



J. Bair
V. Henry

**Situations concrètes
exploitant
des barycentres**

Commission pédagogique de la SBPMef

2008



Société Belge des Professeurs de Mathématique
d'expression française

Rue du Onze novembre 24, B 7000 Mons, Belgique

*Situations concrètes
exploitant
des barycentres*

Jacques BAIR
Valérie HENRY

2008

Dépôt légal: D/2008/7075/1

Avant-propos

Lors du Congrès de la SBPMef organisé à Liège en août 2004, Christian Van Hooste avait fait un intéressant exposé intitulé “Plaidoyer pour la notion de barycentre - de 15 à 18 ans”. Il y montrait que le concept géométrique de barycentre intervient à de multiples reprises dans les cours de mathématiques des trois dernières années du secondaire ... ce qui lui permettait de conclure son résumé de l'époque par ce joli slogan : “le barycentre : une notion de poids dont le centre est partout ! ”

A la suite de cette conférence, il nous a semblé opportun de prolonger l'étude de Christian Van Hooste en montrant que le concept de barycentre admet de nombreuses applications non seulement dans le champ des mathématiques pures, mais aussi au niveau des mathématiques plus appliquées.

C'est ainsi que nous avons rassemblé, après un premier chapitre fait de généralités comprenant notamment un bref historique, diverses situations concrètes et simples montrant que les barycentres peuvent être exploités en mécanique, en statistique, en particulier pour des séries chronologiques et des graphiques triangulaires, en contrôle flou ainsi que pour les courbes de Bézier.

Nous sommes reconnaissants envers les administrateurs de la SBPMef d'avoir bien voulu proposer notre manuscrit à sa commission pédagogique puis d'avoir accepté de le publier. Nous tenons encore à remercier les membres de la Société qui ont relu notre texte et nous ont communiqué diverses remarques et suggestions pour améliorer le travail original.

1 Généralités

1.1 Bref historique

C'est Archimède (287-212 avant Jésus-Christ), un des plus grands mathématiciens grecs de l'Antiquité, qui introduisit la notion de centre de gravité. On lui doit notamment le *principe du levier*¹ selon lequel un levier est en équilibre lorsque les moments des deux forces motrice \vec{F}_A appliquée au point A et résistante \vec{F}_B appliquée au point B par rapport au point d'appui O sont égaux et opposés; en d'autres termes, les modules F_A et F_B de ces deux forces et les distances d_A et d_B des points d'application A et B au point d'appui O vérifient cette égalité

$$F_A \times d_A = F_B \times d_B.$$

Nous disons aujourd'hui que le point d'appui O du levier à l'équilibre est le *centre de gravité* ou le *barycentre* des points d'application A et B pondérés respectivement par les distances d_A et d_B .

Le mot *centre de gravité* provient de l'adjectif latin *gravis* qui signifie *lourd* ou *pesant*. Il fut utilisé dans ce sens par des scientifiques des XVI^{ème} et XVII^{ème} siècle, notamment par le brugeois Simon Stevin (1548-1620; voir section 1.5) et le mathématicien suisse P. Guldin (1577-1643) dans son ouvrage intitulé *De centro gravitatis* (1635). Les travaux du savant anglais I. Newton (1642-1727) mirent à l'honneur le substantif *gravitation* à partir du XVIII^{ème} siècle.

Le préfixe *bary* signifie également *lourd*, mais provient lui du grec *barys*. Il est plus récent puisqu'il apparaît probablement pour la première fois dans l'ouvrage *Der barycentrische Calcul* publié en 1827 par le mathématicien-astronome allemand A. Möbius (1790-1868)². Celui-ci développa le barycentre d'un point de vue purement mathématique, en le considérant comme un point "représentatif" d'un ensemble de points affectés de coefficients positifs ou négatifs. Il rendit donc cette notion indépendante de son interprétation physique originelle et en fit un concept abstrait dont de nombreuses applications concrètes furent trouvées ultérieurement.

De nos jours, la notion de barycentre est reliée étroitement à celle d'ensemble *convexe*, dont les premières études systématiques sont dues au célèbre mathématicien allemand H. Minkowski (1864-1909).

Dans l'espace numérique \mathbb{R}^n de dimension n quelconque³, un ensemble convexe est

¹Un levier est constitué d'une barre rigide, de poids souvent négligeable, mobile autour d'un axe d'appui O sous l'action de deux forces qui tendent à la faire tourner en sens opposés.

²Möbius est bien connu pour le ruban qui porte son nom; celui-ci est obtenu en collant une extrémité d'une bande de papier sur l'autre extrémité, après l'avoir retournée, de sorte qu'est ainsi obtenue une "surface possédant un seul côté".

³Cette présentation englobe évidemment les cas particuliers et classiques du plan (pour $n = 2$) ou de l'espace (pour $n = 3$) muni d'un repère cartésien, souvent (mais pas nécessairement) supposé orthonormé; elle peut être généralisée sans peine à tout espace vectoriel réel, même de dimension infinie.

caractérisé par le fait que le segment de droite reliant deux quelconques de ses points est entièrement inclus dans l'ensemble (Figure 1).

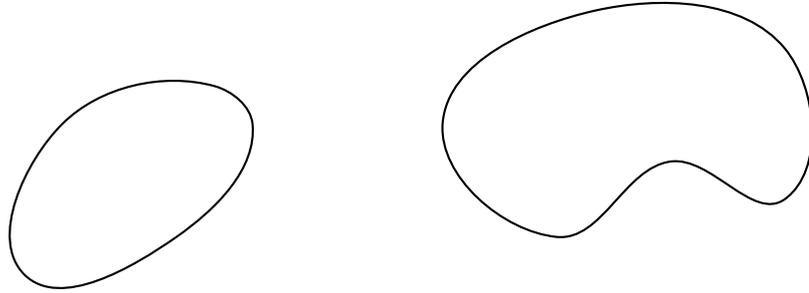


Figure 1: Ensemble convexe et ensemble non convexe

Il apparaît en effet que tout barycentre de points, pondérés par des coefficients réels non négatifs, n'est rien d'autre qu'un point appartenant à l'*enveloppe convexe* de ces points, c'est-à-dire à l'intersection de tous les ensembles convexes contenant les points en question.

Grâce notamment aux développements récents de la *géométrie convexe*, la notion de barycentre est de nos jours largement exploitée en physique, en statistique, en économie, en gestion, ... ; en particulier, elle intervient de façon décisive pour résoudre des problèmes concrets comme la prise de décision face à des informations vagues ou encore pour concevoir des formes harmonieuses à donner à des carrosseries d'automobiles.

Les pages qui vont suivre visent à donner un petit aperçu de telles applications, peut-être moins courantes mais concrètes et pour la plupart modernes, de la notion de barycentre. Mais auparavant, nous allons profiter dans la structure vectorielle des espaces considérés pour définir ponctuellement le concept de barycentre ; cette définition sera ensuite illustrée par quelques cas particuliers parmi les plus simples.

1.2 Présentation ponctuelle

Considérons p points P_i , chacun d'eux étant affecté d'un coefficient réel (appelé par la suite *poide*) λ_i positif ou nul, avec de plus $\sum_{i=1}^p \lambda_i \neq 0$.

Le barycentre des p points pondérés P_i (λ_i) est le point G défini par l'égalité vectorielle

$$\left(\sum_{i=1}^p \lambda_i \right) \overrightarrow{PG} = \sum_{i=1}^p \lambda_i \overrightarrow{PP_i},$$

où P désigne un point quelconque.

Il est à noter que G ne dépend qu'en apparence du choix de P , car le remplacement de P par un autre point Q donnerait un barycentre G' tel que, en notant simplement λ la somme $\sum_{i=1}^p \lambda_i$

$$\begin{aligned} \lambda \overrightarrow{QG'} &= \sum_{i=1}^p \lambda_i \overrightarrow{QP_i} \\ &= \sum_{i=1}^p \lambda_i (\overrightarrow{QP} + \overrightarrow{PP_i}) \\ &= \lambda \overrightarrow{QP} + \sum_{i=1}^p \lambda_i \overrightarrow{PP_i} \\ &= \lambda \overrightarrow{QP} + \lambda \overrightarrow{PG} \\ &= \lambda \overrightarrow{QG} \end{aligned}$$

de sorte que $G = G'$.

En particulier, si l'on prend pour P l'origine O de l'espace, on obtient cette égalité :

$$\lambda \overrightarrow{OG} = \sum_{i=1}^p \lambda_i \overrightarrow{OP_i}$$

Or, dans l'espace \mathbb{R}^n , pour un point arbitraire X à n coordonnées, le vecteur \overrightarrow{OX} possède précisément les mêmes composantes que les coordonnées correspondantes de X ; de la sorte, le n -uple (x_1, x_2, \dots, x_n) peut être regardé indifféremment comme représentant le point X ou le vecteur \overrightarrow{OX} ⁴. Ainsi, toute égalité vectorielle peut être traduite ponctuellement et une algèbre peut être instaurée entre les points de \mathbb{R}^n . La somme de deux points $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ et $Y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ est le point

$$X + Y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n),$$

tandis que le produit du point $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ par le réel λ est le point

$$\lambda X = (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n).$$

En conséquence, le barycentre G des p points pondérés P_i (λ_i) est donné par

$$G = \sum_{i=1}^p \frac{\lambda_i}{\lambda} P_i$$

Cette formule montre que G appartient à l'enveloppe convexe des points P_1, P_2, \dots, P_p , puisque cette dernière est composée de tous les points de la forme $\sum_{i=1}^p \alpha_i P_i$ pour des réels α_i non négatifs tels que $\sum_{i=1}^p \alpha_i = 1$ (Figure 2).

⁴Dans la suite, nous privilégierons souvent la notation ponctuelle. Nous laissons le soin au lecteur d'opter pour l'une ou l'autre approche et éventuellement d'adapter le texte en conséquence.

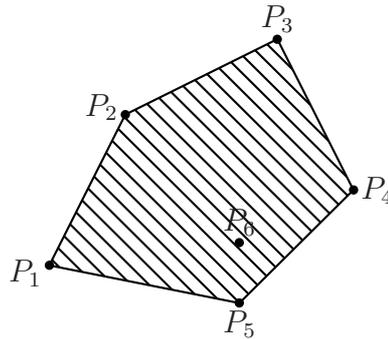


Figure 2: Enveloppe convexe de 6 points

1.3 Coordonnées de barycentres dans le plan et dans l'espace

Appliquons la théorie exposée ci-dessus dans les cas les plus familiers.

Le barycentre G de deux points pondérés $A(\alpha)$ et $B(\beta)$, avec $\alpha + \beta \neq 0$, dans le plan ou l'espace muni d'un repère d'origine O , possède pour coordonnées dans ce repère :

- dans le plan, si $A = (x_A, y_A)$ et $B = (x_B, y_B)$:

$$x_G = \frac{\alpha x_A + \beta x_B}{\alpha + \beta} \quad , \quad y_G = \frac{\alpha y_A + \beta y_B}{\alpha + \beta}$$

- dans l'espace, si $A = (x_A, y_A, z_A)$ et $B = (x_B, y_B, z_B)$:

$$x_G = \frac{\alpha x_A + \beta x_B}{\alpha + \beta} \quad , \quad y_G = \frac{\alpha y_A + \beta y_B}{\alpha + \beta} \quad , \quad z_G = \frac{\alpha z_A + \beta z_B}{\alpha + \beta}$$

Le barycentre de plus de deux points peut être obtenu en exploitant, plusieurs fois si nécessaire, la propriété d'*associativité*⁵. Par exemple, recherchons le barycentre G des trois points pondérés $A(\alpha)$, $B(\beta)$ et $C(\gamma)$, avec $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$. Si $\alpha + \beta \neq 0$, déterminons le barycentre K de $A(\alpha)$ et $B(\beta)$. Le point G s'obtient en construisant le barycentre des deux points pondérés $K(\alpha + \beta)$ et $C(\gamma)$, puisque

$$\frac{(\alpha + \beta)K + \gamma C}{(\alpha + \beta) + \gamma} = \frac{(\alpha + \beta) \frac{\alpha A + \beta B}{\alpha + \beta} + \gamma C}{\alpha + \beta + \gamma} = \frac{\alpha A + \beta B + \gamma C}{\alpha + \beta + \gamma} = G$$

⁵Elle est valable non seulement dans le plan ou dans l'espace, mais également dans tout espace vectoriel, et avec une démonstration similaire.

1.4 Barycentres de points pondérés

Dans le plan, les barycentres de points pondérés peuvent être aisément construits géométriquement lorsque le nombre p de points pondérés est peu élevé. Contentons-nous de détailler les premiers cas, en commençant par la recherche d'*isobarycentres*, c'est-à-dire de barycentres de points dont les poids sont supposés être tous unitaires.

- Pour $p = 2$, l'isobarycentre G de deux points P_1 et P_2 coïncide avec le milieu du segment de droite d'extrémités P_1 et P_2 . On a en effet cette égalité :

$$G = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right) = \frac{P_1 + P_2}{2}.$$

- Pour $p = 3$, nous admettrons que les trois points P_1, P_2, P_3 envisagés ne sont pas alignés, de sorte qu'ils sont les sommets d'un triangle. Le point iso-barycentrique G est le point d'intersection des trois médianes du triangle, situé aux deux tiers de chacune d'elles en partant du sommet. En effet, en désignant par M_i le milieu du côté opposé au sommet P_i , on dispose de ces égalités

$$G = \frac{P_1 + P_2 + P_3}{3} = \frac{2}{3}M_1 + \frac{1}{3}P_1 = \frac{2}{3}M_2 + \frac{1}{3}P_2 = \frac{2}{3}M_3 + \frac{1}{3}P_3.$$

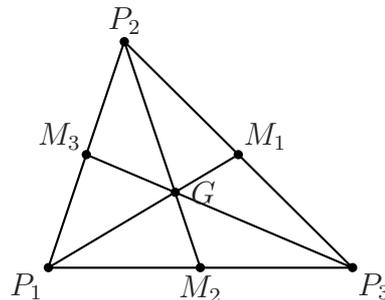


Figure 3: Barycentre de trois points non alignés

- Pour $p = 4$, on peut, par exemple, écrire, en notant M_1 (resp. M_2) le point dont les coordonnées sont la moitié de celles de $P_1 + P_2$ (resp. $P_3 + P_4$), l'isobarycentre G est tel que :

$$G = \frac{P_1 + P_2 + P_3 + P_4}{4} = \frac{M_1 + M_2}{2} ;$$

ainsi, si les quatre points P_i sont les sommets d'un quadrilatère, G se trouve au milieu du segment de droite dont les extrémités sont les milieux M_1 et M_2 respectivement des côtés P_1P_2 et P_3P_4 .

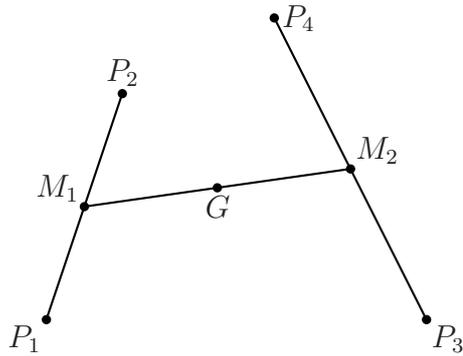


Figure 4: Barycentre de quatre points non alignés

- Pour $p = 5$, on construit les points M_1 et M_2 qui sont les milieux des segments joignant respectivement P_1 à P_2 et P_4 à P_5 , puis le milieu M_3 du segment reliant M_1 à M_2 (Figure 5). L'isobarycentre G est tel que

$$\overrightarrow{P_3G} = \frac{4}{5} \overrightarrow{P_3M_3} ;$$

de fait, on peut écrire ponctuellement

$$5G = \sum_{i=1}^5 P_i = 2(M_1 + M_2) + P_3 = 4M_3 + P_3.$$

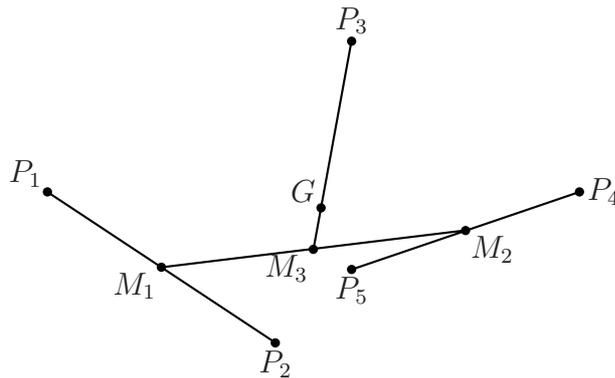


Figure 5: Barycentre de cinq points non alignés

Lorsque les points sont pondérés au moyen de poids non tous égaux, il est possible de construire géométriquement le barycentre de deux points pondérés, puis, de proche en proche grâce à la propriété d'associativité, le barycentre d'un nombre arbitraire de points pondérés.

En effet, voici une construction particulièrement simple qui permet de dessiner le barycentre G de 2 points pondérés P_1 (α) et P_2 (β), les poids α et β étant supposés positifs. Du point P_1 comme extrémité, on trace un segment de droite $[P_1, P'_1]$ de longueur égale ou proportionnelle à β . Ensuite du point P_2 , on trace un segment de droite $[P_2, P'_2]$ dont le support est parallèle à $[P_1, P'_1]$, de longueur égale ou proportionnelle à α en respectant la proportion utilisée pour construire P'_1 et de sens opposé à $[P_1, P'_1]$. L'intersection des droites P_1P_2 et $P'_1P'_2$ donne le barycentre G cherché.

En guise d'exemples, la Figure 6 livre le barycentre de deux points et de trois points.

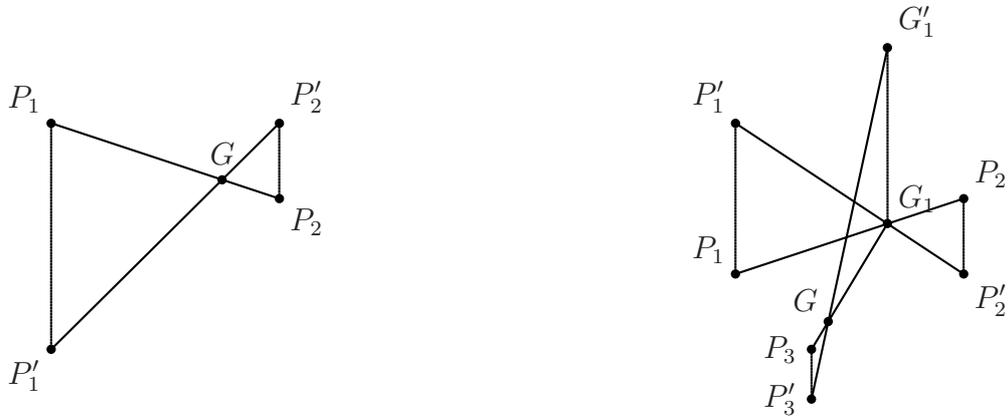


Figure 6: Barycentre de deux et trois points

1.5 Barycentres de figures planes

La recherche de barycentres de figures du plan est beaucoup moins systématique. Certains cas particuliers peuvent néanmoins être déduits de la recherche de barycentres de points. Ainsi, le barycentre de tout polygone régulier est l'isobarycentre des sommets pour des raisons évidentes de symétrie. Le barycentre d'un triangle est l'intersection des médianes et correspond dès lors également à l'isobarycentre des sommets. Une première esquisse de preuve est donnée par Simon Stevin dans son ouvrage intitulé *De Beghinselen der Weeghconst* (en français, *La Statique ou l'Art de peser*) datant de 1586. Voici comment il prouvait cette affirmation. Considérons un triangle quelconque de sommets A , B et C , ainsi que des sous-triangles semblables de sommets A , B_i , C_i , dont les côtés B_iC_i sont parallèles à BC et dont les hauteurs sont égales. Construisons des parallélogrammes inscrits dans le triangle initial, dont la base supérieure est un des segments B_iC_i et dont

les côtés latéraux sont parallèles à la médiane AM issue du sommet A , M étant le milieu du côté BC (voir Figure 7); cette médiane coupe chaque segment B_iC_i en son milieu. Chacun des parallélogrammes inscrits, étant symétrique par rapport à la médiane AM , possède son centre de gravité sur cette dernière droite.

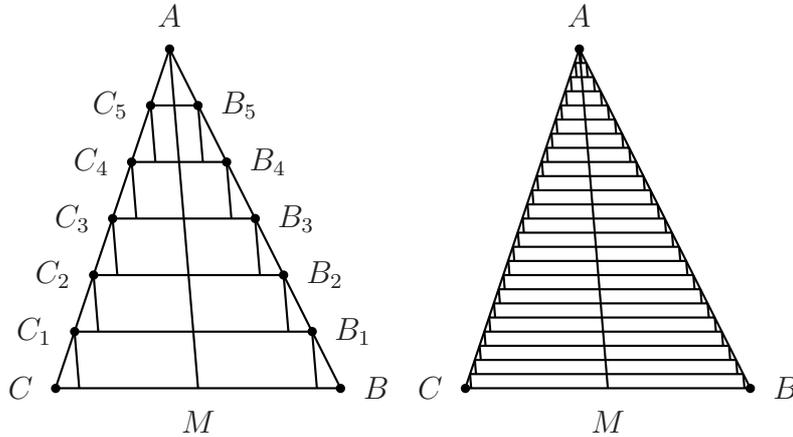


Figure 7: Centre de gravité d'un triangle selon Simon Stevin

Augmentons le nombre de ces parallélogrammes : nous constatons que la figure formée par tous les parallélogrammes se rapproche du triangle initial. Ainsi, en réduisant suffisamment les hauteurs des parallélogrammes, nous pouvons rendre aussi petite que l'on veut la différence entre ces deux figures, ce qui nous permet d'affirmer que le centre de gravité du triangle de départ se trouve sur l'axe de symétrie de chaque parallélogramme, c'est-à-dire sur la médiane AM . En procédant de la même manière avec les médianes issues des sommets B , puis C , on parvient à la conclusion souhaitée. Cette démarche préfigure bien de raisonnements qui seront faits ultérieurement en analyse mathématique, par exemple pour calculer des aires à l'aide du calcul intégral.

En marge de quelques cas particuliers, la recherche du centre de gravité d'une figure du plan consiste alors, en général, à décomposer cette figure en plusieurs sous-figures dont les barycentres sont plus aisés à trouver et à utiliser les propriétés des barycentres pour déterminer celui de la figure initiale.

2 Applications en mécanique

2.1 Notion de centre de gravité en dynamique

En mécanique rationnelle, la dynamique étudie les relations entre les mouvements des corps et les forces qui les commandent. L'étude n'est possible qu'en idéalisant à certains égards les phénomènes réels, de manière à permettre une représentation commode des

forces, quelles que soient les modalités variées d'application de celles-ci : contacts avec des solides, frottements fluides, actions à distance, . . .

Une notion idéale indispensable est celle de *point matériel*. Ce nom est donné à tout corps de dimensions assez réduites pour qu'on puisse pratiquement confondre, à tout moment, les positions de ses divers points. Un point matériel est donc assimilé à un point géométrique (sans dimensions), mais il se voit attacher un coefficient positif, appelé sa *masse inerte*, qui jauge en quelque sorte la "quantité de matière" possédée par le point ou sa résistance aux variations de mouvements.

Toute force peut être représentée par un vecteur \vec{F} lié à un certain point d'application, de direction donnée par la ligne d'action de la force et dont le module (ou grandeur) est l'intensité de la force (mesurée à l'aide d'une unité convenue, par exemple le Newton dans le système SI ou système M.K.S).

Le mouvement d'un point matériel P sous l'action de différentes forces qui lui sont appliquées peut être étudié à partir de certains *principes de la dynamique*. Ceux-ci sont des propriétés indémontrables, mais suggérées par l'expérience et dont le bien-fondé se manifeste par la vérification expérimentale de leurs conséquences ; nous en retiendrons deux.

- **Principe de composition des forces** (dû à L. de Vinci). Le mouvement d'un point P n'est pas modifié si l'on remplace deux forces \vec{F}_1 et \vec{F}_2 appliquées à P par leur *résultante*, c'est-à-dire par leur somme géométrique. Par induction, ce principe peut être étendu à un nombre fini de forces appliquées à P .
- **Equation fondamentale de la dynamique** (due à I. Newton). L'accélération (au temps t et par rapport à l'origine O de l'espace) du point P , qui est définie par le vecteur $\vec{\gamma}$ et donnée par la formule

$$\vec{\gamma} = \frac{d^2}{dt^2} \vec{OP},$$

est proportionnelle à la résultante \vec{F} des forces appliquées à P :

$$\vec{F} = m \vec{\gamma}.$$

Le coefficient de proportionnalité m est précisément la masse inerte, ou plus simplement, la masse de P : il s'agit d'une caractéristique physique du point matériel dont la valeur dépend des unités adoptées pour mesurer les modules des vecteurs \vec{F} et $\vec{\gamma}$; dans le système SI, m s'exprime en kilogrammes.

Cet énoncé peut s'appliquer à un système S de p points matériels : l'équation du mouvement de chaque point P_i de S peut s'écrire

$$m_i \vec{\gamma}_i = \vec{F}_i + \vec{f}_i,$$

où m_i et $\vec{\gamma}_i$ sont la masse et l'accélération de P_i , \vec{F}_i la résultante des forces extérieures à P_i , \vec{f}_i celle des forces intérieures appliquées à P_i . En additionnant les équations analogues à tous les points de S , on obtient

$$\sum_{i=1}^p m_i \vec{\gamma}_i = \sum_{i=1}^p \vec{F}_i$$

puisque $\sum_{i=1}^p \vec{f}_i = \vec{0}$. Or, l'accélération $\vec{\gamma}_G$ du barycentre G des p points pondérés $P_i (m_i)$ est telle que

$$m \vec{\gamma}_G = \frac{d^2}{dt^2} m \vec{OG} = \frac{d^2}{dt^2} \sum_{i=1}^p m_i \vec{OP}_i,$$

d'où l'on déduit

$$m \vec{\gamma}_G = \sum_{i=1}^p m_i \vec{\gamma}_i = \sum_{i=1}^p \vec{F}_i.$$

Ainsi, le barycentre G , qui est encore appelé dans ce contexte le *centre de gravité* du système S , se meut comme un point matériel affecté de la masse totale m de S , et auquel serait appliquée la résultante de toutes les forces extérieures agissant sur le système.

Ce résultat est fondamental et peut s'étendre à tout système de points. D'un point de vue cinétique, il permet notamment de remplacer un corps quelconque par son centre de gravité. C'est notamment ainsi que l'on procède quand on veut, par exemple, étudier les mouvements célestes d'astres, les trajectoires de satellites, les déplacements de projectiles de toutes sortes, ...

2.2 Equilibre statique des solides

Il existe une différence entre la masse et le poids d'un corps. Alors que la masse, qui traduit la résistance du corps aux modifications de mouvement, reste invariable en tout point de l'espace, le *poids*, qui se réfère à la pesanteur c'est-à-dire l'attraction du corps par la Terre, varie (légèrement) avec l'altitude et la latitude.

Le poids d'un corps est une force verticale, encore appelée la *force pesanteur*, qui est appliquée au centre de gravité. Le lien entre le poids d'un corps et sa masse est donné par la formule déjà utilisée liant accélération, force et masse. Dans le cas particulier de l'accélération de la pesanteur, le poids \vec{p} d'un corps est donné par

$$\vec{p} = m \vec{g}$$

où la force \vec{g} est généralement prise de module égal à $9,81 \text{ m/s}^2$ sur terre. Pour qu'un solide soit en équilibre statique, il convient que sa force pesanteur soit annulée par une force opposée, de même module, appliquée en un point lié rigidement au corps et situé sur la droite verticale passant par le centre de gravité.

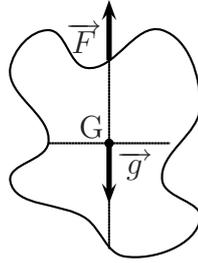


Figure 8: Centre de gravité et force pesanteur

On peut déduire de ce qui précède un procédé expérimental pour déterminer le centre de gravité d'un corps de forme quelconque. Il suffit en effet de suspendre le solide par un point à un fil ; une fois qu'il est en équilibre, il est soumis à deux forces (voir Figure 8) : le poids appliqué au centre de gravité G et dirigé verticalement vers le bas, ainsi que la tension du fil appliquée au point d'attache A et dirigée verticalement vers le haut, la résultante de ces deux forces étant nulle. Dès lors, le centre de gravité se trouve sur le prolongement du fil. En conséquence, si l'on choisit un second point d'attache A' , la direction du fil à l'équilibre détermine une droite passant également par G : l'intersection des deux droites AG et $A'G$ définit parfaitement le point G .

L'équilibre statique d'un corps dépend de la *base de sustentation* ou base d'appui du solide ; celle-ci est la ligne fermée définissant l'enveloppe convexe de tous les points d'appui du solide. Par exemple, la base de sustentation d'une table est le rectangle dont les quatre sommets sont les quatre pieds (voir Figure 9).

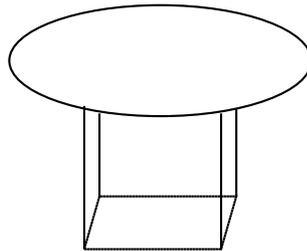


Figure 9: Base de sustentation d'une table à 4 pieds

L'équilibre du corps est atteint lorsque la verticale passant par le centre de gravité passe par l'intérieur de la base de sustentation ; dans ce cas, en effet, la force pesanteur appliquée au centre de gravité ne fait que "presser" le corps contre la surface d'appui, ce qui en assure l'équilibre. A titre d'exemple, considérons un cylindre plein : sa base de

sustentation est un cercle C , et son centre de gravité G se trouve sur l'axe de symétrie du cylindre. Si le cylindre est droit ou peu incliné, la verticale passant par G coupe le sol à l'intérieur de sa base de sustentation et l'équilibre est alors stable ; par contre, si le cylindre est très incliné, cette verticale peut tomber en dehors de la base de sustentation : le solide ne restera pas alors en équilibre, mais s'écrasera sur le sol (voir Figure 10).

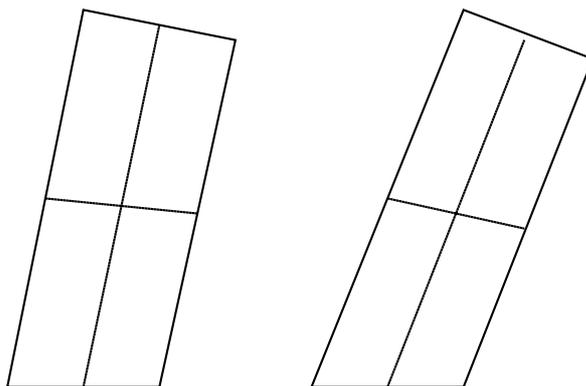


Figure 10: Solide en équilibre et solide en passe de s'écrouter

On peut ainsi expliquer pourquoi la célèbre tour penchée de Pise ne s'écroule pas : c'est parce que la verticale menée par son barycentre coupe l'ensemble convexe formé par sa base en un point qui lui est intérieur (voir Figure 11).



Figure 11: La célèbre tour de Pise

2.3 Le saut d'obstacles en équitation

Les propriétés liées au centre de gravité peuvent être intelligemment exploitées dans le but d'améliorer les caractéristiques du franchissement d'obstacles par un cavalier et son cheval.

Pour situer le centre de gravité du cheval, il importe principalement de tenir compte du fait que les $\frac{2}{3}$ de la masse de cet animal sont concentrés dans l'avant-main c'est-à-dire la partie du cheval obtenue en traçant une verticale juste derrière les membres antérieurs et en prenant tout ce qui est situé avant cette verticale. E. Patigny situe le centre de gravité du cheval comme suit.

Le centre de gravité d'un cheval se situe sous la 13^{ème} vertèbre, sous la ligne joignant la pointe de l'épaule et la pointe de la hanche ; soit, en fonction de la morphologie du cheval, plus ou moins sur la ligne du passage de sangle, un peu en arrière du garrot. (Patigny E.)

La Figure 12 ci-dessous illustre la position du centre de gravité.

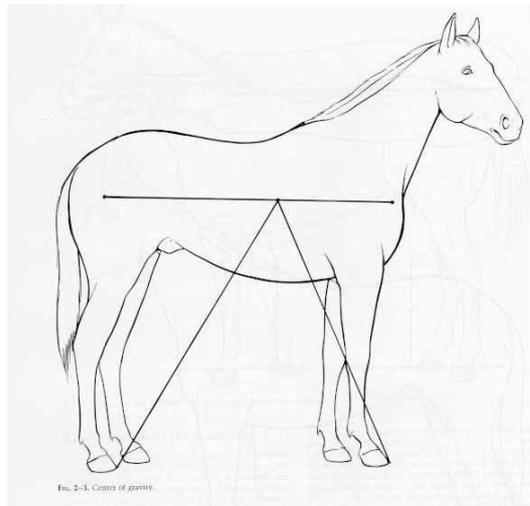


Figure 12: Centre de gravité du cheval

Pour que le couple cavalier-cheval soit en équilibre, il faut que le centre de gravité du cavalier se situe sur la perpendiculaire au sol passant par le centre de gravité du cheval. Cette première observation est à la base de la plupart des recommandations des moniteurs aux cavaliers débutants, cette condition d'équilibre étant indispensable à toute évolution future. En effet, le cheval n'est pas, de par sa morphologie, un animal porteur contrairement à ses "cousins", l'âne ou le mulet. Il importe donc à tout cavalier de se positionner de manière à contrarier le moins possible l'équilibre naturel du cheval s'il veut obtenir de ce dernier les meilleures performances.

Lorsque la paire cavalier-cheval est en équilibre, le centre de gravité du couple se situe donc sur la perpendiculaire au sol passant par le centre de gravité du cheval. Comme il est le barycentre des deux centres de gravité du cavalier et du cheval pondérés par les masses (ou les poids) respectives, sa hauteur par rapport au sol s'obtient en calculant la moyenne pondérée suivante :

$$h = \frac{h_1 m_1 + h_2 m_2}{m_1 + m_2}$$

avec

- h_1 et h_2 les hauteurs par rapport au sol des centres de gravité du cavalier et du cheval
- m_1 et m_2 les masses du cavalier et du cheval.

Venons-en à un aspect plus particulier de l'équitation: le franchissement d'un obstacle. Sans rentrer dans des considérations très poussées, nous pouvons tirer quelques observations concernant les conséquences d'une modification de l'alignement des centres

de gravité. Lors du plané (phase où le cheval n'a aucun contact avec le sol), la seule force extérieure agissant sur le centre de gravité du couple cavalier-cheval est la pesanteur. Il en résulte que la courbe décrite par ce point matériel n'est pas modifiée par les mouvements relatifs du cheval et du cavalier. En fait, mécaniquement, le cheval va réagir de façon inverse aux mouvements imprimés par le cavalier de manière à réaligner son centre de gravité par rapport à celui de son cavalier. En pratique, un mouvement du buste du cavalier vers l'avant va induire, chez le cheval, une augmentation de la hauteur relative des membres antérieurs par rapport aux membres postérieurs; inversement, un basculement du buste du cavalier vers l'arrière entraînera un relever plus important des postérieurs par rapport aux antérieurs.

Si on applique ce principe aux différentes phases du plané, on comprend pourquoi le cavalier incline son buste vers l'avant lors de la phase ascendante, facilitant ainsi le passage des antérieurs au-dessus de la barre. Une fois que les antérieurs sont passés, un redressement du cavalier permet un meilleur franchissement des postérieurs. On a observé que le rapport des amplitudes de ces mouvements est d'environ 20 pour un cheval et un cavalier standards.

Dans les faits, ce rapport implique que le cavalier a peu de marge de manoeuvre durant la phase ascendante, celle-ci se déroulant trop rapidement. Par contre, une modification de position vers l'arrière lors de la phase descendante peut faire gagner quelques centimètres qui prennent toute leur importance lors du franchissement d'obstacles imposants tels que ceux d'une épreuve de Grand Prix; la hauteur d'un obstacle dans les concours internationaux varie en effet entre 1m50 et 1m65!

Il est évident que de nombreux autres facteurs interviennent également; certains, comme celui-ci, sur lesquels le cavalier a le pouvoir d'intervenir et d'autres sur lesquels il n'a aucune prise. Ce sport particulier est en effet le seul sport individuel où le sportif doit tenir compte d'un autre être vivant dont les réactions à une même stimulation peuvent varier d'un jour à l'autre, d'un endroit à l'autre, ... sans que cela soit forcément prévisible par le cavalier.

3 Sur la notion de moyenne en statistique

3.1 Moyennes d'une série statistique univariée

En statistique, quand on souhaite analyser une variable quantitative, c'est-à-dire une variable dont les modalités sont des valeurs numériques, sur une population donnée de taille m , on analyse une série univariée S formée par les m mesures de la grandeur sur chacun des individus concernés.

Plaçons-nous dans le cas où la série S à étudier est donnée par des couples (x_j, n_j) , pour $j = 1, \dots, p$, où x_1, \dots, x_p sont les valeurs distinctes observées dont les effectifs respectifs sont n_1, \dots, n_p , avec $n_1 + \dots + n_p = m$, chaque observation x_j apparaissant donc n_j fois dans la série.

Des résumés de l'information contenue dans S sont donnés par des paramètres de position, dont le plus fréquemment employé est sans conteste la *moyenne arithmétique* de S ; cette dernière est définie par

$$\bar{x} = \frac{\sum_{j=1}^p n_j x_j}{m} = \sum_{j=1}^p f_j x_j :$$

ainsi, le calcul de \bar{x} se fait en associant à chacune des valeurs distinctes x_j un "poids" égal à sa fréquence $f_j = \frac{n_j}{m}$.

Afin de visualiser la série, on peut faire appel à un axe numérique Ox sur lequel sont portés les points P_1, \dots, P_p dont les abscisses respectives sont x_1, \dots, x_p et qui se voient affecter des poids correspondants f_1, \dots, f_p . Le barycentre des points pondérés $P_1(f_1), \dots, P_p(f_p)$ est le point G défini par l'égalité vectorielle

$$\overrightarrow{OG} = \sum_{j=1}^p f_j \overrightarrow{OP_j} :$$

l'abscisse de G n'est rien d'autre que la moyenne arithmétique \bar{x} de S .

La moyenne arithmétique d'une série S jouit de nombreuses propriétés. Parmi celles-ci, relevons le fait que la moyenne arithmétique de la série des *valeurs centrées* est nulle. De fait, en posant $x'_j = x_j - \bar{x}$ pour $j = 1, \dots, p$, il vient

$$\frac{1}{m} \sum_{j=1}^p n_j x'_j = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^p n_j x_j - \frac{1}{m} \left(\sum_{j=1}^p n_j \right) \bar{x} = 0.$$

Ce résultat fournit une signification concrète à la moyenne arithmétique de S . En effet, intuitivement, les éléments de la série qui sont inférieurs à \bar{x} sont "compensés" par ceux qui sont supérieurs à cette même valeur.

Cette situation peut être interprétée physiquement en partant de la droite graduée sur laquelle les différentes valeurs de la série sont portées, et en plaçant en chacun de ces points un poids proportionnel à l'effectif de la valeur considérée. Dans ces conditions, la moyenne arithmétique détermine le point d'équilibre des poids ainsi placés: \bar{x} correspond bien au centre de gravité du système physique ainsi formé.

Exemple. Soit la série suivante: $S = \{2, 3, 4, 4, 4, 5, 5, 6, 7, 7\}$ dont la moyenne arithmétique est égale à 4.7, la Figure 13 illustre les considérations mentionnées ci-dessus.

Une interprétation similaire peut évidemment être donnée à propos de toute moyenne arithmétique pondérée d'une série statistique univariée.

Il est facile d'obtenir, dans la vie courante, de multiples situations faisant appel à la notion de moyenne arithmétique pondérée: l'on peut songer, par exemple, au résultat

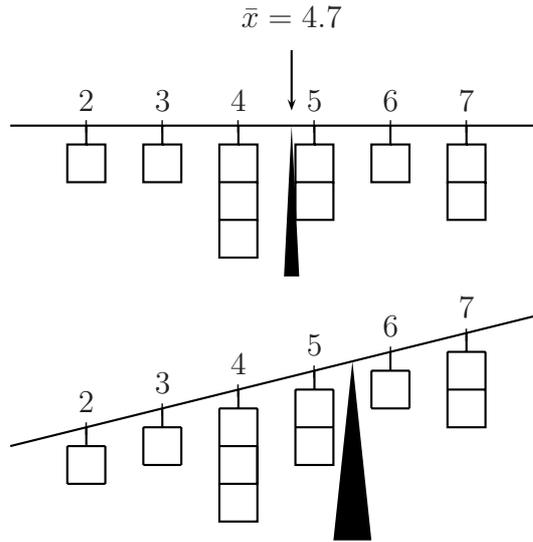


Figure 13: La moyenne arithmétique comme centre de gravité d’une série

final enregistré par un étudiant lors d’une session d’examens lorsque les notes des cours sont pondérées par l’importance de ceux-ci [25], ou encore au taux de change moyen correspondant à plusieurs achats d’une même devise à des taux différents [17], la durée d’une obligation en finance [4] ...

Décrivons deux autres applications intéressantes de ce concept.

- **Effet de structure.** En statistique, on est souvent amené à considérer, dans deux situations différentes (par exemple, à deux instants différents ou dans deux endroits distincts), deux populations, notées P_1 et P_2 , chacune étant divisée en deux sous-populations A et B , puis à comparer les valeurs moyennes d’une grandeur déterminée. Si, pour $i = 1, 2$, l’on note n_i et \bar{x}_i respectivement l’effectif de P_i et la moyenne arithmétique de la grandeur calculée sur P_i , les moyennes \bar{x}_i sont en fait des moyennes arithmétiques pondérées des moyennes des sous-populations correspondantes, les poids de pondération étant les effectifs des sous-populations ; plus précisément,

$$\bar{x}_1 = \frac{n_1^A \bar{x}_1^A + n_1^B \bar{x}_1^B}{n_1} \text{ et } \bar{x}_2 = \frac{n_2^A \bar{x}_2^A + n_2^B \bar{x}_2^B}{n_2},$$

où n_i^A et \bar{x}_i^A désignent l’effectif de la sous-population A de P_i et la moyenne arithmétique correspondante, avec des notations semblables n_i^B et \bar{x}_i^B pour la sous-population B . Ainsi, les moyennes arithmétiques \bar{x}_i dépendent non seulement des moyennes arithmétiques correspondantes des deux sous-populations, mais également des effectifs de celles-ci, c’est-à-dire de la décomposition (ou “structure”) de la population en A et B . La conjonction de ces deux effets peut entraîner des situations paradoxales.

En guise d'exemple simple, considérons les salaires des travailleurs de deux entreprises E_1 et E_2 , en portant notre attention sur les salaires des sous-populations A et B comprenant les travailleurs de sexe masculin et féminin respectivement.

	Entreprise E_1		Entreprise E_2	
Sous-populations	Hommes	Femmes	Hommes	Femmes
Pourcentages	75 %	25 %	25 %	75 %
Salaires moyens	20 UM	16 UM	21 UM	17 UM

Les salaires moyens \bar{x}_i des travailleurs de E_i sont donnés par :

$$\bar{x}_1 = \frac{3}{4} \times 20 + \frac{1}{4} \times 16 = 19 \text{ et } \bar{x}_2 = \frac{1}{4} \times 21 + \frac{3}{4} \times 17 = 18.$$

Les moyennes des sous-populations, ainsi que les moyennes globales peuvent être visualisées sur le graphique suivant :

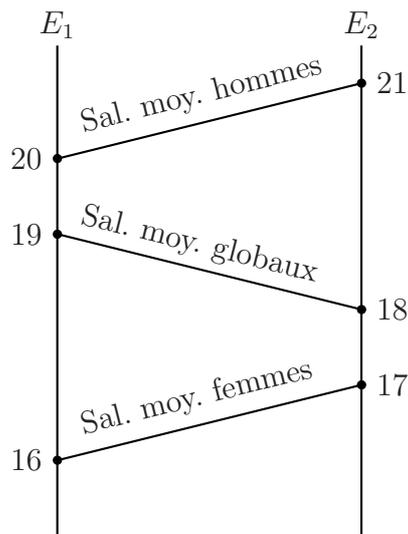


Figure 14: Effet de structure

Bien que les moyennes partielles dans les deux sous-populations de l'entreprise E_2 soient supérieures à celles dans E_1 , ce sont les travailleurs de cette dernière qui, en moyenne, reçoivent les plus gros salaires, puisque $\bar{x}_1 > \bar{x}_2$. Ce paradoxe s'explique simplement par le fait que les travailleurs des deux entreprises se répartissent différemment : l'entreprise E_1 comprend une plus grande proportion de travailleurs masculins avec un salaire plus élevé que leurs collègues féminins.

- **Espérance mathématique.** Dans un jeu de hasard, l'*espérance mathématique* est un nombre qui est, en quelque sorte, un indicateur de chance ; il permet de mesurer le degré d'équité d'un jeu et vaut la somme des gains (ou des pertes) pondérés par les probabilités correspondantes. Par exemple, si un individu joue à la roulette et mise 100 EUR sur un numéro déterminé, il a une chance sur 37 (car les numéros vont de 0 à 36) de toucher 36 fois sa mise : son espérance de gain est donnée par

$$-100 + \frac{100 \times 36}{37} = -2.7$$

cela signifie concrètement que, si la personne tente plusieurs fois sa chance à ce jeu, elle doit s'attendre, en moyenne, à perdre 2.7 EUR ; dans ce cas, le casino va, également en moyenne, gagner 2.7 EUR au détriment de ce joueur.

Un jeu sera "équitable" lorsque les espérances de gains du joueur et de l'organisateur sont toutes deux égales à 0.

Le concept d'espérance mathématique peut être aisément généralisé. De fait, considérons une variable aléatoire discrète X pouvant prendre des valeurs x_1, \dots, x_p , avec des probabilités respectives π_1, \dots, π_p . L'espérance mathématique de X est définie par

$$E(X) = \sum_{i=1}^p \pi_i x_i :$$

il s'agit de la moyenne arithmétique des valeurs x_i pondérées par leur probabilité π_i .

Lorsque les valeurs x_1, \dots, x_p sont observées sur un échantillon de taille n avec des fréquences respectives $f_1 = \frac{n_1}{n}, \dots, f_p = \frac{n_p}{n}$, avec $n = \sum_{i=1}^p n_i$, le remplacement des probabilités π_i par les fréquences correspondantes f_i livre pour espérance mathématique la moyenne arithmétique \bar{X} de l'échantillon considéré. Quand n augmente indéfiniment, les fréquences f_i se rapprochent sans cesse des probabilités π_i , ce qui permet d'interpréter alors $E(X)$ comme la moyenne de la population de laquelle est extrait l'échantillon.

De telles idées sont utilisées régulièrement en finance, par exemple. En effet, selon Bachelier ⁶, "le marché ne croît, à un instant donné, ni à la hausse ni à la baisse du cours vrai" (cité dans [10], p. 31). Il supposait que le cours d'un actif fixé par le marché se comporte, d'un point de vue mathématique, comme la fortune (c'est-à-dire le gain algébrique cumulé) obtenue dans une loterie : à tout instant, un actif peut augmenter ou diminuer de façon apparemment aléatoire, mais conformément au

⁶Louis Bachelier est né en 1870, au sein d'une famille fréquentant les milieux financiers de l'époque, et mort en 1946. Il étudia les mathématiques et, le 29 mars 1900, défendit à la Sorbonne une thèse de doctorat intitulée "Théorie de la spéculation", avec H. Poincaré comme promoteur. Par la suite, il écrivit plusieurs ouvrages originaux consacrés à des applications des probabilités.

principe du barycentre qui, d'après ses propres termes, peut s'énoncer comme suit : "les opérations de Bourse sont soumises à la loi de l'offre et de la demande et de même que tout spéculateur est libre d'entreprendre soit une opération, soit son inverse, on ne peut admettre qu'une opération de spéculation favorise ou défavorise a priori l'un des contractants . . . C'est ce que l'on exprime en disant : L'espérance mathématique de toute opération est nulle . . . Ce principe s'applique à toute opération, quelle qu'en soit la complexité, qui serait basée sur les mouvements ultérieurs des cours." (cité dans [23], p. 80). En d'autres termes, la valeur présente du cours en bourse est le barycentre des valeurs, pondérées par leur probabilité, du cours à un instant ultérieur. En conséquence, les cours boursiers apparaissent comme étant ce qui est appelé de nos jours des *martingales*, c'est-à-dire des processus aléatoires jouissant de la propriété selon laquelle le barycentre des barycentres est encore le barycentre. Il convient toutefois de remarquer que les mathématiciens emploient aujourd'hui ce mot martingale dans un autre sens que celui utilisé couramment dans les jeux de hasard ; en effet, une martingale pour un joueur désigne communément une stratégie qui est censée lui procurer un gain, au contraire de la martingale des mathématiciens pour laquelle le gain espéré est nul.

Le mathématicien français admettait encore que les accroissements de l'actif durant les instants successifs étaient indépendants et, par un raisonnement infinitésimal semblable à celui que suivront ultérieurement des savants réputés tels que Einstein (1905), il obtint une équation aux dérivées partielles, qu'il appela *équation du rayonnement de probabilité*, qui ressemble à celle obtenue par J. Fourier un siècle plus tôt pour décrire la propagation de la chaleur dans les corps homogènes. Il montra ainsi que la probabilité qui régit le cours futur d'un actif financier suit une distribution gaussienne centrée de plus en plus aplatie, dont l'écart-type s'accroît comme la racine carrée du temps écoulé [5]. Ses résultats furent à la base de la finance stochastique moderne, notamment du célèbre modèle de Black et Scholes ⁷ qui, bien que conçu en 1973, est encore utilisé de nos jours sur tous les marchés financiers du monde [7].

3.2 Point moyen d'un nuage de points

Afin d'étudier conjointement deux caractères, par exemple la taille et le poids, sur des individus, on utilise des séries statistiques doubles (encore appelées bivariées ou à deux variables).

Sur une population donnée, étudions deux caractères, notés X et Y , qui peuvent être quantifiés. Repérons chacun des p individus de cette population par un indice i , et notons alors x_i et y_i les valeurs prises par chacun des deux caractères. Nous obtenons de la sorte

⁷Fisher Black et Myron Scholes, ont montré que le calcul stochastique est parfaitement adapté pour calculer le *juste prix* d'une option ; ce travail, également réalisé la même année mais indépendamment par Robert Merton, a valu à celui-ci, ainsi qu'à Scholes, de recevoir le Prix Nobel d'Economie en 1997, Black étant décédé entre-temps.

une série statistique double S définie comme suit

$$S = \{(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_p, y_p)\}.$$

Dans un repère orthogonal du plan, l'ensemble S des points P_i de coordonnées (x_i, y_i) est appelé le *nuage de points* associé à cette série statistique double. Il peut être visualisé graphiquement.

Notons \bar{x} la moyenne arithmétique des valeurs x_i , et \bar{y} la moyenne arithmétique des valeurs y_i :

$$\bar{x} = \frac{1}{p} \sum_{i=1}^p x_i \text{ et } \bar{y} = \frac{1}{p} \sum_{i=1}^p y_i.$$

Le point M de coordonnées (\bar{x}, \bar{y}) est appelé le *point moyen*, ou encore l'*isobarycentre* du nuage de points associé à la série S . Ce point définit géométriquement une position "centrale" du nuage.

Le point M joue également un rôle important dans l'étude de la "corrélation" entre les deux variables étudiées. En effet, dans le cas (assez fréquent) où le nuage de points a une forme allongée, on peut effectuer un *ajustement afffin* du nuage, c'est-à-dire tracer une droite autour de laquelle sont situés les points du nuage. Pour tracer une telle droite ajustant assez fidèlement les données, plusieurs méthodes peuvent être envisagées.

Décrivons brièvement deux méthodes, parmi les plus simples, couramment utilisées, à savoir celles qui décrivent la *droite des moindres carrés* ainsi que la *droite de Mayer*.

- **Droite des moindres carrés.** On peut démontrer qu'il existe une droite d unique associée au nuage de points S telle que la somme des carrés des "distances verticales" $d_i = |P_i A_i|$ soit minimale, avec $A_i \in d$ et d'abscisse x_i , pour tout $i = 1, \dots, p$. Cette droite, couramment appelée *droite des moindres carrés*, a pour équation

$$y - \bar{y} = a(x - \bar{x}),$$

avec pour coefficient angulaire

$$a = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x} \text{ où } \sigma_{xy} = \frac{1}{p} \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p (x_i - \bar{x})(y_j - \bar{y}) \text{ et } \sigma_x = \sqrt{\frac{1}{p} \sum_{i=1}^p (x_i - \bar{x})^2};$$

elle passe par le point moyen M du nuage.

La Figure 15 représente la droite obtenue pour la série

$$S = \{(2, 2), (3, 1.5), (2.5, 2.5), (3.5, 2.5), (3, 3.5), (4, 2), (4.5, 4), (5, 2.5), (5, 3.5), (5.5, 4.5), (6, 3), (6.5, 4)\}.$$

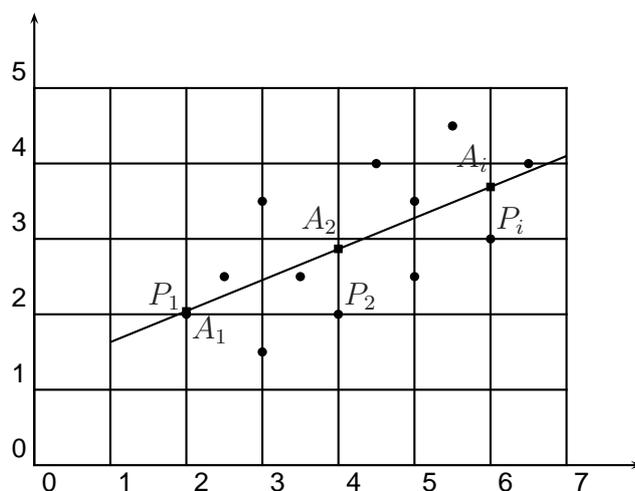


Figure 15: Droite des moindres carrés pour la série S

- **Droite de Mayer**⁸. Divisons le nuage de points S d'une série en deux sous-ensembles d'effectifs égaux si possible, ou à tout le moins proches l'un de l'autre. Pour fixer les idées, considérons les deux sous-nuages

$$S_1 = \{(x_i, y_i) : i = 1, \dots, m\} \text{ et } S_2 = \{(x_i, y_i) : i = m + 1, \dots, p\},$$

et construisons les points moyens correspondants $M_1 = (\bar{x}_1, \bar{y}_1)$ et $M_2 = (\bar{x}_2, \bar{y}_2)$. La droite passant par ces deux points supposés distincts est appelée la *droite de Mayer*; elle est donc d'équation

$$\frac{y - \bar{y}_1}{\bar{y}_2 - \bar{y}_1} = \frac{x - \bar{x}_1}{\bar{x}_2 - \bar{x}_1};$$

la propriété de l'associativité du barycentre garantit le passage de cette droite par le point moyen M du nuage.

Pour la même série S que ci-dessus, la Figure 16 représente la droite de Mayer lorsque la série a été scindée en deux sous-séries d'effectifs 6.

3.3 Homme moyen selon Quetelet

A. Quetelet (1796 - 1820) fut un savant belge qui s'illustra dans de nombreux domaines. Mathématicien de formation, il enseigna les mathématiques dans plusieurs établissements dont l'Athénée de Bruxelles puis le Collège militaire; il fut notamment l'auteur de diverses

⁸Cette méthode, encore dite de la *semi-moyenne*, est due à l'astronome et physicien allemand Johann Tobias Mayer (1723 - 1762).

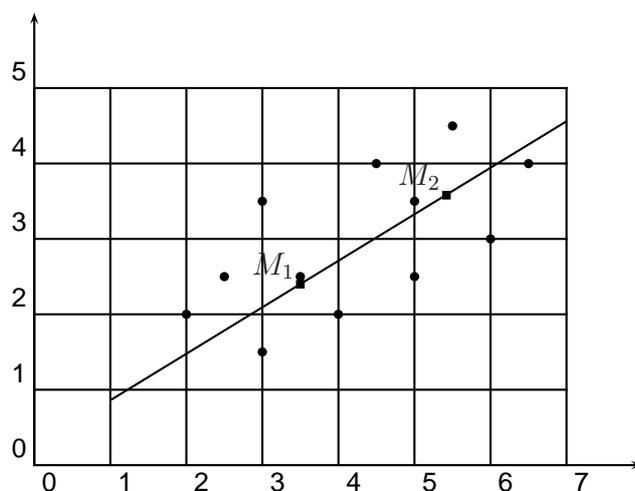


Figure 16: Droite de Mayer pour la série S

publications en géométrie renfermant des résultats qui sont quelquefois appelés de nos jours des “théorèmes belges”. Il fonda en 1828 l’observatoire royal d’astronomie à Bruxelles et devint secrétaire perpétuel de l’Académie royale belge, de 1834 à sa mort.

Mais le volet le plus connu de son oeuvre concerne la statistique et la sociologie. Quetelet est reconnu comme étant un des fondateurs de la statistique contemporaine. Il s’intéressa particulièrement à caractériser, par la statistique, l’“homme” en général. Dans son ouvrage *Sur l’homme*, paru en 1835 puis republié en 1869 sous le titre *Physique sociale*, il développa la *théorie de l’homme moyen*.

Pour définir cet homme moyen, Quetelet considérait d’abord diverses caractéristiques des individus composant une population déterminée : la taille, le poids, les dimensions des jambes, . . . , mais aussi l’intelligence, l’honnêteté, Afin de mettre en évidence des lois générales, il proposait de faire abstraction des particularités individuelles en les neutralisant par l’observation de la masse ; il estimait en effet que *plus le nombre d’individus que l’on observe est grand, plus les particularités individuelles, soit physiques, soit morales, s’effacent et laissent prédominer la série des faits généraux qui dépendent des causes en vertu desquelles la société existe et se conserve*. C’est ainsi qu’il étudiait les moyennes des différentes caractéristiques pour sa population-cible, et il définissait ensuite l’*homme moyen* comme étant un être fictif qui serait doté d’une taille moyenne, d’un poids moyen, de dimensions moyennes des jambes, . . . , d’une intelligence moyenne, d’une honnêteté moyenne, Selon le savant belge, *la détermination de l’homme moyen est de la plus grande utilité ; elle peut rendre des services importants à la science de l’homme considéré de manière générale. Elle doit nécessairement précéder toute autre recherche relative à la physique sociale, puisqu’elle en forme pour ainsi dire la base. L’homme moyen, en effet, est dans une nation ce que le centre de gravité est dans un corps ; c’est à sa considération*

que se ramène l'appréciation de tous les phénomènes de l'équilibre et du mouvement; il présente en outre, quand on l'envisage en lui-même, des propriétés remarquables.

Malheureusement, Quetelet idéalisa un peu trop cet homme moyen qui devrait jouir, selon lui, de multiples qualités et représenterait à la fois le beau, l'intelligent, le grand, ... De plus, il chercha à modéliser le comportement humain en oubliant de mesurer l'incertitude résultant de ses analyses statistiques.

Il n'est dès lors pas très surprenant de constater que la théorie de Quetelet fut très tôt critiquée, notamment par J. Bertrand dans son célèbre ouvrage *Calcul des probabilités*. Selon ce dernier, *Quetelet a voulu définir et préciser le mot "homme" indépendamment des hommes particuliers, considérés comme accident. Sans discussion, ni subtilité, le patient auteur attribue à son type, par définition, la moyenne de chaque élément variable d'un homme à l'autre ... dans le corps de l'homme moyen, l'auteur belge place une âme moyenne.* Cet avis, un peu ironique, laisse transparaître deux objections fondamentales émises à propos de la notion de l'homme moyen.

- Si le calcul des moyennes de variables quantitatives telles la taille, le poids, ... ne pose aucun problème, il n'en va pas de même pour des grandeurs plus qualitatives comme l'intelligence, l'honnêteté ... qui peuvent plus difficilement être quantifiées et dont la moyenne arithmétique ne présente guère de sens.
- Le fait de rassembler chez un seul individu fictif toutes les caractéristiques moyennes d'une population donnerait naissance à un être difforme, probablement impossible à trouver dans la réalité. A ce propos, citons textuellement le raisonnement de J. Bertrand: ... *Ces détails ... comment s'ajustent-ils? La hauteur de la tête, par exemple, pourra, pour l'homme moyen, se calculer par deux méthodes: on peut prendre la moyenne des longueurs ou, pour chaque individu, le rapport de la tête à la hauteur du corps, puis la moyenne de ces rapports. Les résultats sont différents, comment les accorder? Grave difficulté et inévitable écueil. Pour le montrer avec évidence, cherchons entre deux sphères la sphère moyenne; l'une a pour rayon 1; nous choisirons les unités de manière à représenter également la surface et le volume par 1. La seconde sphère a, je suppose, pour rayon 3, pour surface 9, et pour volume 27: ces chiffres sont forcés. Les moyennes 2.5 et 14 sont incompatibles. Une sphère de rayon 2 aurait pour surface 4 et pour volume 8, très exactement; aucune concession n'est possible, aucune sphère n'est difforme. Un homme malheureusement peut l'être et M. Quetelet en profite; en associant le poids moyen de 20000 conscrits à leur hauteur moyenne, on fera l'homme type ridiculement gros ...*

Depuis le milieu du siècle passé, la notion statistique de l'homme moyen a été réhabilitée dans la communauté scientifique, notamment par M. Fréchet (1878 - 1973)[14].

En effet, le développement de la statistique a permis de relativiser certaines critiques formulées à l'égard des valeurs moyennes.

Il est désormais bien connu que la moyenne arithmétique d'une série est simplement un paramètre de position parmi d'autres, fournissant une approximation globale d'une valeur

représentative de l'ensemble étudié. Elle peut être remplacée par d'autres estimateurs plus conformes à la réalité, le plus simple et le plus connu étant la médiane qui s'avère davantage "robuste".

Par ailleurs, des théories statistiques parfois sophistiquées permettent d'analyser scientifiquement des grandeurs qui ne sont pas immédiatement quantifiables, telles que l'intelligence par exemple.

Pour l'anecdote, signalons que l'idée d'"homme moyen" fut encore reprise par l'écrivain français Pierre Daninos (1913-2005) dans son livre "Un certain Monsieur Blot" ([11]). Ce roman, écrit sur un ton humoristique propre à l'auteur, relate l'histoire d'un actuaire qui gagne un concours visant à désigner l'idéal du français moyen et qui, de ce fait, passe brusquement de l'anonymat à la célébrité.

3.4 Un problème de distribution

Une chaîne multinationale de distribution souhaite construire un nouveau centre commercial qui accueillera des clients habitant dans différentes villes. Concrètement, le problème consiste à sélectionner l'endroit d'implantation du centre, noté dans la suite C , sur une carte géographique de la région visée. Par souci de simplicité, les villes et le centre seront représentés par des points sur la carte.

Si la nouvelle surface commerciale est destinée exclusivement aux habitants d'une seule ville V , le problème est simple, puisque le centre C sera évidemment situé dans la ville V , de sorte que les points V et C coïncident sur la carte.

Si la nouvelle construction C doit être fréquentée par les habitants de deux villes V et W , il est clair intuitivement que le point C sera situé sur le segment de droite d'extrémités V et W . Dans le cas (rare) où les deux villes possèdent le même nombre d'habitants, C est évidemment situé à mi-chemin entre les deux villes. Lorsque les nombres d'habitants diffèrent, il paraît normal de placer C plus près de la ville la plus peuplée, car cette dernière possède un plus grand pouvoir d'attraction sur C . Par exemple, si la ville V est deux fois plus peuplée que W , on choisit souvent la distance entre V et C deux fois plus courte que celle entre W et C . D'un point de vue de la physique, tout se passe alors comme si le centre C exerçait sur la ville V (resp. W) une *force d'attraction commerciale* \vec{F}_V (resp. \vec{F}_W).

Le point C doit alors être positionné de manière à ce que les deux forces d'attraction \vec{F}_V et \vec{F}_W s'équilibrent. Dans le cas particulier évoqué ci-dessus, en prenant $\vec{F}_V = 2\vec{CV}$ et $\vec{F}_W = \vec{CW}$, on doit avoir $2\vec{CV} + \vec{CW} = \vec{0}$. D'après la définition vectorielle d'un barycentre, C doit donc être le barycentre des points pondérés V (2) et W (1) : il est situé sur le segment de droite joignant V à W , à une distance de V égale au tiers de la longueur du segment $[V, W]$.

Passons au cas général de l'implantation d'un centre commercial C dans une région comptant p villes (toujours représentées par des points sur une carte géographique) V_1, V_2, \dots, V_p et peuplées respectivement par v_1, v_2, \dots, v_p habitants. Le centre commercial doit exercer sur chaque ville V_j (pour $j = 1, 2, \dots, p$) une force d'attraction qui peut

être caractérisée par le vecteur $v_j \overrightarrow{CV_j}$. Idéalement, toutes ces forces d'attraction doivent s'équilibrer, ce qui conduit à l'égalité vectorielle

$$\sum_{j=1}^p v_j \overrightarrow{CV_j} = \vec{0}.$$

Ainsi, le point C est le barycentre des p points pondérés $V_j (v_j)$ pour $j = 1, 2, \dots, p$.

Considérons à présent le même problème sous un angle différent, moins inspiré de la physique, mais plus analytique.

Dans un repère orthonormé, notons x_j et y_j respectivement l'abscisse et l'ordonnée du point V_j pour tout $j = 1, 2, \dots, p$. Il s'agit alors de rechercher les coordonnées x et y du point C pour lequel la somme des "distances" à parcourir par tous les habitants de la région pour se rendre au centre commercial est la plus petite possible.

Avec nos notations et en choisissant pour "distance" le carré de la distance euclidienne classique, il s'agit alors de rechercher les valeurs de x et de y qui minimisent la fonction f définie par

$$f(x, y) = \sum_{j=1}^p v_j [(x_j - x)^2 + (y_j - y)^2].$$

Comme l'objectif $f(x, y)$ est "séparable" sur x et y , minimiser $f(x, y)$ revient à minimiser deux fonctions distinctes de x et de y respectivement. Or, il est bien connu en statistique que la moyenne arithmétique d'une série de valeurs est l'estimateur qui minimise la somme des carrés des écarts entre l'inconnue et les valeurs de la série et que ce résultat reste d'application dans le cas où les valeurs de la série sont pondérées, auquel cas la moyenne arithmétique est bien entendu également pondérée. Il en résulte que l'abscisse et l'ordonnée du point C sont respectivement données par

$$\bar{x} = \frac{\sum_{j=1}^p v_j x_j}{\sum_{j=1}^p v_j} \text{ et } \bar{y} = \frac{\sum_{j=1}^p v_j y_j}{\sum_{j=1}^p v_j}.$$

En guise d'exemple numérique, considérons trois villes repérées, sur une carte géographique, par les coordonnées cartésiennes suivantes : $V_1 = (1, 2)$, $V_2 = (2, 5)$ et $V_3 = (5, 2)$ et possédant respectivement 300000, 200000 et 500000 habitants. Dans ce repère, les coordonnées du point C où devrait se situer le centre commercial peuvent être calculées comme suit :

$$\begin{cases} \bar{x} = \frac{3 \times 1 + 2 \times 2 + 5 \times 5}{3 + 2 + 5} = 3.2 \\ \bar{y} = \frac{3 \times 2 + 2 \times 5 + 5 \times 2}{3 + 2 + 5} = 2.6 \end{cases}$$

Ainsi, le point C a pour coordonnées $(3.2, 2.6)$. La situation est illustrée sur la Figure 17

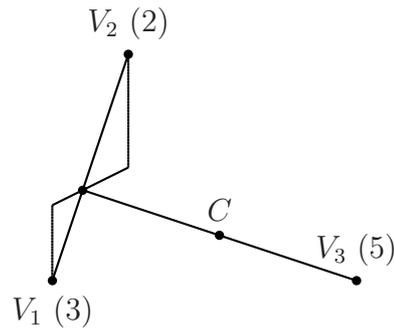


Figure 17: Implantation d'un centre commercial

Comme le modèle qui vient d'être présenté a été extrêmement simplifié par souci de clarté, quelques commentaires additionnels doivent être fournis. Dans la littérature spécialisée, la "distance" utilisée n'est généralement pas le carré de la distance euclidienne, mais bien une autre distance classique (comme la distance euclidienne elle-même, celle de Manhattan ou encore celle du "max") : celles-ci peuvent en effet être plus facilement interprétées en termes de coûts puisque les nombres $f(x, y)$ mesurent effectivement des distances réelles à parcourir (et non pas leur carré). Par ailleurs, le critère de type "minisomme", c'est-à-dire de la minimisation de la somme des "distances", semble approprié lorsque l'organisme qui prend la décision de la localisation supporte les coûts de déplacement ; ceci n'est généralement pas le cas pour une traditionnelle implantation d'un centre commercial, mais pourrait l'être pour la construction d'un nouvel entrepôt au départ duquel seront effectuées des livraisons : le critère retenu consiste alors à minimiser des coûts proportionnels à la distance totale parcourue pour les livraisons. Par contre, si les coûts des déplacements sont supportés par les clients, un critère de type "minimax", c'est-à-dire de la minimisation de la plus grande distance, peut s'avérer plus adéquat dans la mesure où chaque client ne supporte que son propre coût ; on parle alors de "rayon d'attraction" d'un nouveau centre commercial, ou d'un complexe de cinéma, ou d'une caserne de pompiers, ... : ce qui importe alors, c'est la distance la plus grande que chaque client est disposé à parcourir pour atteindre la localisation choisie.

4 Lissage d'une série chronologique

4.1 Position du problème

Il s'avère fréquemment utile d'analyser l'évolution d'une grandeur au cours du temps, notamment pour mieux comprendre un phénomène et, souvent, pour prévoir et préparer une prise de décision. Ainsi, on étudiera l'évolution du nombre de chômeurs d'un pays en vue d'élaborer une politique économique adéquate, on examinera le comportement d'un

indice boursier afin de définir une stratégie d'investissement en bourse, on s'appuyera sur des statistiques relatives aux dépenses ménagères dans un certain secteur pour mettre au point un plan optimal de production ou pour approvisionner suffisamment des stocks, ...

D'un point de vue formel, on dispose de données statistiques donnant à différentes époques t_i la valeur correspondante y_i d'une grandeur y , pour $i = 1, 2, \dots, p$, avec, par convention, $t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_p$.

La série statistique

$$S = \{(t_i, y_i) : i = 1, 2, \dots, p\}$$

est en fait une série statistique double portant sur la variable temporelle t et sur la grandeur étudiée y ; elle peut se représenter par un nuage de points tracés dans un repère dont l'axe des abscisses se réfère au temps t et celui des ordonnées aux valeurs de la grandeur y . L'évolution temporelle de y peut être visualisée par des segments de droite reliant deux points successifs du nuage, à savoir par les segments $[(t_i, y_i), (t_{i+1}, y_{i+1})]$ pour $i = 1, 2, \dots, p - 1$.

De la sorte, on obtient généralement une ligne polygonale en dents de scie, avec des "bosses" et des "creux". Par exemple, il n'est pas rare que le nombre de chômeurs d'un pays européen augmente globalement sur une période plus ou moins longue, mais subisse à certains moments des hausses et des baisses: l'arrivée sur le marché de nouveaux chômeurs n'est pas toujours régulière et peut dépendre de la conjoncture économique ou être tout à fait exceptionnelle, comme c'est le cas des jeunes qui cherchent un emploi après avoir terminé leurs études alors que l'offre des emplois n'a évidemment pas augmenté autant que les nouvelles demandes. Un autre exemple est fourni par le nombre de jouets vendus par une entreprise spécialisée: il sera important en fin d'année, avec les fêtes de Saint-Nicolas, de Noël et du Nouvel An, ainsi qu'aux environs de Pâques, mais sera plus réduit aux autres moments de l'année. De même, les ventes d'automobiles sont assez irrégulières; par exemple, une personne attendra souvent la fin de l'hiver ou une promotion particulièrement intéressante pour acheter un véhicule neuf et sera ainsi prête à reculer ou avancer la date de son achat. Comme autre exemple typique, on peut observer l'évolution d'un indice boursier: autour d'une tendance haussière à long terme, on enregistre fréquemment de petites fluctuations qui paraissent aléatoires (Figure 18).

4.2 Notion de *trend* d'une série chronologique

En présence d'une série chronologique représentée par une ligne polygonale en dents de scie, on aimerait dégager une tendance globale, ou *trend* en anglais, qui "gommerait" les petites fluctuations occasionnelles, pour ne retenir que la tendance dominante à long terme.

Idéalement, cette *trend* devrait être

- fidèle en reflétant au mieux toutes les données
- régulière en ne présentant qu'un nombre restreint de pics vers le haut ou vers le bas

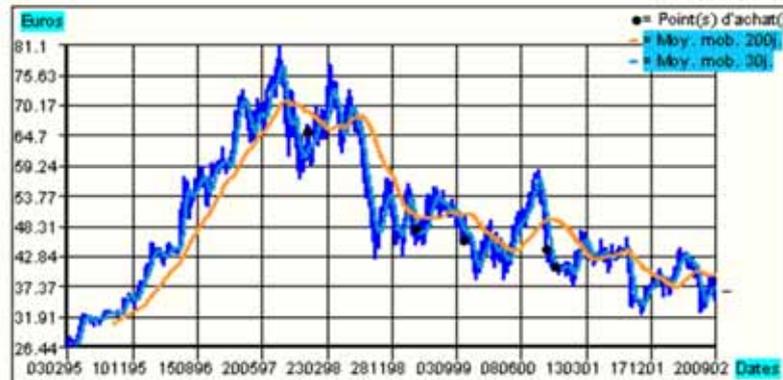


Figure 18: Evolution d'un indice boursier

- robuste pour ne pas être trop influencée par des données aberrantes ou manquantes.

Il est bien connu qu'une régression linéaire, à l'aide de la classique *droite des moindres carrés*, peut mettre en évidence une *trend* assez fidèle, puisque toutes les données sont exploitées pour calculer l'équation de la droite. Par ailleurs, le résultat ainsi obtenu est bien régulier car une fonction affine est indéfiniment dérivable. Mais la régression linéaire n'est guère robuste : des données aberrantes peuvent influencer fortement la droite de régression ([16], [17]) ; ainsi, l'ajout d'un nouveau point à la série étudiée, par exemple la prise en compte du résultat bilantaire d'un mois supplémentaire, peut entraîner une modification profonde de la droite des moindres carrés.

Il existe diverses méthodes de lissage possédant des avantages et inconvénients variables : une plus ou moins grande facilité de calcul, de représentation graphique, de perte d'information, ... Elles consistent souvent à remplacer des points expérimentaux par leur barycentre.

Nous allons passer en revue quelques méthodes, parmi les plus importantes et les plus simples, permettant de dégager la *trend* d'une série chronologique

$$S = \{(t_i, y_i) : i = 1, 2, \dots, p\}$$

qui pourra être visualisée par le nuage de points $P_i = (t_i, y_i)$. Ces méthodes seront illustrées par l'exemple numérique suivant :

Un financier a relevé la valeur de l'indice CAC 40 au premier jour ouvrable de chaque mois, sur 12 mois consécutifs, à partir du 2 janvier 1998. Il obtient ainsi la série temporelle suivante :

$$S(t) = \{3040, 3188, 3447, 3883, 3974, 4087, 4261, 4095, 3646, 3038, 3570, 3688\}$$

Cette série chronologique peut être représentée comme suit à la Figure 19.

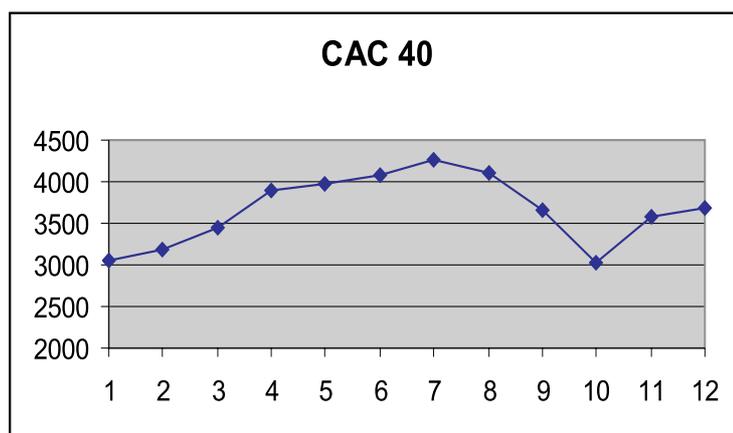


Figure 19: Evolution de l'indice CAC40

4.3 Méthode des moyennes échelonnées

L'ensemble des p points expérimentaux P_i est divisé en k sous-ensembles de même effectif m , tout en respectant l'ordre chronologique des points, c'est-à-dire en prenant les points dans l'ordre croissant de leurs indices. De façon précise, le $j^{\text{ème}}$ sous-ensemble se compose des m points P_i pour $i = (j-1)m + 1, (j-1)m + 2, \dots, jm$. Il faut bien entendu que p soit un multiple de m , à savoir que $p = mk$. Si ce n'est pas le cas, il faut supprimer des points, ce qui occasionne évidemment une perte d'information, ou en ajouter, ce qui peut déformer la réalité.

Il n'est pas rare de choisir m impair, souvent égal à 3, mais ceci n'est pas nécessaire. On prend aussi quelquefois k égal à 2, auquel cas on retrouve la droite de Mayer.

Pour chaque sous-ensemble de m points, on construit son isobarycentre. On dispose de la sorte de k points isobarycentriques G_j pour $j = 1, 2, \dots, k$ qui remplacent les p points P_i initiaux.

Si $m = 3$, les points G_j sont les centres de gravité de triangles ayant pour sommets trois points P_i d'indices consécutifs. Ils se construisent géométriquement aisément en recherchant l'intersection de deux médianes du triangle; analytiquement, le centre de gravité G_j du triangle de sommets P_{j-1} , P_j et P_{j+1} a pour coordonnées

$$G_j = \left(\frac{t_{j-1} + t_j + t_{j+1}}{3}, \frac{y_{j-1} + y_j + y_{j+1}}{3} \right).$$

Si, de plus, les nombres t_i sont équidistants, les abscisses des points G_j coïncident avec celles de points expérimentaux: dans le cas particulier où les t_i valent respectivement $1, 2, \dots, p$, les abscisses des G_j valent respectivement $2, 5, 8, \dots$. Lorsque les t_i désignent des mois, la méthode consiste alors à remplacer les données d'un trimestre par leur moyenne arithmétique estimée au milieu de celui-ci.

Cette méthode est évidemment très facile à exploiter; elle lisse bien les données

en réduisant fortement le nombre de points considérés. Par contre, et pour cette même raison, elle provoque une importante perte d'information. Par exemple, les 12 points expérimentaux de l'exemple traité par cette méthode avec $m = 4$ sont remplacés par 3 points seulement.

Le graphique de la Figure 20 représente les séries obtenues par la méthode des moyennes échelonnées pour $m = 3$ et $m = 4$.

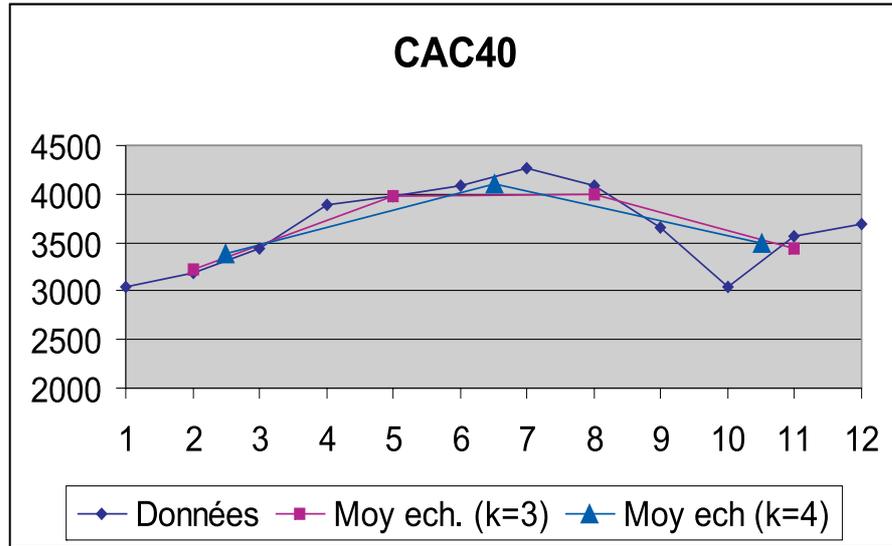


Figure 20: Moyennes échelonnées pour $m = 3$ et $m = 4$

4.4 Méthode des moyennes mobiles

Chaque point expérimental P_i , pour $i = 3, \dots, p$, peut être remplacé par un point dont l'abscisse vaut t_i et dont l'ordonnée est la moyenne arithmétique entre les ordonnées de ce point et des deux points précédents P_{i-1} et P_{i-2} .

On construit de la sorte $p - 2$ points G_j , pour $j = 3, \dots, p$, ce qui n'occasionne qu'une très petite perte d'information et est, dans ce sens, plus efficace que la méthode des moyennes échelonnées. De plus, l'ajout d'une donnée nouvelle donne naissance à un nouveau point, construit comme les autres en ne perturbant aucunement les calculs antérieurs.

Cette méthode, encore appelée *moyenne mobile sur trois périodes* et notée simplement MM_3 , réclame l'abandon des deux données temporelles, les deux premières : dans un but de prévision de l'évolution future, cette perte ne représente pas un grand sacrifice. Cette méthode s'avère bien adaptée dans le cas de certaines transactions non régulières, par exemple des ventes d'automobiles ou de jouets, ou des alternances de périodes de prospérité suivies de périodes d'austérité,

Le tableau ci-dessous compare, pour une série chronologique comprenant 6 données, les deux méthodes des moyennes échelonnées et des moyennes mobiles calculées sur trois

points :

temps	t_1	t_2	t_3	t_4	t_5	t_6
valeurs	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6
moy. échelonnées	—	$\frac{y_1+y_2+y_3}{3}$	—	—	$\frac{y_4+y_5+y_6}{3}$	—
moy. mobiles	—	—	$\frac{y_1+y_2+y_3}{3}$	$\frac{y_2+y_3+y_4}{3}$	$\frac{y_3+y_4+y_5}{3}$	$\frac{y_4+y_5+y_6}{3}$

Voici un exemple simple qui a été construit fictivement pour montrer qu'une moyenne mobile décrit généralement mieux le phénomène étudié qu'une moyenne échelonnée. Considérons la série temporelle suivante :

t_i	0	1	2	3	4	5
y_i	0	1	0	-1	3	-1

Par la méthode ME_3 , on obtient une droite (qui coïncide ici avec une droite de Mayer) qui est horizontale d'ordonnée $\frac{1}{3}$. Par contre, la méthode MM_3 fait apparaître une ligne brisée s'articulant autour des points $(2, \frac{1}{3})$, $(3, 0)$, $(4, \frac{2}{3})$ et $(5, \frac{1}{3})$. Concrètement, la droite donnée par ME_3 donne à penser que les valeurs des y_i restent constantes, ce qui n'est évidemment pas le cas. Par contre, le résultat fourni par MM_3 rend beaucoup mieux compte des diverses fluctuations tout en gommant les valeurs extrêmes prises par la grandeur étudiée (Figure 21).

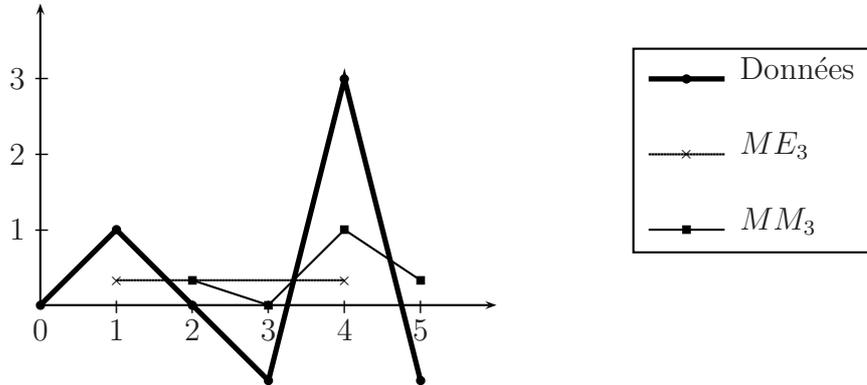


Figure 21: Moyennes échelonnée et mobile

La méthode MM_3 peut être adaptée et généralisée de diverses manières, notamment en remplaçant l'ordonnée d'un point observé par la moyenne arithmétique de l'ordonnée de ce point et des ordonnées des $m - 1$ points précédents de la série double ; on parle alors de la méthode MM_m . Par exemple, MM_5 remplace chaque point P_i par le point $(t_i, \frac{y_{i-4}+y_{i-3}+y_{i-2}+y_{i-1}+y_i}{5})$ pour tout indice i à partir de $i = 5$ jusqu'à $i = p$. Il est également possible de pondérer les m points considérés.

Le choix du nombre m n'est pas toujours évident. En effet, plus m est grand, plus le lissage est important, mais plus grande est alors la perte d'information. Au contraire, lorsque

m est petit, les calculs sont nombreux, mais les barycentres reflètent assez fidèlement les données observées. Dans les cas extrêmes, prendre $m = 1$ revient à ne pas modifier la série de départ, tandis que retenir m égal à l'effectif de la série consiste à remplacer celle-ci par l'isobarycentre du nuage de points. Il n'existe donc pas de règle universelle imposant le choix de m . La Figure 22 représente les séries des moyennes mobiles d'ordres 3 et 4 pour notre exemple.

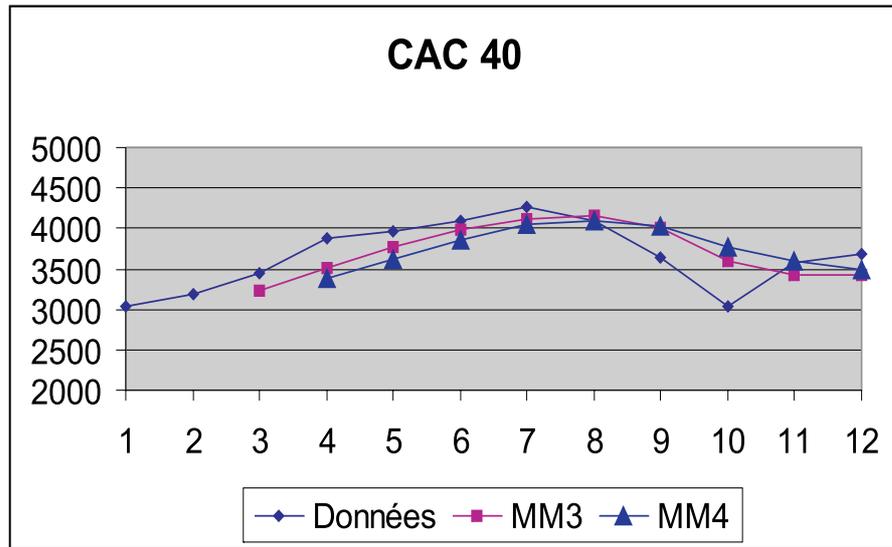


Figure 22: Moyennes mobiles pour $m = 3$ et $m = 4$

En plus de la latitude qui lui est laissée à propos du nombre m à sélectionner et du choix des moyennes, échelonnées ou mobiles, retenues, le statisticien peut encore faire appel à de multiples variantes. Il peut en effet pondérer diversement les observations, le cas le plus fréquent consistant à donner un poids plus important aux observations les plus proches de celles à remplacer.

Par exemple, on peut adapter la méthode MM_3 en accordant à chaque point à remplacer une pondération double de celle attribuée à ses voisins. Formellement, pour chaque indice j allant de 2 à $p - 1$, le point P_j est remplacé par le barycentre H_j des trois points pondérés $P_{j-1}(1)$, $P_j(2)$ et $P_{j+1}(1)$, ce qui revient à construire le point

$$H_j = \frac{1}{4}P_{j-1} + \frac{1}{2}P_j + \frac{1}{4}P_{j+1} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}P_{j-1} + \frac{1}{2}P_{j+1} \right) + \frac{1}{2}P_j :$$

H_j est alors le milieu de la médiane menée du sommet P_j sur le côté d'extrémités P_{j-1} et P_{j+1} .

Ce procédé possède des caractéristiques assez semblables à celles de la méthode MM_3 , mais notamment les avantages suivants :

- chaque point H_j se construit très facilement tant géométriquement qu'analytiquement ;

- H_j est généralement plus proche de la vraie observation correspondante P_j que le point G_j fourni par MM_3 .

5 Graphiques triangulaires

5.1 Position du problème et théorème de Viviani

Dans de nombreux phénomènes interviennent trois variables dont la somme des valeurs est toujours constante; souvent, il s'agit de la décomposition en pourcentages d'une grandeur suivant trois parties. Par exemple, un prix de revient d'un produit se décompose en trois postes, à savoir le coût de production, le coût de distribution et les frais généraux: la somme, exprimée en pourcentages du prix total, de ces trois valeurs relatives est égale à 100; l'actif (resp. le passif) d'un bilan se décompose en trois éléments principaux: les immobilisations, les stocks et les liquidités (resp. les capitaux propres, les dettes à long terme, les dettes à court terme); le transport de matières premières peut se faire par camions, par trains ou par bateaux; la population active d'un pays se répartit en trois secteurs: le primaire, le secondaire et le tertiaire; les composants nutritifs principaux sont les protides, les lipides et les glucides;

De telles situations peuvent être visualisées graphiquement en exploitant un résultat ancien dû au géomètre italien Viviani (1622 - 1703), à savoir le *théorème de Viviani* affirmant que, *dans un triangle équilatéral, la somme des distances d'un point intérieur aux trois côtés est constante et vaut la hauteur*.

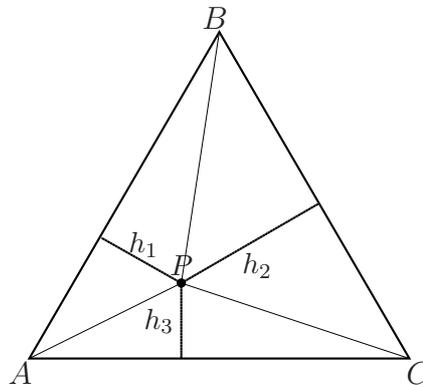


Figure 23: Illustration du théorème de Viviani

Cet énoncé se démontre aisément. En effet, dans un triangle équilatéral de sommets A , B et C , considérons un quelconque point intérieur P . Notons h la hauteur du triangle, h_1 (resp. h_2 ; h_3) la distance du point P au côté AB (resp. BC ; AC). Il s'agit de prouver l'égalité suivante:

$$h = h_1 + h_2 + h_3.$$

L'aire du triangle ABC vaut évidemment la moitié du produit d'un côté par la hauteur, c'est-à-dire en notant c la longueur de chaque côté du triangle initial :

$$\frac{c \cdot h}{2}.$$

Par ailleurs, l'aire du triangle ABC est aussi égale à la somme des aires des triangles PAB , PBC et PCA , à savoir

$$\frac{c}{2} (h_1 + h_2 + h_3).$$

Le résultat souhaité s'obtient en égalant ces deux expressions donnant l'aire du triangle équilatéral.

Pour représenter graphiquement la décomposition d'une grandeur selon trois variables x , y et z de somme constante, c'est-à-dire telles que l'on a toujours $x + y + z = k$ (avec souvent $k = 100$), on trace un triangle équilatéral ABC dont chaque sommet se réfère à une variable, par exemple A pour x , B pour y et C pour z . De chaque sommet du triangle, on trace la hauteur qui est graduée de 0 à k , la valeur minimale 0 se trouvant à la base de la hauteur et la valeur maximale k au sommet opposé. Sur chaque hauteur, on repère le point correspondant à la valeur de la variable considérée et on trace de ce point la parallèle au côté représentatif de la variable : le point situé à l'intersection de ces trois hauteurs fournit une image de la situation étudiée. A titre d'exemple concret, considérons le cas d'un produit dont la structure du prix de revient est la suivante :

- Main-d'oeuvre : 50 % ;
- Matières premières : 30 % ;
- Frais généraux : 20 %.

Afin de visualiser ces données, construisons un triangle équilatéral de sommets A , B et C , qui se référeront respectivement aux coûts de la main-d'oeuvre, des matières premières et des frais généraux. Traçons ensuite de chaque sommet les hauteurs, et graduons-les de 0 à la base jusqu'à 100 au sommet. Sur la hauteur issue du sommet A repérons le point gradué 50 et menons de ce point la parallèle au côté BC ; de même, sur la hauteur menée depuis le sommet B (resp. C), sélectionnons le point noté de la graduation 30 (resp. 20) et traçons de ce point une parallèle au côté AC (resp. AB). Conformément au théorème de Viviani, les trois parallèles ainsi construites se coupent en un même point P qui caractérise géométriquement la structure des prix du produit étudié (Figure 24).

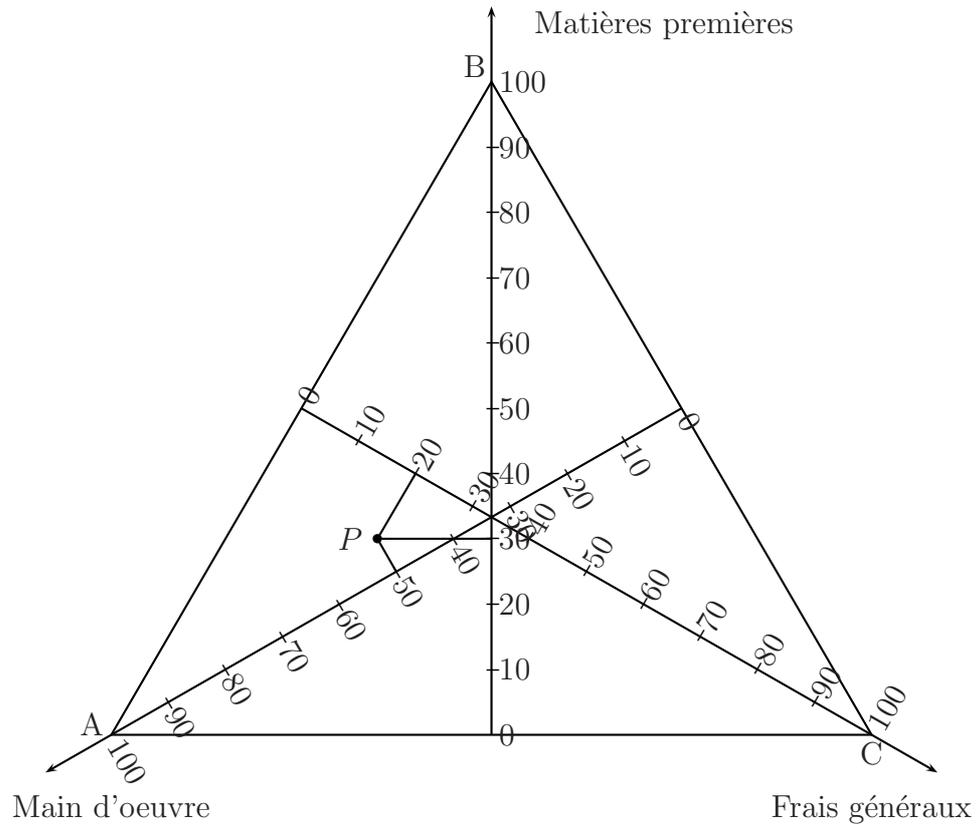


Figure 24: Coordonnées triangulaires et graduations sur les hauteurs

5.2 Coordonnées triangulaires et barycentre

Reprenons le problème de la représentation d'une grandeur qui se décompose en trois parties x , y et z dont la somme est égale à k . La méthode exposée ci-dessus à partir du théorème de Viviani possède le désavantage de recourir à une figure peu claire dans la mesure où les points à représenter peuvent interférer avec les échelles portées sur les hauteurs. Pour éviter cet inconvénient, on peut graduer directement, toujours de 0 à k , les côtés du triangle équilatéral ABC : le côté horizontal se rapporte à la première variable x , le minimum 0 de la graduation étant au sommet C et le maximum k au sommet A ; de même, le côté AB (resp. BC) se réfère à la variable y (resp. z) avec le 0 de la graduation au sommet A (resp. B) et le maximum k au sommet B (resp. C). Ainsi, un point représentatif de "coordonnées triangulaires" x, y, z peut être obtenu en repérant la graduation x (resp. y ; z) sur le côté CA (resp. AB ; BC) du triangle et en y menant la parallèle au côté BC (resp. AC ; AB) : on peut contrôler que ces trois parallèles se rencontrent au point P obtenu avec la méthode exposée ci-dessus. En guise d'illustration, l'exemple traité antérieurement donne lieu à la Figure 25 facile à interpréter.

Considérons le cas d'un point de coordonnées triangulaires (α, β, γ) , avec $\alpha + \beta + \gamma = 1$.

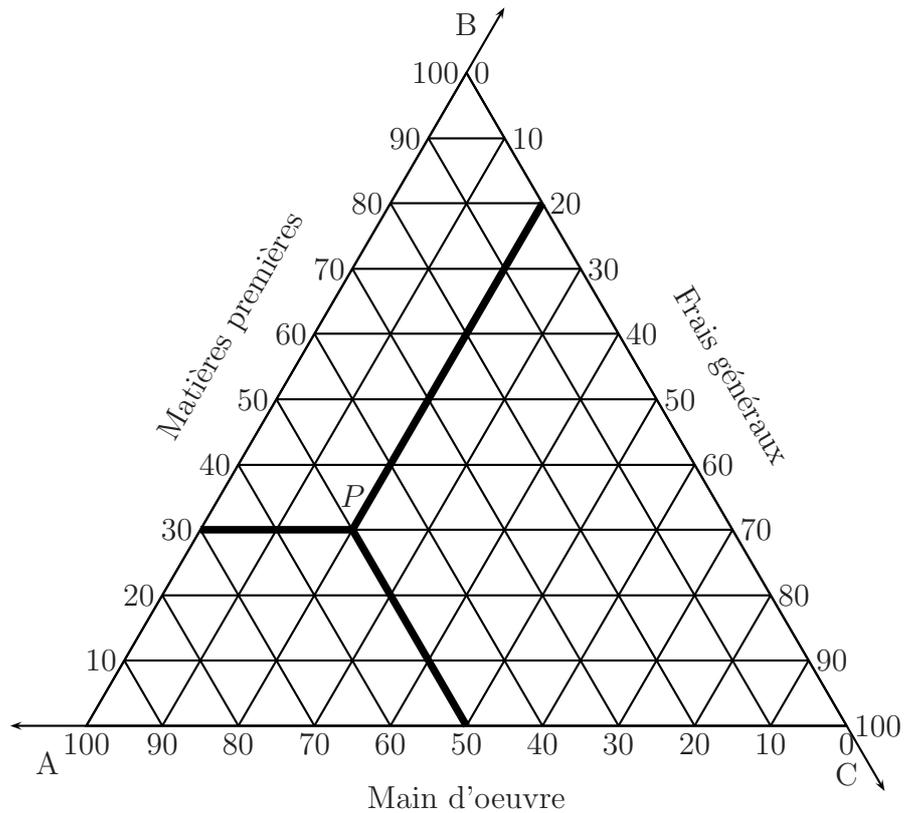


Figure 25: Coordonnées triangulaires et graduations sur les côtés du triangle

En consultant la Figure 26, on peut caractériser le point P recherché par cette égalité vectorielle :

$$\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AQ} + \overrightarrow{QP}.$$

Or, \overrightarrow{AQ} coïncide avec $\beta \cdot \overrightarrow{AB}$, tandis que \overrightarrow{QP} n'est rien d'autre que $\gamma \cdot \overrightarrow{AC}$, d'où l'on obtient :

$$\overrightarrow{AP} = \beta \cdot \overrightarrow{AB} + \gamma \cdot \overrightarrow{AC}.$$

En assimilant un vecteur à la différence de ses deux extrémités, et en tenant compte de l'égalité $\alpha + \beta + \gamma = 1$, il vient successivement :

$$P - A = \beta \cdot B + \gamma \cdot C - (\beta + \gamma) \cdot A$$

$$P = \alpha \cdot A + \beta \cdot B + \gamma \cdot C.$$

Ainsi, le point P rien d'autre que le barycentre des trois points pondérés $A(\alpha)$, $B(\beta)$ et $C(\gamma)$.

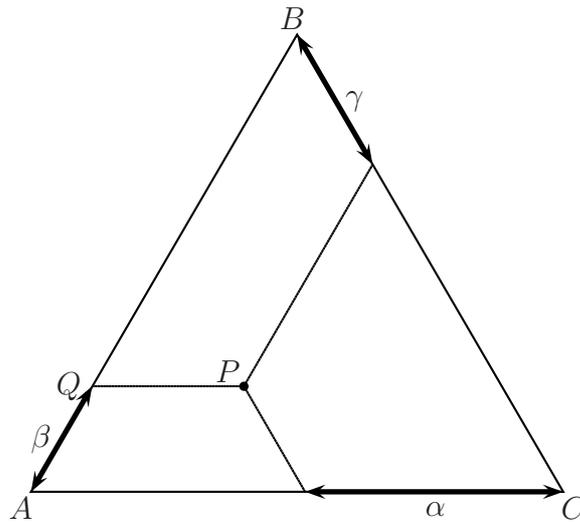


Figure 26: Coordonnées triangulaires et barycentre

5.3 Une application en politique

Dans de nombreux pays démocratiques, des élections sont organisées afin de désigner les représentants de la nation. Souvent, les partis politiques se voient attribuer un nombre d'élus proportionnel au nombre de suffrages récoltés ; de manière plus précise, chaque parti reçoit, en théorie, un nombre de sièges égal à son *quota*, celui-ci étant trouvé en multipliant le pourcentage obtenu par le nombre de sièges à pourvoir. Mais, en pratique, il est rare que les quotas soient des nombres entiers. De la sorte se pose fréquemment le problème concret de savoir comment “arrondir” les quotas, pour attribuer à chaque parti un nombre entier de sièges tout en respectant assez fidèlement les choix des électeurs.

Lorsque trois partis se présentent à des élections, les résultats des suffrages peuvent être visualisés sur un graphique triangulaire, puisque la somme des trois quotas est constante, égale au nombre de sièges à répartir entre les trois formations politiques. Ainsi, on est amené à rechercher le barycentre des trois sommets d'un triangle équilatéral ; ces sommets, qui se réfèrent chacun à un parti, sont pondérés par les quotas respectifs. Mais tout nombre effectif de sièges doit être un entier ; dès lors, il convient pratiquement de remplacer le barycentre trouvé par un point “assez proche” se trouvant sur le réseau construit en divisant chaque côté du triangle de référence en autant de parties égales que le nombre total de sièges et en menant de ces points de subdivision des parallèles aux côtés du triangle.

Illustrons la méthode par un exemple (fictif) numérique. Considérons trois partis politiques P_1 , P_2 et P_3 qui participent à une élection au cours de laquelle 9 sièges sont à pourvoir. Les résultats enregistrés sont les suivants :

Partis	Pourcentages de votes	Quotas
P_1	16%	$0.16 \times 9 = 1.44$
P_2	27%	$0.27 \times 9 = 2.43$
P_3	57%	$0.57 \times 9 = 5.13$

Ces informations peuvent être visualisées par le barycentre P des points pondérés P_1 (1.44), P_2 (2.43) et P_3 (5.13), où P_1 , P_2 et P_3 désignent les trois sommets d'un triangle équilatéral (Figure 27).

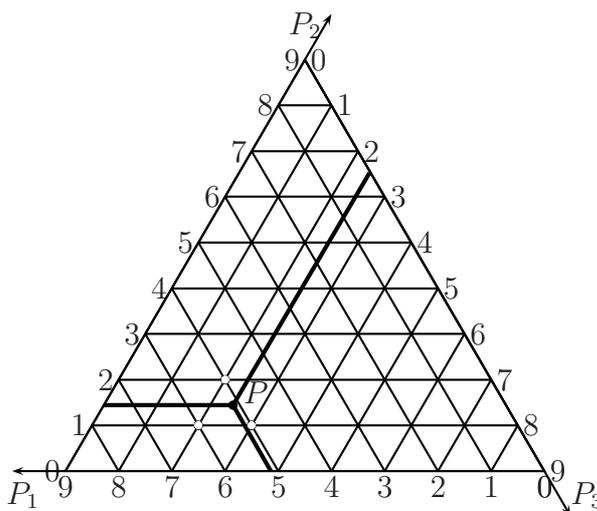


Figure 27: Attribution de sièges lors d'une élection

Comme les quotas ne sont pas des nombres entiers, il convient ensuite de remplacer le point P par un point du réseau qui lui est "proche" : selon que l'on arrondisse l'un ou l'autre quota à l'unité supérieure, il peut s'agir soit du point $(2, 2, 5)$, soit du point $(1, 3, 5)$, soit encore du point $(1, 2, 6)$. Pour choisir un de ces trois points, il existe diverses méthodes. En Belgique, pour les législatives, on utilise la *méthode de d'Hondt*. En premier lieu, on attribue directement à chaque parti un nombre de sièges égal à la partie entière de son quota ; puis, on calcule la "moyenne" de chaque liste en divisant le quota par le nombre de sièges déjà obtenu augmenté d'une unité. Le parti jouissant de la plus grande moyenne se voit attribuer un siège additionnel. Si nécessaire, on recommence la procédure jusqu'à ce que tous les sièges restants soient attribués.

Appliquons cette méthode à notre exemple.

Partis	P_1	P_2	P_3
Pourcentages	16	27	57
Quotas	1.44	2.43	5.13
Sièges directs	1	2	5
“Moyennes”	$\frac{1.44}{2} = 0.72$	$\frac{2.43}{3} = 0.81$	$\frac{5.13}{6} = 0.855$
Sièges additionnels	0	0	1
Nombre total de sièges	1	2	6

Cette procédure a tendance à favoriser les partis politiques “importants” et peut entraîner des situations paradoxales. Par exemple, considérons deux élections successives, au cours desquelles 10 sièges sont à pourvoir.

- **Premières élections**

Partis	Pourcentages	Quotas	Sièges directs	Nombre total de sièges
P_1	10.7	1.07	1	1
P_2	18.9	1.89	1	2
P_3	70.4	7.04	7	7

- **Secondes élections**

Partis	Pourcentages	Quotas	Sièges directs	Nombre total de sièges
P_1	15.1	1.51	1	1
P_2	16.7	1.67	1	1
P_3	68.2	6.82	6	8

On constate que le parti P_3 , bien qu’il ait diminué son score dans les votes, se voit attribuer un siège de plus lors des secondes élections ; il reçoit ce siège supplémentaire au détriment du parti P_2 : ainsi, le grand bénéficiaire de la dernière élection est le parti qui a le plus perdu en pourcentages de votes par rapport au premier scrutin.

En réalité, il n’existe aucune méthode “parfaite” d’attributions de sièges ... c’est d’ailleurs ce qui explique la diversité des systèmes utilisés dans les différents pays.

5.4 Une application de diététique

Notre alimentation se doit d’être équilibrée, notamment comprendre les trois substances principales indispensables à notre organisme que sont les lipides, les glucides et les protides. L’Organisation Mondiale pour la Santé, en abrégé O. M. S., recommande une alimentation constituée notamment de 15 % de protides, 35 % de lipides et 50 % de glucides. Tenons-nous en à ces trois substances, négligeant de la sorte d’autres aliments nécessaires comme des vitamines, des sels minéraux,

Pour chaque produit de consommation, la teneur en ces trois composants figure souvent sur l'emballage et est renseignée en grammes par 100 grammes de produit. De ces valeurs, on peut déduire le pourcentage de protides, lipides, glucides présents dans chaque aliment. Prenons quelques exemples où la teneur est estimée par les valeurs suivantes, exprimées en gr. par 100 gr. :

	Pr	Li	Gl
Pain	8	2.5	46
Viande	20	10	0
Pommes de terre	2	2	19
Huile	0	100	0
Limonade	0	0	12

Déduisons de ce tableau les pourcentages correspondants de ces trois constituants.

	Pr	Li	Gl
Pain	14.2	4.4	81.4
Viande	66.7	33.3	0
Pommes de terre	8.7	8.7	82.6
Huile	0	100	0
Limonade	0	0	100

Nous pouvons alors utiliser un graphique triangulaire pour représenter par un point chacun des aliments proposés. C'est ce que propose la Figure 28.

Sur cette même figure, on peut situer tout aliment A composé de deux aliments A_1 et A_2 déjà représentés : il sera visualisé par un point situé sur le segment joignant les points représentatifs des composants A_1 et A_2 et sa position sur le segment dépendra de la quantité respective de chaque composant dans l'aliment A . De façon plus précise, le point A sera donc le barycentre des points A_1 (α) et A_2 (β) où α et β sont les quantités respectives des composants A_1 et A_2 dans A . Ce raisonnement se généralise parfaitement au cas d'un aliment dont la composition fait intervenir p aliments déjà représentés : le point représentatif de cet aliment sera le barycentre des points correspondants, pondérés par les quantités respectives de ces composants dans l'aliment.

En guise d'illustration, considérons un repas pris dans un restaurant de type *fast food*. Un menu se compose généralement d'un hamburger, d'une limonade et d'une portion de frites. Pour le visualiser, traçons un triangle équilatéral dont les trois sommets se réfèrent respectivement aux pourcentages de glucides, de lipides et de protides. Sur cette figure, la limonade se représente par le sommet G du triangle relatif aux glucides. Un hamburger, composé de pain et de viande en quantités pratiquement égales, correspond à un point H situé presque au milieu du segment de droite joignant les points P et V se rapportant

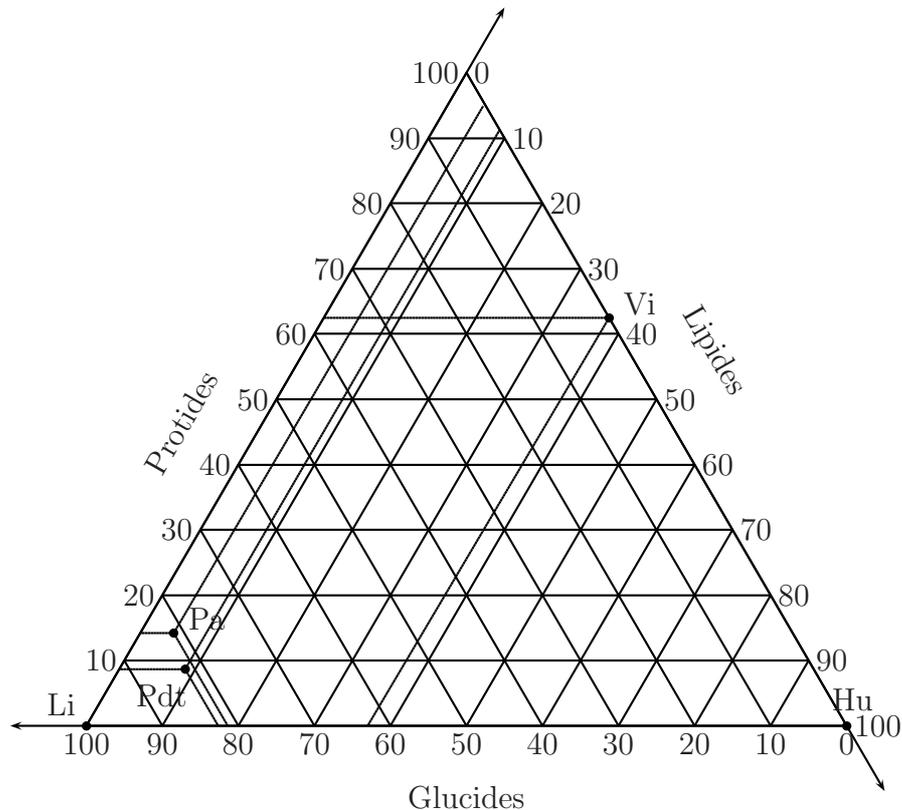


Figure 28: Graphiques triangulaires et diététique

respectivement au pain et à la viande. Comme 100 gr. de frites se composent environ de 90 gr. de pommes de terre pour 10 gr. d'huile, une portion sera représentée par le barycentre F des points pondérés $T(9)$ et $L(1)$, le sommet L se référant aux lipides et le point T aux pommes de terre. Ainsi, selon que le menu choisi est de type "maxi" ou "medium" par exemple, un repas pris dans un tel établissement correspond à un point situé dans l'enveloppe convexe des trois points G , H et F . On observera utilement que le point S traduisant les normes recommandées par l'O.M.S. n'est pas situé dans cette enveloppe convexe.

5.5 Application à l'évaluation de QCM

Le questionnaire à choix multiple, très en vogue actuellement notamment pour des commodités de correction lorsque le nombre d'interrogés est très grand, est composé d'une série de questions pour lesquelles sont proposées plusieurs réponses parmi lesquelles, en général, une seule est correcte. A la correction, trois possibilités se présentent pour chaque question:

- l'interrogé n'a pas répondu, il s'est abstenu
- l'interrogé a répondu correctement
- l'interrogé a répondu mais s'est trompé

Désignons par A le nombre d'abstentions, par V le nombre de réponses correctes et par F le nombre de réponses fausses. Il est clair que pour un questionnaire comportant N questions, on a $A + V + F = N$ et que de plus les trois variables A , V et F sont positives ou nulles. A chaque possibilité, on attribue une note qui varie en fonction du correcteur. Soit v la note attribuée à une réponse correcte, f le nombre de points attribués à une réponse incorrecte et a la note attribuée à une abstention. Il est raisonnable de supposer que $f \leq a < v$.

Tout questionnaire complété pourra alors être représenté par un point intérieur d'un triangle équilatéral dans lequel chacun de ces points correspond aux coordonnées triangulaires (A, V, F) et se voit associer une note correspondant au résultat obtenu en fonction du barème de points adopté.

Prenons l'exemple d'un questionnaire à 5 questions pour lequel les notes attribuées sont

- 2 pour une réponse correcte,
- 0 pour une abstention,
- -1 pour une réponse incorrecte,

Un tel système de cotations est utilisé assez couramment ; il confère la note c donnée par la formule

$$c = 2 \times V + 0 \times A - 1 \times F,$$

dont le maximum possible est égal à 10. Le triangle équilatéral représentatif de cette situation est illustré sur la Figure 29.

Les points correspondants aux diverses possibilités ne recouvrent pas tout le triangle, mais sont en nombre fini et sont situés sur le réseau formé par une des cinq parallèles équidistantes menées à un côté du triangle de référence. Cette présentation discrète peut provoquer des situations paradoxales. On peut ainsi constater que pour obtenir un résultat satisfaisant, c'est-à-dire une cote globale d'au moins 6 sur 10, il existe seulement trois possibilités (qui sont représentées par des ronds vides sur la Figure 29) :

- s'abstenir pour deux questions et répondre correctement aux trois autres (d'où le total de 6 sur 10) ;
- s'abstenir pour une question et ne commettre aucune erreur sur les quatre questions restantes (soit une cote de 8 sur 10) ;
- ne pas s'abstenir et faire au plus une faute sur les cinq questions (pour obtenir une cote de 10 ou de 7 selon que 0 ou 1 erreur a été commise).

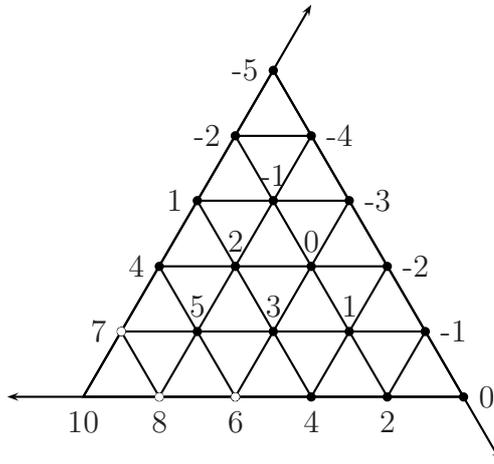


Figure 29: Schéma d'évaluation d'un QCM

Ainsi, on peut notamment constater que, pour réussir un tel test lorsque l'on choisit de répondre à trois ou à quatre questions, il importe de ne commettre aucune erreur.

6 Contrôle flou

6.1 Introduction : insuffisances de la logique classique

En logique classique, une proposition est une déclaration dépourvue d'ambiguïté qui est soit vraie, soit fausse, mais pas les deux à la fois. Il s'agit d'une logique qualifiée de *bivalente* dans lesquelles toute affirmation se voit attribuer une *valeur de vérité*, à savoir 1 si l'affirmation est vraie, 0 si elle est fausse. Par exemple, la proposition "7 est un nombre premier" est vraie et sa valeur de vérité est donc égale à 1 ; par contre, l'assertion "7 est un nombre pair" est fausse et sa valeur de vérité vaut 0. Dans ce contexte, un sous-ensemble A d'un référentiel X peut être parfaitement déterminé par sa *fonction caractéristique* : il s'agit de la fonction, notée f_A définie sur X et à valeurs dans l'ensemble $\{0, 1\}$ qui, à tout élément x de X associe la valeur 1 ou 0 selon que x appartient ou non à l'ensemble A . Par exemple, en travaillant dans le référentiel \mathbb{N} des entiers naturels, l'ensemble A composé des entiers pairs contient notamment 2, mais pas 7 : on a donc $f_A(2) = 1$, tandis que $f_A(7) = 0$.

Dans cette théorie, on pourrait se demander quelle est la véracité d'une affirmation telle que "cette personne est grande". Bien entendu, la valeur de vérité de cette assertion sera égale à 1 si et seulement si l'individu considéré fait partie du sous-ensemble des êtres humains de grande taille. Mais une réponse non ambiguë à la question posée réclame une définition plus précise pour ce dernier sous-ensemble : par exemple, on pourrait déclarer "grande" toute personne dont la taille vaut au moins 170 centimètres ; en conséquence, toute personne x du référentiel X considéré pourrait aisément être ou non rangée dans

le sous-ensemble A des individus de grande taille : mathématiquement, $f_A(x) = 1$ si et seulement si la taille de x est supérieure ou égale à 170 centimètres ; la fonction caractéristique f_A admet alors la représentation graphique 30 dans laquelle les abscisses se réfèrent aux tailles (en centimètres) des individus x , tandis que les ordonnées traduisent le degré de vérité de la proposition “ x est de grande taille”.

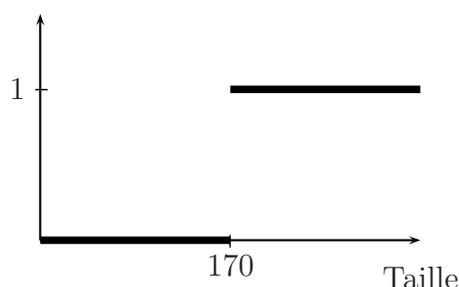


Figure 30: Fonction caractéristique du sous-ensemble des personnes de grande taille en logique booléenne

Ainsi, on en arrive à dire qu’une personne mesurant 1.7 m. est grande, alors qu’une autre d’un mètre soixante-neuf ne l’est pas (et serait de ce fait déclarée “petite”) : un seul centimètre les séparant, il est peu réaliste de les classer dans deux catégories totalement opposées.

Ce manque de nuance dans l’appartenance ou non à un sous-ensemble peut être regrettable, voire dangereux. En guise d’exemple concret, imaginons qu’il soit inscrit sur la notice d’un médicament que celui-ci doit être administré si le malade a de la fièvre. A partir de quand peut-on considérer qu’un individu est fiévreux ? Admettons que c’est le cas lorsque la température est de 39 degrés. Si un patient a cette température, il lui sera administré le médicament ; par contre, un autre malade ayant lui 38.9 degrés ne recevra pas le médicament, si l’on s’en tient strictement aux recommandations de la notice ; et pourtant, le médicament en question pourrait peut-être se révéler fort efficace pour guérir la deuxième personne.

En fait, la logique classique, de par sa bivalence, ne paraît pas toujours bien adaptée aux raisonnements humains. Effectivement, les informations fournies sont assez souvent imprécises, c’est-à-dire incomplètes ou mal définies. Dans la vie quotidienne, des phrases ressemblant aux suivantes sont fréquemment entendues :

- Je trouve que cet enfant est très petit.
- En voiture, mon père roule assez vite.

- Ce produit est relativement onéreux.
- Le temps me paraît beau.
- Tel athlète court fort vite.
- ...

Attribuer à de telles assertions vagues et peu précises une valeur de vérité égale soit à 0, soit à 1 ne semble pas très réaliste.

Pour remédier à de tels inconvénients, Lofti Zadeh, professeur d'informatique à l'université de Berkeley en Californie, a introduit, à partir de 1965, la *logique floue* : elle permet de distinguer une infinité de valeurs de vérité comprises dans l'intervalle $[0, 1]$. Désormais, la fonction caractéristique d'un sous-ensemble n'aura plus ses valeurs uniquement égales à 0 ou à 1, mais celles-ci parcoureront tout l'intervalle $[0, 1]$: de la sorte, un élément pourra être déclaré appartenir plus ou moins à un ensemble et à son complémentaire. Par exemple, la fonction caractéristique du sous-ensemble flou des personnes de grande taille pourra être représentée graphiquement comme sur la Figure 31 :

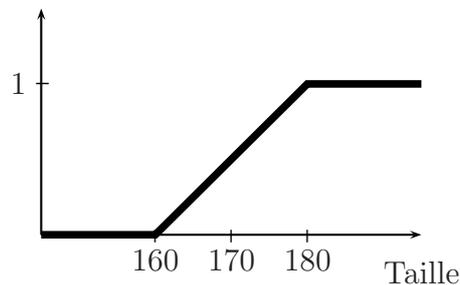


Figure 31: Fonction caractéristique du sous-ensemble des personnes de grande taille en logique floue

Ainsi, une personne mesurant un mètre et septante centimètres appartiendra à l'ensemble des personnes de grande taille avec un *degré de certitude* de 0.5, mais aussi à l'ensemble des personnes de petite taille avec le même degré de certitude 0.5 ; concrètement, cela voudra dire que cette personne est “à moitié” grande, mais aussi “à moitié” petite !

6.2 Quelques notions de base en logique floue

Comme nous l'avons expliqué intuitivement ci-dessus, la notion de sous-ensemble flou est introduite pour permettre des gradations dans l'appartenance d'un élément à une

classe, c'est-à-dire pour autoriser un élément à appartenir plus ou moins fortement à cette classe. Ainsi, le concept de sous-ensemble flou constitue un assouplissement de celui de sous-ensemble d'un ensemble donné. Notons que, par abus de langage, un sous-ensemble flou est souvent appelé simplement ensemble flou, conformément à la traduction de l'appellation originelle anglaise *fuzzy set*; nous nous conformerons dans la suite à cette habitude.

Soient X l'univers de référence de la variable x et A un sous-ensemble de X . A chaque élément x de X est associé le degré d'appartenance, compris entre 0 et 1, de x dans A ; ce degré d'appartenance est noté $\mu_A(x)$ et est quelquefois appelé *degré de certitude* de la valeur observée x ; $\mu_A(x) = 1$ (resp. $\mu_A(x) = 0$; $0 < \mu_A(x) < 1$) correspond à une appartenance "totale" (resp. à "aucune" appartenance; à une appartenance "partielle") de x dans A . La fonction

$$\mu_A : X \mapsto [0, 1] : x \mapsto \mu_A(x)$$

est nommée la *fonction d'appartenance* de A dans X . Observons que, dans le cas particulier où la fonction μ_A ne prend que les deux valeurs 0 et 1, la fonction d'appartenance se confond avec la fonction caractéristique de l'ensemble A ; on voit de la sorte que la logique floue généralise la logique classique.

Donnons à présent quelques définitions de base.

- Un sous-ensemble A du référentiel X muni d'une fonction d'appartenance $\mu_A : X \mapsto [0, 1]$ est appelé un *ensemble flou*; il est noté $\tilde{A} = (A, \mu_A)$.
- Lorsque l'univers X de référence est un sous-ensemble de \mathbb{R} , un ensemble flou $\tilde{A} = (A, \mu_A)$ est appelé une *quantité floue*.
- Le *noyau* d'un ensemble flou $\tilde{A} = (A, \mu_A)$ est, par définition, l'ensemble de tous les éléments x de A pour lesquels $\mu_A(x) = 1$.
- On appelle *nombre flou* une quantité floue dont le noyau n'est pas vide. Notons que certains auteurs imposent des conditions additionnelles sur la forme de la représentation graphique de la fonction d'appartenance.

En guise d'illustrations, la Figure 32 fournit quelques représentations graphiques classiques de fonctions d'appartenance relatives à des nombres flous. Comme ci-dessus, les abscisses indiqueront les tailles (en centimètres) de personnes, tandis que les ordonnées donneront les degrés de certitude. Le premier exemple est un nombre flou, de type *triangulaire*, qui traduit quantitativement l'affirmation vague suivante: "la taille de cette personne vaut environ 170 centimètres"; notons qu'en logique classique, la fonction caractéristique correspondant à cette même situation serait représentée par une droite confondue avec l'axe horizontal des abscisses, sauf en l'abscisse $x = 170$ où se trouverait le point $(170, 1)$. La deuxième figure représente un *intervalle flou*, de type *trapézoïdal*, relatif à l'assertion "la taille étudiée se situe environ entre 160 et 180 centimètres". Les troisième et quatrième représentations se réfèrent respectivement à "une taille grande" et à "une petite taille", la limite retenue dans ces cas étant toujours de 170 centimètres.

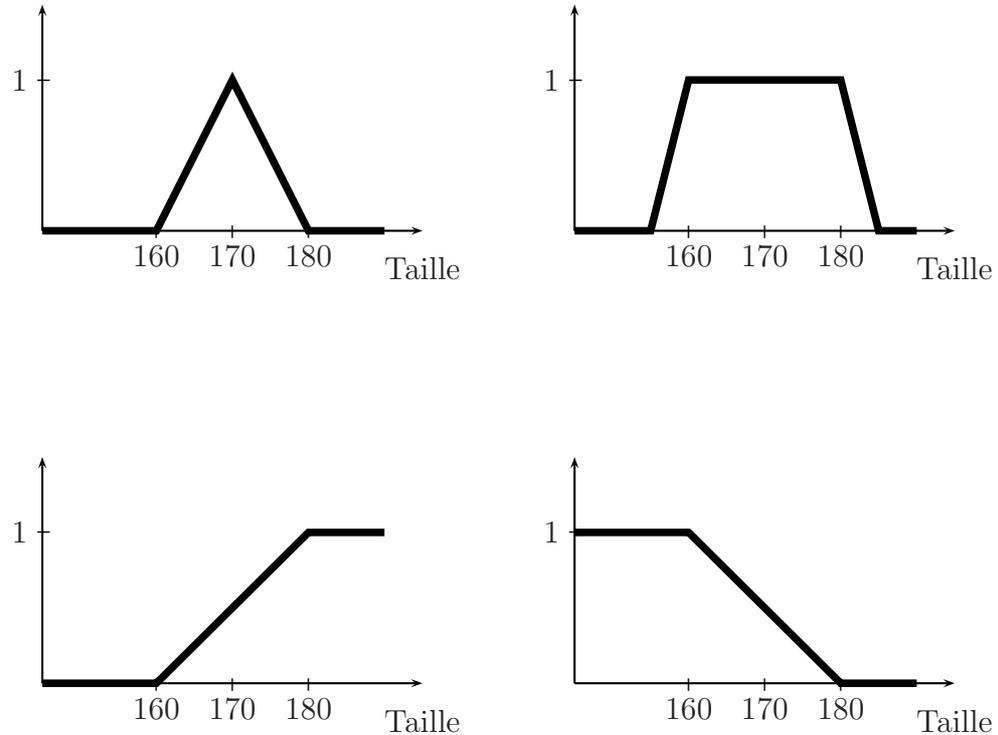


Figure 32: Quelques exemples de fonctions caractéristiques en logique floue

6.3 Un exemple concret de contrôle flou de production

Dans de nombreuses situations rencontrées dans l'univers économique, le gestionnaire est amené à régler la production d'un output en fonction de phénomènes extérieurs. Dans ces contextes, la logique floue intervient de manière significative. En effet, assez fréquemment, la réalisation de ces phénomènes extérieurs ou prémisses ainsi que la détermination de la quantité d'output à produire sont souvent plus facilement traduisibles en terme de nombres flous car ils ne sont connus qu'avec un certain degré de certitude. Nous parlerons, dans ce cas, de contrôle flou de production, le gestionnaire étant amené à suivre des règles d'implication floue du type : si la prémisse est caractérisée par un nombre flou \tilde{A} , alors la quantité d'output doit être caractérisée par un nombre flou \tilde{B} .

Illustrons la méthode utilisée pour déterminer la quantité d'output en fonction de causes extérieures.

Prenons l'exemple d'un producteur de crème glacée dont la production excédentaire (c'est-à-dire en surplus d'une production constante au cours de l'année) dépend du climat local. Naturellement, il augmente peu sa production si le temps est frais tandis qu'il

augmente de plus en plus son output au fur et à mesure que le climat se réchauffe.

Introduisons quelques notations :

- B désigne le sous-ensemble des températures basses, C celui des températures chaudes.
- $\tilde{\Theta}_1 = (B, \mu_B)$ est le nombre flou associé à la température basse, $\tilde{\Theta}_2 = (C, \mu_C)$ est le nombre flou associé à la température chaude.

Les fonctions d'appartenance μ_B et μ_C sont représentées sur la Figure 33.

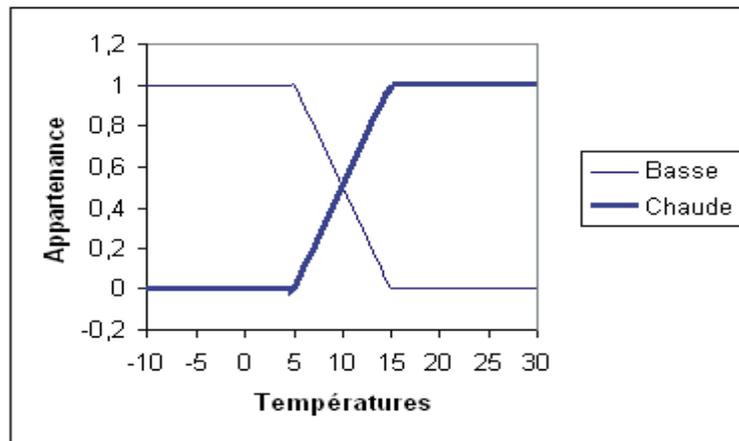


Figure 33: Fonctions d'appartenance pour la température

Notons encore \tilde{P}_1 et \tilde{P}_2 les nombres flous associés à une production excédentaire faible et forte respectivement dont les fonctions d'appartenance μ_f et μ_F peuvent être représentées comme suit dans la Figure 34.

Supposons maintenant que la température ambiante est de 13°C . Quelle est la quantité d'output que doit produire le glacier?

D'après la Figure 33,

$$\mu_B(13) = 0.2 \text{ et } \mu_C(13) = 0.8$$

Il est dès lors naturel de modifier les fonctions d'appartenance de la production: μ_f doit être réduite à 20% de sa hauteur tandis que μ_F doit être réduite à 80% de sa hauteur. Nous obtenons le graphique de la Figure 35.

La production globale est alors caractérisée par la quantité floue

$$([0, 10], \sup[0.2\mu_f, 0.8\mu_F])$$

représentée sur la Figure 36 par le polygone P . Nous arrivons alors au terme de la première étape appelée "étape de fuzzification": nous pouvons donner une réponse floue à notre question sous la forme de la région plane P .

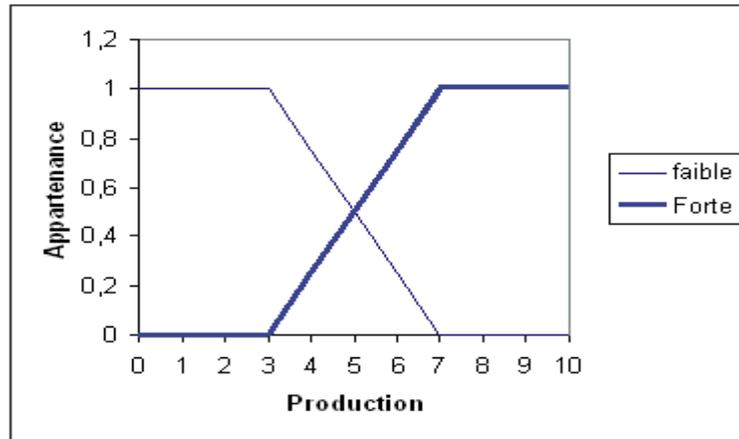


Figure 34: Fonctions d'appartenance pour la production

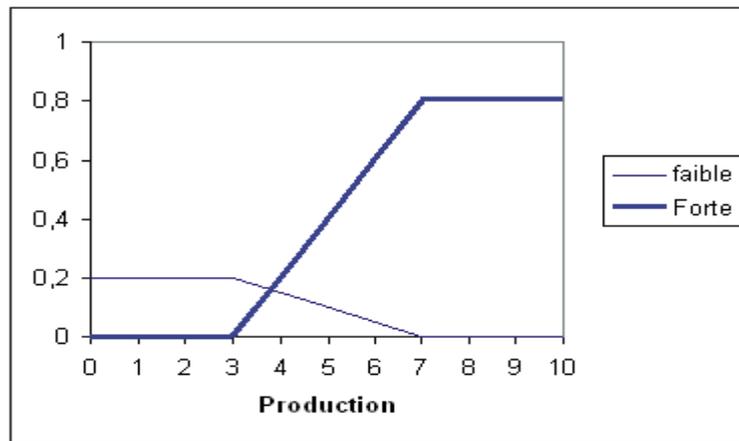


Figure 35: Production “ajustée”

Malheureusement, en pratique, le glacier n'est pas satisfait, car le polygone P ne le renseigne pas de façon suffisamment précise sur la manière dont il doit augmenter sa production. Il convient alors de procéder à la “défuzzification du problème”, c'est-à-dire de traduire la réponse floue donnée ci-dessus par un seul nombre.

Plusieurs méthodes sont proposées à cet effet dans la littérature. Nous présenterons la solution qui consiste à construire le barycentre de la région P : son abscisse indiquera au glacier l'output à produire.

Pour calculer le barycentre de la région P , commençons par rechercher les coordonnées du point I intersection des deux droites non-parallèles aux axes parmi les droites délimitant la région P . Le point I est solution du système

$$\begin{cases} y = -0.05(x - 7) \\ y = 0.2(x - 3) \end{cases}$$

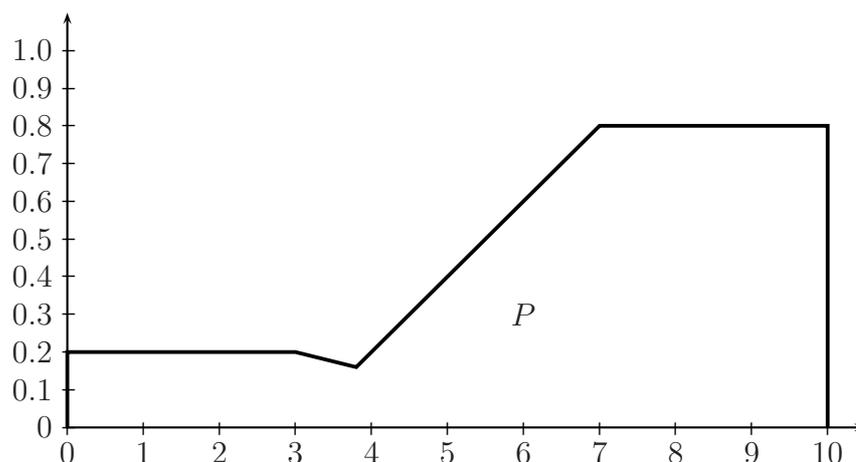


Figure 36: Représentation du polygone P

ce qui nous permet de trouver ses coordonnées à savoir

$$I = (3.8, 0.16).$$

Divisons alors la région P en quatre sous-régions P_1 , P_2 , P_3 et P_4 comme représenté sur la Figure 37 et recherchons les centres de gravité respectifs de ces sous-régions. Les barycentres des deux rectangles sont les intersections des diagonales, soit $G_1 = (1.5, 0.1)$ et $G_4 = (8.5, 0.4)$; ceux des deux trapèzes sont plus délicats. Il nous faut, en effet, décomposer chaque trapèze en deux triangles dont on obtient facilement les barycentres respectifs puisque le barycentre d'un triangle est l'isobarycentre de ses sommets. On sait alors que le barycentre du trapèze se trouve sur la droite joignant les barycentres des deux triangles. Il reste dès lors à décomposer le trapèze en deux autres triangles pour obtenir une deuxième droite dont l'intersection avec la première donne le barycentre du trapèze. On obtient de cette manière $G_2 = (\frac{457}{135}, \frac{61}{675}) \simeq (3.385, 0.09)$ et $G_3 = (\frac{259}{45}, \frac{62}{225}) \simeq (5.756, 0.276)$.

Le barycentre de la région P est alors le barycentre des points pondérés $G_1(A_1)$, $G_2(A_2)$, $G_3(A_3)$ et $G_4(A_4)$ où A_1, A_2, A_3 et A_4 sont les aires respectives de P_1, P_2, P_3 et P_4 . On trouve $A_1 = 0.6$, $A_2 = 0.144$, $A_3 = 1.536$, $A_4 = 2.4$ et

$$G = \frac{A_1 G_1 + A_2 G_2 + A_3 G_3 + A_4 G_4}{A_1 + A_2 + A_3 + A_4} \simeq (6.544, 0.311)$$

ce qui nous permet de conseiller au glacier de produire, à la température de 13°C , une quantité de 6.544 unités en plus de sa production habituelle.

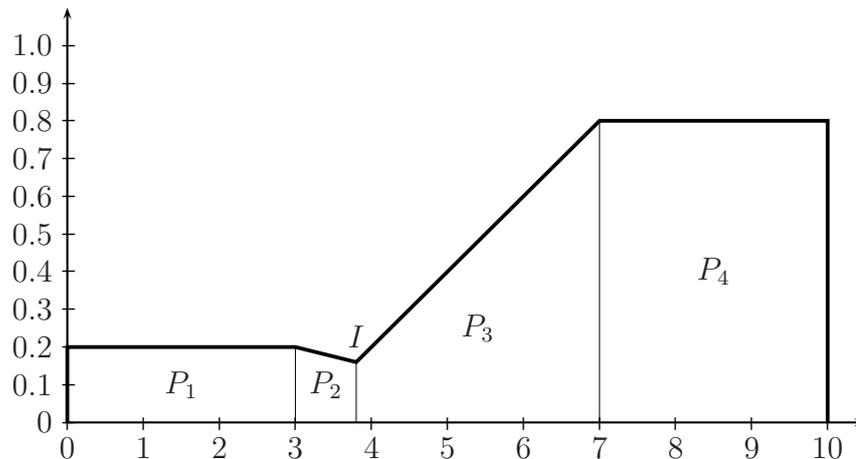


Figure 37: Quatre sous-régions

6.4 Applications de la logique floue

Ces dernières décennies, la logique floue a fait l'objet de très nombreuses études théoriques, qui sont présentées lors de congrès scientifiques et dans des publications spécialisées ; plusieurs revues internationales sont exclusivement consacrées à ces problèmes. Cette matière commence à être enseignée dans nos universités.

Ces recherches académiques débouchent sur des applications concrètes de plus en plus nombreuses. Parmi les plus spectaculaires, on peut en enregistrer dans différents domaines industriels :

- **Automatisme dans les appareils “grands publics”**. Par exemple, il existe déjà sur le marché des machines à laver qui font appel à la logique floue en adaptant le programme de lavage (quantité de poudre utilisée, température de l'eau, ...) en fonction de la saleté du linge ou encore de la dureté de l'eau. D'autres exemples d'appareils exploitant semblablement la logique floue sont donnés par des aspirateurs, des réfrigérateurs, des percolateurs, des fours à micro-ondes, des téléviseurs, des tondeuses à gazon, des photocopieurs en couleur, ...
- **Automatisme des transports**. Conditionnement d'air dans un tunnel routier, contrôle d'altitude d'avions, système d'arrimage de navettes spatiales, ... sont des exemples récents et sophistiqués recourant à la logique floue. De même, la construction automobile se montre une grande utilisatrice de ces nouvelles technologies : transmission automatique, système ABS, suspension active, et même, véhicule sans pilote. A ce sujet, une application spectaculaire est certainement la commande à distance d'un hélicoptère sans pilote pour des opérations de sauvetage ou d'inspection de sites dangereux : un tel appareil est, depuis quelques décennies, opérationnel dans le ciel de Tokyo.

- **Automatismes industriels.** Comme exemples concrets, relevons les cas d'usines de traitement des eaux, des forages de tunnels, des incinérations d'ordures, diverses machines-outils, des robots découpant au laser,
- **Aide à la décision.** La logique floue permet d'assouplir les conditions classiques et de considérer, par exemple, des contraintes vagues exprimées à l'aide de nombres flous. Elle est utilisée en optimisation et dans des prises de décisions multicritères, par exemple dans des problèmes d'affectation du personnel au sein d'une entreprise, d'ordonnancement des tâches au sein d'un projet industriel complexe, de gestion de la distribution,
- **Gestion de la production.** La logique floue s'avère efficace, au niveau de la gestion de la production, pour traiter des problèmes de planification de séquences de machines au sein d'un atelier, pour la fabrication *just in time*,
- **Finance.** La théorie floue représente un nouvel outil d'analyse de problèmes financiers pour lesquels les informations disponibles sont souvent vagues et imprécises. Ainsi, des compagnies comme Hitachi ont élaboré des programmes d'échanges de capitaux boursiers, dont les règles floues réagissent bien aux fluctuations du marché.

Cette liste d'applications n'est bien sûr pas exhaustive. La logique floue trouve de plus en plus d'applications concrètes, dans des domaines toujours plus nombreux et variés.

7 Courbes de Bézier

7.1 Introduction

Dans les années 1970, un ingénieur de la Régie Renault, Pierre Bézier, a fait appel à des raisonnements mathématiques et des calculs par ordinateur pour créer des modèles de voitures. Pour construire des carrosseries attractives, il cherchait à déterminer des courbes régulières, qui portent désormais son nom, reliant deux points prédéterminés et "harmonieusement influencées" par différents points appelés *points de contrôle*.

D'un point de vue mathématique, une courbe de Bézier est la trajectoire d'un point mobile qui est le barycentre des points de contrôle munis de poids dépendant d'un paramètre.

Nous allons nous limiter au cas des courbes de planes. Dans la suite de cette section, les calculs sont menés dans un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$, tandis que t désigne un paramètre réel. Une courbe de Bézier sera définie paramétriquement comme étant un ensemble de points $X = (x(t), y(t))$, où $x : t \mapsto x(t)$ et $y : t \mapsto y(t)$ sont des fonctions continûment dérivables sur un ensemble ouvert contenant l'intervalle $I = [0, 1]$. On envisagera le vecteur tangent en un point X de la courbe $\mathcal{C} = \{(x(t), y(t)) : t \in I\}$, à savoir $\vec{V}(t) = (\frac{d}{dt}x(t), \frac{d}{dt}y(t))$.

Le cas le plus simple (mais sans grand intérêt pratique) est le cas d'une courbe de Bézier construite à partir de deux points de contrôle P_0 et P_1 supposés distincts. Les

points X alors retenus sont les barycentres des points pondérés $P_0(1-t)$ et $P_1(t)$ pour $t \in I$. La courbe de Bézier à deux points de contrôle coïncide donc simplement avec le segment de droite joignant les deux points considérés. De plus, les coefficients $1-t$ et t , qui sont les poids des deux points en question, définissent des polynômes du premier degré en la variable t : ce sont les *polynômes de Bernstein* de degré 1.

7.2 Courbe de Bézier à trois points de contrôle

On considère à présent trois points non alignés P_0 , P_1 et P_2 qui font office de points de contrôle. La construction de la courbe de Bézier correspondante va se faire cette fois en deux étapes.

Pour toute valeur de t comprise dans l'intervalle I , on construit tout d'abord le barycentre B_1 des points pondérés $P_0(1-t)$ et $P_1(t)$, ainsi que le barycentre B_2 des points pondérés $P_1(1-t)$ et $P_2(t)$. Dans une deuxième étape, on fait appel au barycentre X des points pondérés $B_1(1-t)$ et $B_2(t)$. La courbe de Bézier avec les trois points de contrôle P_0 , P_1 et P_2 est l'ensemble de ces points X lorsque le paramètre t parcourt l'intervalle I .

Vectoriellement, on peut écrire

$$\begin{cases} \overrightarrow{OB_1} &= (1-t)\overrightarrow{OP_0} + t\overrightarrow{OP_1} \\ \overrightarrow{OB_2} &= (1-t)\overrightarrow{OP_1} + t\overrightarrow{OP_2} \\ \overrightarrow{OX} &= (1-t)\overrightarrow{OB_1} + t\overrightarrow{OB_2} \end{cases}$$

Par substitution des deux premières égalités dans la troisième, on trouve

$$\overrightarrow{OX} = (1-t)^2\overrightarrow{OP_0} + 2t(1-t)\overrightarrow{OP_1} + t^2\overrightarrow{OP_2}.$$

On retrouve ainsi la propriété d'associativité des barycentres : X est le barycentre des points pondérés $P_0((1-t)^2)$, $P_1(2t(1-t))$ et $P_2(t^2)$; en désignant par $x(t), y(t)$ les coordonnées de X et par x_i, y_i celles de P_i pour $i = 0, 1, 2$, on obtient

$$\begin{cases} x(t) = (1-t)^2x_0 + 2t(1-t)x_1 + t^2x_2 \\ y(t) = (1-t)^2y_0 + 2t(1-t)y_1 + t^2y_2 \end{cases}$$

Les trois expressions $(1-t)^2$, $2t(1-t)$ et t^2 définissent les polynômes de Bernstein de degré 2.

Il est possible de caractériser le vecteur tangent en un point de cette courbe de Bézier. En effet, par dérivation, on trouve, puisque les vecteurs $\overrightarrow{OP_i}$ ne dépendent pas de la variable t :

$$\overrightarrow{V}(t) = \frac{d}{dt}\overrightarrow{OX} = -2(1-t)\overrightarrow{OP_0} + 2(1-t)\overrightarrow{OP_1} - 2t\overrightarrow{OP_1} + 2t\overrightarrow{OP_2}.$$

Pour $t = 0$, $X(0)$ coïncide avec P_0 , tandis que

$$\overrightarrow{V(0)} = 2 \left(-\overrightarrow{OP_0} + \overrightarrow{OP_1} \right) = 2\overrightarrow{P_0P_1} \quad :$$

la courbe de Bézier est tangente en P_0 au segment de droite reliant P_0 à P_1 .

De même, pour $t = 1$, $X(1)$ coïncide avec P_2 , tandis que

$$\overrightarrow{V(1)} = 2 \left(-\overrightarrow{OP_1} + \overrightarrow{OP_2} \right) = 2\overrightarrow{P_1P_2} \quad :$$

la courbe de Bézier est tangente en P_2 au segment de droite reliant P_1 à P_2 .

De plus, pour $t \in [0, 1[$, on obtient aisément

$$\begin{aligned} \overrightarrow{V(t)} &= \frac{d}{dt} \overrightarrow{OX} \\ &= -2(1-t)\overrightarrow{OP_0} + 2(1-t)\overrightarrow{OP_1} - 2t\overrightarrow{OP_1} + 2t\overrightarrow{OP_2} \\ &= 2 \left(-\overrightarrow{OB_1} + \overrightarrow{OB_2} \right) \\ &= 2\overrightarrow{B_1B_2} \end{aligned}$$

La courbe de Bézier est tangente en X au segment de droite d'extrémités B_1 et B_2 . Il en résulte que la courbe de Bézier apparaît comme étant l'enveloppe des segments de droite $[B_1, B_2]$ reliant les barycentres obtenus dans la première étape. On peut démontrer que cette courbe est une parabole comme l'illustre la Figure 38.

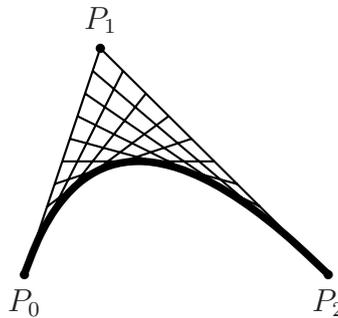


Figure 38: Courbe de Bézier à trois points de contrôle

7.3 Courbes de Bézier à quatre points de contrôle

Considérons les quatre points de contrôle P_0 , P_1 , P_2 et P_3 . La courbe de Bézier correspondante se construit en trois étapes.

1. **Première étape** : on construit les barycentres suivants :

- B_1 des points pondérés $P_0(1-t)$ et $P_1(t)$;

- B_2 des points pondérés $P_1(1-t)$ et $P_2(t)$;
- B_3 des points pondérés $P_2(1-t)$ et $P_3(t)$.

2. **Deuxième étape** : on construit les barycentres suivants :

- C_1 des points pondérés $B_1(1-t)$ et $B_2(t)$;
- C_2 des points pondérés $B_2(1-t)$ et $B_3(t)$.

3. **Troisième étape** : on construit le barycentre X des points pondérés $C_1(1-t)$ et $C_2(t)$: ces points décrivent la courbe de Bézier lorsque t parcourt l'intervalle I .

On peut montrer que X est le barycentre des points pondérés suivants : $P_0((1-t)^3)$, $P_1(3t(1-t)^2)$, $P_2(3t^2(1-t))$ et $P_3(t^3)$. Les expressions $(1-t)^3$, $3t(1-t)^2$, $3t^2(1-t)$ et t^3 sont les polynômes de Bernstein de degré 3.

Cette courbe, composée des points X , part du point P_0 où elle est tangente au segment $[P_0, P_1]$, pour arriver au point P_3 où elle est tangente au segment $[P_2, P_3]$.

Voici deux exemples de courbes de Bézier à quatre points de contrôle (Figure 39). Dans la deuxième figure, seul le deuxième point a été déplacé, ce qui modifie complètement la forme du résultat obtenu.

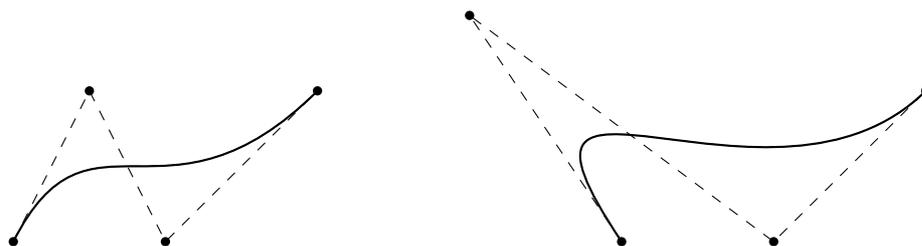


Figure 39: Courbes de Bézier à quatre points de contrôle

7.4 Cas général

La méthode itérative exposée pour les courbes de Bézier à trois ou à quatre points de contrôle peut être adaptée pour un nombre quelconque de $p+1$ points de contrôle. Cela nécessite alors p étapes consistant à rechercher des barycentres, d'abord en partant de paires de points de contrôle d'indices successifs, puis en construisant les barycentres de paires de résultats obtenus dans l'étape précédente, et ainsi de suite. Cette méthode porte quelquefois le nom d'*algorithme de De Casteljau*, du nom d'un ingénieur de chez Citroën.

A la dernière étape, on obtient les points $X(t)$ qui génèrent la courbe de Bézier lorsque l'indice t parcourt l'intervalle I . Ces points sont définis par les polynômes de Bernstein de degré p , à savoir les expressions

$$B_p^i = C_p^i t^i (1-t)^{p-i} \text{ pour } i = 0, 1, \dots, p ;$$

on a en effet vectoriellement,

$$\overrightarrow{OX} = \sum_{i=0}^p B_p^i \overrightarrow{OP_i},$$

de sorte que pour chaque valeur de $t \in I$, X est le barycentre des points pondérés P_i (B_p^i) pour $i = 0, 1, \dots, p$.

On peut en déduire que la courbe de Bézier correspondante est entièrement contenue dans l'enveloppe convexe de l'ensemble des points de contrôle. Cette courbe passe par les deux points de contrôle extrêmes P_0 et P_p , où elle est tangente aux vecteurs $\overrightarrow{P_0P_1}$ et $\overrightarrow{P_{p-1}P_p}$ respectivement ; quant à tout autre point de la courbe, il est possible de montrer que la courbe y est tangente au segment ayant pour extrémités l'avant-dernier et l'antépénultième points barycentriques construits.

Intuitivement, une courbe de Bézier peut être vue comme étant une bande élastique magnétique attachée en ses premier et dernier points de contrôle, et avec un aimant placé en chaque autre point de contrôle.

Mentionnons que des logiciels adaptés à la géométrie, tels Cabri ou Geoplan W +, permettent de visualiser et de manipuler des courbes de Bézier.

7.5 Applications de courbes de Bézier

Initialement conçues pour modéliser des formes de carrosseries automobiles, les courbes de Bézier sont également appliquées dans la création et la fabrication d'une aile d'avion ou encore de la coque d'un navire, En pratique, l'ingénieur-créateur fait une ébauche manuelle de la courbe qu'il désire approximativement obtenir, puis choisit des points de contrôle tels que la courbe de Bézier correspondante, tracée par un ordinateur, s'approche de la courbe initiale. Si cela s'avère nécessaire, l'opérateur peut ajouter, supprimer ou modifier des points de contrôle afin de disposer d'une courbe esthétique et adéquate : le résultat final est ainsi obtenu après un "dialogue" entre l'informaticien et l'ordinateur. Dans la pratique, il est souvent nécessaire de recourir à plusieurs courbes de Bézier distinctes au sein d'un même graphique.

Par ailleurs, les courbes de Bézier sont également très exploitées en informatique dans le traitement d'images. Par exemple, elles jouent un rôle capital dans le codage "Postcript" utilisé dans les arts graphiques et pour coder vectoriellement des caractères, des symboles, des logos et même certains schémas ; il est ainsi très facile de les reproduire dans une taille quelconque.

Références

- [1] Antibi A. - Barra R. - *at al*, *Transmath, programme 2002, Term ES*, Nathan, 2002.
- [2] Apostol T. - Mnatsakanian M., “Centroids Constructed Graphically”, *Mathematics Magazine*, Vol. 77, n° 3, 2004, pp. 201 - 210.
- [3] Bair J., “La géométrie convexe”, *Mathématique et Pédagogie*, n° 87, 1992, pp. 37 - 46.
- [4] Bair J., “Etude d’une obligation au moyen de sa duration et de sa convexité”, *Mathématique et Pédagogie*, n° 120, 1998, pp. 61-69.
- [5] Bair J., “L’histoire du mouvement brownien : un exemple de recherches interdisciplinaires”, *Mathématique et Pédagogie*, n° 129, 2000, pp. 19-27.
- [6] Bair J. - Justens D., *Modèles mathématiques : du réel au concret en passant pas l’abstrait*, éditions F. Ferrer et du Céfal, Bruxelles et Liège, 2006.
- [7] Bair J. - Justens D., “De Thalès à Black et Scholes : petite étude épistémologique sur les options en finance”, *Attentes d’un modèle. Entre réalités du terrain et contraintes mathématiques*, éditions F. Ferrer et du Céfal, Bruxelles et Liège, 2008. .
- [8] Bair J. - Paquay P., “Interpolation par des fonctions splines”, *Mathématique et Pédagogie*, n° 118, 1998, pp. 77-91.
- [9] Bertrand J., *Calcul des probabilités*, Gauthier - Villars, Paris, 1889.
- [10] Bouleau N., *Martingales et marchés financiers*, éditions Odile Jacob, Paris, 1998.
- [11] Daninos P., *Un certain Monsieur Blot*, Le livre de poche, Librairie Générale Française, première édition en 1964.
- [12] Delande G., “Et pourquoi la tour de Pise ne tombe-t-elle pas? ... Quelques propos au sujet du barycentre”, *Math-Jeunes*, n° 43, 1989, pp. 66 - 72.
- [13] Dessart A. - Jodogne J., *Cours de physique; tome 1: mécanique et pesanteur, statique et dynamique des fluides, chaleur*, maison d’Edition A. de Boeck, Bruxelles, 1959.
- [14] Frechet M., *Les mathématiques et le concret*, Presses Universitaires de France, Paris, 1955.
- [15] Haesbroeck G., “Modélisation du comportement d’un individu face à des revenus aléatoires”, *Mathématique et Pédagogie*, n° 122, 1999, pp. 57-70.

- [16] Haesbroeck G., *Statistique et exercices pratiques : statistique descriptive*, notes provisoires de cours, Université de Liège, 2000.
- [17] Haesbroeck G. - Henry V., *Pratique de la statistique descriptive : résolution et interprétation de problèmes*, Editions F. Ferrer et du Céfal, Bruxelles et Liège, 2004.
- [18] Haubry Y., “Présentation des courbes de Bézier”, *revue de l’A.P.M.E.P.*, n° 390, 1993, pp. 417 - 433.
- [19] Hauchecorne B., *Les mots et les maths*, Editions Ellipses, Paris, 2003.
- [20] Hauchecorne B. - Surreau D., *Des mathématiciens de A à Z*, Editions Ellipses, Paris, 1996.
- [21] Henry V., “Application des barycentres en logique floue”, *Mathématique et Pédagogie*, n° 139, 2002, pp. 35-42.
- [22] Jongmans F., *Eléments de mécanique rationnelle*, notes de cours, Université de Liège, date non précisée.
- [23] Mandelbrot B., *Fractales, hasard et finance*, Flammarion, 1997.
- [24] Quetelet A., *Physique sociale*, C. Muquardt Librairie-Editeur, Bruxelles - Baillièere et fils Libraires-Editeurs, Paris, 1869.
- [25] Van Hooste C., “Moyennes pondérées”, *Math-Jeunes*, n° 84, 1998, pp. 92-96.

Table des matières

1	Généralités	2
1.1	Bref historique	2
1.2	Présentation ponctuelle	3
1.3	Coordonnées de barycentres dans le plan et dans l'espace	5
1.4	Barycentres de points pondérés	6
1.5	Barycentres de figures planes	8
2	Applications en mécanique	9
2.1	Notion de centre de gravité en dynamique	9
2.2	Equilibre statique des solides	11
2.3	Le saut d'obstacles en équitation	14
3	Sur la notion de moyenne en statistique	16
3.1	Moyennes d'une série statistique univariée	16
3.2	Point moyen d'un nuage de points	21
3.3	Homme moyen selon Quetelet	23
3.4	Un problème de distribution	26
4	Lissage d'une série chronologique	28
4.1	Position du problème	28
4.2	Notion de <i>trend</i> d'une série chronologique	29
4.3	Méthode des moyennes échelonnées	31
4.4	Méthode des moyennes mobiles	32
5	Graphiques triangulaires	35
5.1	Position du problème et théorème de Viviani	35
5.2	Coordonnées triangulaires et barycentre	37
5.3	Une application en politique	39
5.4	Une application de diététique	41
5.5	Application à l'évaluation de QCM	43
6	Contrôle flou	45
6.1	Introduction: insuffisances de la logique classique	45
6.2	Quelques notions de base en logique floue	47
6.3	Un exemple concret de contrôle flou de production	49
6.4	Applications de la logique floue	53
7	Courbes de Bézier	54
7.1	Introduction	54
7.2	Courbe de Bézier à trois points de contrôle	55
7.3	Courbes de Bézier à quatre points de contrôle	56

7.4	Cas général	57
7.5	Applications de courbes de Bézier	58

Publications de la SBPMef

Dossiers d'exploration didactique

Dossier 2 : Autour du PGCD

Dossier 3 : Isomorphisme et Dimension

Dossier 6 : Statistiques

Dossier 7 : Vers les infiniment petits

Simone Trompler et Guy Noël

Dossier 8 : La démonstration en géométrie plane
dans les premières années de l'enseignement secondaire

Claude Villers et al.

Dossier 9 : Des démonstrations à la rencontre
des compétences à travers de thèmes

Claude Villers et al.

Dossier 10 : Narrations de recherche - De la théorie
à la pratique dans les enseignements secondaire et supérieur

Jacques Bair, Jean-Claude Delagardelle et Valérie Henry

Dossier 11 : Enseignons en jouant

B. Honclaire, N. Lambelin, Y. & G. Noël

Jacques Bair, Mathématique et Sport

François Jongmans

Eugène Catalan, Géomètre sans patrie, ...

Recueils de questions des OMB

Tome 5

Tome 6

Pour les tarifs et les frais d'expédition
consulter le secrétariat de la SBPMef
24 rue du Onze Novembre 7000 Mons
0032 65 31.91.80 ou sbpm@sbpm.be

Pour tout problème,
consulter le secrétariat.