

Des graphes partout!

Bruno Teheux

Unité de recherche en mathématiques
Université du Luxembourg

`math.uni.lu/outreach`

Un casse-tête

Ingrédients :

- une liste binaire
- une transformation (retourner une sous-liste de longueur 4).



Un casse-tête

Ingrédients :

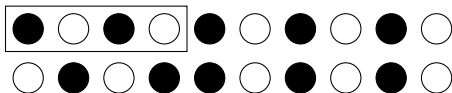
- une liste binaire
- une transformation (retourner une sous-liste de longueur 4).



Un casse-tête

Ingrédients :

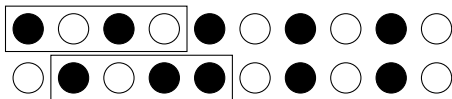
- une liste binaire
- une transformation (retourner une sous-liste de longueur 4).



Un casse-tête

Ingrédients :

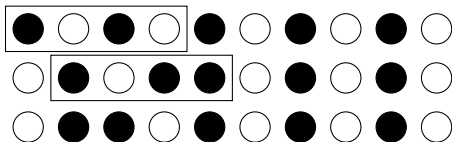
- une liste binaire
- une transformation (retourner une sous-liste de longueur 4).



Un casse-tête

Ingrédients :

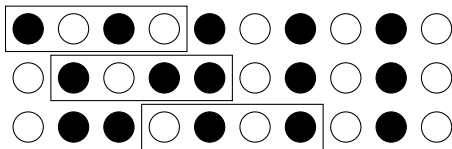
- une liste binaire
- une transformation (retourner une sous-liste de longueur 4).



Un casse-tête

Ingédients :

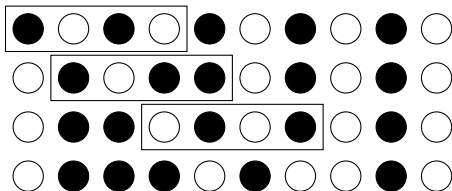
- une liste binaire
- une transformation (retourner une sous-liste de longueur 4).



Un casse-tête

Ingédients :

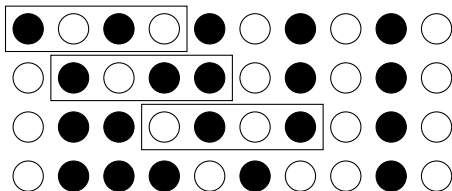
- une liste binaire
- une transformation (retourner une sous-liste de longueur 4).



Un casse-tête

Ingrédients :

- une liste binaire
- une transformation (retourner une sous-liste de longueur 4).



Problème : Combien de transformations successives faut-il appliquer au minimum à



pour obtenir



Un constat

De nombreuses technologies sont basées sur les graphes

Les graphes sont des structures mathématiques élémentaires

Leur étude va du simplissime aux conjectures redoutables. . .

. . . et est à la frontière entre mathématiques et informatique

Parlons-en !

Graphes

Une définition élémentaire

Définition. Un *graphe (simple)* est un ensemble fini de sommets reliés ou non par des arêtes.

Une définition élémentaire

Définition. Un *graphe (simple)* est un ensemble fini de sommets reliés ou non par des arêtes.

Formellement, on a $G = (V, E)$ où

V est l'ensemble des sommets

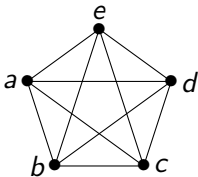
E est l'ensemble des arêtes, vues comme paires $\{u, v\}$ de sommets

$\deg(v) :=$ le nombre d'arêtes adjacentes à v dans G .

Dessinons

Il est commode de représenter un graphe par un dessin dans le plan.

Exemple



$$V = \{a, b, c, d, e\}, \quad E = \binom{V}{2}$$

Les propriétés des graphes sont indépendantes de leur dessin.

Un élégant résultat très simple

Proposition. Dans une fête, il y a un nombre pair de personnes qui serrent la main à un nombre impair de personnes.

Un élégant résultat très simple

Proposition. Dans une fête, il y a un nombre pair de personnes qui serrent la main à un nombre impair de personnes.

Lemme. Dans un graphe $G = (V, E)$,

$$2|E| = \sum_{v \in V} \deg(v)$$

Un élégant résultat très simple

Proposition. Dans une fête, il y a un nombre pair de personnes qui serrent la main à un nombre impair de personnes.

Lemme. Dans un graphe $G = (V, E)$,

$$2|E| = \sum_{v \in V} \deg(v)$$

Preuve. Double comptage de

$$A := \{(v, e) \mid e \text{ est une arête adjacente à } v\}.$$

On a $|A| = 2|E|$ et $|A| = \sum_{v \in V} \deg(v)$.

Un élégant résultat très simple

Proposition. Dans une fête, il y a un nombre pair de personnes qui serrent la main à un nombre impair de personnes.

Un élégant résultat très simple

Proposition. Dans une fête, il y a un nombre pair de personnes qui serrent la main à un nombre impair de personnes.

Preuve.

- V := ensemble des fêtards
- E contient une arête $\{u, v\}$ si u et v se serrent la main.

On a

$$2|E| = \sum_{\deg(v) \text{ pair}} \deg(v) + \sum_{\deg(v) \text{ impair}} \deg(v)$$

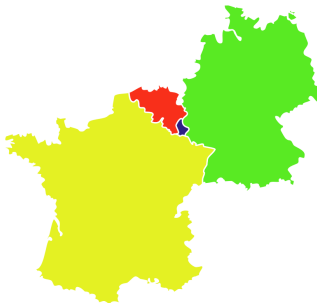
Un élégant résultat très difficile

Problème. Combien de couleurs faut-il au minimum pour colorier n'importe quelle carte de telle sorte que deux pays qui partagent une frontière ne soient pas coloriés par la même couleur ?

Un élégant résultat très difficile

Problème. Combien de couleurs faut-il au minimum pour colorier n'importe quelle carte de telle sorte que deux pays qui partagent une frontière ne soient pas coloriés par la même couleur ?

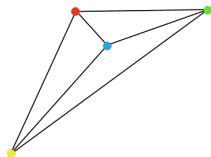
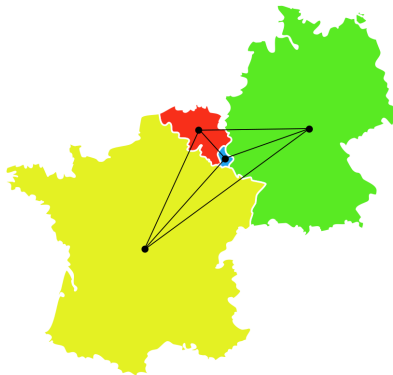
Au Luxembourg, on sait qu'il faut au moins 4 couleurs



Mais 4 couleurs suffisent-elles toujours ?

Un élégant résultat très difficile

Il s'agit d'un problème de théorie des graphes



Il s'agit d'un problème de coloriage des sommets d'un graphe.

Un élégant résultat très difficile

Théorème (1976) Quatre couleurs suffisent toujours.

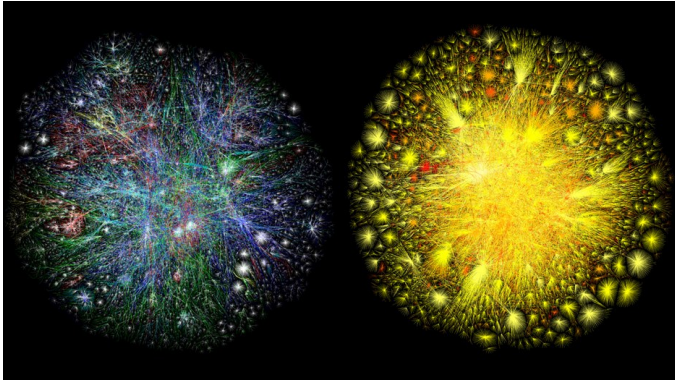
Une conjecture qui a tenu plus de 100 ans

Sa preuve utilise un ordinateur pour éliminer des centaines de cas

Une version formalisée a été vérifiée par un assistant de preuve

Des graphes partout

Internet est un graphe



Les machines sont les sommets, les connections sont le arêtes

Les pages web sont les arêtes, les hyperliens sont les arêtes
(algorithme PageRank de Google)

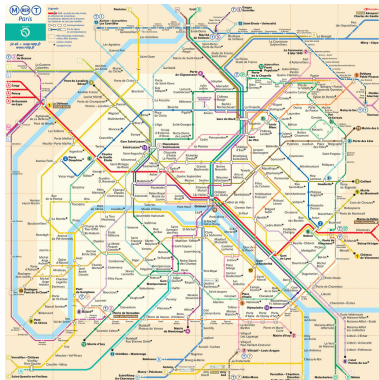
Les réseaux sociaux sont des graphes

Les utilisateurs sont les sommets, les liens d'amitiés/followers sont les arêtes.

Quelle est la distance entre deux sommets donnés ?

Combien de liens suffisent pour joindre deux sommets quelconque du graphe (*Le monde est petit* : Milgram, random graphs, clustering, Facebook's 4 degrees of separation) ?

Les réseaux de transports en commun sont des graphes



Comment minimiser les temps de trajets ?

Comment minimiser le nombre de correspondances ?

Les réseaux électriques sont des graphes

Les maisons, transformateurs. . . sont les sommets.

Les lignes électriques sont les arêtes.

Quelle quantité maximale de courant peut être distribuée ?

Comment le réseau résiste-t-il aux coupures de lignes ?

À la recherche du plus court chemin

Un problème pratique

Un réseau routier est représenté par un graphe :

- sommets : carrefours et immeubles
- arêtes : routes
- on attribue à chaque portion de route un poids : sa longueur

Problème (GPS). Trouver un chemin le plus court entre deux points du réseau.

On va donner une solution algorithmique.

Un cadre général

$G = (V, E, p, s)$ est un graphe

- *dirigé*, c'est-à-dire que les arêtes $e = (u, v)$ ont une origine u et une extrémité v ,
- *à poids*, c'est-à-dire que chaque arête e possède un poids $p(e) \in [0, \infty[$,
- possède un sommet *source* s , c'est-à-dire un sommet distingué

Un cadre général

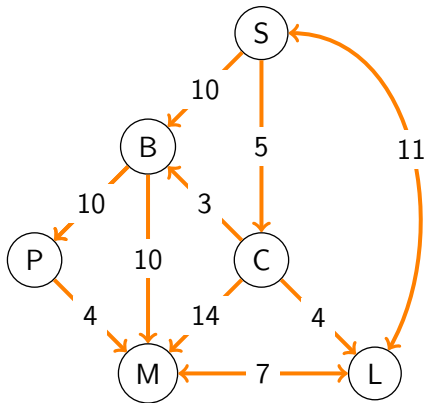
$G = (V, E, p, s)$ est un graphe

- *dirigé*, c'est-à-dire que les arêtes $e = (u, v)$ ont une origine u et une extrémité v ,
- *à poids*, c'est-à-dire que chaque arête e possède un poids $p(e) \in [0, \infty[$,
- possède un sommet *source* s , c'est-à-dire un sommet distingué

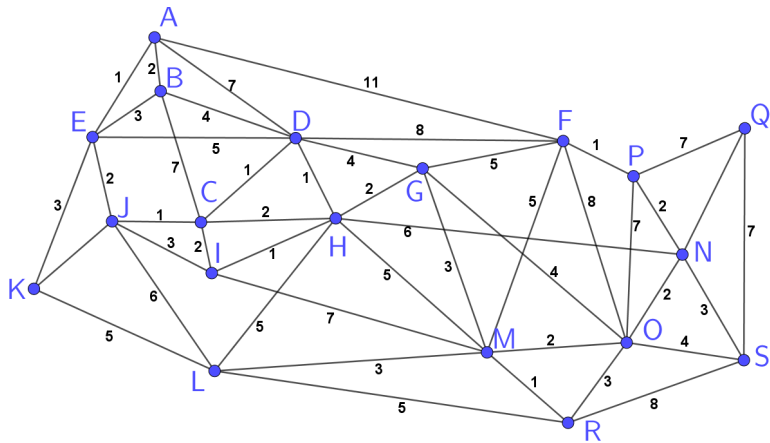
Pour tout $u \in V$, on cherche

- un chemin dirigé C de s à u
- tel que $\sum_{e \in C} p(e)$ est *minimum*

Exemple



Quel est un plus court chemin de S à M ?



Comment procéder de manière systématique ?

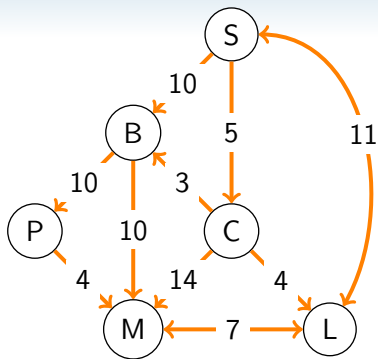
Algorithme de Dijkstra

$$G = (V, E, p, s)$$

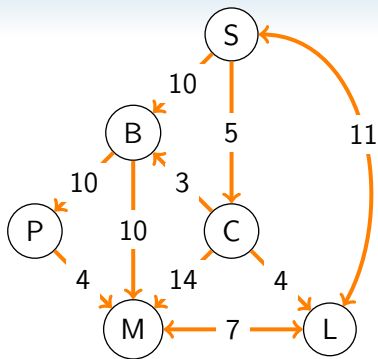
On étend p à $E \times E$ par $p(u, v) := \infty$ si $(u, v) \notin E$

On construit une suite croissante de $X_i \subseteq V$ telle que

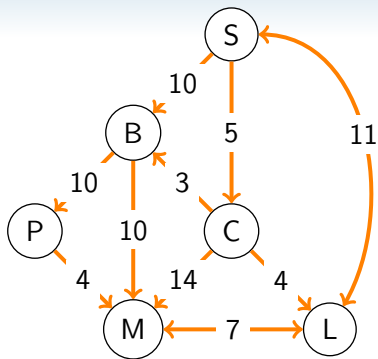
- (a) pour tout $u \in X_i$, on a identifié un plus court chemin de s à u
- (b) pour tout $u \notin X_i$, on a identifié un chemin de s à u le plus court parmi ceux dont tous les sommets sauf u sont dans X_i .



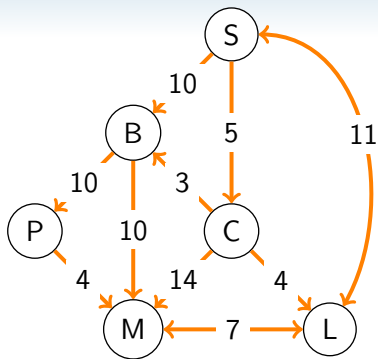
<i>X</i>	<i>S</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>P</i>	<i>M</i>	<i>L</i>
<i>S</i>	0					



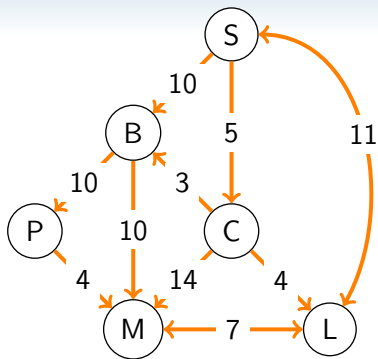
<i>X</i>	<i>S</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>P</i>	<i>M</i>	<i>L</i>
<i>S</i>	0	10	<i>B</i>			



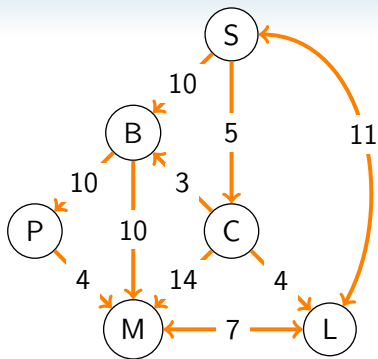
<i>X</i>	<i>S</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>P</i>	<i>M</i>	<i>L</i>
<i>S</i>	0	10	5			
<i>B</i>						
<i>C</i>						
<i>P</i>						
<i>M</i>						
<i>L</i>						



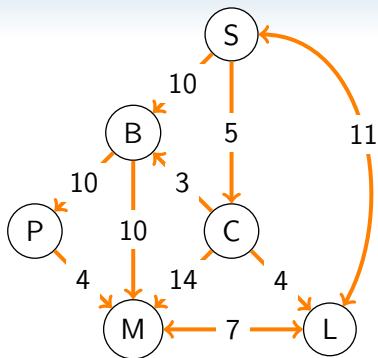
X	S	B	C	P	M	L
S	0	10	5	∞		



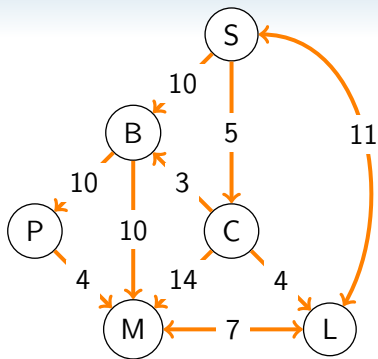
X	S	B	C	P	M	L
S	0	10	5	∞	∞	11
B	10	0	3	∞	10	∞
C	5	3	0	∞	14	4
P	∞	∞	∞	0	4	∞
M	∞	10	14	4	0	7
L	11	∞	4	∞	7	0



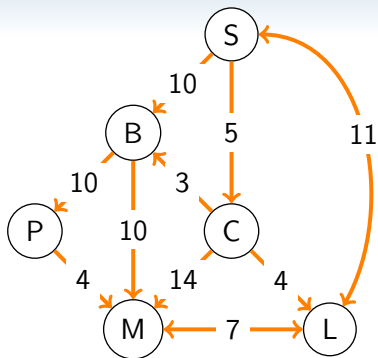
X	S	B	C	P	M	L
S	0	10	5	∞	∞	11
S, C		10	3	∞	4	4



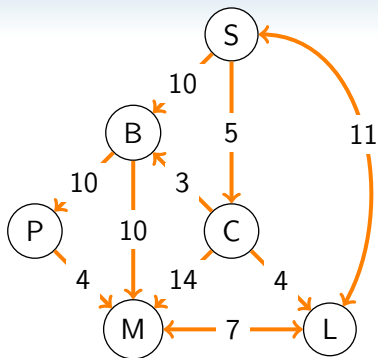
X	S	B	C	P	M	L
S	0	10	5	∞	∞	11
S, C		8	∞			



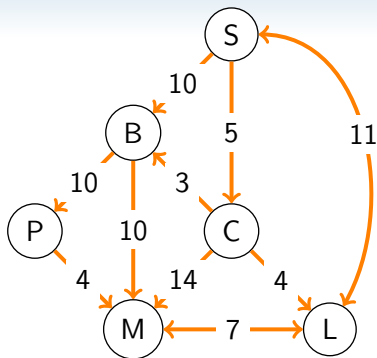
X	S	B	C	P	M	L
S	0	10	5	∞	∞	11
S, C		8	∞	∞		



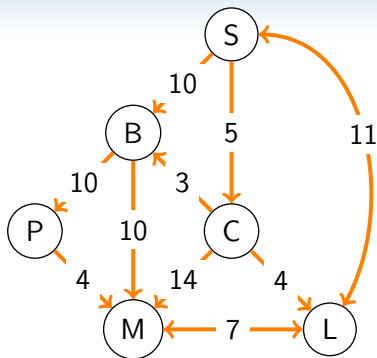
X	S	B	C	P	M	L
S	0	10	5	∞	∞	11
S, C		8	∞	∞	19	



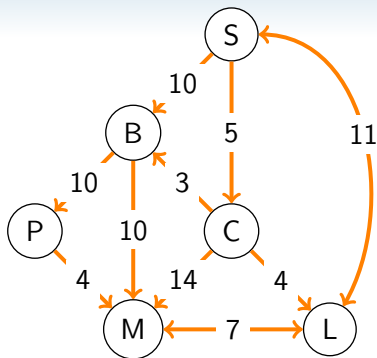
X	S	B	C	P	M	L
S	0	10	5	∞	∞	11
S, C		8		∞	19	9



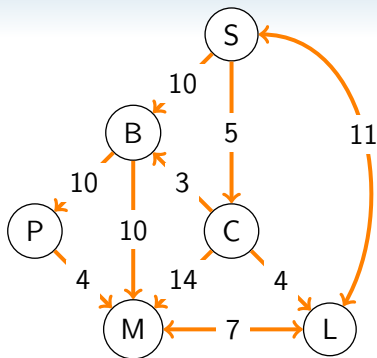
X	S	B	C	P	M	L
S	0	10 B	5 C	∞	∞	11 L
S, C		8 CB		∞	19 CM	9 CL
S, C, B				18 CBP	18 CBM	9 CL



X	S	B	C	P	M	L
S	0	10	5	∞	∞	11
S, C		8		∞	19	9
S, C, B				18	18	9
S, C, B, L				18	16	



X	S	B	C	P	M	L
S	0	10	5	∞	∞	11
S, C		8		∞	19	9
S, C, B				18	18	9
S, C, B, L				18	16	
S, C, B, L, M				18		



X	S	B	C	P	M	L
S	0	10	5	∞	∞	11
S, C		8		∞	19	9
S, C, B				18	18	9
S, C, B, L				18	16	
S, C, B, L, M				18		
S, C, B, L, M, P						

Dijkstra's algorithm (1959)

```
1:  $X \leftarrow \{u\}$ 
2: for  $v \in V$  do
3:    $T(v) \leftarrow p(u, v)$ 
4:    $C_v \leftarrow (u, v)$ 
5: end for
6: while  $X \neq V$  do
7:   Choose  $v \in V \setminus X$  such that  $\forall y \in V \setminus X, T(v) \leq T(y)$ 
8:    $X \leftarrow X \cup \{v\}$ 
9:   for  $y \in V \setminus X$  do
10:    if  $T(y) > T(v) + p(v, y)$  then
11:       $T(y) \leftarrow T(v) + p(v, y)$ 
12:       $C(y) \leftarrow [C(v), y]$ 
13:    end if
14:  end for
15: end while
```

Petit interlude

Venez participer avec vos élèves à un **Scienteens Lab** !

Petit interlude

Venez participer avec vos élèves à un **Scienteens Lab** !

Deux thèmes en mathématiques :

“ Conserver un secret ? Grâce à la théorie des nombres ! ”

“ Trouver le chemin le plus court ? Grâce à la théorie des graphes ! ”

Un programme bien rodé organisé au coeur de l'université



www.uni.lu/lcsb/scienteens_lab

thierry.meyrath@uni.lu

Qu'a-t-on en sortie ?

Exercice. [...]

Qu'a-t-on en sortie ?

Exercice. [...]

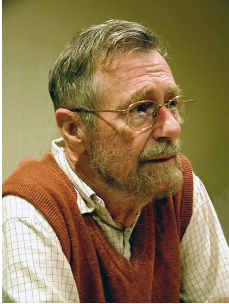
Théorème. Lorsque l'algorithme se termine, on a identifié pour chaque sommet u un plus court chemin de s à u et sa longueur.

Preuve. Prouver par induction qu'à l'étape i de l'algorithme

- (a) pour tout $u \in X_i$, on a identifié un plus court chemin de s à u
- (b) pour tout $u \notin X_i$, on a identifié un chemin de s à u le plus court parmi ceux dont tous les sommets sauf u sont dans X_i .

À la fin de l'algorithme, on a $X = V$ et le résultat découle de (a).

La petite histoire derrière cet algorithme.



Edsger Dijkstra (1930 -2002)

Prix Turing en 2002

Balbutiement de l'informatique

Algorithme de café

Son algorithme est dans tout GPS avec la destination comme source

Les graphes pour résoudre le casse-tête

Problème : Combien de transformations successives faut-il appliquer au minimum à



pour obtenir



Les graphes pour résoudre le casse-tête

Problème : Combien de transformations successives faut-il appliquer au minimum à



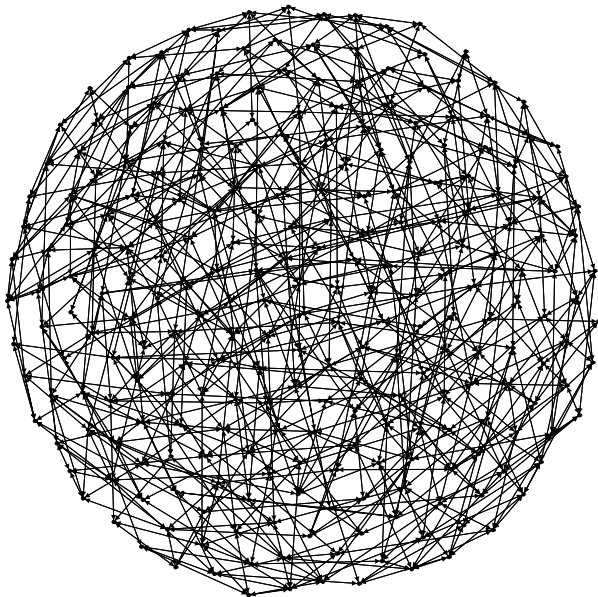
pour obtenir



Un graphe dirigé pour modéliser la dynamique du casse-tête :

- $V :=$ l'ensemble des 252 états possibles du casse tête (les suites constituées de 5 $\circ$ et 5 $\bullet$)
- E contient un arc $u \rightarrow v$ si on peut obtenir v en appliquant une transformation à u ;
- chaque arc a un poids unitaire

Le graphe d'états



Appliquer l'algorithme de Dijkstra aux graphes d'état avec

$$s = \bigcirc \bigcirc \bigcirc \bigcirc \bigcirc \bullet \bullet \bullet \bullet \bullet$$

permet de résoudre d'un coup le casse-tête quelle que soit la condition initiale !

$$\bullet \bigcirc \bullet \bigcirc \bullet \bigcirc | \bullet \bigcirc \bullet \bigcirc |$$

Appliquer l'algorithme de Dijkstra aux graphes d'état avec

$$s = \bigcirc \bigcirc \bigcirc \bigcirc \bigcirc \bigcirc \bullet \bullet \bullet \bullet \bullet$$

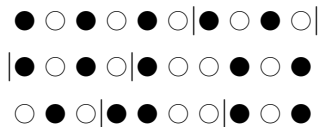
permet de résoudre d'un coup le casse-tête quelle que soit la condition initiale !

$$\begin{array}{cccccc|cccc} \bullet & \bigcirc & \bullet & \bigcirc & \bullet & \bigcirc & \bullet & \bigcirc & \bullet & \bigcirc \\ | & \bullet & \bigcirc & \bullet & \bigcirc & \bullet & \bigcirc & \bigcirc & \bullet & \bigcirc & \bullet \end{array}$$

Appliquer l'algorithme de Dijkstra aux graphes d'état avec

$$s = \bigcirc \bigcirc \bigcirc \bigcirc \bigcirc \bigcirc \bullet \bullet \bullet \bullet \bullet$$

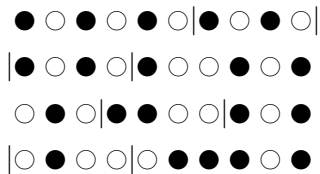
permet de résoudre d'un coup le casse-tête quelle que soit la condition initiale !



Appliquer l'algorithme de Dijkstra aux graphes d'état avec

$$s = \bigcirc \bigcirc \bigcirc \bigcirc \bigcirc \bullet \bullet \bullet \bullet \bullet$$

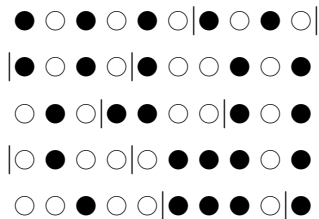
permet de résoudre d'un coup le casse-tête quelle que soit la condition initiale !



Appliquer l'algorithme de Dijkstra aux graphes d'état avec

$$s = \bigcirc \bigcirc \bigcirc \bigcirc \bigcirc \bigcirc \bullet \bullet \bullet \bullet \bullet \bullet$$

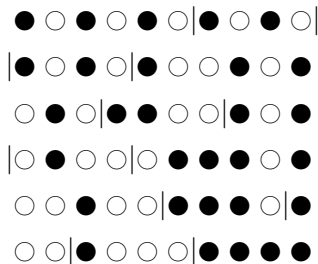
permet de résoudre d'un coup le casse-tête quelle que soit la condition initiale !



Appliquer l'algorithme de Dijkstra aux graphes d'état avec

$$s = \bigcirc \bigcirc \bigcirc \bigcirc \bigcirc \bigcirc \bullet \bullet \bullet \bullet \bullet \bullet$$

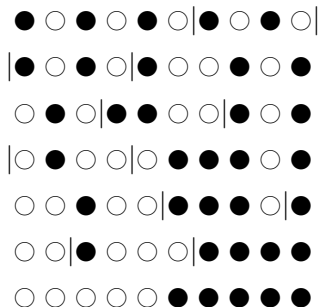
permet de résoudre d'un coup le casse-tête quelle que soit la condition initiale !



Appliquer l'algorithme de Dijkstra aux graphes d'état avec

$$s = \bigcirc \bigcirc \bigcirc \bigcirc \bigcirc \bigcirc \bullet \bullet \bullet \bullet \bullet \bullet$$

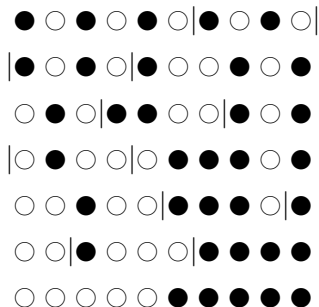
permet de résoudre d'un coup le casse-tête quelle que soit la condition initiale !



Appliquer l'algorithme de Dijkstra aux graphes d'état avec

$$s = \text{○○○○○●●●●●}$$

permet de résoudre d'un coup le casse-tête quelle que soit la condition initiale !



Une solution la plus courte a 6 transformations !

Faisons parler le graphe

La plus longue distance dans le graphes d'états est 7

Faisons parler le graphe

La plus longue distance dans le graphes d'états est 7

La distance moyenne entre deux états est de 3.92

Faisons parler le graphe

La plus longue distance dans le graphes d'états est 7

La distance moyenne entre deux états est de 3.92

Théorème. Le graphe d'états est connexe.

Faisons parler le graphe

La plus longue distance dans le graphes d'états est 7

La distance moyenne entre deux états est de 3.92

Théorème. Le graphe d'états est connexe.

Preuve.

(1) Si $\ell \geq 4$ alors on peut transformer $1\ 2 \cdots \ell$ en $\ell \star \star \cdots$

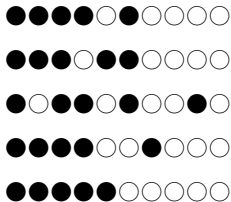
Par induction sur ℓ . Étape d'induction :

$$\begin{array}{ccccc} 1|2 \cdots \ell| & \longrightarrow & |1\ \ell\ a\ b| & c \cdots & \longrightarrow \\ b|a\ \ell\ 1\ c| \cdots & \longrightarrow & |b\ c\ 1\ \ell| & a \cdots & \longrightarrow \ell\ 1\ c\ b\ a \cdots \end{array}$$

(2) On peut rejoindre $\circ \circ \circ \circ \circ \bullet \bullet \bullet \bullet \bullet$ à partir de n'importe quel sommet c du graphe d'états [...]

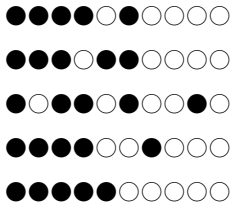
Pour vos insomnies

Résoudre (trier) les suites suivantes :



Pour vos insomnies

Résoudre (trier) les suites suivantes :



Emportez une BD de sciences gratuite

