = -x$ est une involution dans $\mathbb{R}$

Quelques exemples

- $f(x) = x$ est une involution dans $\mathbb{R}$
- $f(x) = -x$ est une involution dans $\mathbb{R}$
- $f(x) = \dfrac{1}{x}$ est une involution dans $\mathbb{R}_0$

Quelques exemples

- $f(x) = x$ est une involution dans $\mathbb{R}$
- $f(x) = -x$ est une involution dans $\mathbb{R}$
- $f(x) = \dfrac{1}{x}$ est une involution dans $\mathbb{R}_0$
- $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$ est une involution dans $[0, r]$

Extensions

Peut-on générer d'autres involutions à partir de ces exemples de base ?

- Réfléchissons à partir du graphique d'une involution :

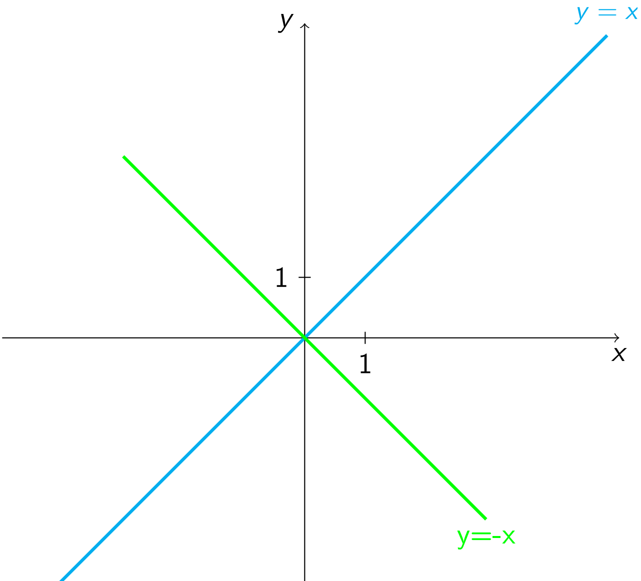
Extensions

Peut-on générer d'autres involutions à partir de ces exemples de base ?

- Réfléchissons à partir du graphique d'une involution :
  1. Translation selon un vecteur parallèle à la 1re bissectrice :

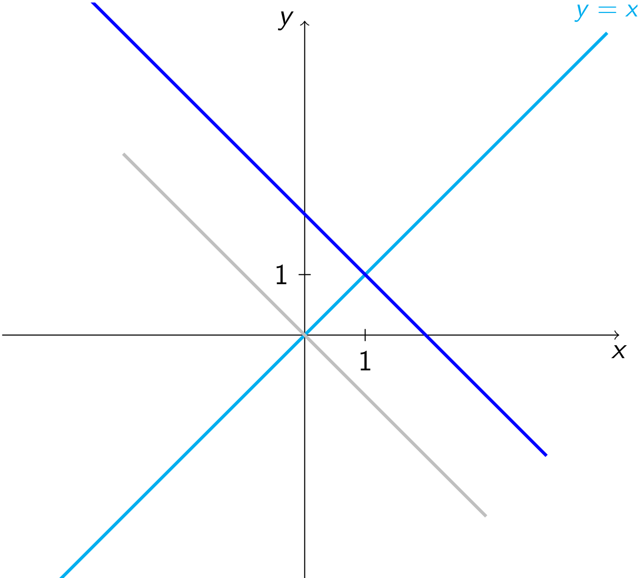
     $f(x-a)+a$ est une involution

Exemple 1



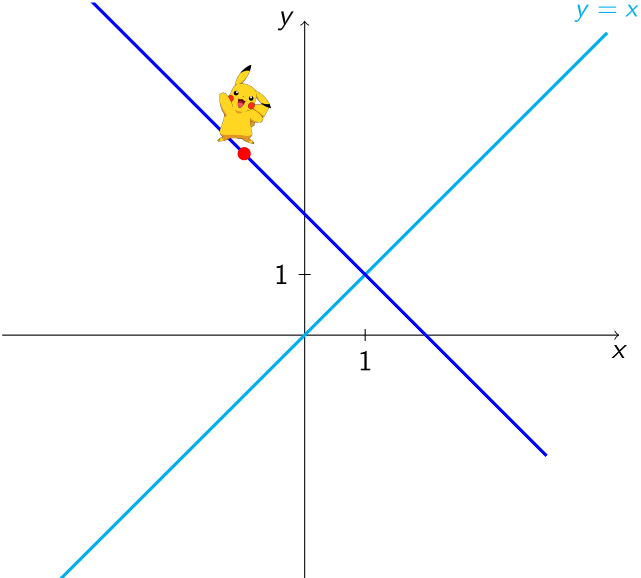
Exemple 1

$f(x) = a - x$ avec $a \in \mathbb{R}$



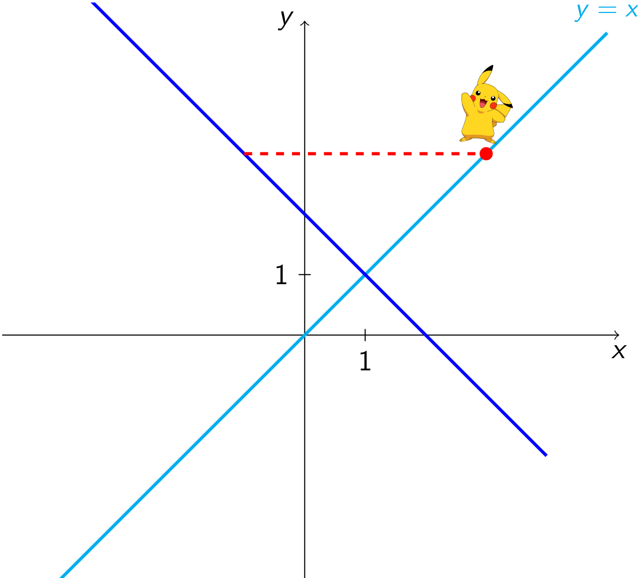
Exemple 1

$f(x) = a - x$ avec $a \in \mathbb{R}$



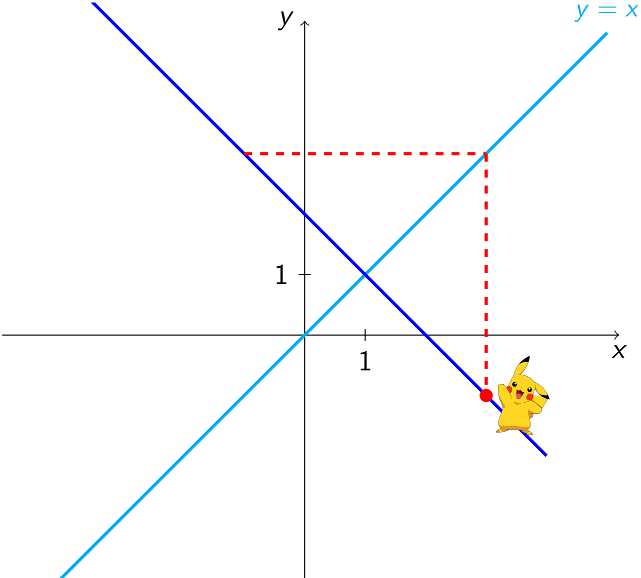
Exemple 1

$f(x) = a - x$ avec $a \in \mathbb{R}$



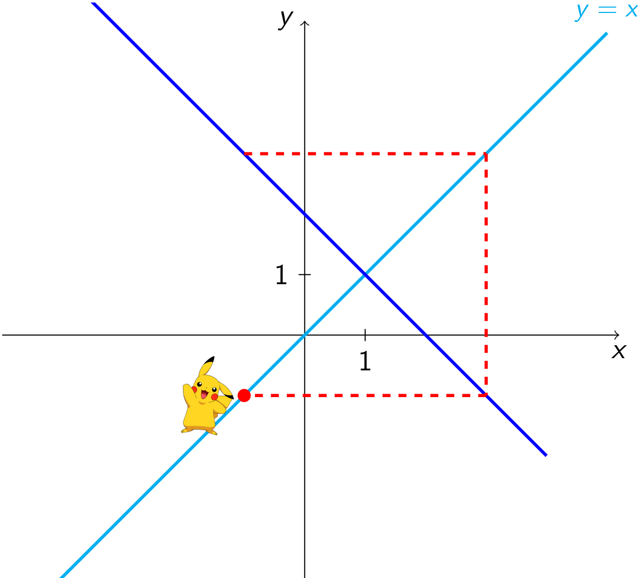
Exemple 1

$f(x) = a - x$ avec $a \in \mathbb{R}$



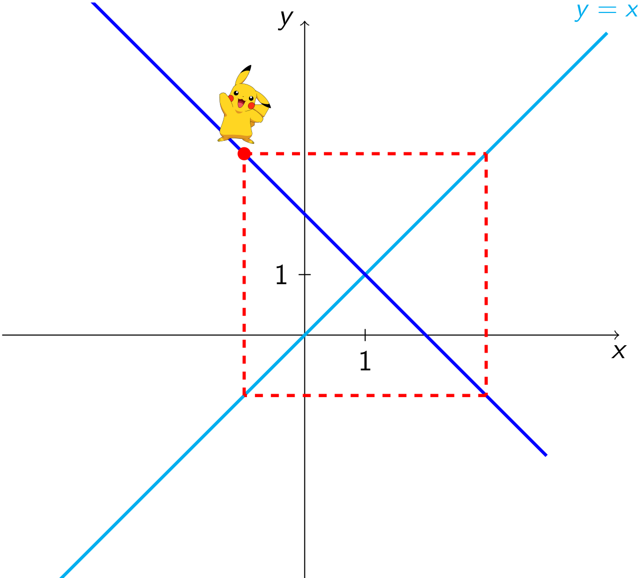
Exemple 1

$f(x) = a - x$ avec $a \in \mathbb{R}$

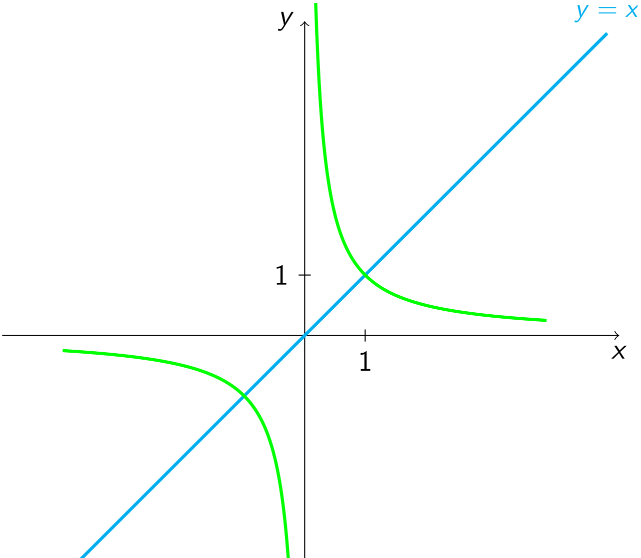


Exemple 1

$f(x) = a - x$ avec $a \in \mathbb{R}$

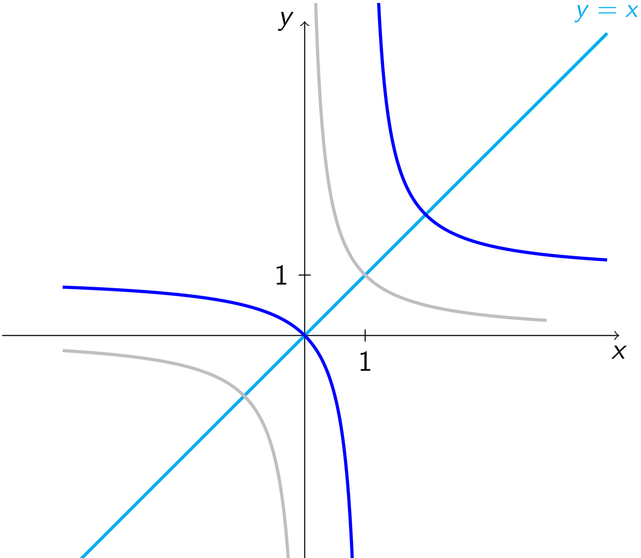


Exemple 2



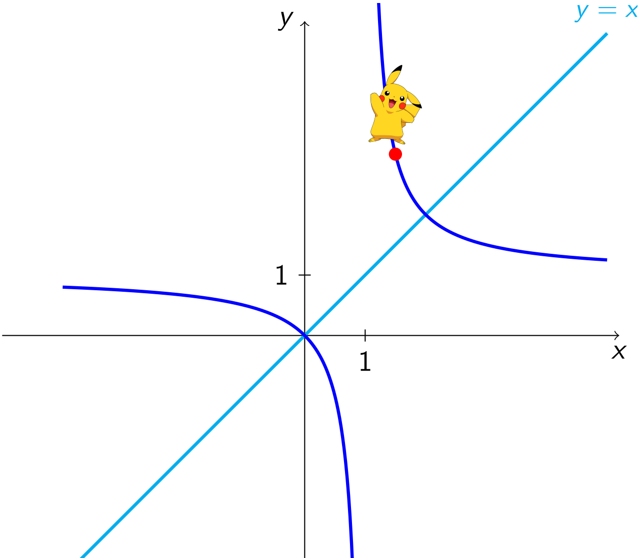
Exemple 2

$$f(x) = a + \frac{1}{x-a} \text{ avec } a \in \mathbb{R}$$



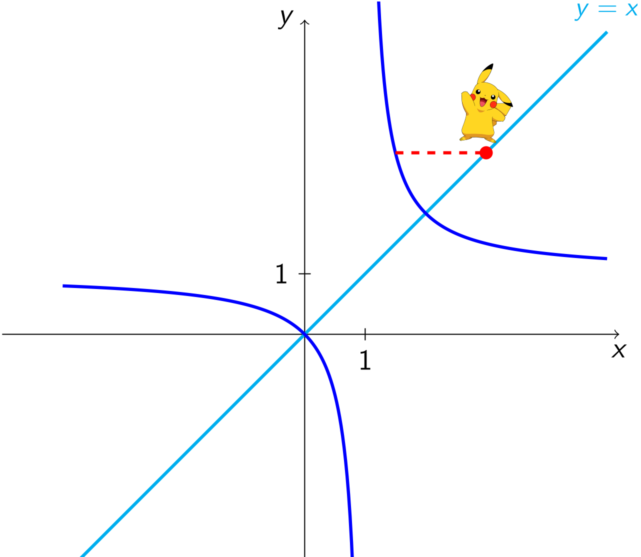
Exemple 2

$$f(x) = a + \frac{1}{x-a} \text{ avec } a \in \mathbb{R}$$



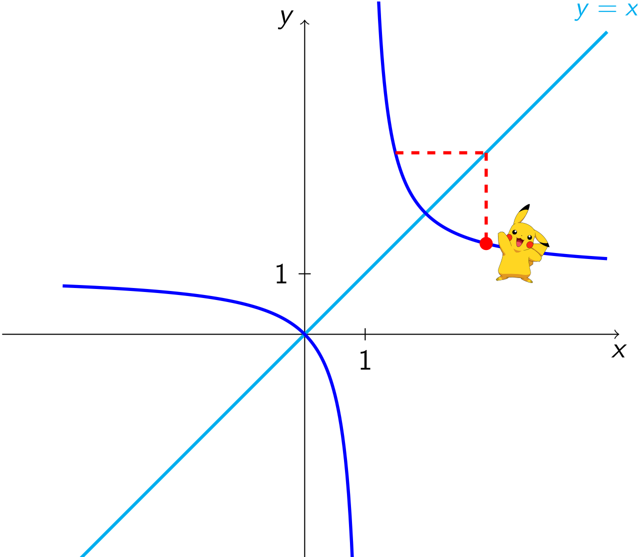
Exemple 2

$$f(x) = a + \frac{1}{x-a} \text{ avec } a \in \mathbb{R}$$



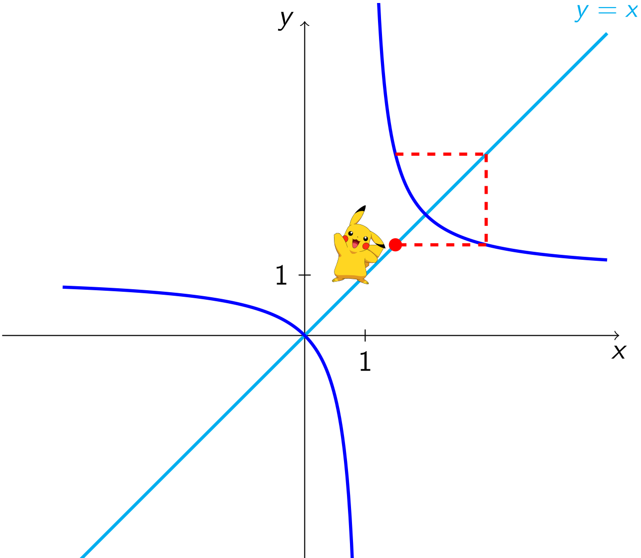
Exemple 2

$$f(x) = a + \frac{1}{x-a} \text{ avec } a \in \mathbb{R}$$



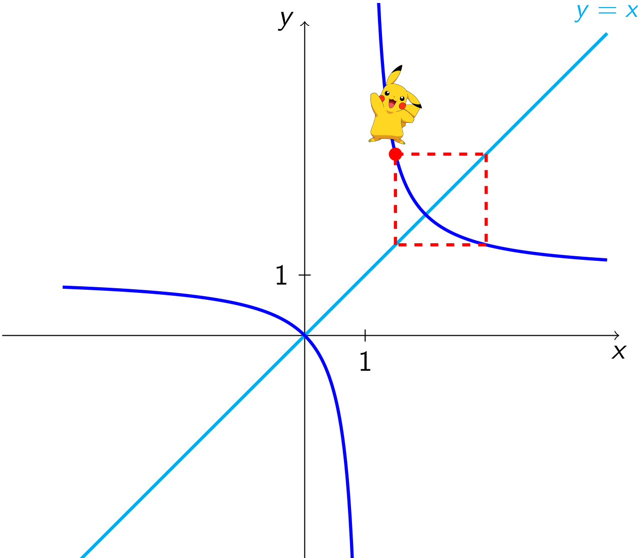
Exemple 2

$$f(x) = a + \frac{1}{x-a} \text{ avec } a \in \mathbb{R}$$



Exemple 2

$$f(x) = a + \frac{1}{x-a} \text{ avec } a \in \mathbb{R}$$



Extensions

Peut-on générer d'autres involutions à partir de ces exemples ?

- Réfléchissons à partir du graphique d'une involution f :
  1. Translation parallèle à la 1re bissectrice

Extensions

Peut-on générer d'autres involutions à partir de ces exemples ?

- Réfléchissons à partir du graphique d'une involution f :
  1. Translation parallèle à la 1re bissectrice
  2. Symétrie centrale par rapport à l'origine O du repère : $-f(-x)$ est une involution.

Extensions

Peut-on générer d'autres involutions à partir de ces exemples ?

- Réfléchissons à partir du graphique d'une involution f :

  1. Translation parallèle à la 1re bissectrice
  2. Symétrie centrale par rapport à l'origine O du repère : $-f(-x)$ est une involution.
  3. Homothétie de centre O et de rapport $k \neq 0$: $k\, f(\frac{x}{k})$ est une involution.

  Ces transformations conservent la 1re bissectrice et le parallèlisme aux axes du repère.
  Par conséquent, une boucle effectuée en passant par le graphique de f est transformée en une boucle relative à l'une des nouvelles fonctions.

Extensions

Peut-on générer d'autres involutions à partir de ces exemples de base ?

- Réfléchissons à partir d'une propriété des involutions :

Extensions

Peut-on générer d'autres involutions à partir de ces exemples de base ?

- Réfléchissons à partir d'une propriété des involutions :

Propriété

Si f est une involution dans E et
si g est une bijection de E dans F,
alors $F = g \circ f \circ g^{-1}$ est une involution dans F.

Propriété

Si f est une involution dans E
et si g est une bijection de E dans F,
alors $F = g \circ f \circ g^{-1}$ est une involution dans F.

Démonstration : pour tout $x \in F$:

$$F \circ F(x)$$

Propriété

Si f est une involution dans E
et si g est une bijection de E dans F,
alors $F = g \circ f \circ g^{-1}$ est une involution dans F.

Démonstration : pour tout $x \in F$:

$$F \circ F(x)$$

$$= g \circ f \circ g^{-1} \circ g \circ f \circ g^{-1}(x)$$

Propriété

Si f est une involution dans E
et si g est une bijection de E dans F,
alors $F = g \circ f \circ g^{-1}$ est une involution dans F.

Démonstration : pour tout $x \in F$:

$$F \circ F(x)$$

$$= g \circ f \circ g^{-1} \circ g \circ f \circ g^{-1}(x)$$

$$= g \circ f \circ f \circ g^{-1}(x)$$

Propriété

Si f est une involution dans E
et si g est une bijection de E dans F,
alors $F = g \circ f \circ g^{-1}$ est une involution dans F.

Démonstration : pour tout $x \in F$:

$$F \circ F(x)$$

$$= g \circ f \circ g^{-1} \circ g \circ f \circ g^{-1}(x)$$

$$= g \circ f \circ f \circ g^{-1}(x)$$

$$= g \circ g^{-1}(x) = x$$

Exemple 1

- $f(x) = a - x$: involution dans $\mathbb{R}$.

Exemple 1

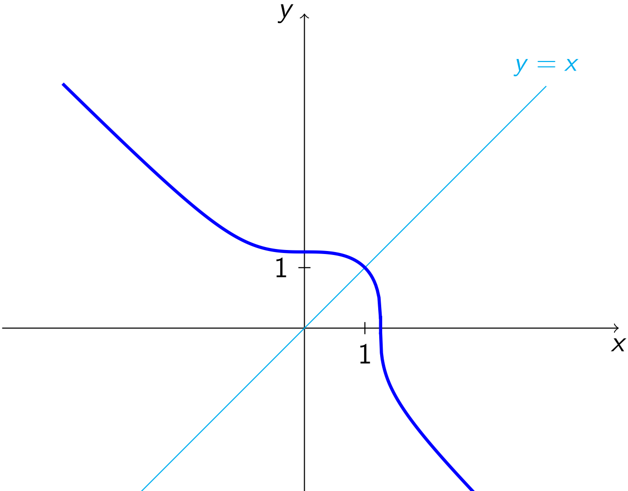
- $f(x) = a - x$: involution dans $\mathbb{R}$.
- $g(x) = \sqrt[3]{x}$: bijection dans $\mathbb{R}$.

Exemple 1

- $f(x) = a - x$: involution dans $\mathbb{R}$.
- $g(x) = \sqrt[3]{x}$: bijection dans $\mathbb{R}$.
- $F(x) = g \circ f \circ g^{-1}(x) = \sqrt[3]{(a - x^3)}$: involution dans $\mathbb{R}$.

Exemple 1

- $f(x) = a - x$: involution dans $\mathbb{R}$.
- $g(x) = \sqrt[3]{x}$: bijection dans $\mathbb{R}$.
- $F(x) = g \circ f \circ g^{-1}(x) = \sqrt[3]{(a - x^3)}$: involution dans $\mathbb{R}$.



Exemple 2

- $f(x) = a - x$: involution dans $\mathbb{R}$.

Exemple 2

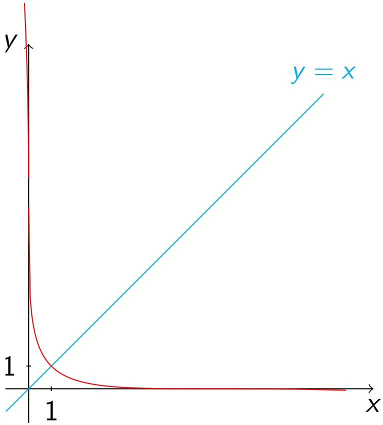
- $f(x) = a - x$: involution dans $\mathbb{R}$.
- $g(x) = x^3$: bijection dans $\mathbb{R}$.

Exemple 2

- $f(x) = a - x$: involution dans $\mathbb{R}$.
- $g(x) = x^3$: bijection dans $\mathbb{R}$.
- $F(x) = g \circ f \circ g^{-1}(x) = (a - \sqrt[3]{x})^3$: involution dans $\mathbb{R}$.

Exemple 2

- $f(x) = a - x$: involution dans $\mathbb{R}$.
- $g(x) = x^3$: bijection dans $\mathbb{R}$.
- $F(x) = g \circ f \circ g^{-1}(x) = (a - \sqrt[3]{x})^3$: involution dans $\mathbb{R}$.



Cas déjà envisagés :

- Pikachu fait une boucle en 4 bonds en passant du graphique d'une involution à la 1re bissectrice...

Cas déjà envisagés :

- Pikachu fait une boucle en 4 bonds en passant du graphique d'une involution à la 1re bissectrice...
- Dans le 1er exemple : Pikachu fait 8 bonds entre la 1re bissectrice et le graphique de f telle que

$$f^{[4]} = \text{identité.}$$

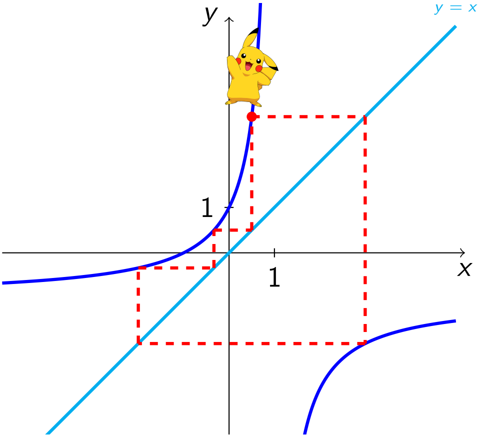
n-involution

Définition

Si n est un naturel ≥ 2,
une fonction $f : E \rightarrow E$ est une *n-involution*
si $f^{[n]}(x) = x$ pour tout $x \in E$.

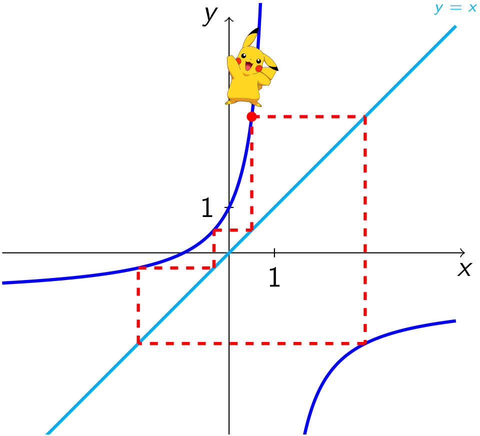
Exemple

- $f(x) = \dfrac{1+x}{1-x}$



Exemple

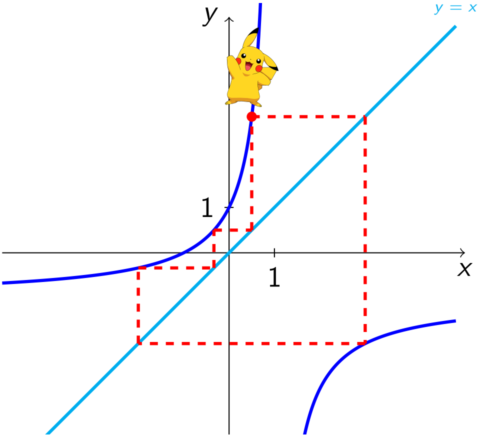
- $f(x) = \dfrac{1+x}{1-x}$



- Existe-t-il d'autres n-involutions ?

Exemple

- $f(x) = \dfrac{1+x}{1-x}$



- Existe-t-il d'autres n-involutions ?
- Comment en générer ?

Extension 1

Peut-on générer d'autres n-involutions à partir de cet exemple ?

- Réfléchissons à partir du graphique :

Extension 1

Peut-on générer d'autres n-involutions à partir de cet exemple ?

- Réfléchissons à partir du graphique :
  1. Translation selon un vecteur parallèle à la 1re bissectrice :

Extension 1

Peut-on générer d'autres n-involutions à partir de cet exemple ?

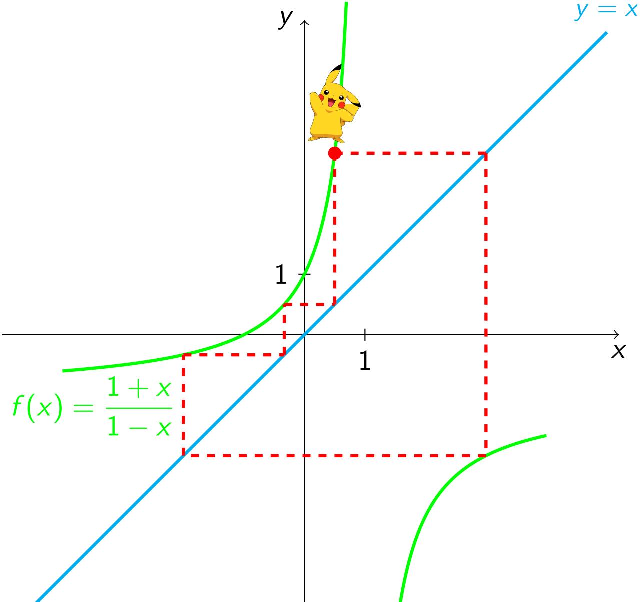
- Réfléchissons à partir du graphique :
  1. Translation selon un vecteur parallèle à la 1re bissectrice :

$$f(x) = \frac{1+x}{1-x}$$

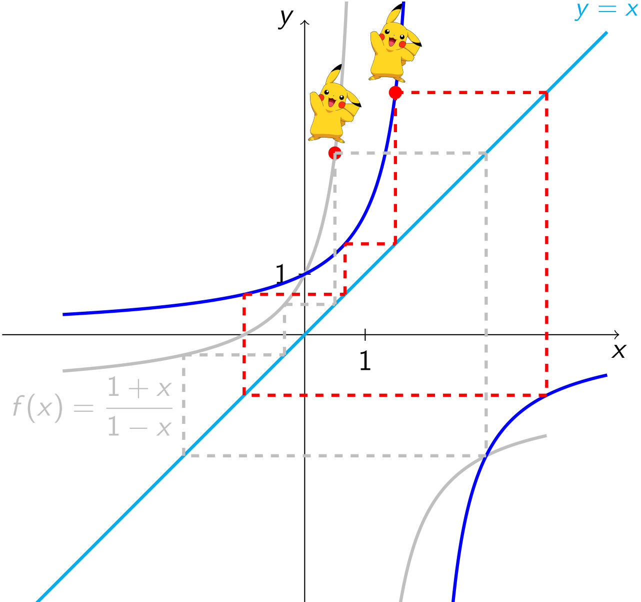
translation de vecteur de composantes (a, a)

$$g(x) = \frac{1+(x-a)}{1-(x-a)} + a, a \in \mathbb{R}$$

$$g(x) = \frac{1+(x-a)}{1-(x-a)} + a \text{ avec } a = 1$$



$$g(x) = \frac{1+(x-a)}{1-(x-a)} + a \text{ avec } a = 1$$



Extension 1

Peut-on générer d'autres involutions à partir de ces exemples ?

- Réfléchissons à partir du graphique d'une n-involution f :
  1. Translation parallèle à la 1re bissectrice

Extension 1

Peut-on générer d'autres involutions à partir de ces exemples ?

- Réfléchissons à partir du graphique d'une n-involution f :
  1. Translation parallèle à la 1re bissectrice
  2. Symétrie centrale par rapport à l'origine O du repère : $-f(-x)$ est une n-involution.

Extension 1

Peut-on générer d'autres involutions à partir de ces exemples ?

- Réfléchissons à partir du graphique d'une n-involution f :
  1. Translation parallèle à la 1re bissectrice
  2. Symétrie centrale par rapport à l'origine O du repère : $-f(-x)$ est une n-involution.
  3. Homothétie de centre O et de rapport $k \neq 0$: $k\, f(\frac{x}{k})$ est une n-involution.

  Ces transformations conservent la 1re bissectrice et le parallèlisme aux axes du repère.
  Par conséquent, une boucle effectuée en passant par le graphique de f est transformée en une boucle relative à l'une des nouvelles fonctions.

Extension 2

Peut-on générer d'autres involutions à partir de ces exemples de base ?

- Réfléchissons à partir d'une propriété des n-involutions :

Extension 2

Peut-on générer d'autres involutions à partir de ces exemples de base ?

- Réfléchissons à partir d'une propriété des n-involutions :

Propriété

Soit n un naturel ≥ 2.
Si f est une n-involution dans E et
si g est une bijection de E dans F,
alors $F = g \circ f \circ g^{-1}$ est une n-involution dans F.

Extension 2

Propriété

Soit n un naturel ≥ 2. Si f est une n-involution dans E et si g est une bijection de E dans F,
alors $F = g \circ f \circ g^{-1}$ est une n-involution dans F.

Démonstration : pour tout $x \in F$:

Extension 2

Propriété

Soit n un naturel ≥ 2. Si f est une n-involution dans E et si g est une bijection de E dans F,
alors $F = g \circ f \circ g^{-1}$ est une n-involution dans F.

Démonstration : pour tout $x \in F$:

- $F^{[n]}(x)$

Extension 2

Propriété

Soit n un naturel ≥ 2. Si f est une n-involution dans E et si g est une bijection de E dans F,
alors $F = g \circ f \circ g^{-1}$ est une n-involution dans F.

Démonstration : pour tout $x \in F$:

- $F^{[n]}(x)$
- $= g \circ f \circ g^{-1} \circ g \circ f \circ g^{-1} \ldots g \circ f \circ g^{-1} \circ g \circ f \circ g^{-1}(x)$

Extension 2

Propriété

Soit n un naturel ≥ 2. Si f est une n-involution dans E et si g est une bijection de E dans F,
alors $F = g \circ f \circ g^{-1}$ est une n-involution dans F.

Démonstration : pour tout $x \in F$:

- $F^{[n]}(x)$
- $= g \circ f \circ g^{-1} \circ g \circ f \circ g^{-1} \ldots g \circ f \circ g^{-1} \circ g \circ f \circ g^{-1}(x)$
- $= g \circ \underbrace{f \circ f \cdots \circ f}_{f^{[n]}} \circ g^{-1}(x)$

Extension 2

Propriété

Soit n un naturel ≥ 2. Si f est une n-involution dans E et si g est une bijection de E dans F,
alors $F = g \circ f \circ g^{-1}$ est une n-involution dans F.

Démonstration : pour tout $x \in F$:

- $F^{[n]}(x)$
- $= g \circ f \circ g^{-1} \circ g \circ f \circ g^{-1} \ldots g \circ f \circ g^{-1} \circ g \circ f \circ g^{-1}(x)$
- $= g \circ \underbrace{f \circ f \cdots \circ f}_{f^{[n]}} \circ g^{-1}(x)$
- $= g \circ g^{-1}(x)$

Extension 2

Propriété

Soit n un naturel ≥ 2. Si f est une n-involution dans E et si g est une bijection de E dans F, alors $F = g \circ f \circ g^{-1}$ est une n-involution dans F.

Démonstration : pour tout $x \in F$:

- $F^{[n]}(x)$
- $= g \circ f \circ g^{-1} \circ g \circ f \circ g^{-1} \ldots g \circ f \circ g^{-1} \circ g \circ f \circ g^{-1}(x)$
- $= g \circ \underbrace{f \circ f \cdots \circ f}_{f^{[n]}} \circ g^{-1}(x)$
- $= g \circ g^{-1}(x)$
- $= x$

Exemple

- $f(x) = \dfrac{1+x}{1-x}$: 4-involution dans $\mathbb{R}\backslash\{1, 0, -1\}$.

Exemple

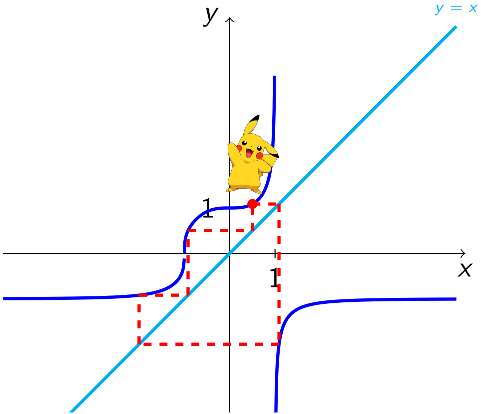
- $f(x) = \dfrac{1+x}{1-x}$: 4-involution dans $\mathbb{R}\backslash\{1, 0, -1\}$.
- $g(x) = \sqrt[3]{x}$: bijection dans $\mathbb{R}$

Exemple

- $f(x) = \dfrac{1+x}{1-x}$: 4-involution dans $\mathbb{R}\backslash\{1,0,-1\}$.
- $g(x) = \sqrt[3]{x}$: bijection dans $\mathbb{R}$
- $F(x) = g \circ f \circ g^{-1}(x) = \sqrt[3]{\dfrac{1+x^3}{1-x^3}}$:
  4-involution dans $\mathbb{R}\backslash\{1,0,-1\}$.

Exemple

- $f(x) = \dfrac{1+x}{1-x}$: 4-involution dans $\mathbb{R}\backslash\{1, 0, -1\}$.
- $g(x) = \sqrt[3]{x}$: bijection dans $\mathbb{R}$
- $F(x) = g \circ f \circ g^{-1}(x) = \sqrt[3]{\dfrac{1+x^3}{1-x^3}}$:
  4-involution dans $\mathbb{R}\backslash\{1, 0, -1\}$.



Extension 3

Propriété

Soit n un naturel ≥ 2.
Si f est une n-involution dans E,
alors $F(x) = f^{[k]}(x), k = 2, \ldots n$ est une n-involution dans E.

Extension 3

Propriété

Soit n un naturel ≥ 2.
Si f est une n-involution dans E,
alors $F(x) = f^{[k]}(x), k = 2, \dots n$ est une n-involution dans E.

Dém : pour tout $x \in E$, on a
$F^{[n]}(x)$

Extension 3

Propriété

Soit n un naturel ≥ 2.
Si f est une n-involution dans E,
alors $F(x) = f^{[k]}(x), k = 2, \ldots n$ est une n-involution dans E.

Dém : pour tout $x \in E$, on a
$F^{[n]}(x)$
$= f^{[k]} \circ f^{[k]} \circ \ldots f^{[k]}(x)$ (n "facteurs" égaux à $f^{[k]}$)

Extension 3

Propriété

Soit n un naturel ≥ 2.
Si f est une n-involution dans E,
alors $F(x) = f^{[k]}(x), k = 2, \ldots n$ est une n-involution dans E.

Dém : pour tout $x \in E$, on a
$F^{[n]}(x)$
$= f^{[k]} \circ f^{[k]} \circ \ldots f^{[k]}(x)$ (n "facteurs" égaux à $f^{[k]}$)
$= f^{[n]} \circ f^{[n]} \circ \ldots f^{[n]}(x)$ (k "facteurs" égaux à $f^{[n]}$)

Extension 3

Propriété

Soit n un naturel ≥ 2.
Si f est une n-involution dans E,
alors $F(x) = f^{[k]}(x), k = 2, \ldots n$ est une n-involution dans E.

Dém : pour tout $x \in E$, on a
$F^{[n]}(x)$
$= f^{[k]} \circ f^{[k]} \circ \ldots f^{[k]}(x)$ (n "facteurs" égaux à $f^{[k]}$)
$= f^{[n]} \circ f^{[n]} \circ \ldots f^{[n]}(x)$ (k "facteurs" égaux à $f^{[n]}$)
$= x$

Exemple

- $f(x) = \dfrac{1+x}{1-x}$: 4-involution.
- $f^{[3]}(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$: 4-involution.

4 4-involutions !

- $f_1(x) = f(x) = \dfrac{1+x}{1-x}$,
- $f_2(x) = f \circ f(x) = -\dfrac{1}{x}$,
- $f_3(x) = f \circ f \circ f(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$
- $f_4(x) = x$

$\circ$	f_1	f_2	f_3	f_4
f_1	f_2	f_3	f_4	f_1
f_2	f_3	f_4	f_1	f_2
f_3	f_4	f_1	f_2	f_3
f_4	f_1	f_2	f_3	f_4

Donc $f, f^{[2]}, f^{[3]}$ et l'identité forment un groupe pour la composition.

Groupe à n éléments

Conséquence

Soit n un naturel ≥ 2.
Si f est une n-involution,
alors f, $f \circ f$, ..., $f^{[n-1]}$ et l'identité forment un groupe à n éléments pour la composition.
On a $f^{[i]} \circ f^{[j]} = f^{(i+j) \text{ mod } n}$.

3-involution

Cherchons une 3-involution parmi les fonctions homographiques :

$$f(x) = \frac{x+b}{cx+d}.$$

$\mathbf{f}(x) := \dfrac{x+b}{c\cdot x+d}$ ▸ *Terminé*

$\mathbf{f}(\mathbf{f}(\mathbf{f}(x)))$ ▸ $\dfrac{\left(b\cdot c\cdot (d+2)+1\right)\cdot x+b\cdot \left(b\cdot c+d^2+d+1\right)}{\left(b\cdot c+d^2+d+1\right)\cdot c\cdot x+b\cdot c\cdot (2\cdot d+1)+d^3}$

$\text{solve}\left(\mathbf{f}(\mathbf{f}(\mathbf{f}(x)))=x,b,c,d\right)$

▸ $b=x\cdot \left(\mathbf{c18}\cdot x+\mathbf{c17}-1\right)$ and $\mathbf{c18}^3\cdot x^3+3\cdot \mathbf{c17}\cdot \mathbf{c18}^2\cdot x^2+3\cdot \mathbf{c17}^2\cdot \mathbf{c18}\cdot x+\mathbf{c17}^3\neq 0$ and $c=\mathbf{c18}$ and $d=\mathbf{c17}$ or $b=\dfrac{-\left(\mathbf{c15}^2+\mathbf{c15}+1\right)}{\mathbf{c16}}$ and $c=\mathbf{c16}$ and $d=\mathbf{c15}$ and $\mathbf{c15}\cdot \left(\mathbf{c15}^2+3\cdot \mathbf{c15}+3\right)\neq -1$

$\mathbf{f2}(x) := \dfrac{x-\dfrac{d^2+d+1}{c}}{c\cdot x+d}$ ▸ *Terminé*

$\mathbf{f2}(\mathbf{f2}(\mathbf{f2}(x)))$ ▸ x

Exemple de 3-involution

$$f(x) = \frac{x - \dfrac{d^2+d+1}{c}}{cx+d} \text{ : 3-involution}$$

Posons $c = 1$ et $d = 0$:

$$f(x) = \frac{x-1}{x} \text{ : 3-involution}$$

Groupe de 3 éléments

- $f_1(x) = f(x) = \dfrac{x-1}{x}$
- $f_2(x) = f^{[2]}(x) = \dfrac{-1}{x-1}$
- $f_3(x) = f^{[3]}(x) = x$

	f_1	f_2	f_3
f_1	f_2	f_3	f_1
f_2	f_3	f_1	f_2
f_3	f_1	f_2	f_3

Conséquence

Si f est une 3-involution,
alors f, $f \circ f$ et l'identité forment un groupe à trois éléments pour la composition.

Bonne chasse aux Pokémons !

Merci pour votre attention et votre participation active qui a permis de compléter la présentation faite au congrès !