Sur les empilements infinis de radicaux

De Ramanujan à Carnot

Pierre Lecomte

Université de Liège

Congrès de la SBPMef
Liège, le 24 août 2017

Question posée sur le forum *M@TH en Ligne* le premier octobre 2016 :

Saviez-vous que $\sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{1+4\sqrt{1+5\cdots}}}} = 3$?

Question posée sur le forum *M@TH en Ligne* le premier octobre 2016 :

$$\text{Saviez-vous que } \sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{1+4\sqrt{1+5\cdots}}}} = 3?$$

Explication proposée par un internaute le lendemain :

$$\begin{aligned}
3 &= \sqrt{1+2\cdot 4} \\
&= \sqrt{1+2\sqrt{1+3\cdot 5}} \\
&= \sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{1+4\cdot 6}}} \\
&= \sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{1+4\sqrt{1+5\cdot 7}}}} \\
&= \cdots
\end{aligned}$$

La question est due à Ramanujan qui l'a posée dans le journal de la Société mathématique d'Inde, en 1911. Voici sa solution : il constate successivement que

$$\begin{aligned} f(n) &= n(n+2) \\ &= n\sqrt{(n+2)^2} \end{aligned}$$

La question a été posée par Ramanujan dans le journal de la Société mathématique d'Inde, en 1911. Voici sa solution : il constate successivement que

$$\begin{aligned} f(n) &= n(n+2) \\ &= n\sqrt{(n+2)^2} \\ &= n\sqrt{n^2+4n+4} \end{aligned}$$

La question a été posée par Ramanujan dans le journal de la Société mathématique d'Inde, en 1911. Voici sa solution : il constate successivement que

$$
\begin{aligned}
f(n) &= n(n+2) \\
&= n\sqrt{(n+2)^2} \\
&= n\sqrt{n^2+4n+4} \\
&= n\sqrt{1+(n+1)(n+3)}
\end{aligned}
$$

La question a été posée par Ramanujan dans le journal de la Société mathématique d'Inde, en 1911. Voici sa solution : il constate successivement que

$$\begin{aligned} f(n) &= n(n+2) \\ &= n\sqrt{(n+2)^2} \\ &= n\sqrt{n^2+4n+4} \\ &= n\sqrt{1+(n+1)(n+3)} \\ &= n\sqrt{1+f(n+1)} \end{aligned}$$

La question a été posée par Ramanujan dans le journal de la Société mathématique d'Inde, en 1911. Voici sa solution : il constate successivement que

$$\begin{aligned}
f(n) &= n(n+2) \\
&= n\sqrt{(n+2)^2} \\
&= n\sqrt{n^2+4n+4} \\
&= n\sqrt{1+(n+1)(n+3)} \\
&= n\sqrt{1+f(n+1)} \\
&= n\sqrt{1+(n+1)\sqrt{1+f(n+2)}} \\
&= n\sqrt{1+(n+1)\sqrt{1+(n+2)\sqrt{1+\cdots}}}
\end{aligned}$$

La question a été posée par Ramanujan dans le journal de la Société mathématique d'Inde, en 1911. Voici sa solution : il constate successivement que

$$\begin{aligned} f(n) &= n(n+2) \\ &= n\sqrt{(n+2)^2} \\ &= n\sqrt{n^2+4n+4} \\ &= n\sqrt{1+(n+1)(n+3)} \\ &= n\sqrt{1+f(n+1)} \\ &= n\sqrt{1+(n+1)\sqrt{1+f(n+2)}} \\ &= n\sqrt{1+(n+1)\sqrt{1+(n+2)\sqrt{1+\cdots}}} \end{aligned}$$

puis fait $n = 1$ dans ces égalités.

Comment peut-on se débarrasser des «$\cdots$» dans une expression telle que

$$e_{a,b} = \sqrt{a_0 + b_0\sqrt{a_1 + b_1\sqrt{a_2 + b_2\sqrt{a_3 + b_3\cdots}}}}$$

Comment peut-on se débarrasser des «$\cdots$» dans une expression telle que

$$e_{a,b} = \sqrt{a_0 + b_0\sqrt{a_1 + b_1\sqrt{a_2 + b_2\sqrt{a_3 + b_3 \cdots}}}}$$

et comment lui attribuer une valeur lorsque les suites a, b, sont numériques?

La solution de la première question utilise la récursion, une méthode de construction classique en informatique.

Elle est suggérée par l'observation suivante.

$$e_{a,b} = \sqrt{a_0 + b_0 \underbrace{\sqrt{a_1 + b_1\sqrt{a_2 + b_2\sqrt{a_3 + b_3 \cdots}}}}_{e_{a',b'}}}$$

N.B. pour toute suite x, on note x' la suite «décalée d'un cran vers la gauche» :

$$x : x_0, \underbrace{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots}_{x'}$$

On pose donc, par définition des expressions $e_{a,b}$: $e_{a,b} = \sqrt{a_0 + b_0 e_{a',b'}}$

On pose donc, par définition des expressions $e_{a,b}$: $e_{a,b} = \sqrt{a_0 + b_0 e_{a',b'}}$

Nous pouvons obtenir des «préfixes» arbitrairement longs de l'expression par itérations successives:

$$\sqrt{a_0 + b_0 e_{a',b'}}$$

$$\sqrt{a_0 + b_0 \sqrt{a_1 + b_1 e_{a'',b''}}}$$

$$\sqrt{a_0 + b_0 \sqrt{a_1 + b_1 \sqrt{a_2 + b_2 e_{a''',b'''}}}}$$

$$\vdots$$

On pose donc, par définition des expressions $e_{a,b}$: $e_{a,b} = \sqrt{a_0 + b_0 e_{a',b'}}$

Nous pouvons obtenir des «préfixes» arbitrairement longs de l'expression par itérations successives:

$$\sqrt{a_0 + b_0 e_{a',b'}}$$

$$\sqrt{a_0 + b_0 \sqrt{a_1 + b_1 e_{a'',b''}}}$$

$$\sqrt{a_0 + b_0 \sqrt{a_1 + b_1 \sqrt{a_2 + b_2 e_{a''',b'''}}}}$$

$$\vdots$$

mais nous ne pourrons jamais l'écrire effectivement en entier car elle est composée d'une infinités de symboles.

Cela peut sembler étrange de considérer et manipuler des expressions constituées d'une infinité de symboles.

Cela peut sembler étrange de considérer et manipuler des expressions constituées d'une infinité de symboles.

Cela arrive pourtant assez souvent. Les développements décimaux des nombres réels en sont des exemples bien familiers!

Cela peut sembler étrange de considérer et manipuler des expressions constituées d'une infinité de symboles.

Cela arrive pourtant assez souvent. Les développements décimaux des nombres réels en sont des exemples bien familiers!

Comme pour $e_{a,b}$, on sait écrire des préfixes arbitrairement longs des développements décimaux de la plupart des réels mais, pas plus que pour $e_{a,b}$, on ne sait les écrire entièrement.

Par exemple, si

$$r = 0, r_1 r_2 \cdots r_n \cdots$$

on obtient la suite de préfixes

$$0, r_1 \quad 0, r_1 r_2 \quad 0, r_1 r_2 r_3 \quad 0, r_1 r_2 r_3 r_4 \quad \cdots$$

Par exemple, si

$$r = 0, r_1 r_2 \cdots r_n \cdots$$

on obtient la suite de préfixes

$$0, r_1 \quad 0, r_1 r_2 \quad 0, r_1 r_2 r_3 \quad 0, r_1 r_2 r_3 r_4 \quad \cdots$$

Chacun représente un nombre rationnel *et la suite de ces nombres converge vers r*!

Par exemple, si

$$r = 0, r_1 r_2 \cdots r_n \cdots$$

on obtient la suite de préfixes

$$0, r_1 \quad 0, r_1 r_2 \quad 0, r_1 r_2 r_3 \quad 0, r_1 r_2 r_3 r_4 \quad \cdots$$

Chacun représente un nombre rationnel *et la suite de ces nombres converge vers* r!

Nous allons nous inspirer de cela pour essayer de résoudre le second problème : attribuer une valeur à $e_{a,b}$.

L'idée

L'idée

Remplacer $e_{a',b'}, e_{a'',b''}, e_{a''',b'''}, \ldots$ par des nombres dans les expressions

$$\sqrt{a_0 + b_0 e_{a',b'}}$$

$$\sqrt{a_0 + b_0\sqrt{a_1 + b_1 e_{a'',b''}}}$$

$$\sqrt{a_0 + b_0\sqrt{a_1 + b_1\sqrt{a_2 + b_2 e_{a''',b'''}}}}$$

$$\vdots$$

afin d'obtenir une suite numérique *u d'approximations* et poser

$$\boxed{e_{a,b} = \lim u}$$

Si on annule tous les $e_{a^{(n)},b^{(n)}}$, on obtient la suite d'approximations

$$\sqrt{a_0}, \sqrt{a_0 + b_0\sqrt{a_1}}, \sqrt{a_0 + b_0\sqrt{a_1 + b_1\sqrt{a_2}}}, \ldots$$

Si on annule tous les $e_{a^{(n)},b^{(n)}}$, on obtient la suite d'approximations

$$\sqrt{a_0}, \sqrt{a_0 + b_0\sqrt{a_1}}, \sqrt{a_0 + b_0\sqrt{a_1 + b_1\sqrt{a_2}}}, \ldots$$

Pour l'empilement de radicaux de Ramanujan, les premiers termes de cette suite sont

$$1, \sqrt{3}, \sqrt{6}, \sqrt{1 + 2\sqrt{1 + 3\sqrt{5}}}, \ldots$$

Si on annule tous les $e_{a^{(n)},b^{(n)}}$, on obtient la suite d'approximations

$$\sqrt{a_0}, \sqrt{a_0 + b_0\sqrt{a_1}}, \sqrt{a_0 + b_0\sqrt{a_1 + b_1\sqrt{a_2}}}, \ldots$$

Pour l'empilement de radicaux de Ramanujan, les premiers termes de cette suite sont

$$1, \sqrt{3}, \sqrt{6}, \sqrt{1 + 2\sqrt{1 + 3\sqrt{5}}}, \ldots$$

On peut montrer que dans ce cas, la limite de la suite d'approximations vaut 3 (c'est difficile).

Si on annule tous les $e_{a^{(n)},b^{(n)}}$, on obtient la suite d'approximations

$$\sqrt{a_0}, \sqrt{a_0 + b_0\sqrt{a_1}}, \sqrt{a_0 + b_0\sqrt{a_1 + b_1\sqrt{a_2}}}, \ldots$$

Pour l'empilement de radicaux de Ramanujan, les premiers termes de cette suite sont

$$1, \sqrt{3}, \sqrt{6}, \sqrt{1 + 2\sqrt{1 + 3\sqrt{5}}}, \ldots$$

On peut montrer que dans ce cas, la limite de la suite d'approximations vaut 3 (c'est difficile).

On peut montrer aussi, pour l'empilement de Ramanujan, que si on remplace tous les $e_{a^{(n)},b^{(n)}}$ par un même nombre réel strictement positif alors la suite d'approximations obtenues converge également vers 3.

Si on annule tous les $e_{a^{(n)},b^{(n)}}$, on obtient la suite d'approximations

$$\sqrt{a_0}, \sqrt{a_0 + b_0\sqrt{a_1}}, \sqrt{a_0 + b_0\sqrt{a_1 + b_1\sqrt{a_2}}}, \ldots$$

Pour l'empilement de radicaux de Ramanujan, les premiers termes de cette suite sont

$$1, \sqrt{3}, \sqrt{6}, \sqrt{1 + 2\sqrt{1 + 3\sqrt{5}}}, \ldots$$

On peut montrer que dans ce cas, la limite de la suite d'approximations vaut 3 (c'est difficile).

On peut montrer aussi, pour l'empilement de Ramanujan, que si on remplace tous les $e_{a^{(n)},b^{(n)}}$ par un même nombre réel strictement positif alors la suite d'approximations obtenues converge également vers 3.

Les approximations fournies par l'internaute pour l'empilement de Ramanujan s'obtiennent en remplaçant $e_{a^{(n)},b^{(n)}}$ par $n+3$. Elles sont toutes égales à 3.

Un autre exemple d'empilement

Soit un entier positif n. Si $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ alors

$$\cos \frac{x}{2^n} = \frac{1}{2} \underbrace{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \cdots + \sqrt{2 + 2\cos x}}}}_{n \text{ radicaux}}$$

Un autre exemple d'empilement

Soit un entier positif n. Si $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ alors

$$\cos \frac{x}{2^n} = \frac{1}{2} \underbrace{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \cdots + \sqrt{2 + 2\cos x}}}}_{n \text{ radicaux}}$$

Semblablement, pour tout nombre réel x,

$$\cosh \frac{x}{2^n} = \frac{1}{2} \underbrace{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \cdots + \sqrt{2 + 2\cosh x}}}}_{n \text{ radicaux}}$$

Un autre exemple d'empilement

Soit un entier positif n. Si $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ alors

$$\cos \frac{x}{2^n} = \frac{1}{2} \underbrace{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \cdots + \sqrt{2 + 2\cos x}}}}_{n \text{ radicaux}}$$

Semblablement, pour tout nombre réel x,

$$\cosh \frac{x}{2^n} = \frac{1}{2} \underbrace{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \cdots + \sqrt{2 + 2\cosh x}}}}_{n \text{ radicaux}}$$

On est donc tenté d'écrire

$$\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \cdots}}}} = 2$$

Un autre exemple d'empilement

Soit un entier positif n. Si $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ alors

$$\cos \frac{x}{2^n} = \frac{1}{2} \underbrace{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \cdots + \sqrt{2 + 2\cos x}}}}_{n \text{ radicaux}}$$

Semblablement, pour tout nombre réel x,

$$\cosh \frac{x}{2^n} = \frac{1}{2} \underbrace{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \cdots + \sqrt{2 + 2\cosh x}}}}_{n \text{ radicaux}}$$

On est donc tenté d'écrire

$$\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \cdots}}}} = 2$$

mais tout n'est pas si simple, comme on va le voir bientôt...

Notations et hypothèses – 1

A chaque suite c de nombres réels positifs ou nuls, on associe une suite $u(c)$ d'approximations de l'empilement infini $e_{a,b}$ dont voici les premiers termes.

$$\begin{array}{rcl} u_0(c) & = & c_0 \\ u_1(c) & = & \sqrt{a_0 + b_0 c_1} \\ u_2(c) & = & \sqrt{a_0 + b_0\sqrt{a_1 + b_1 c_2}} \\ u_3(c) & = & \sqrt{a_0 + b_0\sqrt{a_1 + b_1\sqrt{a_2 + b_2 c_3}}} \\ & \vdots & \end{array}$$

Sa règle de formation est claire : c_n apparaît à la place de $e_{a^{(n)},b^{(n)}}$ en-dessous du n-ième radical.

Notations et hypothèses – 1

A chaque suite c de nombres réels positifs ou nuls, on associe une suite $u(c)$ d'approximations de l'empilement infini $e_{a,b}$ dont voici les premiers termes.

$$
\begin{array}{rcl}
u_0(c) & = & c_0 \\
u_1(c) & = & \sqrt{a_0 + b_0 c_1} \\
u_2(c) & = & \sqrt{a_0 + b_0\sqrt{a_1 + b_1 c_2}} \\
u_3(c) & = & \sqrt{a_0 + b_0\sqrt{a_1 + b_1\sqrt{a_2 + b_2 c_3}}} \\
& \vdots &
\end{array}
$$

Sa règle de formation est claire : c_n apparaît à la place de $e_{a^{(n)},b^{(n)}}$ en-dessous du n-ième radical.

Pour tout nombre réel r, nous noterons $\mathbf{r}$ la suite constante

$$r, r, r, \ldots, r, \ldots$$

Notations et hypothèses – 2

On désigne par $\mathcal{D}_{a,b}$ l'ensemble des suites c pour lesquelles $u(c)$ converge,

Notations et hypothèses – 2

On désigne par $\mathcal{D}_{a,b}$ l'ensemble des suites c pour lesquelles $u(c)$ converge, vers un nombre réel ou vers $+\infty$.

Notations et hypothèses – 2

On désigne par $\mathcal{D}_{a,b}$ l'ensemble des suites c pour lesquelles $u(c)$ converge, vers un nombre réel ou vers $+\infty$.

On change de point de vue : $e_{a,b}$ est désormais une *fonction*, à savoir

$$e_{a,b} : c \in \mathcal{D}_{a,b} \mapsto \lim u(c) \in [0, +\infty]$$

Notations et hypothèses – 2

On désigne par $\mathcal{D}_{a,b}$ l'ensemble des suites c pour lesquelles $u(c)$ converge, vers un nombre réel ou vers $+\infty$.

On change de point de vue : $e_{a,b}$ est désormais une *fonction*, à savoir

$$e_{a,b} : c \in \mathcal{D}_{a,b} \mapsto \lim u(c) \in [0, +\infty]$$

En effet, contrairement à ce que les exemples précédents laissent peut-être entendre, deux suites d'approximations de $e_{a,b}$ qui convergent n'ont, *a priori*, pas la même limite.

Notations et hypothèses – 2

On désigne par $\mathcal{D}_{a,b}$ l'ensemble des suites c pour lesquelles $u(c)$ converge, vers un nombre réel ou vers $+\infty$.

On change de point de vue : $e_{a,b}$ est désormais une *fonction*, à savoir

$$e_{a,b} : c \in \mathcal{D}_{a,b} \mapsto \lim u(c) \in [0, +\infty]$$

En effet, contrairement à ce que les exemples précédents laissent peut-être entendre, deux suites d'approximations de $e_{a,b}$ qui convergent n'ont, *a priori*, pas la même limite.

C'est sans doute contrariant mais c'est un fait avéré, comme nous allons le voir sous peu.

Notations et hypothèses – 2

On désigne par $\mathcal{D}_{a,b}$ l'ensemble des suites c pour lesquelles $u(c)$ converge, vers un nombre réel ou vers $+\infty$.

On change de point de vue : $e_{a,b}$ est désormais une *fonction*, à savoir

$$e_{a,b} : c \in \mathcal{D}_{a,b} \mapsto \lim u(c) \in [0, +\infty]$$

En effet, contrairement à ce que les exemples précédents laissent peut-être entendre, deux suites d'approximations de $e_{a,b}$ qui convergent n'ont, *a priori*, pas la même limite.

C'est sans doute contrariant mais c'est un fait avéré, comme nous allons le voir sous peu.

A partir d'ici, nous supposons que *a et b sont des suites de nombres réels strictement positifs*.

Théorème

Si les suites a et b sont à valeurs strictement positives alors

- $\mathbf{0} \in \mathcal{D}_{a,b}$

Théorème

Si les suites a et b sont à valeurs strictement positives alors

- $\mathbf{0} \in \mathcal{D}_{a,b}$
- La limite γ_0 de $u(\mathbf{0})$ est un nombre réel, si, et seulement si, il existe une suite $c \in \mathcal{D}_{a,b}$ telle que $u(c)$ soit constant.

Théorème

Si les suites a et b sont à valeurs strictement positives alors

- $\mathbf{0} \in \mathcal{D}_{a,b}$
- La limite γ_0 de $u(\mathbf{0})$ est un nombre réel, si, et seulement si, il existe une suite $c \in \mathcal{D}_{a,b}$ telle que $u(c)$ soit constant.
- Si γ_0 est un nombre réel et si $\gamma \geqslant \gamma_0$, alors il existe une seule suite $c \in \mathcal{D}_{a,b}$ telle que les $u_n(c)$ valent tous γ.

Théorème

Si les suites a et b sont à valeurs strictement positives alors

- $\mathbf{0} \in \mathcal{D}_{a,b}$
- La limite γ_0 de $u(\mathbf{0})$ est un nombre réel, si, et seulement si, il existe une suite $c \in \mathcal{D}_{a,b}$ telle que $u(c)$ soit constant.
- Si γ_0 est un nombre réel et si $\gamma \geqslant \gamma_0$, alors il existe une seule suite $c \in \mathcal{D}_{a,b}$ telle que les $u_n(c)$ valent tous γ.
- $\mathrm{im}\ e_{a,b} = [\gamma_0, +\infty]$

Il existe des suites a et b pour lesquelles $\lim u(\mathbf{0}) = +\infty$.

Réflexions

- Pour l'empilement de Ramanujan, l'argument de l'internaute ne tient pas la route! En effet, d'après le théorème, et l'observation de l'internaute, il existe des suites c pour lesquelles $u(c)$ est de valeur constante arbitraire > 3.

Réflexions

- Pour l'empilement de Ramanujan, l'argument de l'internaute ne tient pas la route! En effet, d'après le théorème, et l'observation de l'internaute, il existe des suites c pour lesquelles $u(c)$ est de valeur constante arbitraire > 3.
- Il semble naturel de *convenir* de ceci : $e_{a,b} = \lim u(\mathbf{0})$
- Moyennant cela, on a

$$\begin{aligned} \sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{1+4\sqrt{\cdots}}}} &= 3 \\ \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{\cdots}}}} &= 2 \end{aligned}$$

Un exemple simple

Nous allons appliquer ce qui précède à l'empilement

$$\sqrt{p+q\sqrt{p+q\sqrt{p+q\sqrt{\cdots}}}}$$

Il est défini par les suites constantes $a = \mathbf{p}$ et $b = \mathbf{q}$ (où $p, q > 0$).

Un exemple simple

Nous allons appliquer ce qui précède à l'empilement

$$\sqrt{p+q\sqrt{p+q\sqrt{p+q\sqrt{\cdots}}}}$$

Il est défini par les suites constantes $a = \mathbf{p}$ et $b = \mathbf{q}$ (où $p, q > 0$).

Nous allons voir que $\lim_{n\to\infty} u_n(\mathbf{0})$ est la racine positive γ de l'équation $t^2 - qt - p = 0$, et donc que

$$\lim_{n\to\infty} \underbrace{\sqrt{p+q\sqrt{p+q\sqrt{\cdots+q\sqrt{p}}}}}_{n \text{ lettres } p} = \frac{q+\sqrt{q^2+4p}}{2}$$

Un exemple simple

Nous allons appliquer ce qui précède à l'empilement

$$\sqrt{p+q\sqrt{p+q\sqrt{p+q\sqrt{\cdots}}}}$$

Il est défini par les suites constantes $a = \mathbf{p}$ et $b = \mathbf{q}$ (où $p, q > 0$).

Nous allons voir que $\lim_{n\to\infty} u_n(\mathbf{0})$ est la racine positive γ de l'équation $t^2 - qt - p = 0$, et donc que

$$\lim_{n\to\infty} \underbrace{\sqrt{p+q\sqrt{p+q\sqrt{\cdots+q\sqrt{p}}}}}_{n \text{ lettres } p} = \frac{q+\sqrt{q^2+4p}}{2}$$

Avec notre définition, nous sommes ainsi conduits à écrire

$$\sqrt{p+q\sqrt{p+q\sqrt{p+q\sqrt{\cdots}}}} = \frac{q+\sqrt{q^2+4p}}{2}$$

Puisque $\gamma^2 - q\gamma - p = 0$ et $\gamma > 0$, on a

$$\gamma = \sqrt{p + q\gamma} = \sqrt{p + q\sqrt{p + q\gamma}} = \sqrt{p + q\sqrt{p + q\sqrt{p + q\gamma}}} = \cdots$$

Puisque $\gamma^2 - q\gamma - p = 0$ et $\gamma > 0$, on a

$$\gamma = \sqrt{p + q\gamma} = \sqrt{p + q\sqrt{p + q\gamma}} = \sqrt{p + q\sqrt{p + q\sqrt{p + q\gamma}}} = \cdots$$

Autrement dit, la suite c de valeur constante γ est telle que $u(c) = c$.

Puisque $\gamma^2 - q\gamma - p = 0$ et $\gamma > 0$, on a

$$\gamma = \sqrt{p + q\gamma} = \sqrt{p + q\sqrt{p + q\gamma}} = \sqrt{p + q\sqrt{p + q\sqrt{p + q\gamma}}} = \cdots$$

Autrement dit, la suite c de valeur constante γ est telle que $u(c) = c$.

D'après le théorème, $u(\mathbf{0})$ converge donc vers un nombre réel γ_0. Or

$$u_{n+1}(\mathbf{0}) = \sqrt{p + qu_n(\mathbf{0})}$$

Puisque $\gamma^2 - q\gamma - p = 0$ et $\gamma > 0$, on a

$$\gamma = \sqrt{p + q\gamma} = \sqrt{p + q\sqrt{p + q\gamma}} = \sqrt{p + q\sqrt{p + q\sqrt{p + q\gamma}}} = \cdots$$

Autrement dit, la suite c de valeur constante γ est telle que $u(c) = c$.

D'après le théorème, $u(\mathbf{0})$ converge donc vers un nombre réel γ_0. Or

$$u_{n+1}(\mathbf{0}) = \sqrt{p + qu_n(\mathbf{0})}$$

En passant à la limite, il vient

$$\gamma_0 = \sqrt{p + q\gamma_0}$$

Puisque $\gamma^2 - q\gamma - p = 0$ et $\gamma > 0$, on a

$$\gamma = \sqrt{p + q\gamma} = \sqrt{p + q\sqrt{p + q\gamma}} = \sqrt{p + q\sqrt{p + q\sqrt{p + q\gamma}}} = \cdots$$

Autrement dit, la suite c de valeur constante γ est telle que $u(c) = c$.

D'après le théorème, $u(\mathbf{0})$ converge donc vers un nombre réel γ_0. Or

$$u_{n+1}(\mathbf{0}) = \sqrt{p + qu_n(\mathbf{0})}$$

En passant à la limite, il vient

$$\gamma_0 = \sqrt{p + q\gamma_0}$$

et donc

$$\gamma_0 = \gamma$$

Avec $p = q = 1$, nous obtenons une expression du nombre d'or comme empilement infini de radicaux :

$$\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{\cdots}}}} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Avec $p = q = 1$, nous obtenons une expression du nombre d'or comme empilement infini de radicaux :

$$\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{\cdots}}}} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Avec $p = 2$ et $q = 1$, nous retrouvons

$$\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{\cdots}}}} = 2$$

Sur une formule de Carnot

La formule de Carnot

$$\cos^2 x = \frac{1}{2}\left(1 + \cos(2x)\right)$$

également vérifiée par cosh, permet d'établir facilement les formules remarquables que nous avons rencontrées plus haut :

$$\begin{cases} \cos \frac{x}{2^n} = \frac{1}{2} \underbrace{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \cdots + \sqrt{2 + 2\cos x}}}}_{n \text{ radicaux}} \\ \cosh \frac{x}{2^n} = \frac{1}{2} \underbrace{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \cdots + \sqrt{2 + 2\cosh x}}}}_{n \text{ radicaux}} \end{cases}$$

Par exemple, si x est dans le premier quadrant, la formule donne

$$\cos x = \frac{1}{2}\sqrt{2 + 2\cos(2x)}$$

Par exemple, si x est dans le premier quadrant, la formule donne

$$\cos x = \frac{1}{2}\sqrt{2 + 2\cos(2x)}$$

Donc

$$\cos\frac{x}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{2 + 2\cos x}$$

Par exemple, si x est dans le premier quadrant, la formule donne

$$\cos x = \frac{1}{2}\sqrt{2 + 2\cos(2x)}$$

Donc

$$\cos\frac{x}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{2 + 2\cos x}$$

puis

$$\cos\frac{x}{4} = \frac{1}{2}\sqrt{2 + 2\cos\frac{x}{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2 + \sqrt{2 + 2\cos x}}$$

etc.

Afin d'obtenir d'autres identités du même genre, j'ai cherché les nombres réels p pour lesquels il existe des fonctions analytiques non constantes f vérifiant la formule

$$f(x)^2 = \frac{1}{p}\,(1 + f(px))$$

Afin d'obtenir d'autres identités du même genre, j'ai cherché les nombres réels p pour lesquels il existe des fonctions analytiques non constantes f vérifiant la formule

$$f(x)^2 = \frac{1}{p}\left(1 + f(px)\right)$$

Avec une telle fonction, nous aurions en effet, au moins dans un voisinage de 0,

$$f\left(\frac{x}{p^n}\right) = \frac{1}{p}\underbrace{\sqrt{p + \sqrt{p + \sqrt{p + \cdots \sqrt{p + pf(x)}}}}}_{n \text{ radicaux}}$$

Théorème – 1

Les nombres p pour lesquels il existe des fonctions analytiques non constantes vérifiant la formule de Carnot généralisée forment une suite p_n qui tend vers 1 par valeurs strictement décroissantes.

Théorème – 1

Les nombres p pour lesquels il existe des fonctions analytiques non constantes vérifiant la formule de Carnot généralisée forment une suite p_n qui tend vers 1 par valeurs strictement décroissantes.

On a $p_1 = 6, p_2 = 2$ et

$$p_3 = \frac{1}{3}\left(2 + \sqrt[3]{17 + 3\sqrt{33}} - \frac{2}{\sqrt[3]{17 + 3\sqrt{33}}}\right) \simeq 1,54369$$

Théorème – 1

Les nombres p pour lesquels il existe des fonctions analytiques non constantes vérifiant la formule de Carnot généralisée forment une suite p_n qui tend vers 1 par valeurs strictement décroissantes.

On a $p_1 = 6, p_2 = 2$ et

$$p_3 = \frac{1}{3}\left(2 + \sqrt[3]{17 + 3\sqrt{33}} - \frac{2}{\sqrt[3]{17 + 3\sqrt{33}}}\right) \simeq 1,54369$$

En particulier, pour $n > 2$, p_n n'est pas un nombre entier.

Théorème – 2

Il existe des fonctions analytiques non constantes $\mathfrak{cos}_k$ et $\mathfrak{cosh}_k$, $k = 1, 2, 3, \ldots$ (définies sur $\mathbf{R}$ tout entier) telles que les fonctions analytiques f vérifiant l'identité

$$f(x)^2 = \frac{1}{p_n}\left(1 + f(p_n x)\right)$$

soient

- les fonctions constantes dont les valeurs sont les zéros de $p_n X^2 - X - 1$

- les fonctions constantes dont les valeurs sont les zéros de $p_n X^2 - X - 1$
- si n est impair, les fonctions

$$x \mapsto \mathfrak{cos}_n(vx), v \in \mathbf{R}$$

- les fonctions constantes dont les valeurs sont les zéros de $p_n X^2 - X - 1$
- si n est impair, les fonctions

$$x \mapsto \mathfrak{cos}_n(vx), v \in \mathbf{R}$$

- si $n = 2k$, les fonctions

$$\begin{cases} x \mapsto \mathfrak{cos}_n(vx), v \in \mathbf{R} \\ x \mapsto \mathfrak{cosh}_k(vx), v \in \mathbf{R} \end{cases}$$

Comme on peut s'en douter,

$$\mathfrak{cos}_2 = \cos \qquad \& \qquad \mathfrak{cosh}_1 = \cosh$$

Comme on peut s'en douter,

$$\mathfrak{cos}_2 = \cos \qquad \& \quad \mathfrak{cosh}_1 = \cosh$$

Je n'ai pas trouvé trace des autres fonctions $\mathfrak{cos}, \mathfrak{cosh}$ dans la littérature; il s'agirait donc de nouvelles fonctions!

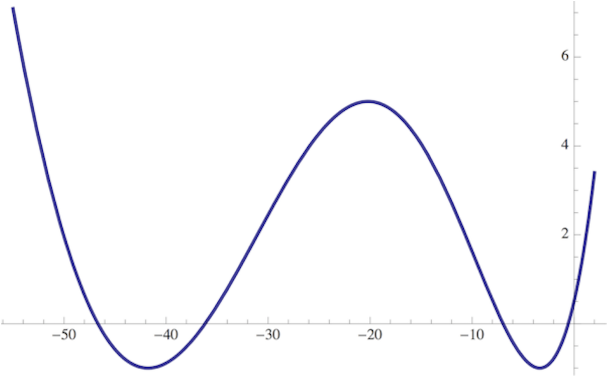
Comme on peut s'en douter,

$$\mathfrak{cos}_2 = \cos \qquad \& \quad \mathfrak{cosh}_1 = \cosh$$

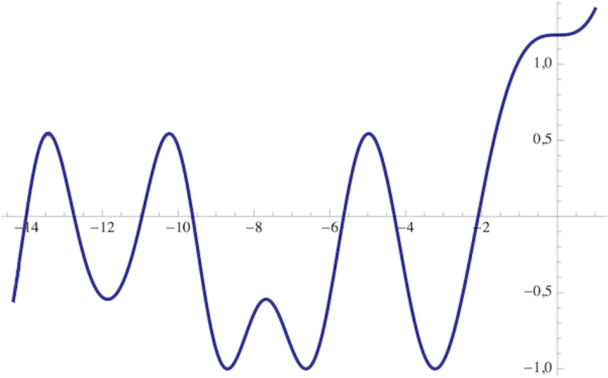
Je n'ai pas trouvé trace des autres fonctions $\mathfrak{cos}, \mathfrak{cosh}$ dans la littérature; il s'agirait donc de nouvelles fonctions!

Voici l'allure des premiers $\mathfrak{cos}$.

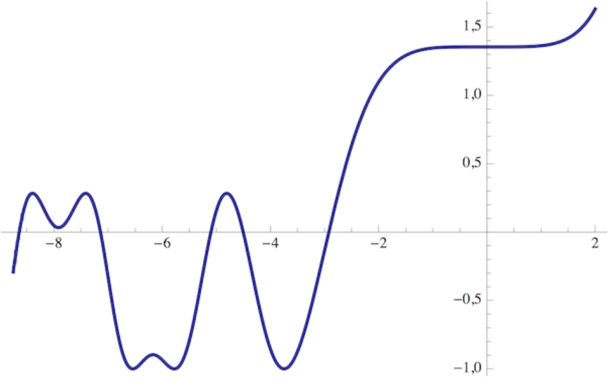
$\boxed{\mathfrak{cos}_1}$



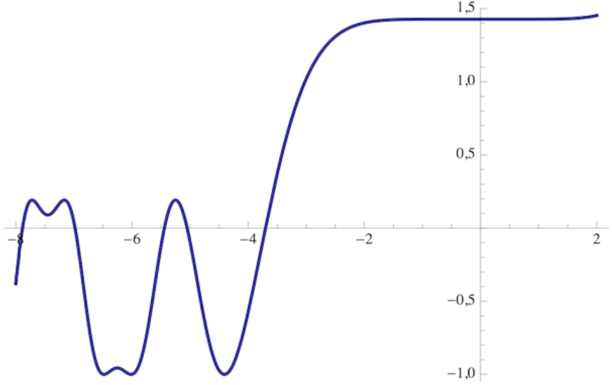
$\boxed{\mathfrak{cos}_3}$



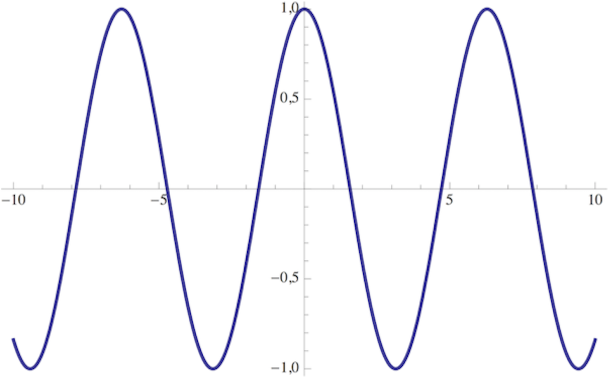
$\mathfrak{cos}_5$



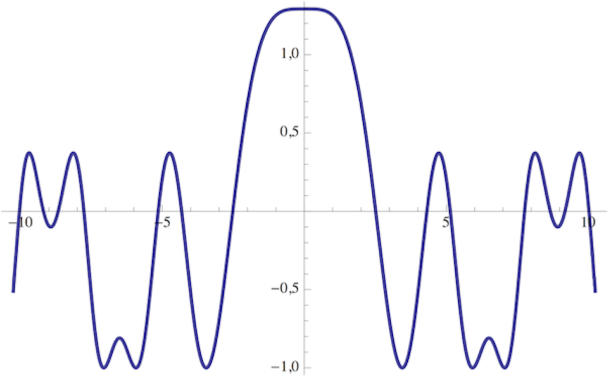
$\boxed{\mathfrak{cos}_7}$



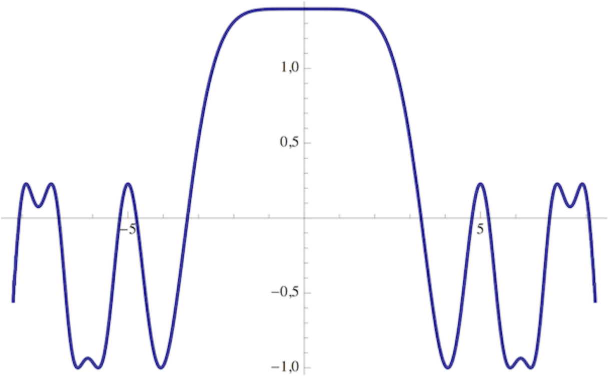
$$\boxed{\mathfrak{cos}_2 = \cos}$$



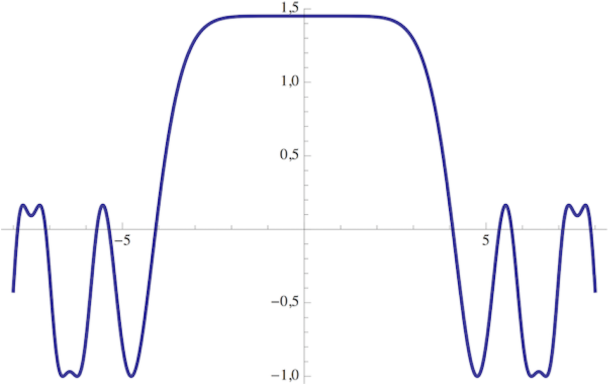
$\boxed{\mathfrak{cos}_4}$



$\boxed{\mathfrak{cos}_6}$



$\boxed{\mathfrak{cos}_8}$



Les fonctions $\mathfrak{cos}$ et $\mathfrak{cosh}$ sont très difficiles à étudier.

Les fonctions $\mathfrak{cos}$ et $\mathfrak{cosh}$ sont très difficiles à étudier.

Elles ne sont données que par leur développement de Taylor à l'origine, dont les coefficients sont définis par une relation de récurrence très compliquée.

Les fonctions $\mathfrak{cos}$ et $\mathfrak{cosh}$ sont très difficiles à étudier.

Elles ne sont données que par leur développement de Taylor à l'origine, dont les coefficients sont définis par une relation de récurrence très compliquée.

La seule chose que je sache prouver, c'est que les suites de fonctions $\mathfrak{cos}_k$ et $\mathfrak{cosh}_k$ convergent uniformément sur tout compact vers la fonction constante dont la valeur est le nombre d'or!

Un grand merci pour votre attention!