COSH

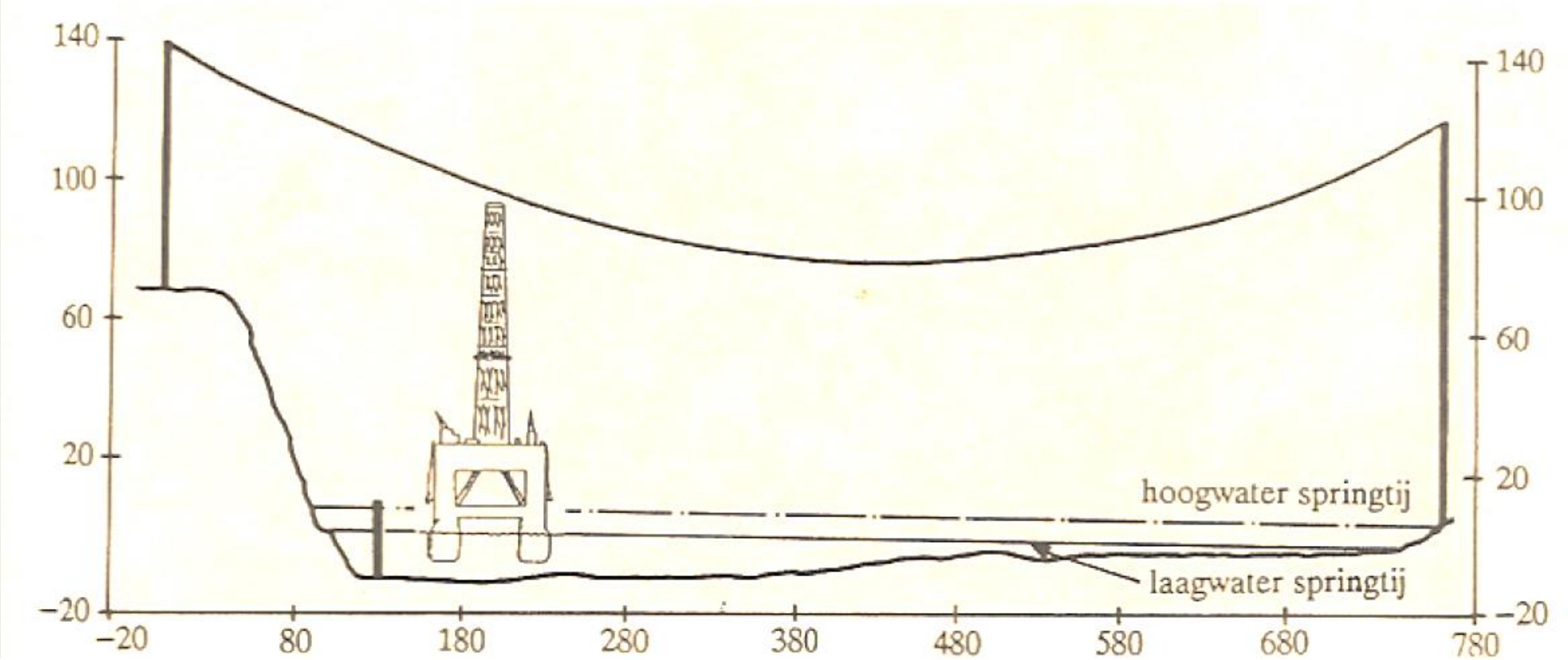
Michel Roelens
Maria-Boodschaplyceum Brussel (secondaire)
UCLL Diepenbeek (formation des profs de maths)
Revue **UITWISKELING**

Ma première chaînette

Dirk De Bock et Michel Roelens

Transfert d'une plate-forme pétrolière sur l'Escaut

Congrès de la SBPMef, Tournai, 27 août 1990

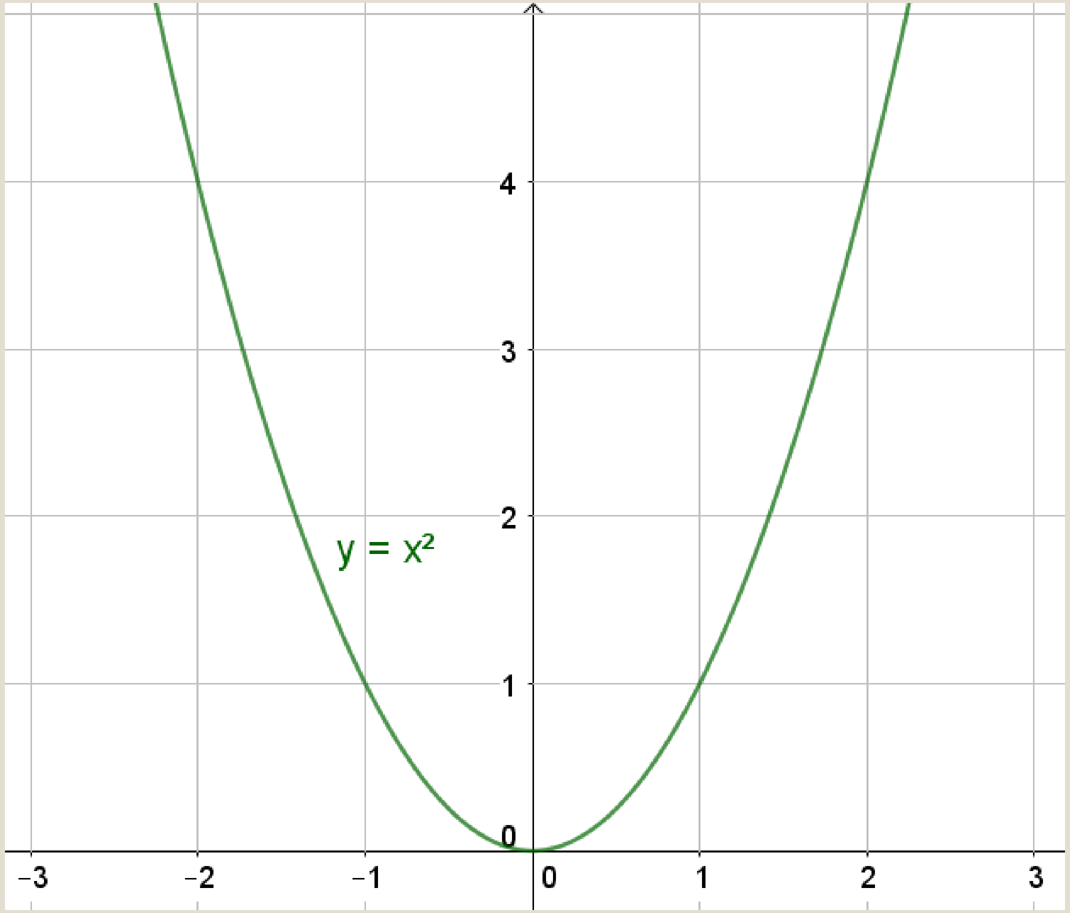


Aperçu

Parabole et chaînette

$$y = x^2$$

Essayons !



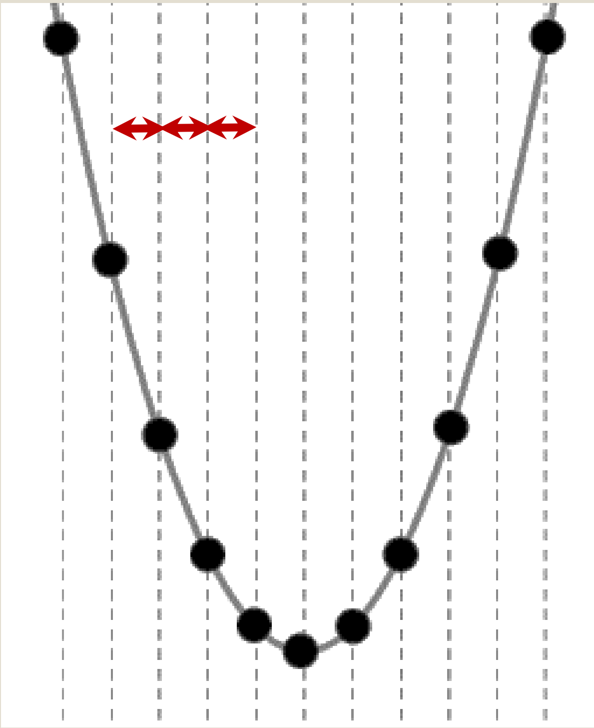
Parabole et chaînette

Parabole

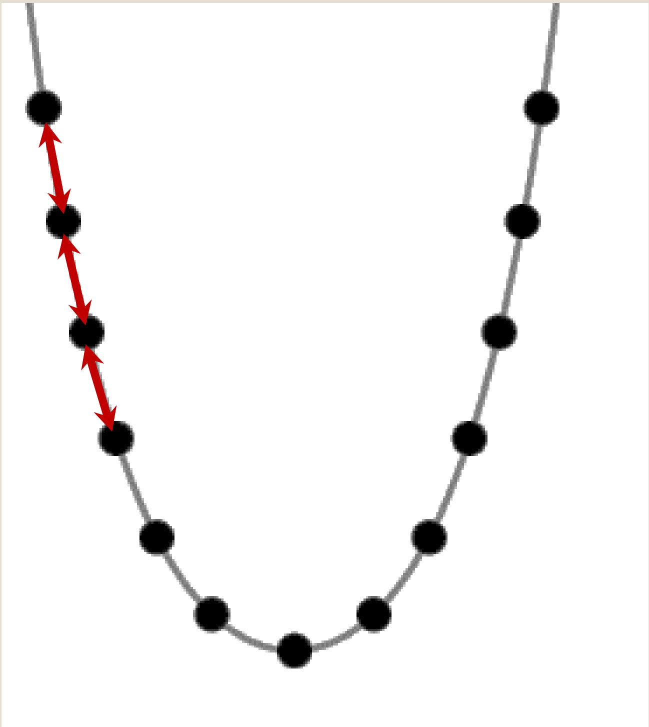
Chaînette

Parabole et chaînette

Parabole

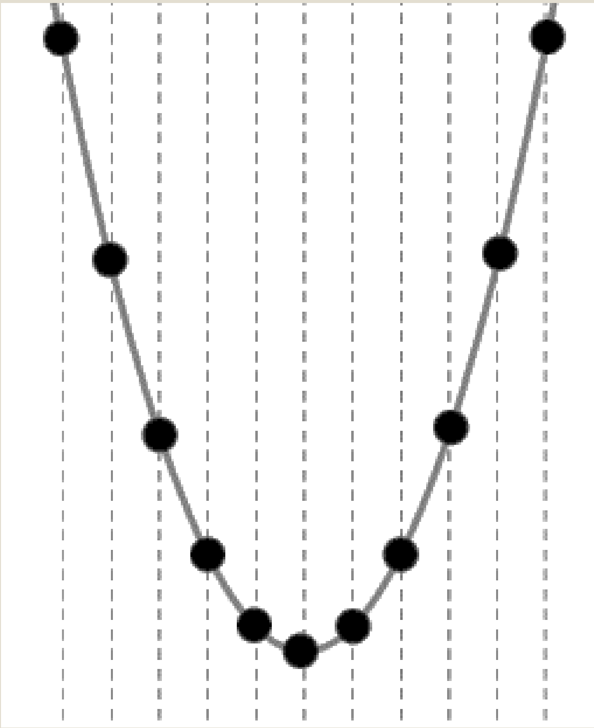


Chaînette



Parabole et chaînette

Parabole



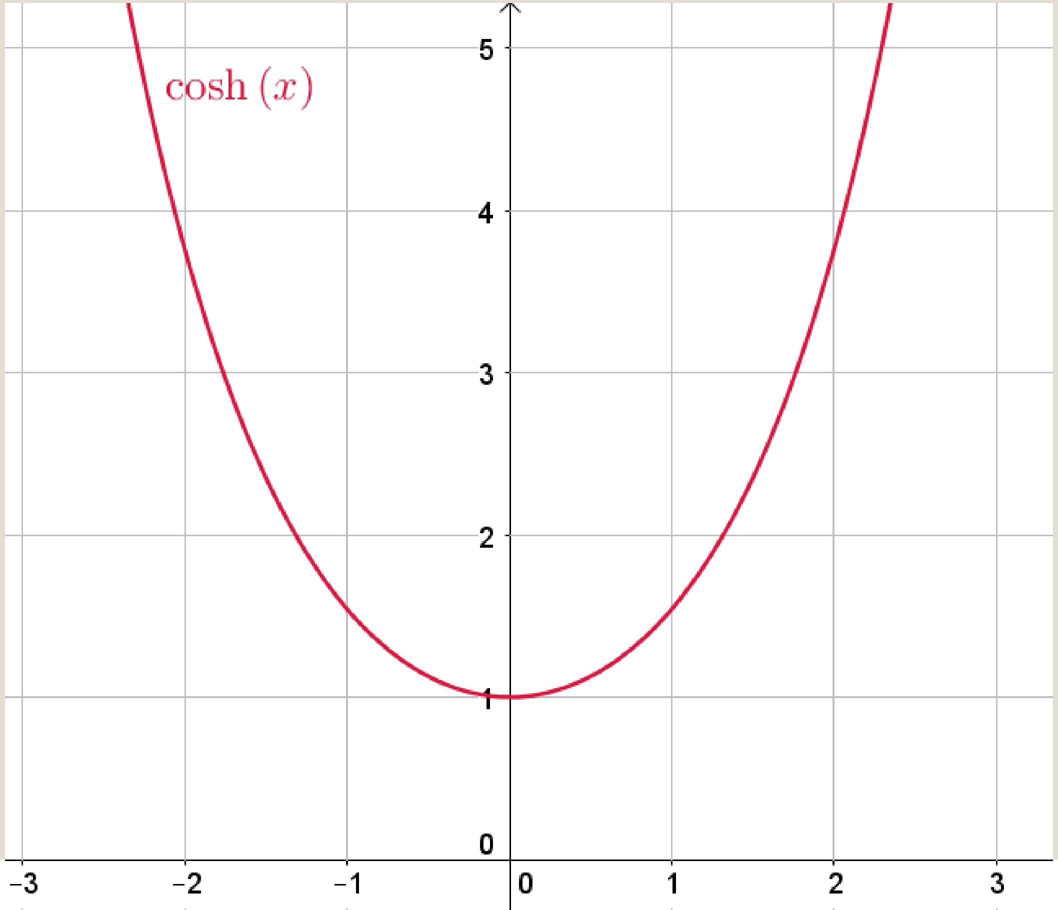
Devoir à remettre à la fin de l'exposé

A quelles distances mettre les perles?

Parabole et **chaînette**

- La chaînette a la **forme** du graphe de la fonction

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$



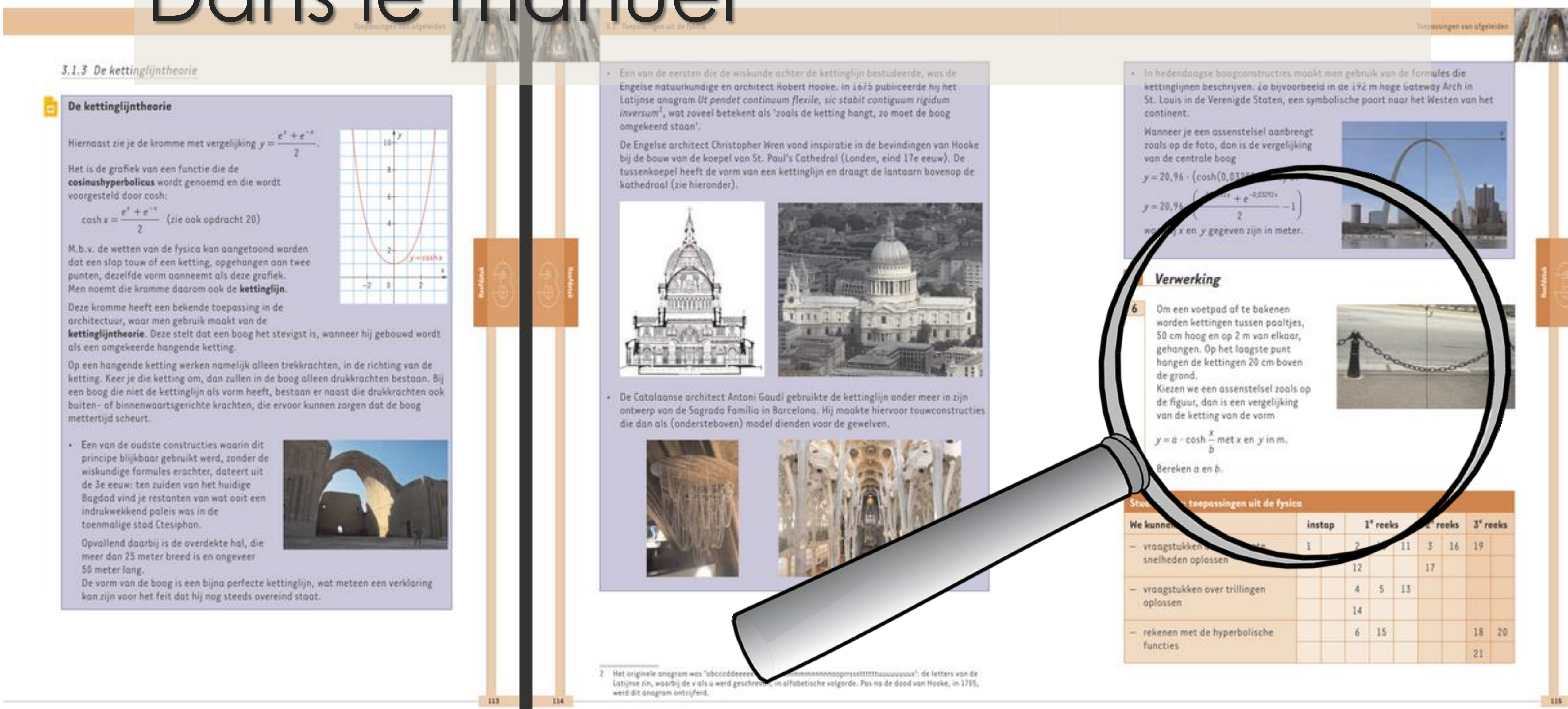
Essayons !


Nouveau pont près de Zermatt

Dans le manuel

- Définition de la fonction cosh
- Explication: une corde ou chaîne suspendue en deux points prend la **forme** du graphe de cosh, c'est pourquoi on l'appelle chaînette.
- Applications en architecture: stabilité de la chaînette retournée
- **Exercice**

Dans le manuel


3.1.3 De kettinglijntheorie

De kettinglijntheorie

Hiernaast zie je de kromme met vergelijking $y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$.

Het is de grafiek van een functie die de **cosinushyperbolicus** wordt genoemd en die wordt voorgesteld door cosh:

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \text{(zie ook opdracht 20)}$$

M.b.v. de wetten van de fysica kan aangetoond worden dat een slap touw of een ketting, opgehangen aan twee punten, dezelfde vorm aanneemt als deze grafiek. Men noemt die kromme daarom ook de **kettinglijn**.

Deze kromme heeft een bekende toepassing in de architectuur, waar men gebruik maakt van de **kettinglijntheorie**. Deze stelt dat een boog het stevigst is, wanneer hij gebouwd wordt als een omgekeerde hangende ketting.

Op een hangende ketting werken namelijk alleen trekkrachten, in de richting van de ketting. Keer je die ketting om, dan zullen in de boog alleen drukkrachten bestaan. Bij een boog die niet de kettinglijn als vorm heeft, bestaan er naast die drukkrachten ook buiten- of binnenwaartsgerichte krachten, die ervoor kunnen zorgen dat de boog mettertijd scheurt.

- Een van de oudste constructies waarin dit principe blijkbaar gebruikt werd, zonder de wiskundige formules erachter, dateert uit de 3e eeuw: ten zuiden van het huidige Bagdad vind je restanten van wat ooit een indrukwekkend paleis was in de toenmalige stad Ctesiphon.

  Opvallend daarbij is de overdekte hal, die meer dan 25 meter breed is en ongeveer 50 meter lang.
  De vorm van de boog is een bijna perfecte kettinglijn, wat meteen een verklaring kan zijn voor het feit dat hij nog steeds overeind staat.

- Een van de eersten die de wiskunde achter de kettinglijn bestudeerde, was de Engelse natuurkundige en architect Robert Hooke. In 1675 publiceerde hij het Latijnse anagram *Ut pendet continuum flexile, sic stabit contiguum rigidum inversum*[2], wat zoveel betekent als 'zoals de ketting hangt, zo moet de boog omgekeerd staan'.

  De Engelse architect Christopher Wren vond inspiratie in de bevindingen van Hooke bij de bouw van de koepel van St. Paul's Cathedral (Londen, eind 17e eeuw). De tussenkoepel heeft de vorm van een kettinglijn en draagt de lantaarn bovenop de kathedraal (zie hieronder).

- De Catalaanse architect Antoni Gaudí gebruikte de kettinglijn onder meer in zijn ontwerp van de Sagrada Familia in Barcelona. Hij maakte hiervoor touwconstructies die dan als (ondersteboven) model dienden voor de gewelven.

- In hedendaagse boogconstructies maakt men gebruik van de formules die kettinglijnen beschrijven. Zo bijvoorbeeld in de 192 m hoge Gateway Arch in St. Louis in de Verenigde Staten, een symbolische poort naar het Westen van het continent.

  Wanneer je een assenstelsel aanbrengt zoals op de foto, dan is de vergelijking van de centrale boog

  $y = 20{,}96 \cdot (\cosh(0{,}03$…

  $y = 20{,}96 \cdot \left(\frac{\ldots + e^{-0{,}03292x}}{2} - 1\right)$

  wa… x en y gegeven zijn in meter.

Verwerking

6 Om een voetpad af te bakenen worden kettingen tussen paaltjes, 50 cm hoog en op 2 m van elkaar, gehangen. Op het laagste punt hangen de kettingen 20 cm boven de grond.
Kiezen we een assenstelsel zoals op de figuur, dan is een vergelijking van de ketting van de vorm

$y = a \cdot \cosh \frac{x}{b}$ met x en y in m.

Bereken a en b.

Stu… toepassingen uit de fysica									
We kunne…	instap		1e reeks			2e reeks		3e reeks	
– vraagstukken … snelheden oplossen	1		2		11	3	16	19	
			12			17			
– vraagstukken over trillingen oplossen			4	5	13				
			14						
– rekenen met de hyperbolische functies			6	15				18	20
								21	

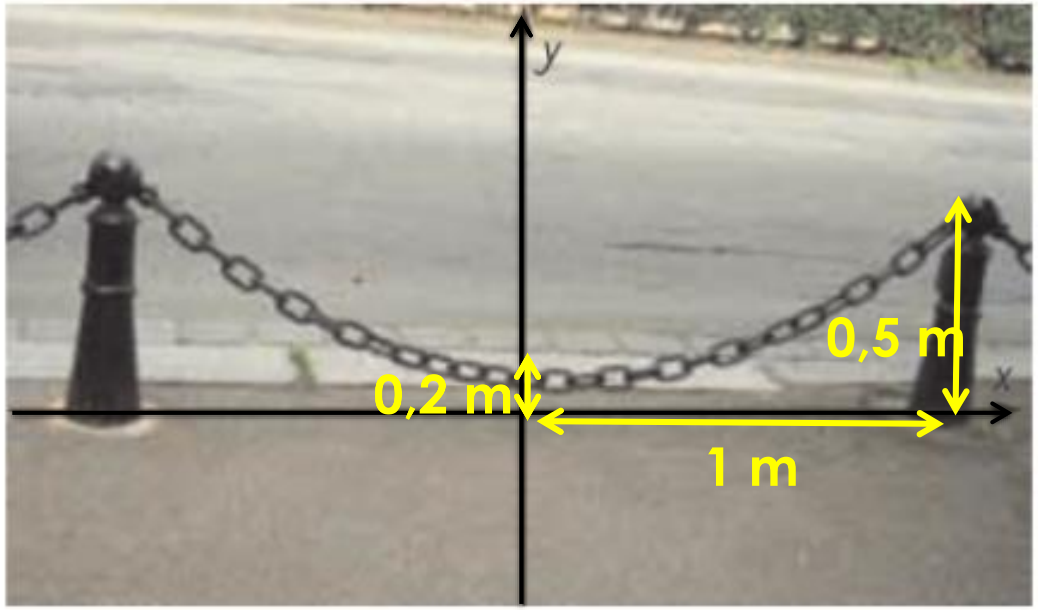
2 Het originele anagram was 'abcccddeeeee…mmmmnnnnnnooprrsssttttttuuuuuuuux': de letters van de Latijnse zin, waarbij de v als u werd geschreven, in alfabetische volgorde. Pas na de dood van Hooke, in 1705, werd dit anagram ontcijferd.

Dans le manuel

6 Om een voetpad af te bakenen worden kettingen tussen paaltjes, 50 cm hoog en op 2 m van elkaar, gehangen. Op het laagste punt hangen de kettingen 20 cm boven de grond.
Kiezen we een assenstelsel zoals op de figuur, dan is een vergelijking van de ketting van de vorm

$$y = a \cdot \cosh \frac{x}{b} \text{ met } x \text{ en } y \text{ in m.}$$

Bereken a en b.



Votre solution?

Dans le manuel

La solution du manuel

$$y = a \cosh \frac{x}{b}$$

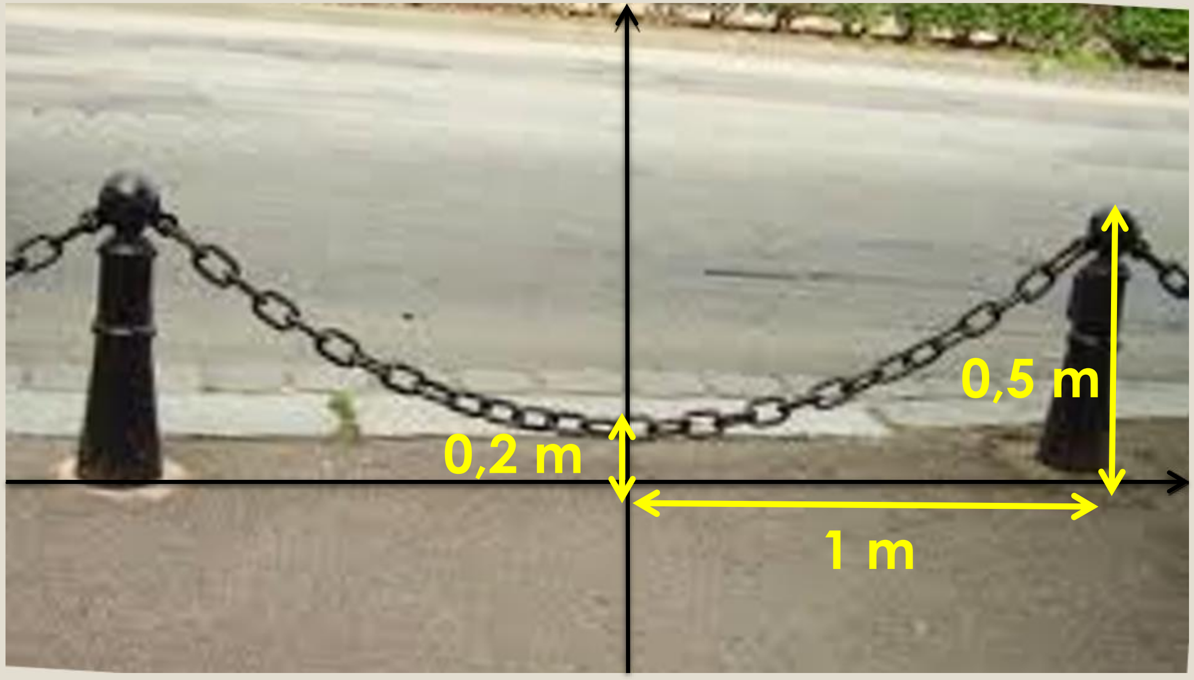
$(0; 0{,}2)$ donne $0{,}2 = a \cosh 0 = a$

donc $a = 0{,}2$

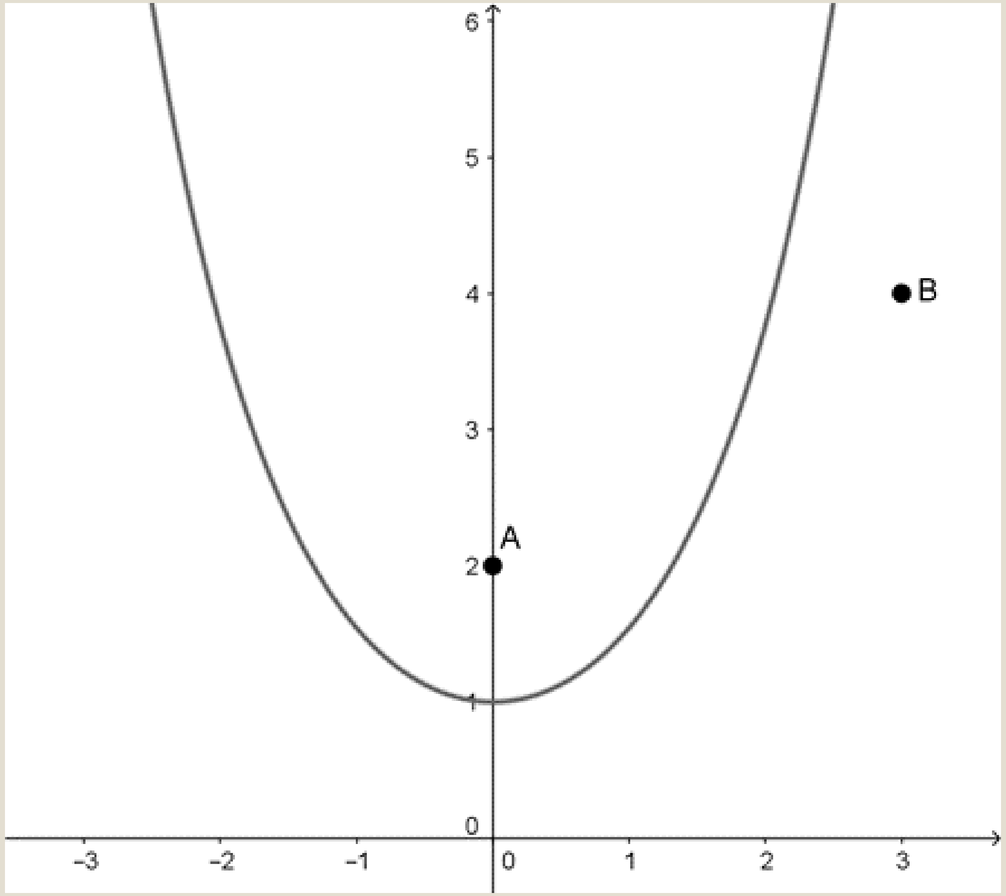
$(1; 0{,}5)$ donne $0{,}5 = 0{,}2 \cosh \frac{1}{b}$

donc $b = \pm 0{,}638$

- C'est facile. Commentaire?
- La ***forme*** de COSH…



Hors du manuel

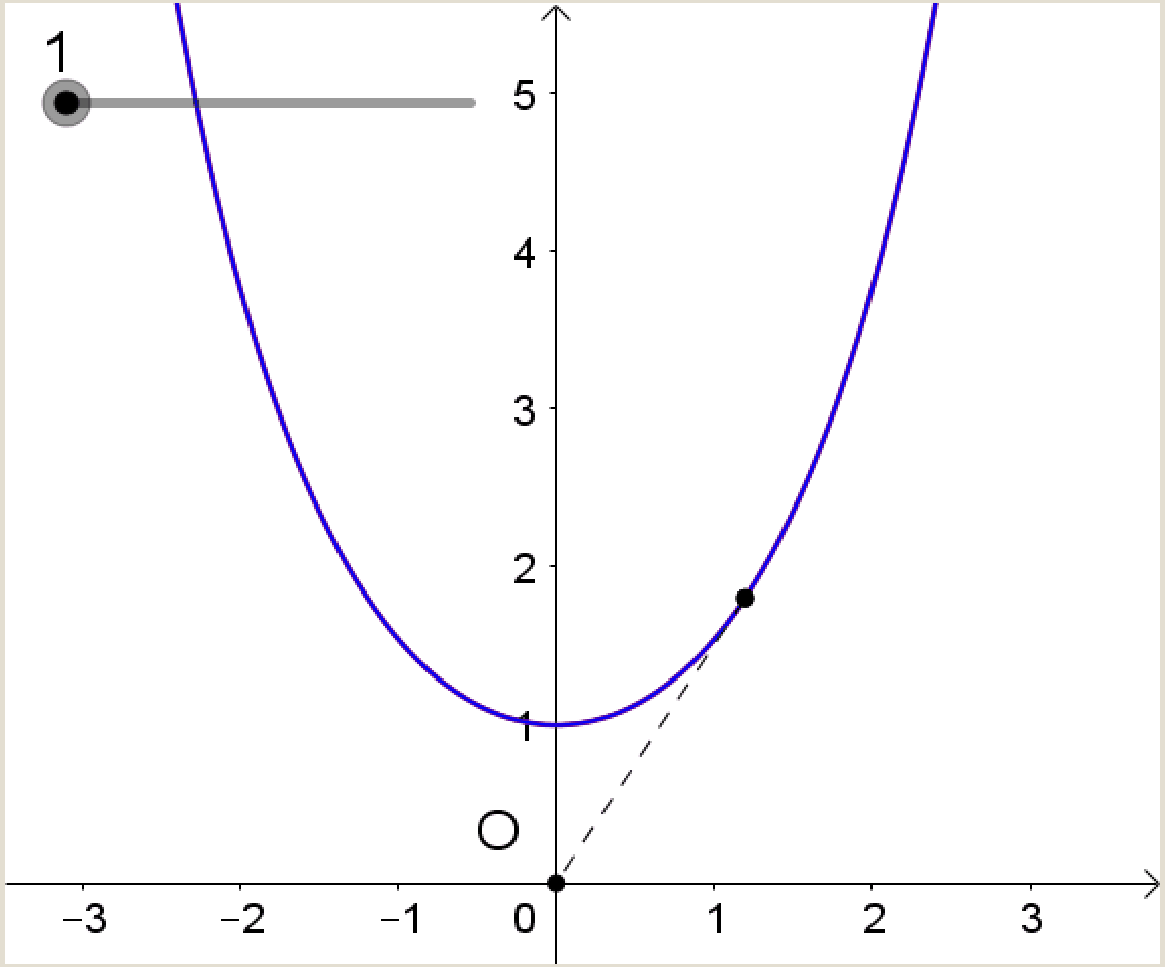


Par exemple :

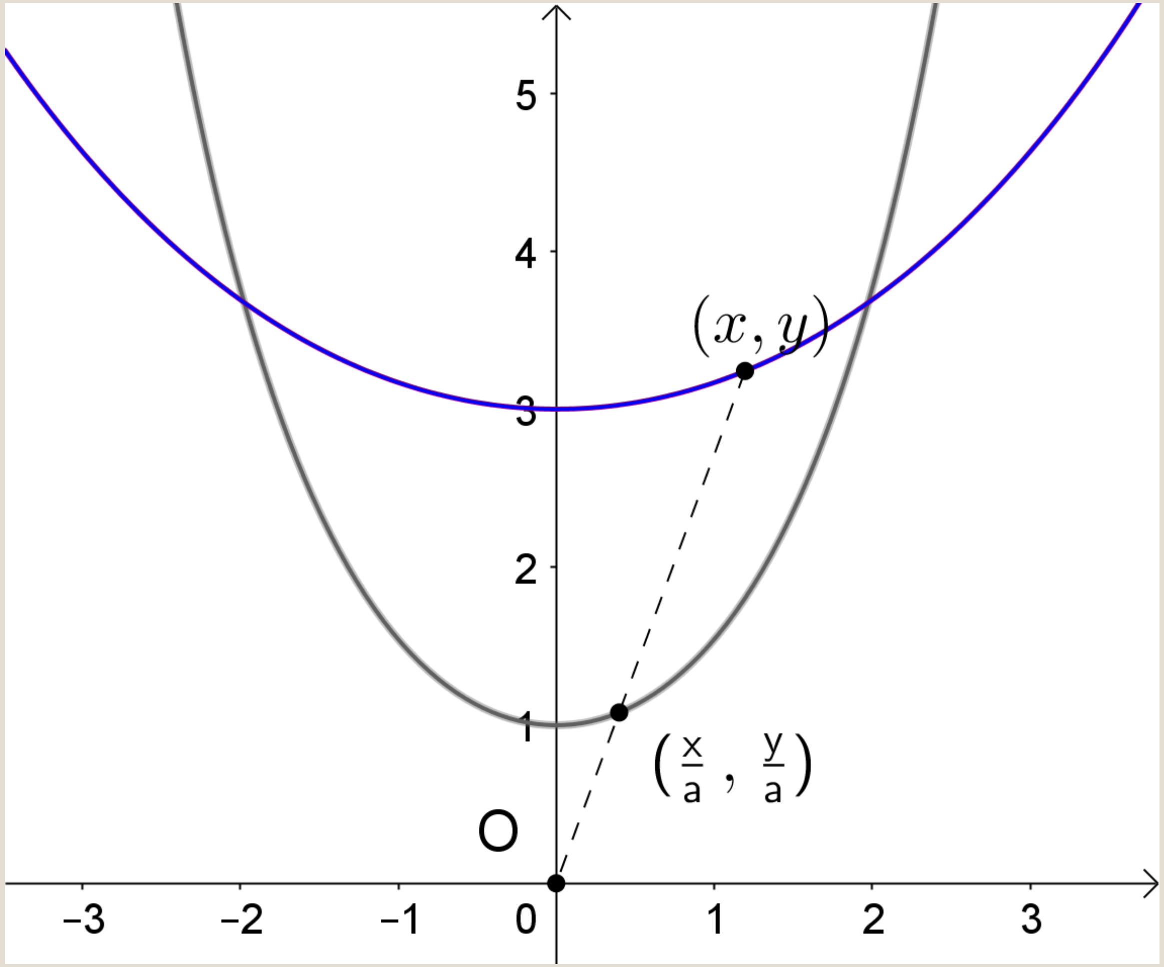
sommet $A\ (0,2)$

et par $B\ (3,4)$

Hors du manuel



Hors du manuel



$$y = \cosh x$$

Homothétie :

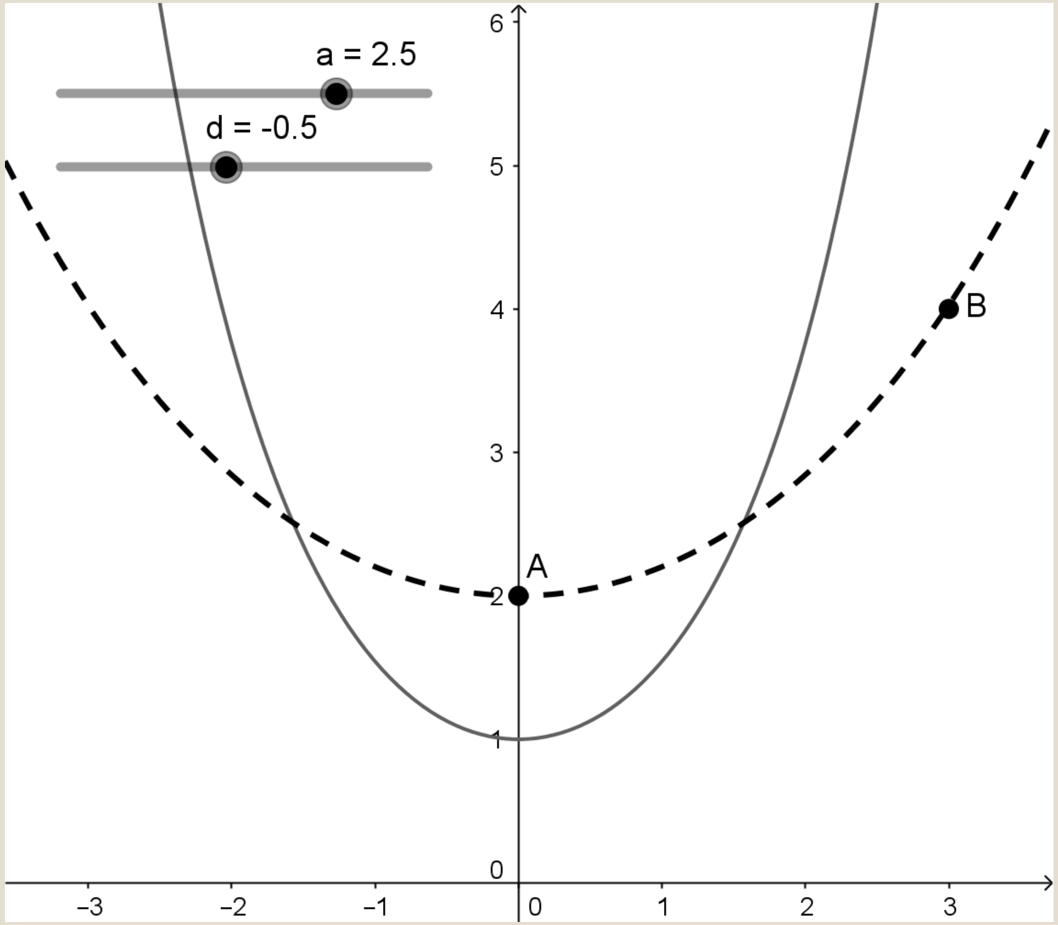
$$\frac{y}{a} = \cosh \frac{x}{a}$$

$$y = a \cosh \frac{x}{a}$$

Translation verticale :

$$y = a \cosh \frac{x}{a} + d.$$

Hors du manuel



Visons juste !

Mes élèves :

« c'est pas des maths ça ! »

Hors du manuel

- Par le point $(0,2)$, donc $2 = a + d$;
- Par le point $(3,4)$ donc $4 = a\cosh\frac{3}{a} + d$.
- Substituons $d = 2 - a$ dans la deuxième équation:

$$4 = a\cosh\frac{3}{a} + 2 - a$$

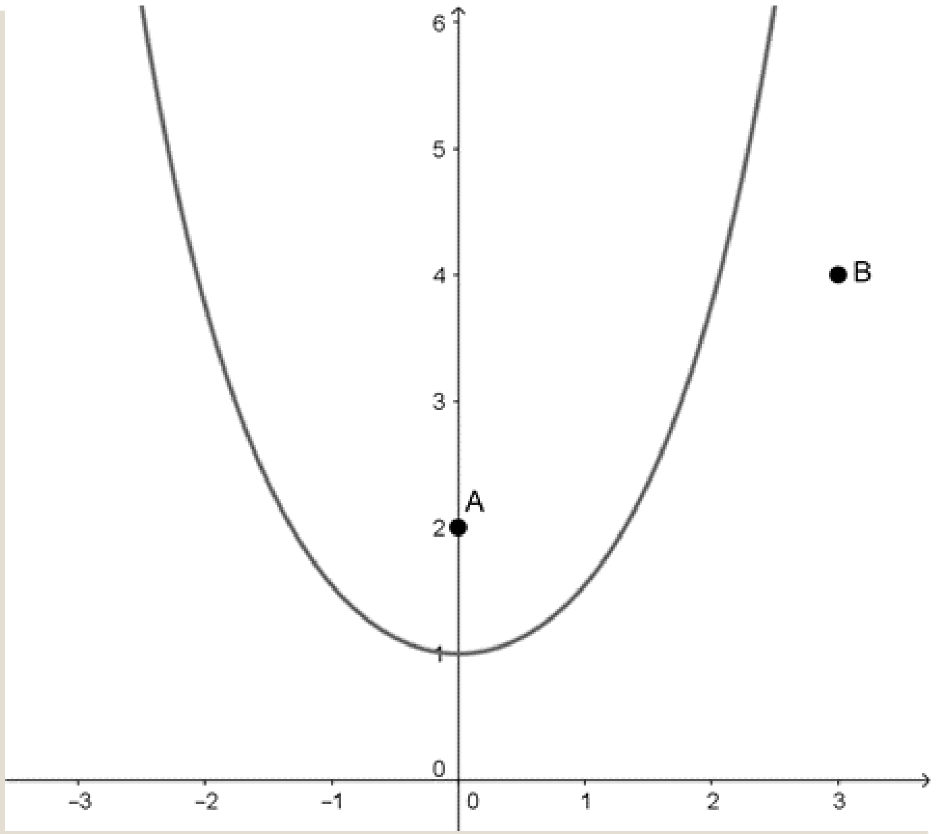
Équation transcendante.

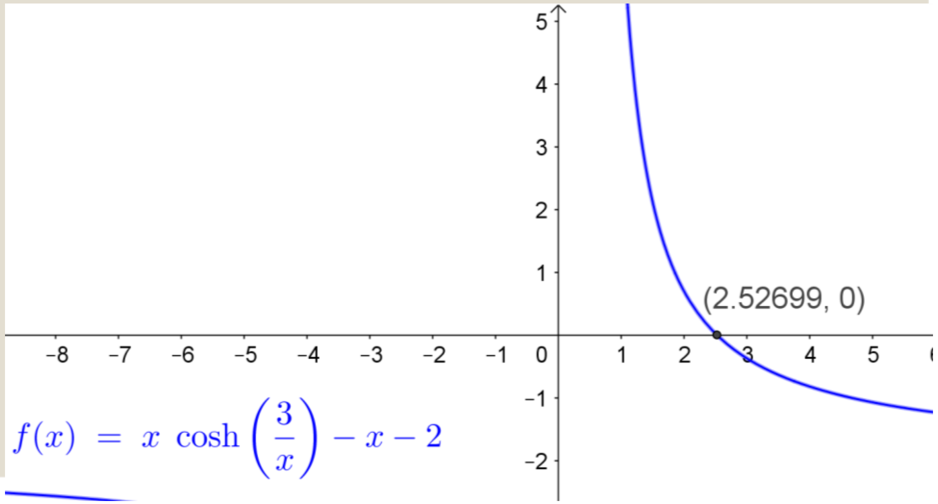
- GeoGebra: zéro de la fonction

$$a \longmapsto a\cosh\frac{3}{a} - a - 2$$

- On trouve: $a \approx 2{,}527$
- et donc $d \approx -0{,}527$.

Nous avions bien visé...





Hors du manuel

$$y = a \cosh \frac{x}{a} + d$$

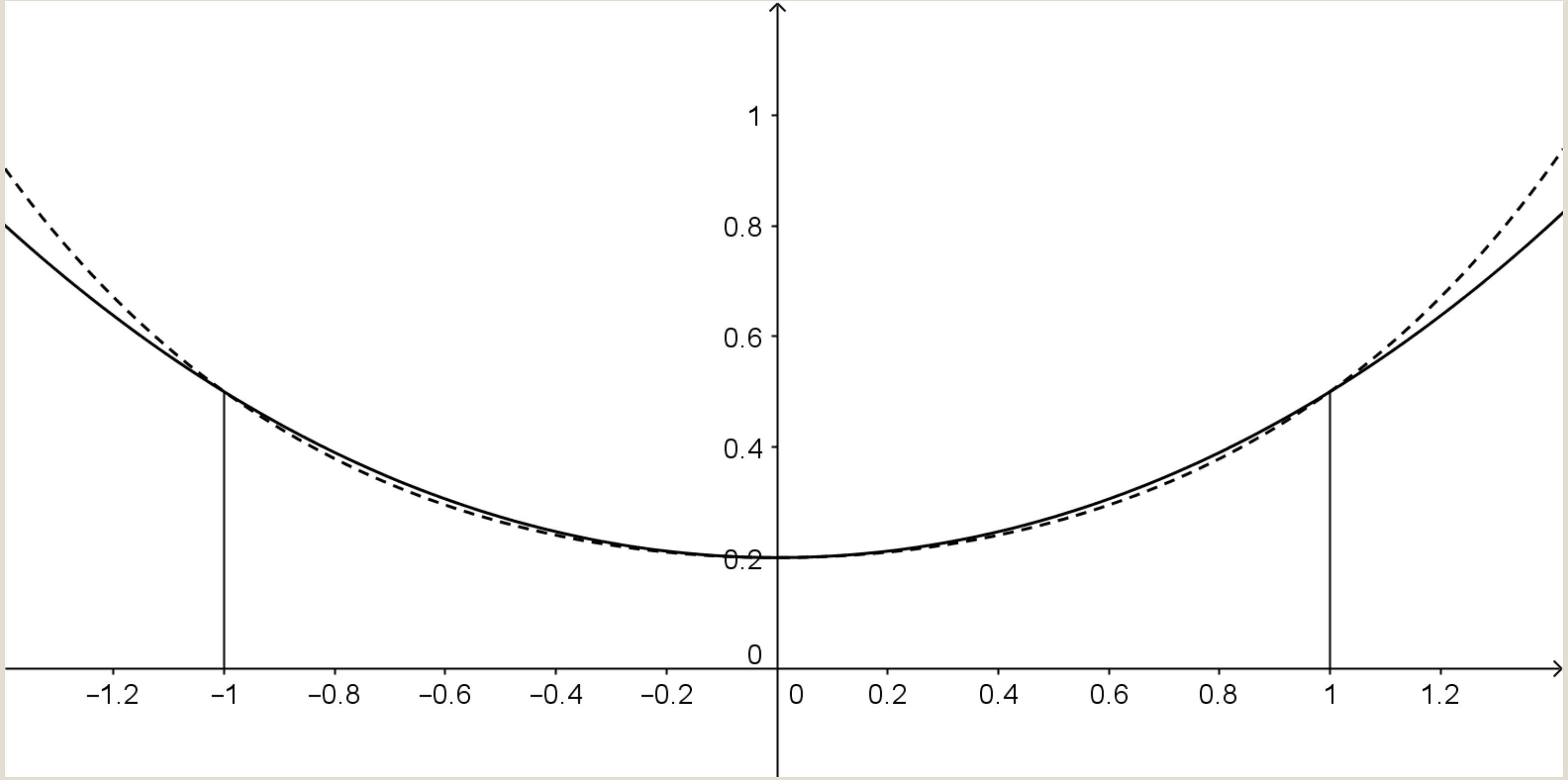
Et dans le manuel :

$$y = a \cosh \frac{x}{b}.$$

Comparons leur solution avec la nôtre.

Hors du manuel

- Manuel: - - - - - - - - - - - - Nous: ————————



Hors du manuel

Il s'agit de….

… garder la forme !

Et pourtant….

- Avec les paraboles, nous faisons bien souvent comme le manuel:

  $y = x^2 \ \rightarrow y = a\, x^2$ (étirement vertical)

- $y = x^2 \ \rightarrow y = a\left(\frac{x}{a}\right)^2 = \frac{1}{a}x^2 = \left(\frac{x}{\sqrt{a}}\right)^2$

homothétie

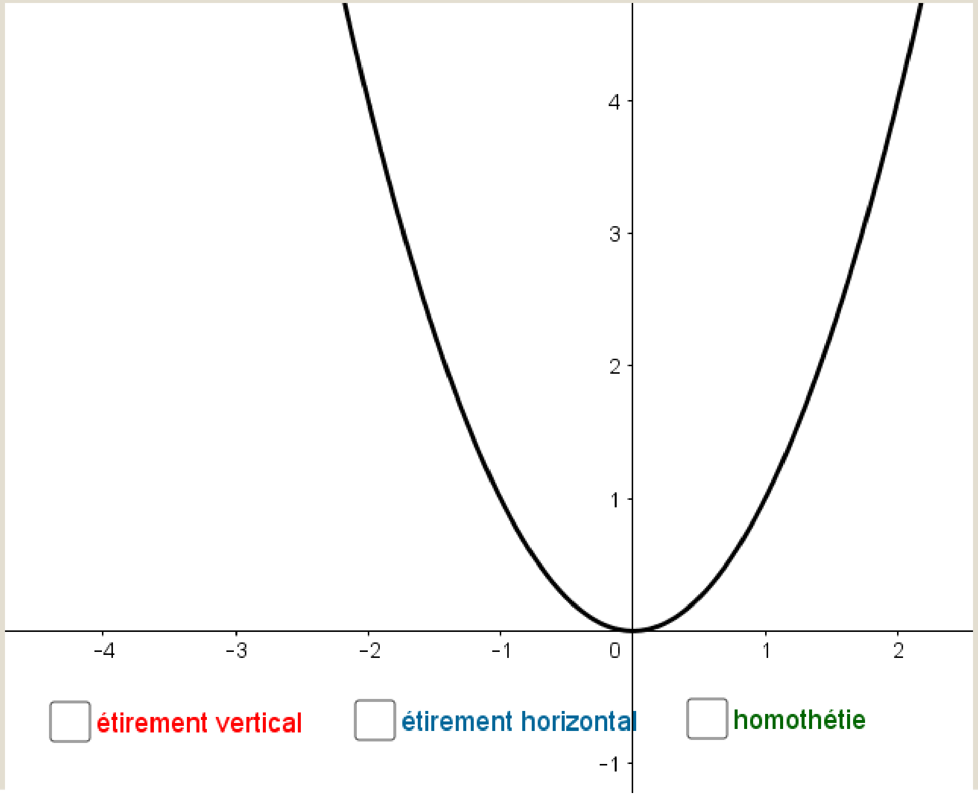
Étirement/compression horizontale

Étirement/compression verticale

Et pourtant...

- Avec les paraboles, nous avons fait comme le manuel:

$y = x^2 \ \rightarrow y = a\,x^2$ (étirement vertical)



Et pourtant…

- Je dirais même plus
- $y = x^q \rightarrow y = a\left(\frac{x}{a}\right)^q = a^{1-q}x^q = \left(\frac{x}{a^{1-\frac{1}{q}}}\right)^q$

homothétie

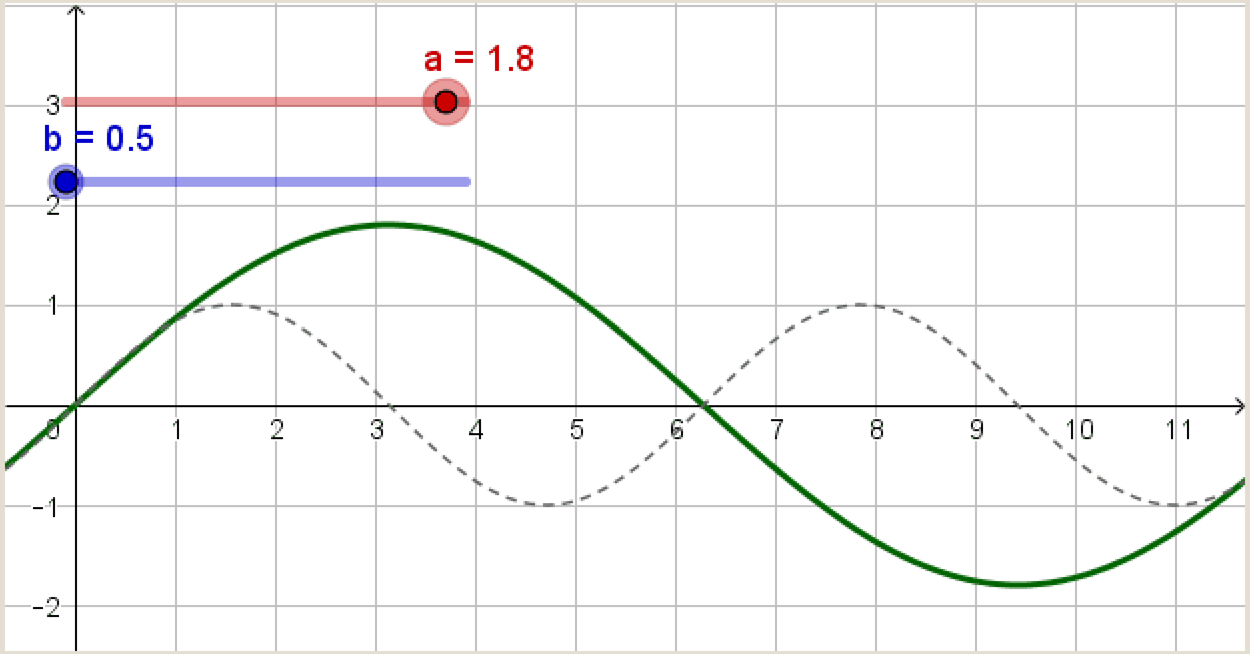
Étirement/compression horizontale

Étirement/compression verticale

Et pourtant

- Et les sinus alors ?

$$y = a \sin bx$$



COSH en COS: même chose à H près

Qu'est-ce que $\cos x$?

- Rapport de longueurs dans un triangle rectangle

  Mais pour un angle obtus?

- Abscisse d'un point du cercle trigonométrique

  Mais pour un argument complexe?

- Valeur d'une série convergente

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots$$

Généraliser

COSH en COS: même chose à *i* près

Et cosh x ?

$$\cosh x = \frac{e^{x} + e^{-x}}{2}$$

$$e^{x} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^6}{6!} + \cdots$$

$$\cosh x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} \ldots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots$$

$$\cosh ix = \cos x$$

$$\cos ix = \cosh x$$

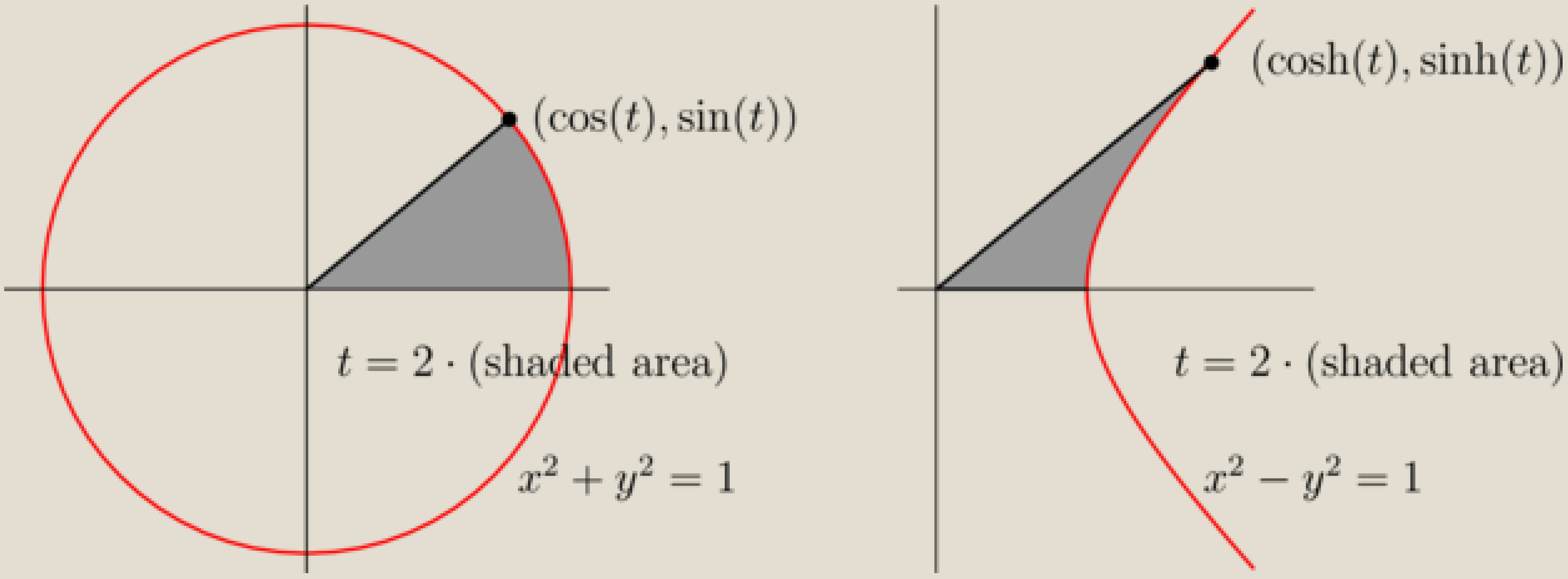
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \cosh x = \frac{e^{x} - e^{-x}}{2} = \sinh x$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \cos x = -\sin x$$

$$\int \cosh x \, \mathrm{d}x = \sinh x + c$$

$$\int \cos x \, \mathrm{d}x = \sin x + c$$

COSH et COS: même chose à i près

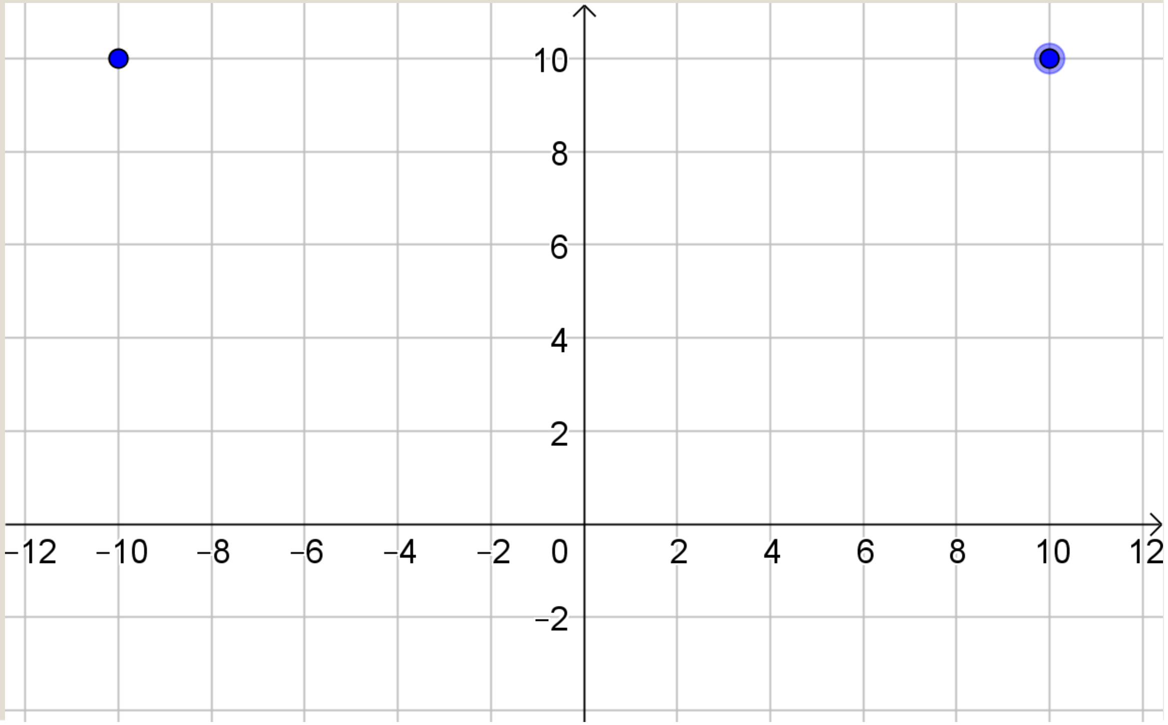


La longueur de la chaînette

On pend une chaine de 30 unités entre les points $(-10, 10)$ et $(10, 10)$.

Pend-elle en-dessous de l'origine?

Essayons !



La longueur de la chaînette

$$f(x) = a\cosh\frac{x}{a} = a\frac{e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}}{2}$$

$$f'(x) = \frac{e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}}{2}$$

$$L = \int_0^{x_1} \sqrt{1 + \left(\frac{e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}}{2}\right)^2}\, dx$$

$$= \int_0^{x_1} \sqrt{1 + \frac{e^{\frac{2x}{a}} - 2 + e^{-\frac{2x}{a}}}{4}}\, dx$$

$$= \int_0^{x_1} \sqrt{\frac{e^{\frac{2x}{a}} + 2 + e^{-\frac{2x}{a}}}{4}}\, dx$$

$$= \int_0^{x_1} \sqrt{\left(\frac{e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}}{2}\right)^2}\, dx$$

$$= \int_0^{x_1} \frac{e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}}{2}\, dx$$

$$= \left[a\frac{e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}}{2}\right]_0^{x_1} = a\sinh\frac{x_1}{a}$$

La longueur de la chaînette

On pend une chaine de 30 cm entre les points $(-10, 10)$ et $(10, 10)$.

Pend-elle en-dessous de l'origine?

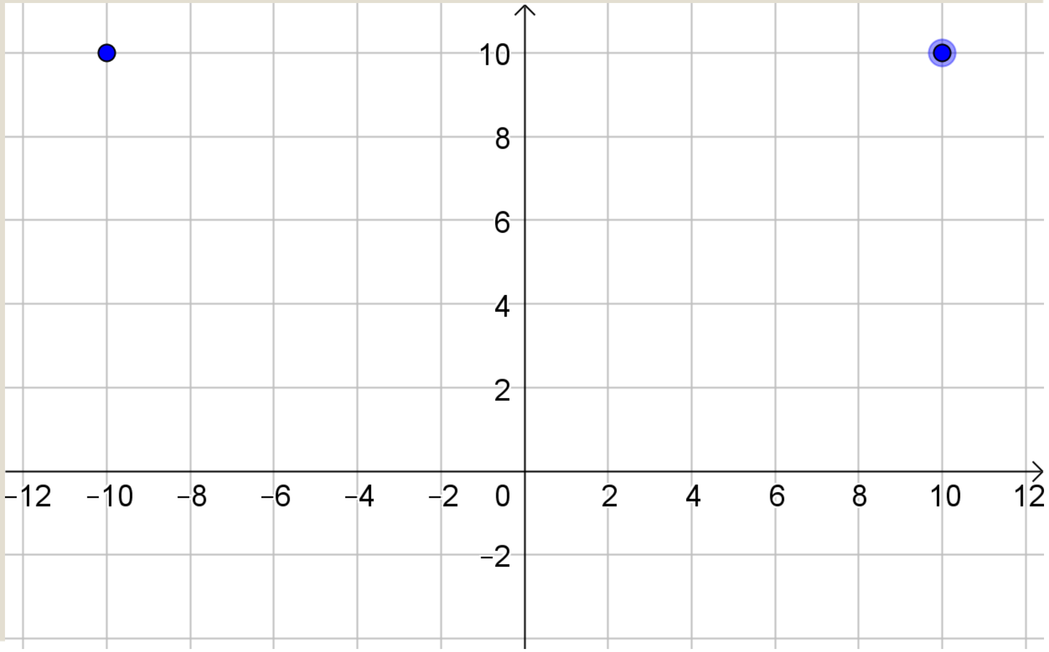
$$y = a\cosh\frac{x}{a} + d$$

Sommet $(0, a+d)$

Longueur de sa moitié est 15 et **passe par $(10, 10)$**.

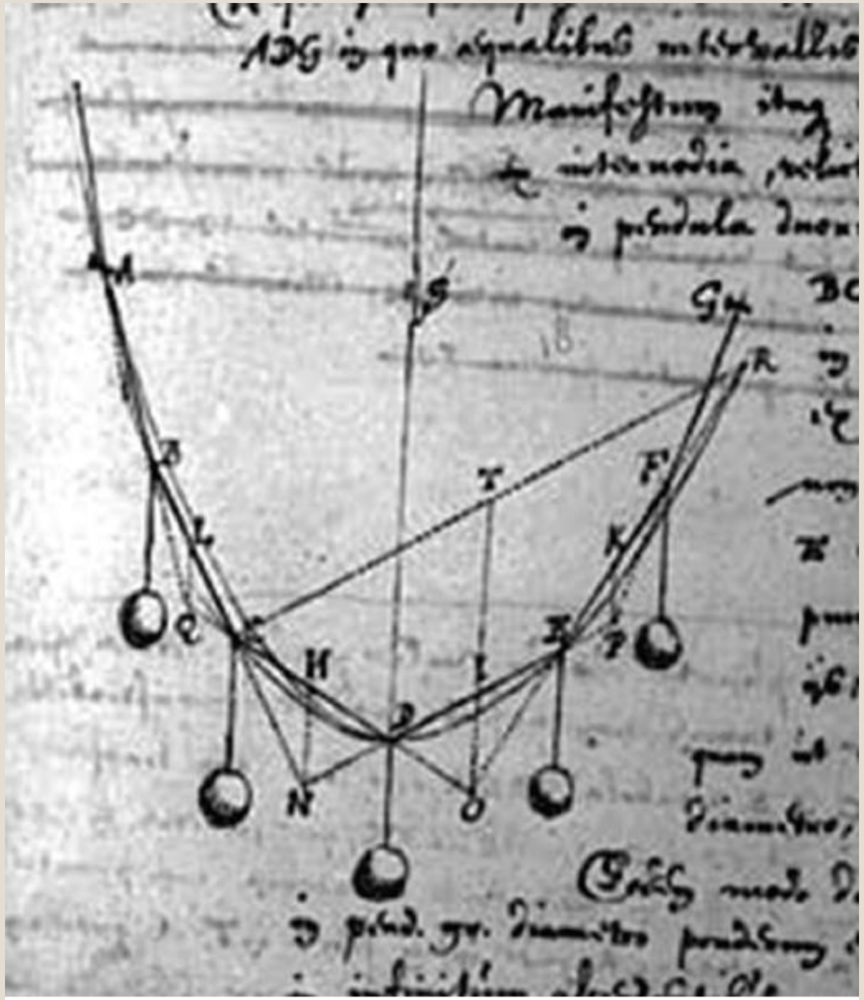
$$\begin{cases} a\sinh\dfrac{10}{a} = 15 \\ 10 = a\cosh\dfrac{10}{a} + d \end{cases} \qquad \begin{cases} a = 6{,}164729\ldots \\ d = -6{,}21739\ldots \end{cases}$$

Sommet $(0, -0{,}052665)$



Parabole et COSH par équadiff

- Christiaan Huygens (17^{e} siècle): avant les équadiffs



Parabole et COSH par équadiff

Morceau d'une chaînette.

Choix des axes.

Notre morceau entre $O\ (0,0)$ et $A(x,y)$.

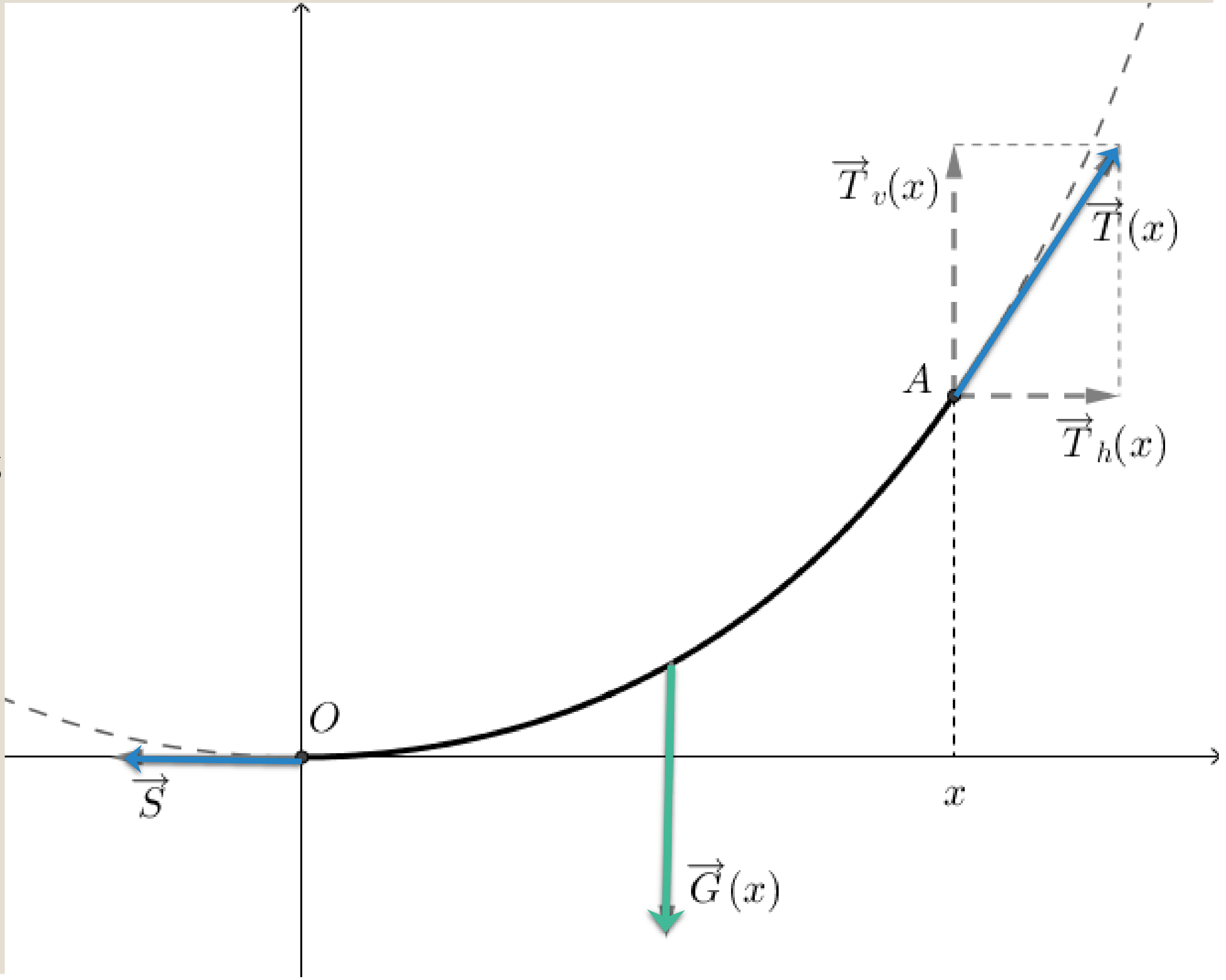
Force de pesanteur $\vec{G}\ (x)$

Forces de traction $\vec{S}$ et $T(x)$, tangentes

$\vec{S}$ indépendante de x

Équilibre:

$$\begin{cases} T_h(x) = S \\ T_v(x) = G(x) \end{cases}$$



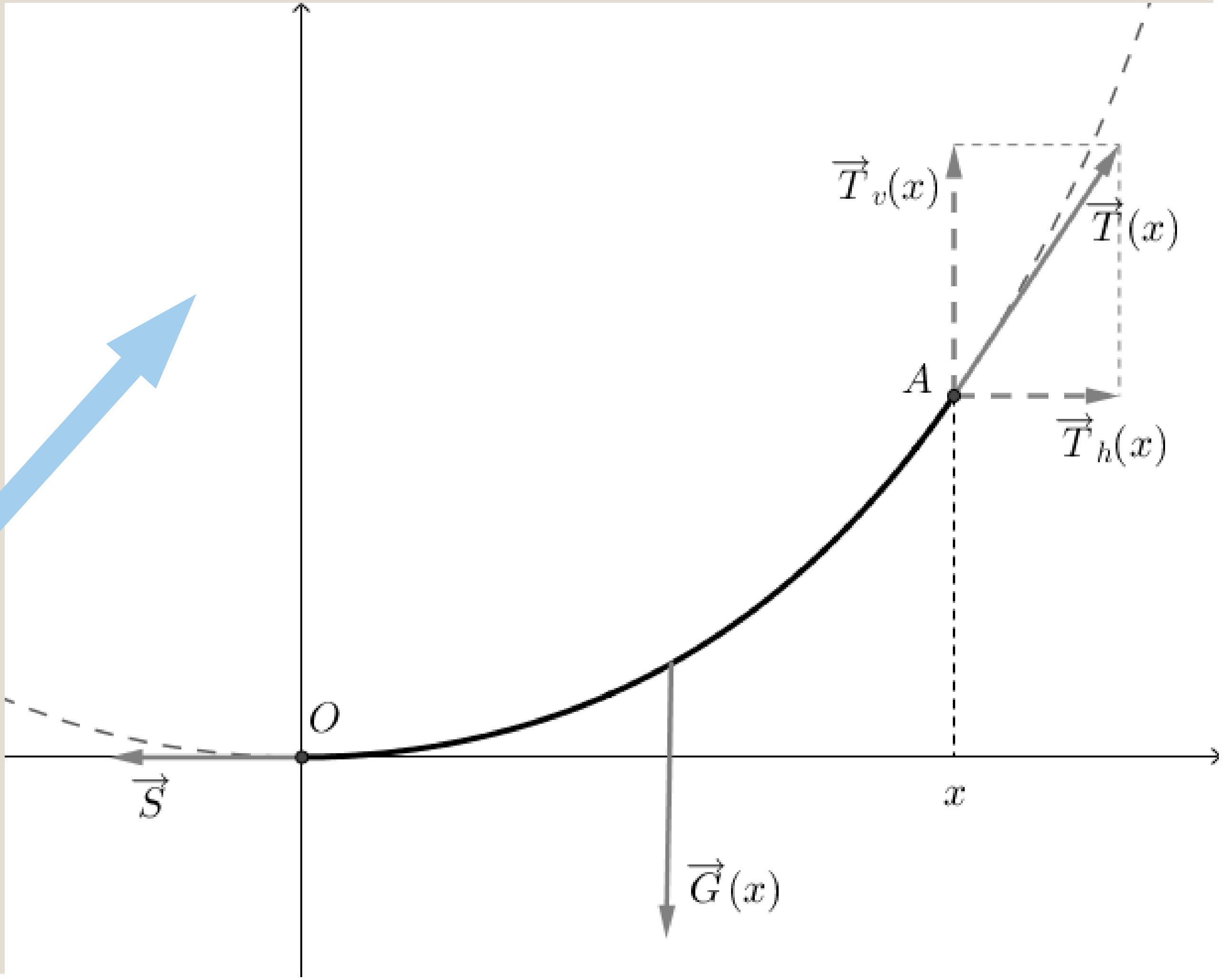
Parabole et COSH par équation différentielle

Équilibre:

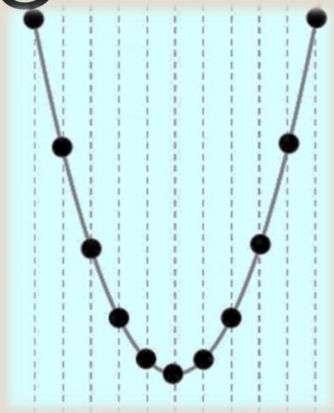
$$\begin{cases} T_h(x) = S \\ T_v(x) = G(x) \end{cases}$$

Graphe de quelle fonction f?

$$f'(x) = \frac{T_v(x)}{T_h(x)} = \frac{G(x)}{S}$$



Parabole et COSH par équation différentielle



Premier cas

$$G(x) = kx$$

Donc

$$f'(x) = \frac{k}{S}x$$

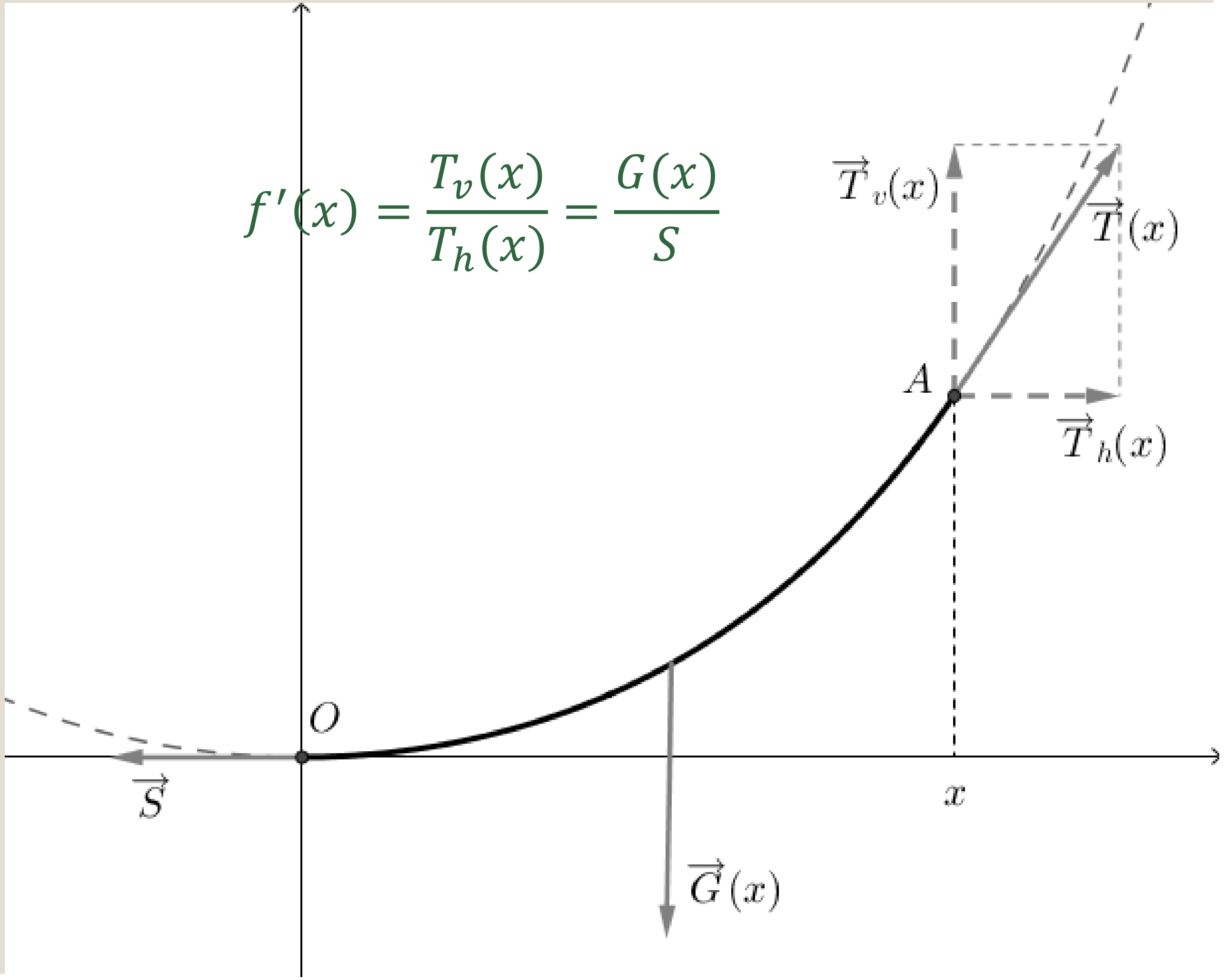
$$f(x) = \frac{k}{2S}x^2 + c$$

Remplir $(0,0)$

$$y = \frac{k}{2S}x^2$$

Parabole !

$$f'(x) = \frac{T_v(x)}{T_h(x)} = \frac{G(x)}{S}$$



Parabole et COSH par équadiff

Deuxième cas

$$G(x) = k\int_0^x \sqrt{1+\left(f'(t)\right)^2}\,dt$$

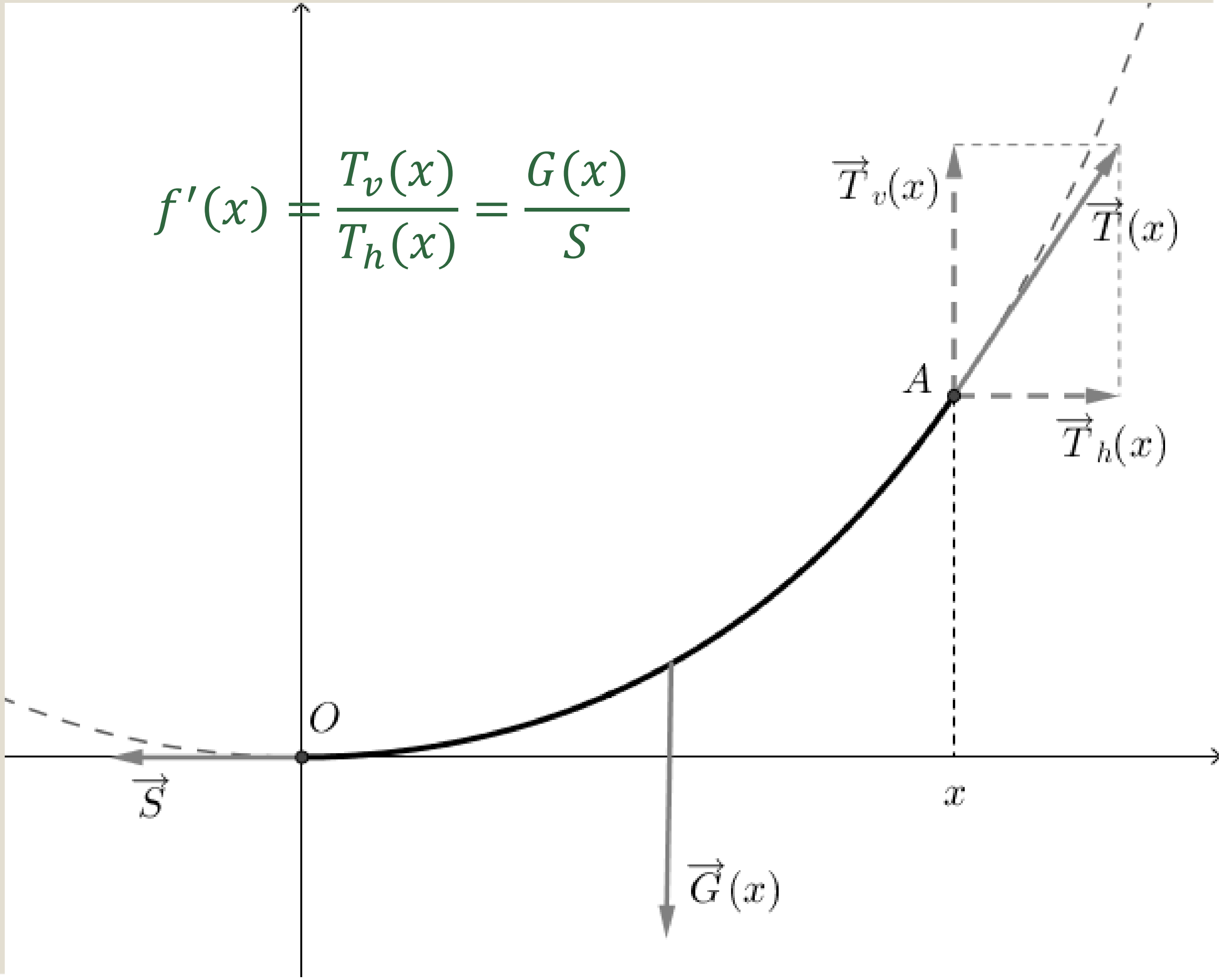
$$f'(x) = \frac{k}{S}\int_0^x \sqrt{1+\left(f'(t)\right)^2}\,dt$$

$$f''(x) = \frac{k}{S}\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}$$

$$\int \frac{\mathrm{d}f'(x)}{\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}} = \int \frac{k}{S}\,\mathrm{d}x$$

Une équadiff en $f'(x)$

$$f'(x) = \frac{T_v(x)}{T_h(x)} = \frac{G(x)}{S}$$



Parabole et COSH par équadiff

Deuxième cas

$$\int \frac{\mathrm{d}f'(x)}{\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}} = \int \frac{k}{S}\,\mathrm{d}x$$

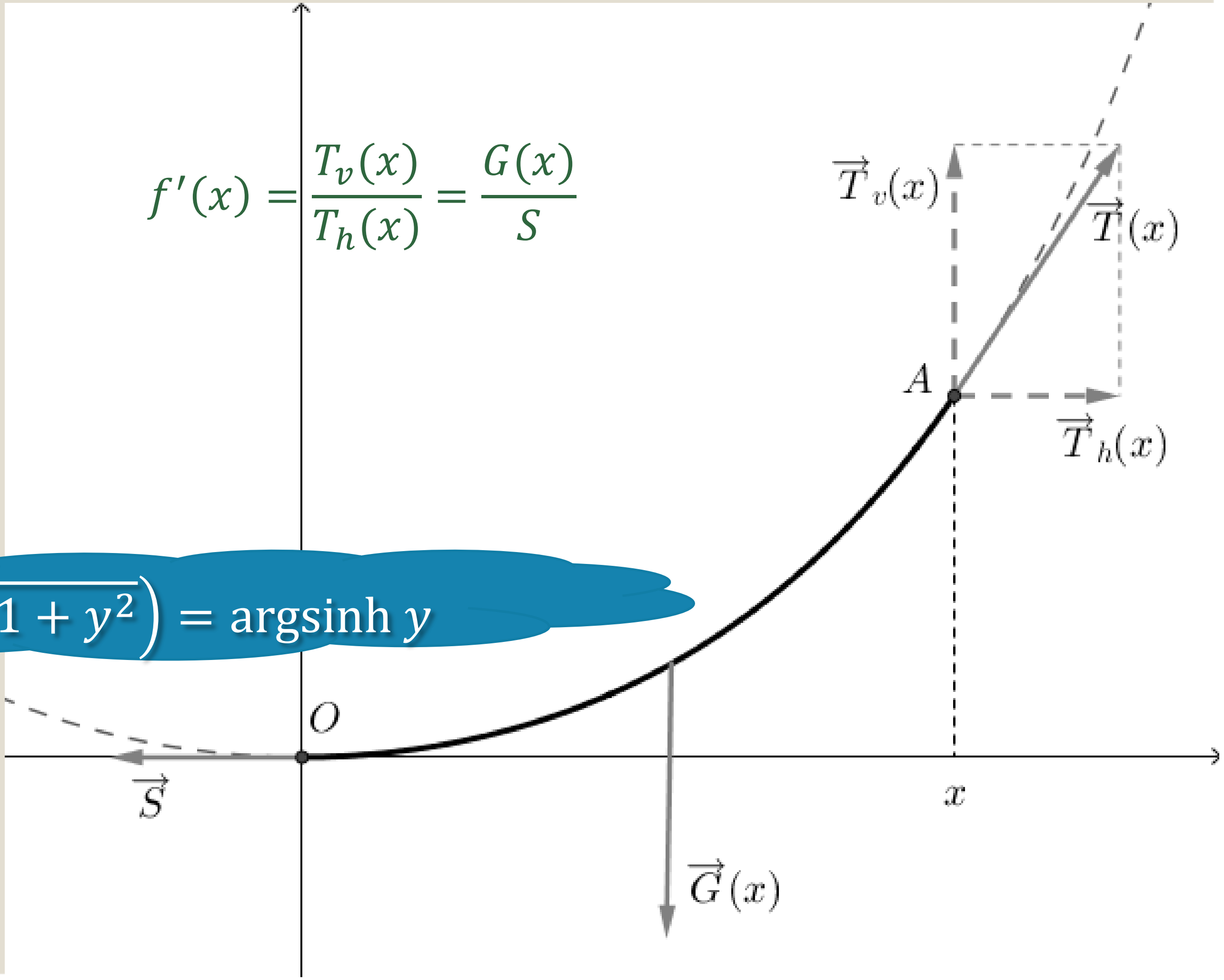
$$\ln\left(f'(x)+\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\right) = \frac{k}{S}\,x + c$$

$$\operatorname{argsinh} f'(x) = \frac{k}{S}x + c$$

$$\ln\left(y+\sqrt{1+y^2}\right) = \operatorname{argsinh} y$$

$$f'(x) = \sinh\left(\frac{k}{S}x + c\right)$$

$$f(x) = \frac{S}{k}\cosh\left(\frac{k}{S}x + c\right) + d$$



Parabole et COSH par équadiff

Deuxième cas

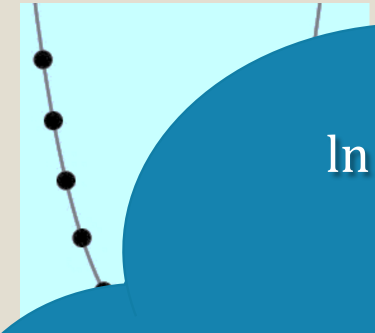
$$\int \frac{\mathrm{d}f'(x)}{\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}} = \int \frac{k}{S}\,\mathrm{d}x$$

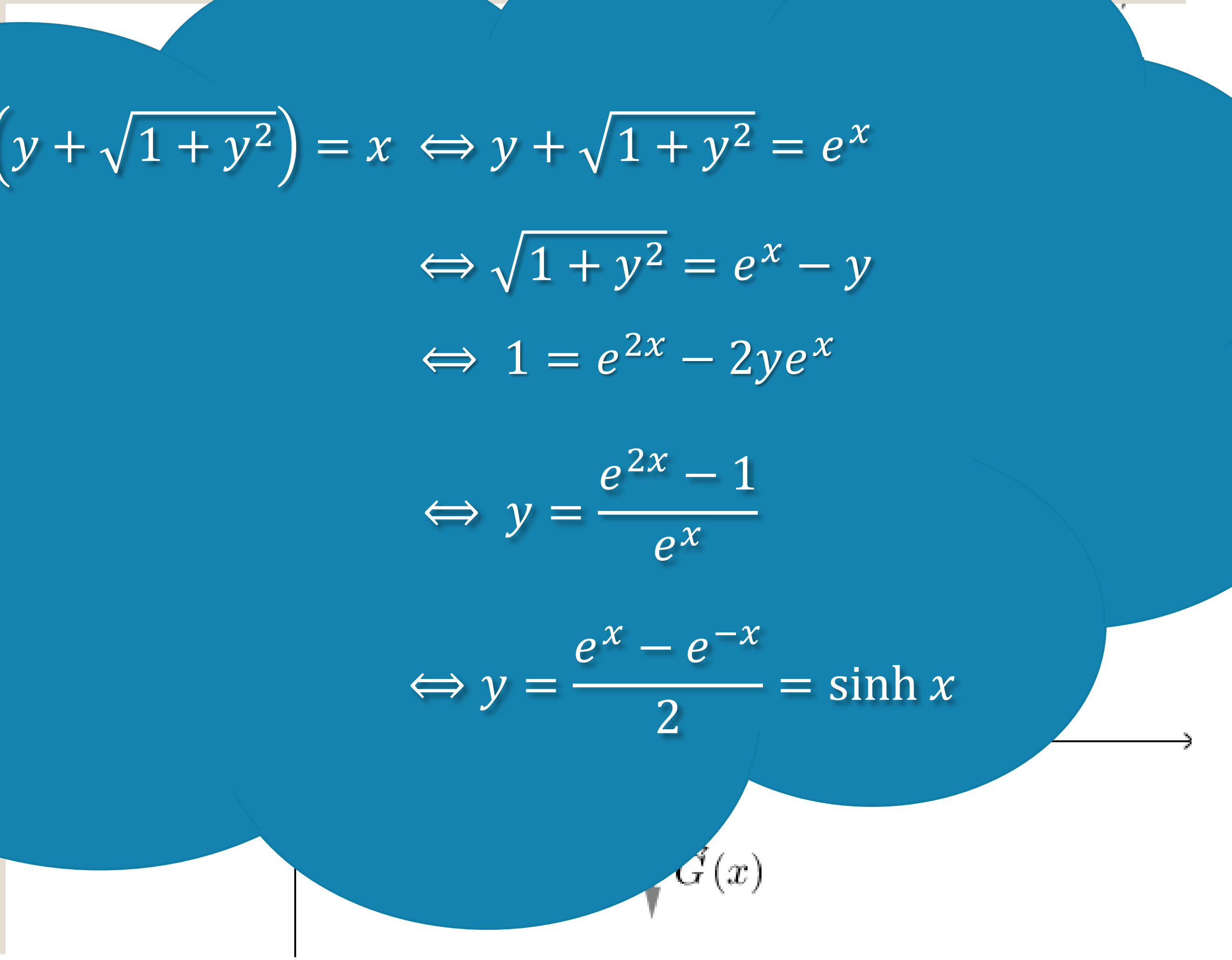
$$\ln\left(f'(x) + \sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\right) =$$

$$\operatorname{argsinh} f'(x) = \frac{k}{S}x + c$$

$$f'(x) = \sinh\left(\frac{k}{S}x + c\right)$$

$$f(x) = \frac{S}{k}\cosh\left(\frac{k}{S}x + c\right) + d$$





$$\ln\left(y + \sqrt{1+y^2}\right) = x \Leftrightarrow y + \sqrt{1+y^2} = e^x$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{1+y^2} = e^x - y$$

$$\Leftrightarrow \ 1 = e^{2x} - 2ye^x$$

$$\Leftrightarrow \ y = \frac{e^{2x}-1}{e^x}$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sinh x$$

Parabole et COSH par équadiff

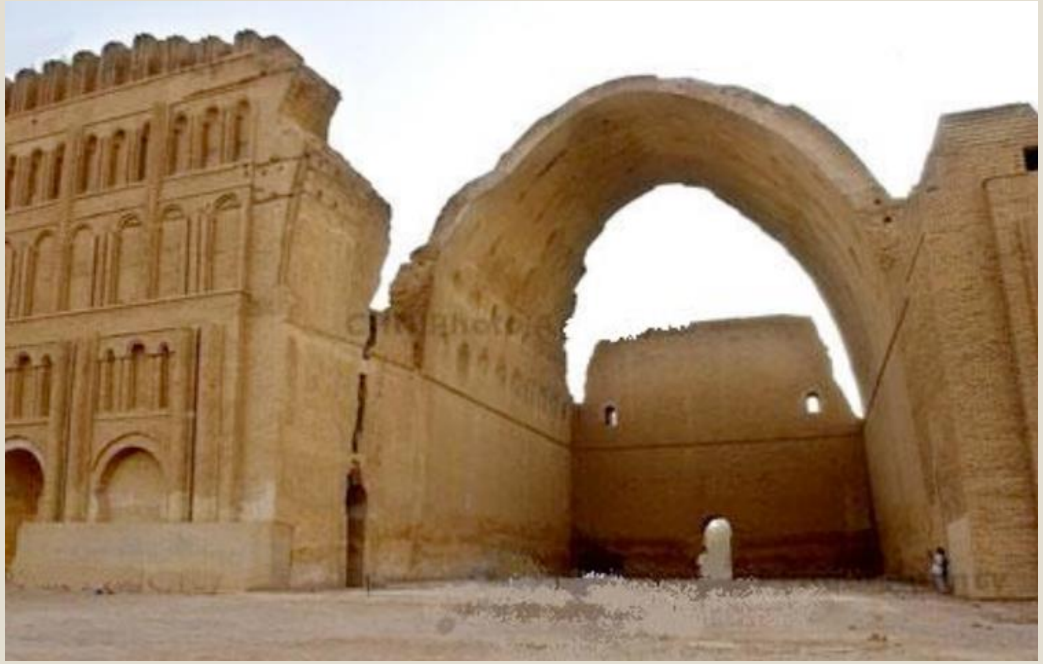
Chaînette retourné en architecture

Gaudí, Casa Mila, Barcelona

Parabole et COSH par équadiff

Chaînette retourné en architecture

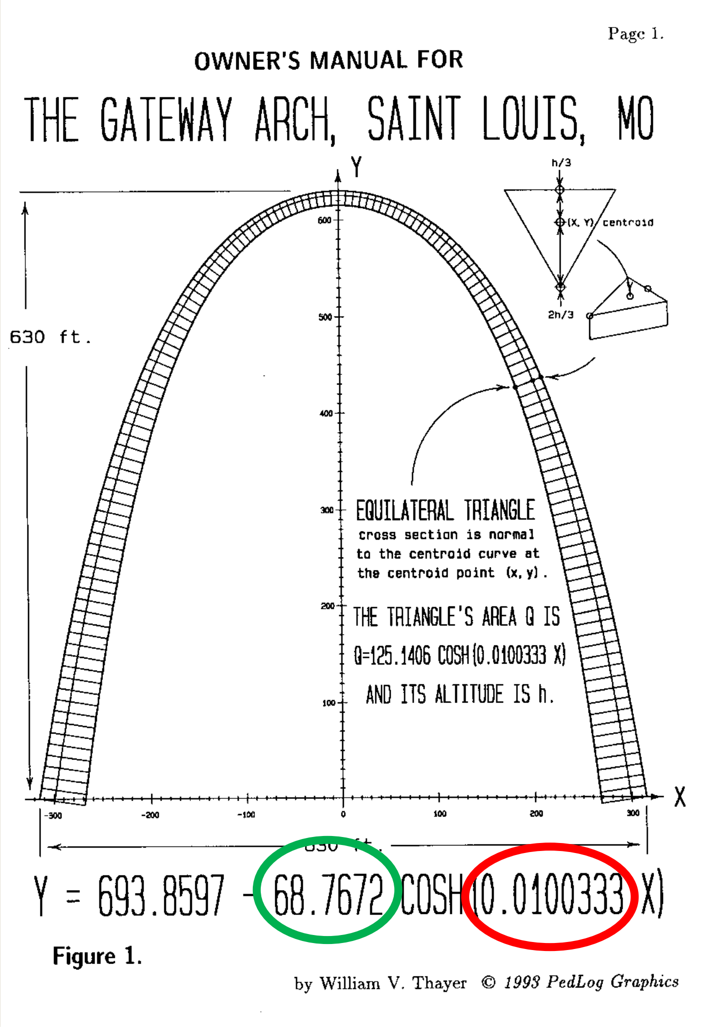
Ctesiphon, Irak, 4e siècle av. JC



Parabole et COSH par équadiff

Gateway Arch (St. Louis, Missouri, USA)

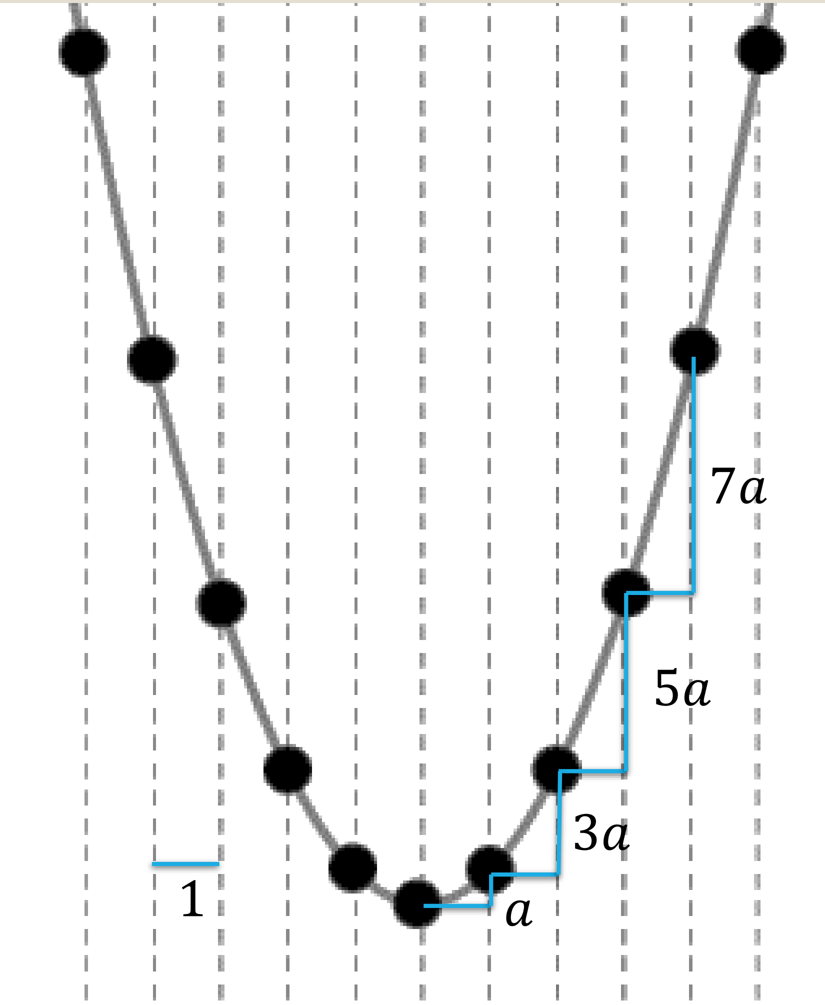
Parabole et COSH par équadiff



Pas une chaînette!

$$\frac{1}{68,7672} \approx 0,01454$$

Votre devoir…



A quelles distances mettre les perles?

$$\sqrt{1+a^2}$$
$$\sqrt{1+9a^2}$$
$$\sqrt{1+25a^2}$$
$$\sqrt{1+49a^2}$$

…

$$\sqrt{1+(2k+1)^2a^2}$$

Unité petite; a petit

Bonne approximation?
Peut-on suspendre en deux points symétriques quelconques ?

Sources

- Deloddere, N. e.a. (2014). *Delta Nova 6 Analyse deel 1 6/8 lesuren.* Mechelen: Plantyn. (Le manuel cité)
- Ghione, F. (2009). *Una non-parabola: la catenaria con qualche cenno al calcolo della sua equazione*, http://crf.uniroma2.it/quaderni/catenaria/Catenaria.pdf
- Steur, H. (1980). *Levende wiskunde. Toepassingen geordend naar wiskundig onderwerp*. Culemborg: Educaboek. (Démonstration avec l'équadiff)
- Roelens, M. (2017). De kettinglijn en gelijkvormige grafieken. *Uitwiskeling 33/1. (L'article de cette présentation, en néerlandais.)*

Abonnez-vous à Uitwiskeling : www.uitwiskeling.be

(abonnement papier et/ou digital)