Congrès de la SBPM

Les mathématiques de la magie

Laurent Fourny

Liège, 23 aout* 2017

* Ce document applique les règles instaurées par la réforme de l'orthographe en 1990. Référence: www.renouvo.org

COMBINATORICS

A Puzzle of Clever Connections Nears a Happy End

The three young friends who devised the "happy ending" problem became some of the most influential mathematicians of the 20th century, but were never able to solve their own puzzle. Now it receives its first big breakthrough.

« Fin heureuse »

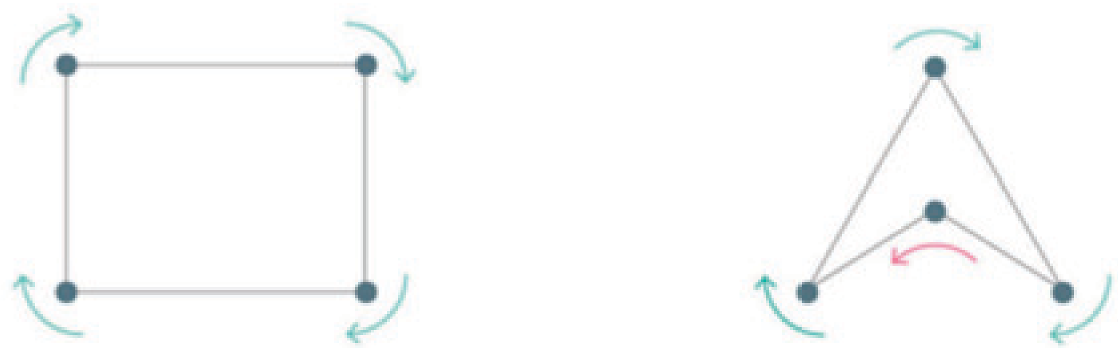
Esther Klein in 1927, George Szekeres in 1928 and Paul Erdős in an undated photograph.

—

Photos Courtesy of KöMaL (Klein, Szekeres); Photo Courtesy of Ronald Graham (Erdős)

Problème de la « fin heureuse »

Avec 4 points pris au hasard, on ne peut pas toujours former un quadrilatère convexe.



Combien de points faut-il pour que ce soit toujours possible?
5 points (sans alignement de 3 points)

Problème de la « fin heureuse »

- Pour former un triangle: 3 points nécessaires
- Pour former un quadrilatère convexe: 5 points nécessaires
- Pour former un pentagone convexe: ?

Problème de la « fin heureuse »

Conjecture (à 500$):

Pour former une figure convexe à *n* sommets,

$2^{(n-2)}+1$ points sont nécessaires.

Erdős, P. & Szekeres, G., 1935

Problème de la « fin heureuse »

- Pour former un hexagone convexe: 17 points nécessaires (Szekeres & Peters, 2006)
- Pour former une figure convexe à *n* sommets, $2^{n+o(n)}$ points nécessaires (Suk, 2016)
- La conjecture est *presque* démontrée…

Ronald Graham explique le problème de la fin heureuse

Ronald Graham explains the happy ending problem in this Numberphile video.

https://www.youtube.com/watch?v=xPk3SZiFEvQ

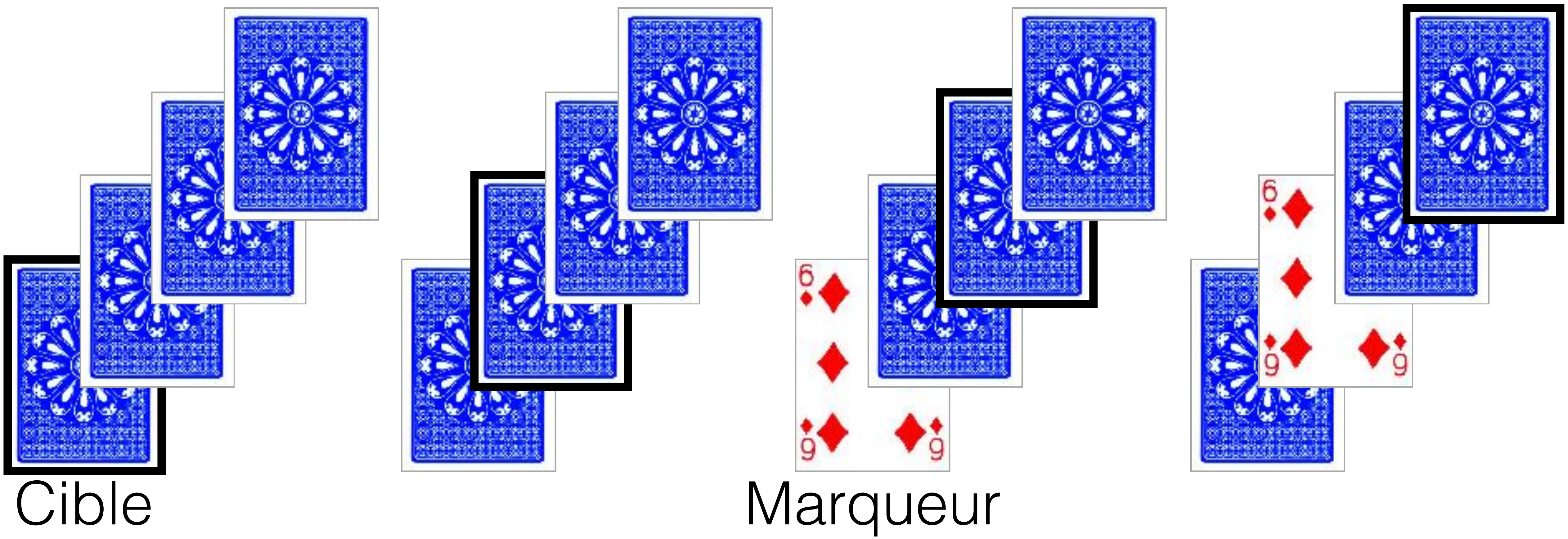
Esther Klein (third from left), Paul Erdős and George Szekeres visiting the University of Newcastle, Australia, in 1984.

—

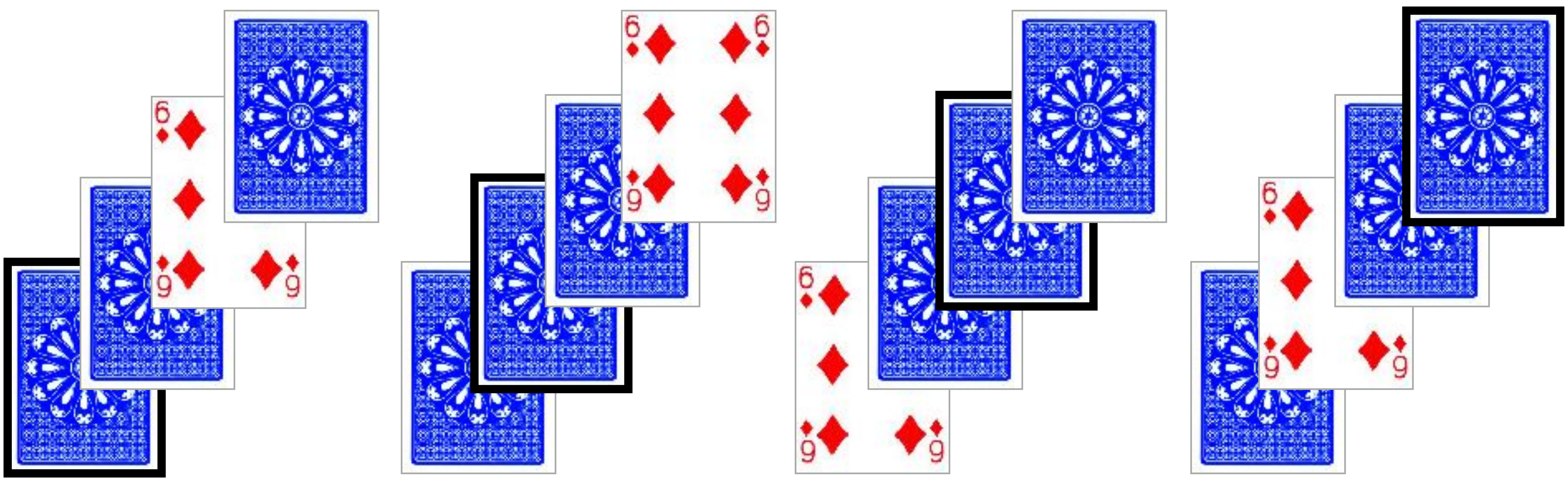
Notions liminaires

- « Couper »
- « Retourner deux cartes »
- Couleur d’une carte: ici rouge ou noir

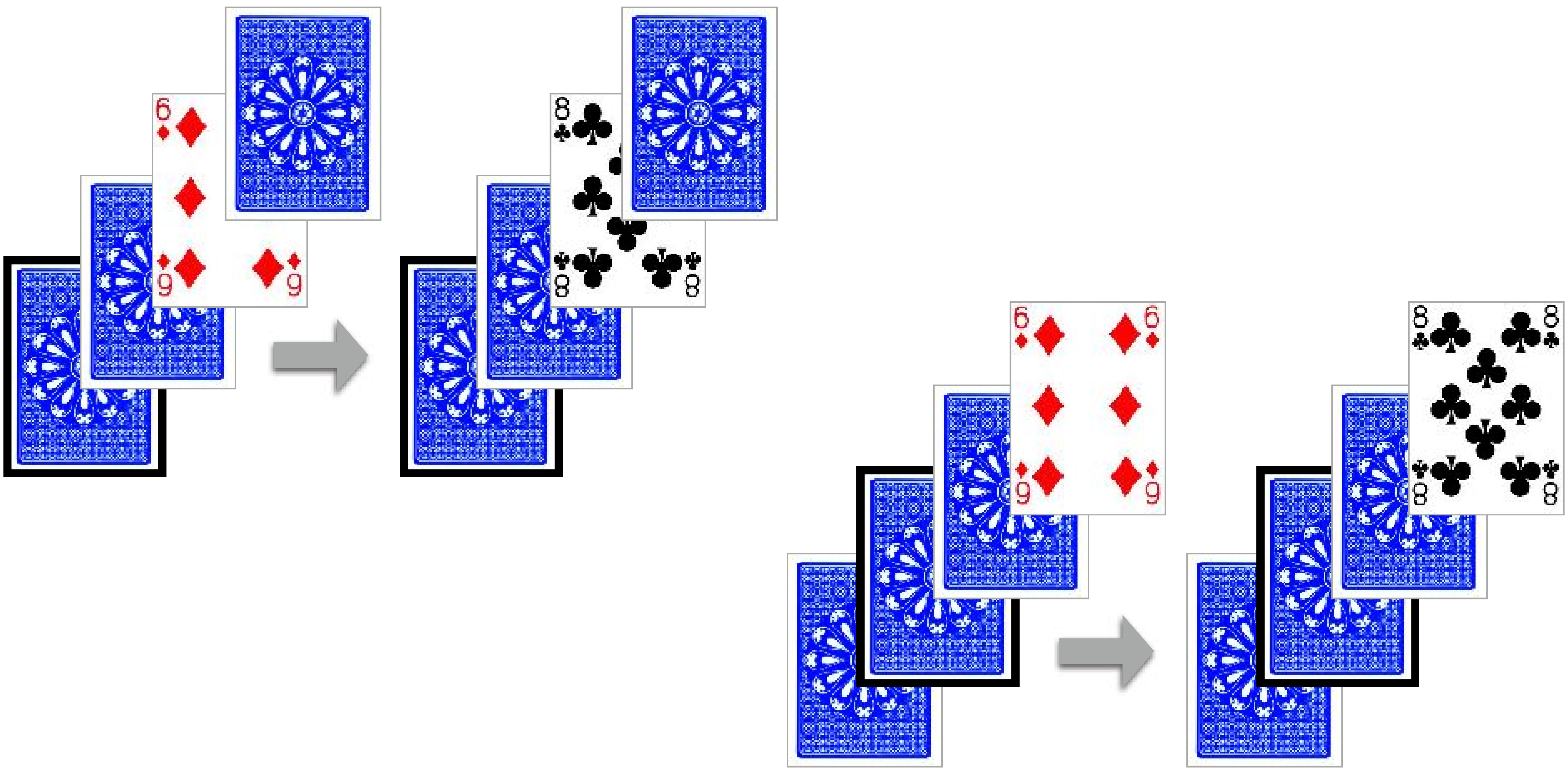
Baby Hummer



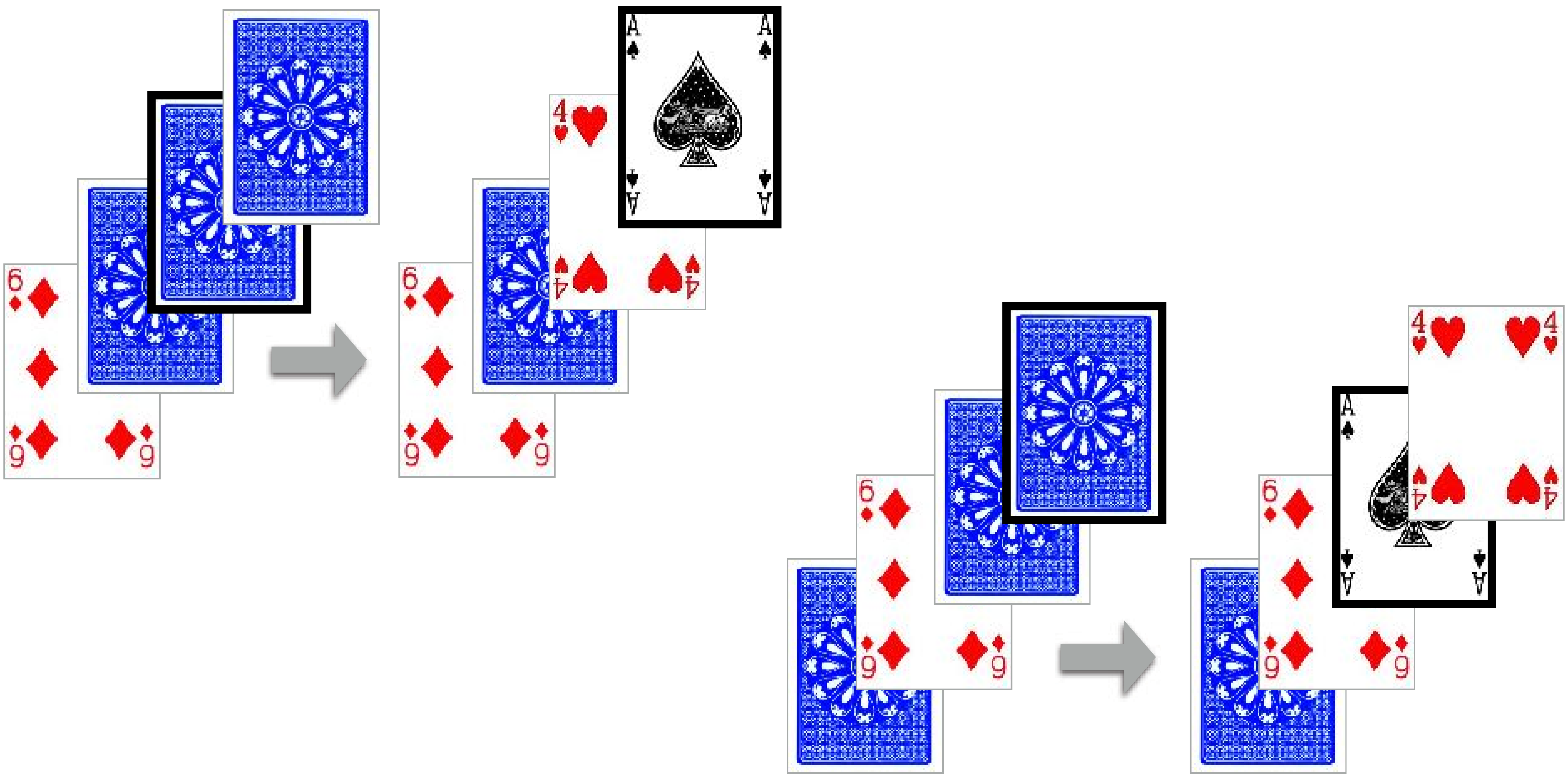
Une coupe n’affecte pas le couple marqueur-cible



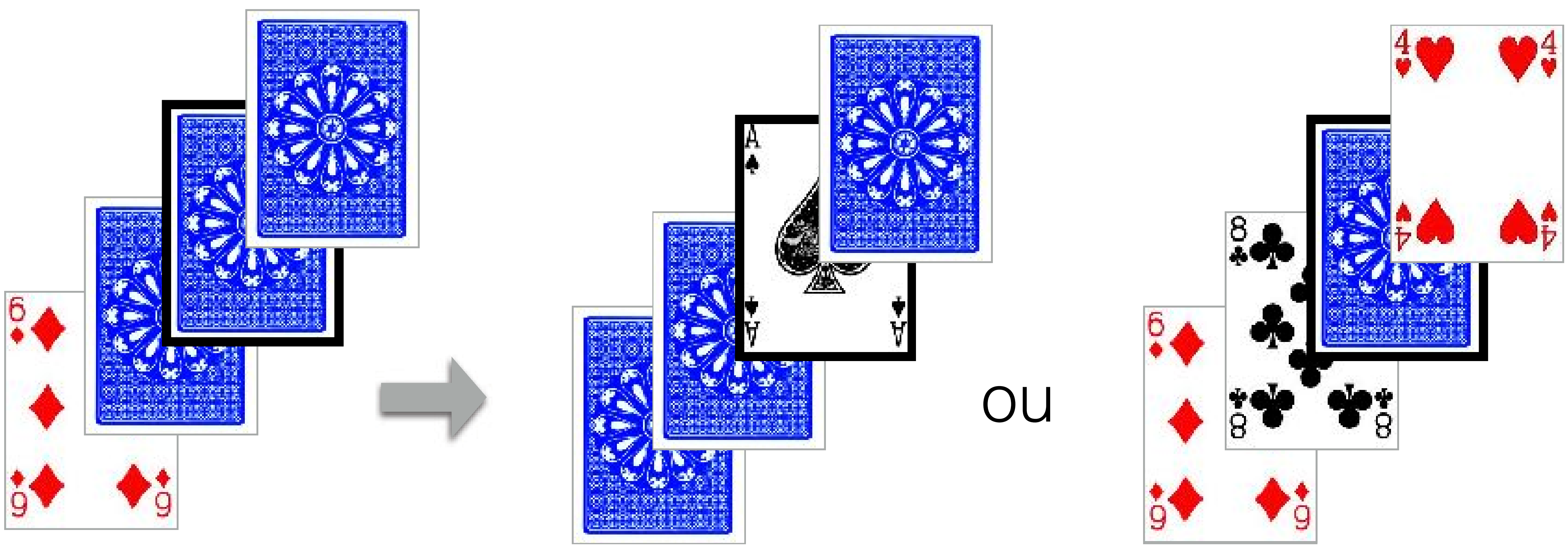
Le retournement de 2 cartes n’affecte pas le couple marqueur-cible



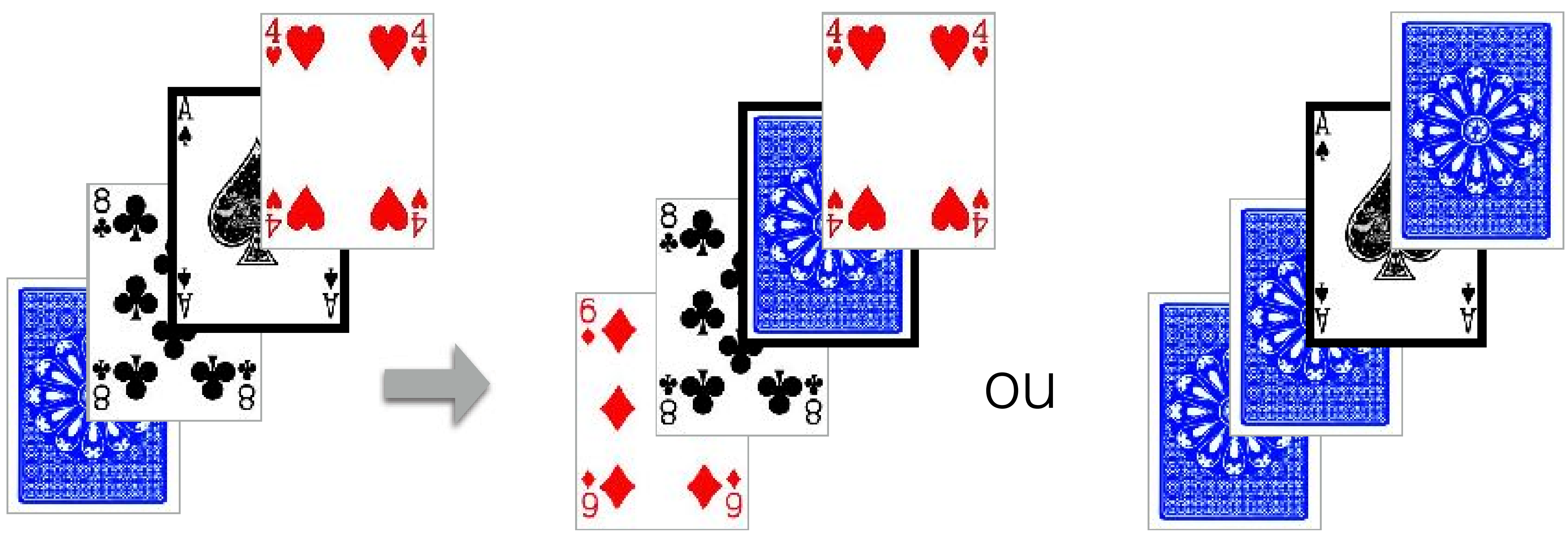
Le retournement de 2 cartes n'affecte pas le couple marqueur-cible



Fin du *Baby Hummer*: retourner 2 cartes de même parité



Fin du *Baby Hummer*: retourner 2 cartes de même parité



Sur le même principe: le *Hummer royal*

- Jeu complet (52 cartes) désordonné
- Mélange des cartes
- Résultat immédiat à la fin du mélange!

Des questions?
Des remarques?
Des idées?

Deviner les cartes tirées

- Paquet de 32 cartes, constitué des valeurs 1 à 8
- 5 personnes volontaires, sur une ligne si possible
- Coupes successives
- Tirages successifs
- Annonce de la couleur (noir/rouge) de chaque carte tirée

Deviner les cartes tirées

- Codage d'une carte en 5 caractères binaires R/N
- Combien d'arrangements avec répétitions de 2 éléments pris 5 à 5?
- Peut-on composer une séquence contenant chaque arrangement une et une seule fois?

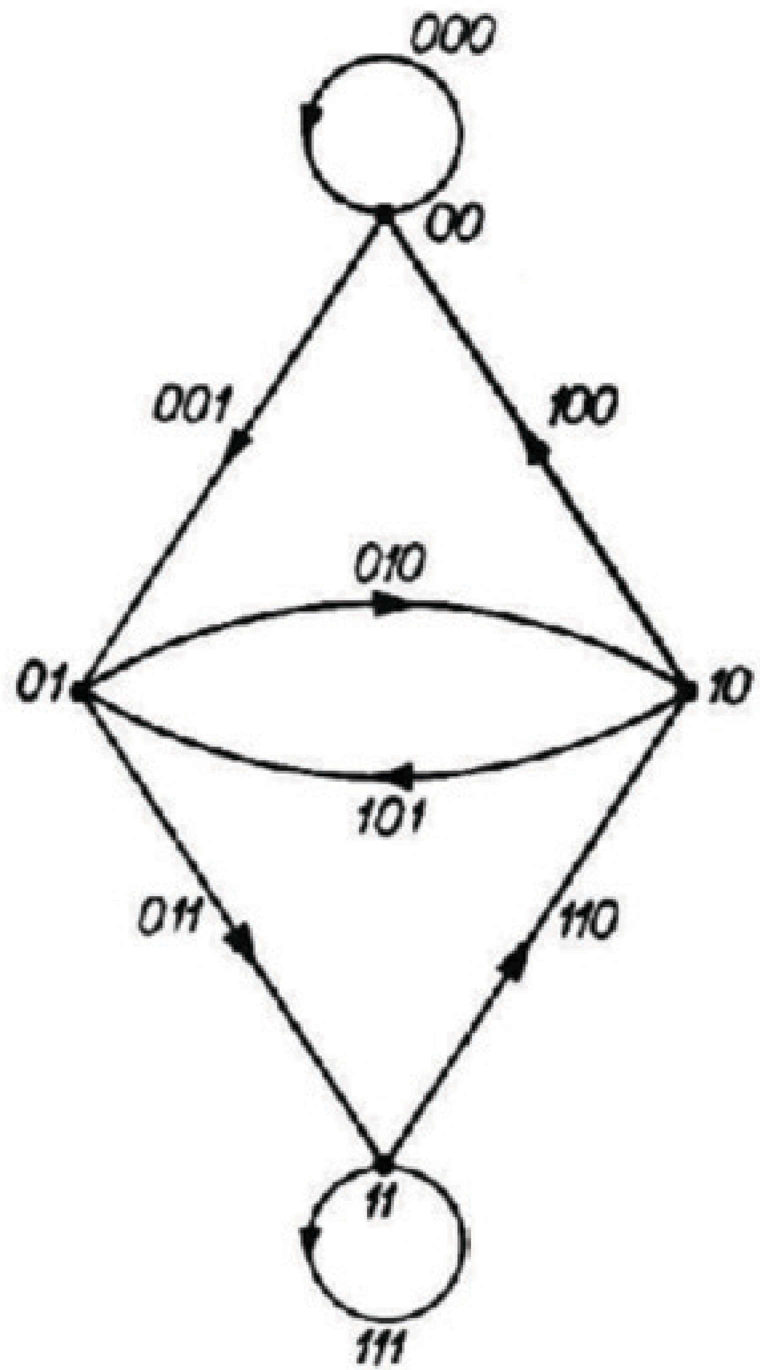
Séquences de N.G. de Bruijn

- Une ***séquence de N.G. de Bruijn*** avec fenêtre *k* est une séquence de caractères binaires de longueur 2^k telle que chaque arrangement ne se produit qu'une fois (en reprenant la séquence au début).

- 0011 est une séquence de fenêtre 2

- Existe-t-il des séquences de de Bruijn pour n'importe quelle valeur de *k*?

Séquences de de Bruijn



00010111

ou

00011101

Séquences de de Bruijn

- Considérons toutes les séquences de 4 caractères binaires:

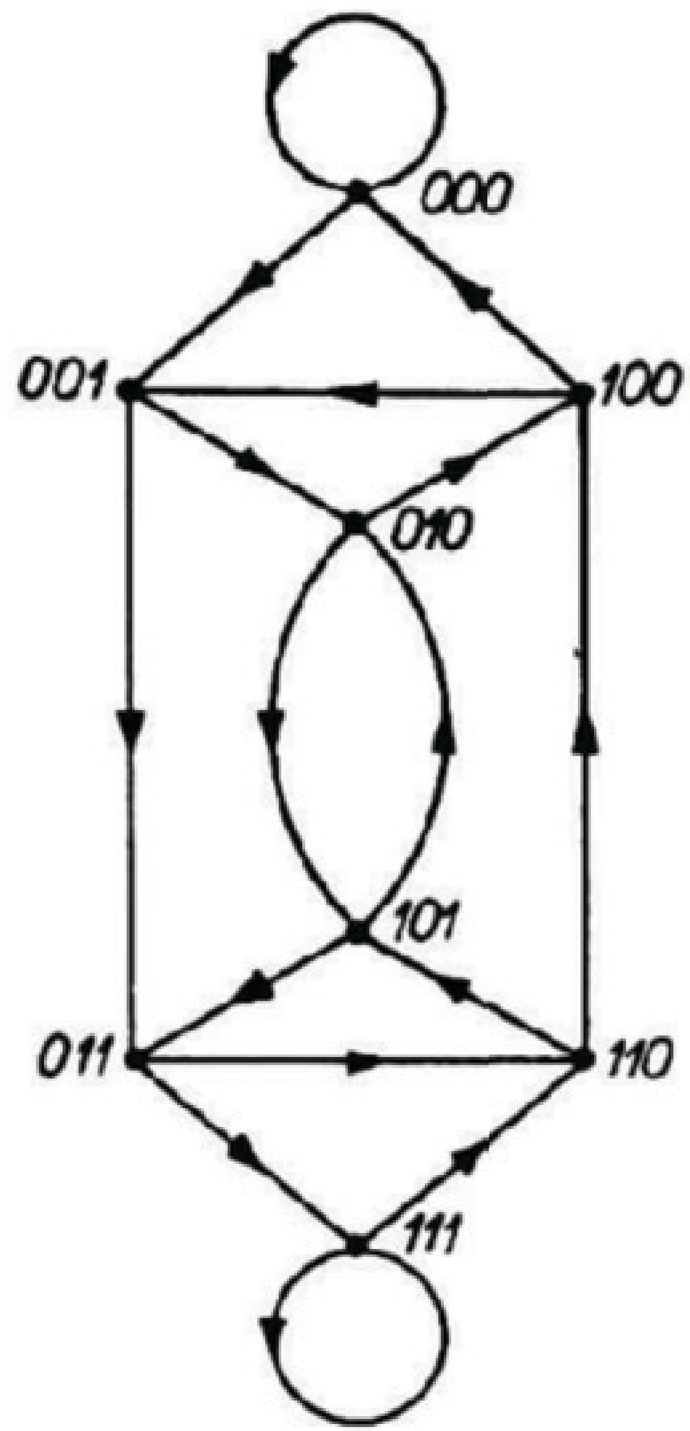
  0000, 0001, 0010, 0011, 0100, 0101, 0110, 0111,

  1000, 1001, 1010, 1011, 1100, 1101, 1110, 1111

- Existe-t-il une séquence de de Bruijn de fenêtre 4?

- Le cas échéant, combien de telles séquences existent?

Séquences de de Bruijn



Séquences de de Bruijn

- Pour n'importe quelle valeur de *k*, il y a exactement $2^{2^{k-1}-k}$ séquences.
- Pour k=3, il y a 2 séquences.
- Pour k=4, il y a 16 séquences.
- Pour k=5, il y a 2048 séquences
- Etc.

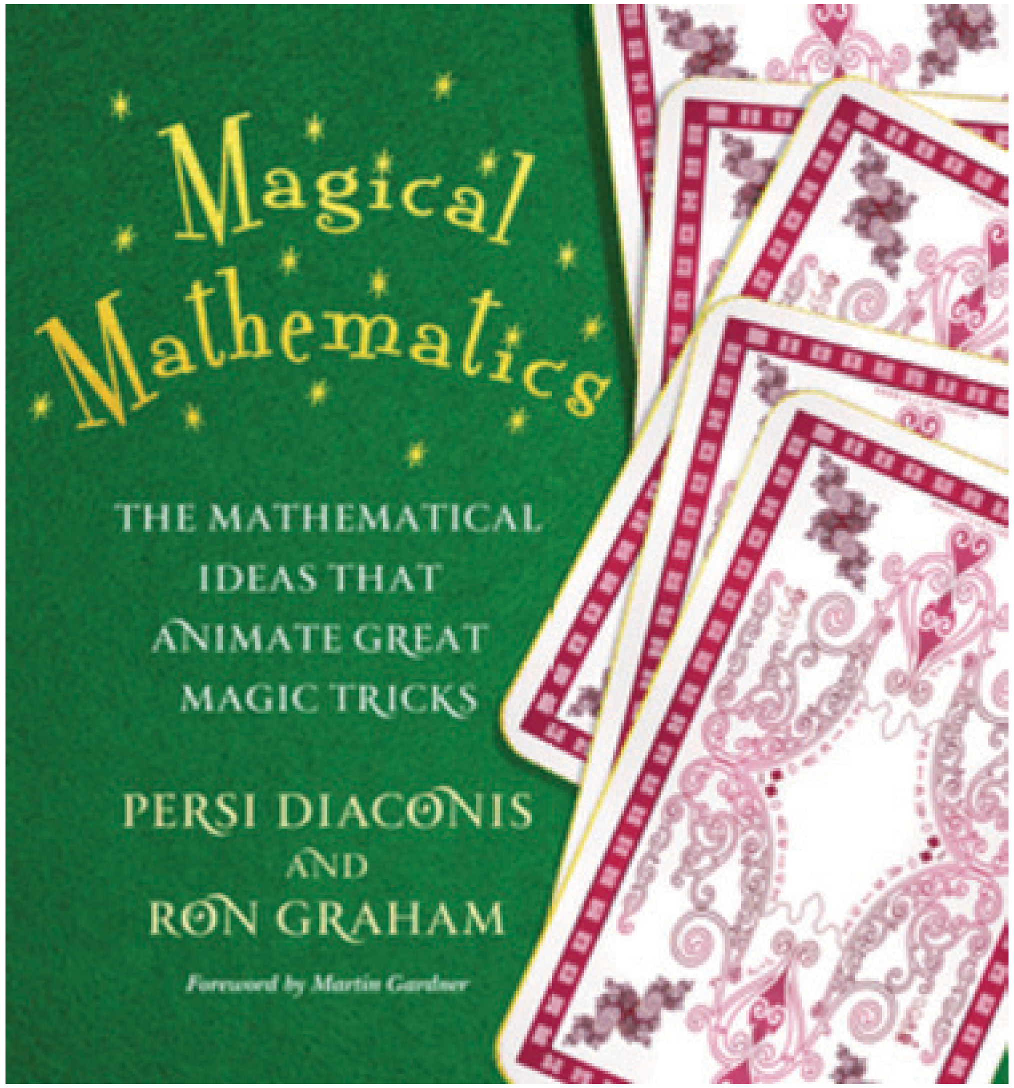
Deviner les cartes tirées

- Voici une séquence de de Bruijn de fenêtre 5: 00000100101100111110001101110101

- Dès qu’on connait une fenêtre de 5 caractères (et qu’on a mémorisé la séquence), on peut déterminer les fenêtres suivantes.

Références (1)

- Diaconis, P. & Graham, R., *Magical mathematics: the mathematical ideas that animate great magic tricks*, Princeton University Press, 2015. Chapitres 1 et 5 disponibles en ligne: http://press.princeton.edu/titles/9510.html



Références (2)

- Hartnett, K., “A puzzle of clever connections nears a happy end”, Quanta magazine (en ligne), 30 mai 2017: https://www.quantamagazine.org/a-puzzle-of-clever-connections-nears-a-happy-end-20170530/

- Hoffman, P., *The man who loved only numbers. The story of Paul Erdös and the search for mathematical truth*, New York, Hyperion, 1998. Chapitre 1 disponible en ligne: http://www.nytimes.com/books/first/h/hoffman-man.html

- Erdös, P., & Szekeres, G. “A combinatorial problem in geometry”, Compositio Mathematica, **2** (1935): 463-470. Disponible en ligne: http://eudml.org/doc/88611

- Suk, “On the Erdős-Szekeres convex polygon problem”, arXiv: 1604.08657v2, version révisée publiée en ligne le 27 aout 2016: https://arxiv.org/abs/1604.08657v2

- de Bruijn, N.G., “A combinatorial problem”, Proc. Koninklijke Nederlandse Akademie v. Wetenschappen, **49** (1946): 758–764; Indagationes Mathematicae, **8** (1946): 461–467. Disponible en ligne: http://www.dwc.knaw.nl/DL/publications/PU00018235.pdf

- QR code generator: http://goqr.me/