

$$3 - 7 = 42$$

Michel Sebille

27 août 2019



Mais pourquoi 42 ?

$$3 - 7 = 42$$

## Mais pourquoi 42 ?

Douglas Adams

Le guide du voyageur galactique / The hitchhiker's guide to the galaxy

(1978-2009)

Quelle est la réponse à la grande question sur la vie, l'univers et le reste ?

Après 7 500 000 d'années.

42

J'ai vérifié très soigneusement, dit l'ordinateur, et c'est incontestablement la réponse exacte.

Je crois que le problème, pour être franc avec vous, est que vous n'avez jamais vraiment bien saisi la question.

## Mais pourquoi 42 ?

- ▶ Lost
- ▶ X-files
- ▶ Stargate
- ▶ Coldplay
- ▶ Openoffice
- ▶ Google (the answer to life, the universe and everything)

En France, le secrétaire d'État chargé du numérique Mounir Mahjoubi répond au Sénat répond à une question sur l'impact de l'intelligence artificielle sur le marché du travail : « Voilà qui pose peut-être la question de la question. 42 ! »

Mais pourquoi 42 ?

$$6 \times 9 = 42$$

Correct en base 13

Quel est le plus grand nombre entier  $n$  tel qu'il existe des entiers positifs  $p$ ,  $q$  et  $r$  tels que

$$1 - \frac{1}{p} - \frac{1}{q} - \frac{1}{r} = -\frac{1}{n}$$

## Mais pourquoi 42 ?

Vous voulez du mathématiquement plus « difficile » ?

Surface de Riemann, automorphisme d'Hurwitz, caractéristique d'Euler négative, optimisation d'un pavage dans un plan hyperbolique, groupe simple sporadique (le Monstre).

## En apéritif, un classique

$$a = b$$

$$ab = b^2$$

$$ab - a^2 = b^2 - a^2$$

$$a(b - a) = (b + a)(b - a)$$

$$a = b + a$$

$$a = 2a$$

$$1 = 2$$

$$| \cdot b$$

$$| - a^2$$

$$| : (b - a)$$

$$| a = b$$

$$| : a$$

## Quelles références ?

E.A. Maxwell, Fallacies in mathematics, 1958-9  
Mathematical Gazette



## Version originale

$$x = 0$$

$$x(x - 1) = 0$$

$$x - 1 = 0$$

$$x = 1$$

$$0 = 1$$

- ▶ Pythagore loufoque et 42
- ▶ Tous les triangles sont équilatéraux
- ▶ Toutes les droites sont parallèles
- ▶ Aucun point n'est intérieur à un cercle
- ▶  $\pi = 0$  par nombres complexes
- ▶  $0 = 1$  par intégrales
- ▶  $2 = 1$  par intégrales
- ▶ Mais ça n'est pas possible

Démontrons le théorème de Pythagore à l'aide du nombre 42

## Pythagore loufoque et 42

Mordicus d'Athènes (328-244 au fond de la cour à droite avant l'ère chrétienne) fondateur de l'École Éthylique.

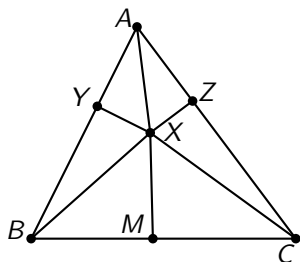
« Pythagore mesurait 1m92. »

(dialogues avec Pedalos des Cyclades et Leguminos de Macédoine)

- ▶ Pythagore loufoque et 42
- ▶ Tous les triangles sont équilatéraux
- ▶ Toutes les droites sont parallèles
- ▶ Aucun point n'est intérieur à un cercle
- ▶  $\pi = 0$  par nombres complexes
- ▶  $0 = 1$  par intégrales
- ▶  $2 = 1$  par intégrales
- ▶ Mais ça n'est pas possible

Tous les triangles sont équilatéraux

# Tous les triangles sont équilatéraux



$AXY$  iso  $AXZ$  ( $ACA$ )

$$|AX| = |AX| \quad |\widehat{XAY}| = |\widehat{XAZ}| \quad |\widehat{AYX}| = |\widehat{AZX}| = 90^\circ$$

$$\Rightarrow |AY| = |AZ|$$

$BMX$  iso  $CMX$  ( $CAC$ )

$$|MX| = |MX| \quad |BM| = |CM| \quad |\widehat{BMX}| = |\widehat{CMX}| = 90^\circ$$

$$\Rightarrow |BX| = |CX|$$

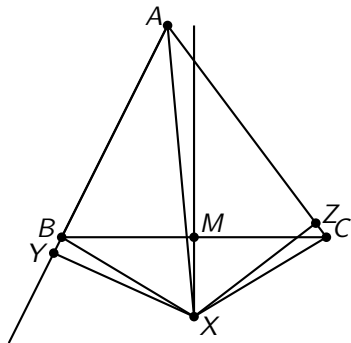
$BXY$  iso  $CXZ$  ( $CAC$ )

$$|BX| = |CX| \quad |XY| = |YZ| \quad |\widehat{BYX}| = |\widehat{CZX}| = 90^\circ$$

$$\Rightarrow |BY| = |CZ|$$

$$|AB| = |AY| + |BY| = |AZ| + |CZ| = |AC|$$

C'est là qu'est l'os



$$|AB| = |AY| + |BY| = |AZ| + |CZ| = |AC|$$

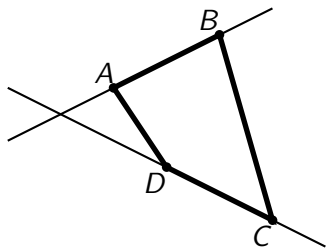
↑  
oeï!



- ▶ Pythagore loufoque et 42
- ▶ Tous les triangles sont équilatéraux
- ▶ Toutes les droites sont parallèles
- ▶ Aucun point n'est intérieur à un cercle
- ▶  $\pi = 0$  par nombres complexes
- ▶  $0 = 1$  par intégrales
- ▶  $2 = 1$  par intégrales
- ▶ Mais ça n'est pas possible

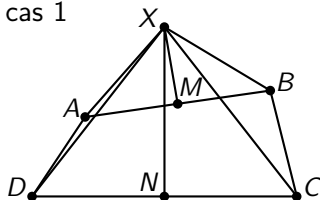
Toutes les droites sont parallèles

Toutes les droites sont parallèles

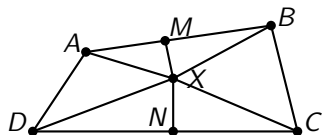


# Toutes les droites sont parallèles

cas 1



cas 2



$$|AD| = |BC|, |AX| = |BX|, |CX| = |DX| \xrightarrow{(CCC)} ADX \text{ iso } BCX$$

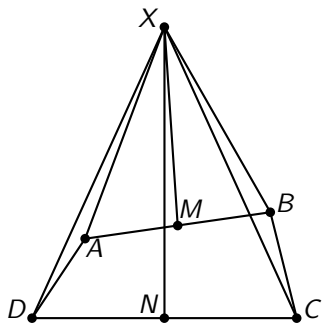
$$\Rightarrow |\widehat{XAD}| = |\widehat{XBC}| \text{ et } |\widehat{XDA}| = |\widehat{XCB}|$$

$$|\widehat{XAB}| = |\widehat{XBA}| \Rightarrow |\widehat{XAD}| \pm |\widehat{XAB}| = |\widehat{XBC}| \pm |\widehat{XBA}| \Rightarrow |\widehat{DAB}| = |\widehat{CBA}|$$

$$|\widehat{XDC}| = |\widehat{XCD}| \Rightarrow |\widehat{XDC}| + |\widehat{XDA}| = |\widehat{XCD}| + |\widehat{XCB}| \Rightarrow |\widehat{ADC}| = |\widehat{DCB}|$$

$$\Rightarrow |\widehat{DAB}| + |\widehat{ADC}| = |\widehat{DCB}| + |\widehat{CBA}| = 180^\circ$$

C'est la qu'est l'os

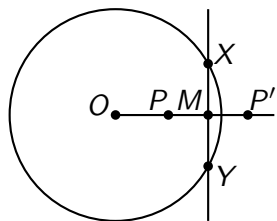


$$|\widehat{DAB}| = |\widehat{XAD}| - |\widehat{XAB}| ???$$

- ▶ Pythagore loufoque et 42
- ▶ Tous les triangles sont équilatéraux
- ▶ Toutes les droites sont parallèles
- ▶ Aucun point n'est intérieur à un cercle
- ▶  $\pi = 0$  par nombres complexes
- ▶  $0 = 1$  par intégrales
- ▶  $2 = 1$  par intégrales
- ▶ Mais ça n'est pas possible

Aucun point n'est intérieur à un cercle

## Aucun point n'est intérieur à un cercle



$$P' \in [OP \text{ et } |OP| \cdot |OP'| = r^2$$

Par construction,

$$|OP| = |OM| - |MP| \text{ et } |OP'| = |OM| + |MP'| = |OM| + |MP|.$$

Dès lors,

$$|OP| \cdot |OP'| = (|OM| - |MP|) \cdot (|OM| + |MP|) = |OM|^2 - |MP|^2.$$

Ainsi, par le théorème de Pythagore,

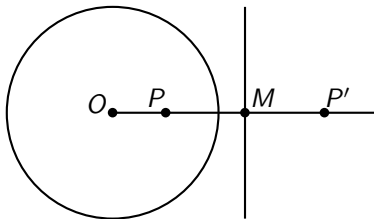
$$|OP| \cdot |OP'| = (|OX|^2 - |MX|^2) - (|PX|^2 - |MX|^2) = |OX|^2 - |PX|^2.$$

Mais puisque  $|OP| \cdot |OP'| = |OX|^2 = r^2$  on en déduit que  $|PX|^2 = 0$  et  $P$  doit appartenir à la circonférence.



C'est la qu'est l'os

Le point  $P$  est situé à la moitié du rayon et donc, pour avoir  $|OP| \cdot |OP'| = r^2$ , il faut que  $|OP'| = 2r$  et non  $\frac{3}{2}r$  comme sur le dessin précédent.



- ▶ Pythagore loufoque et 42
- ▶ Tous les triangles sont équilatéraux
- ▶ Toutes les droites sont parallèles
- ▶ Aucun point n'est intérieur à un cercle
- ▶  $\pi = 0$  par nombres complexes
- ▶  $0 = 1$  par intégrales
- ▶  $2 = 1$  par intégrales
- ▶ Mais ça n'est pas possible

$\pi = 0$  par nombres complexes

## $\pi = 0$ par nombres complexes

$$e^{2\pi i} = \cos 2\pi + i \sin 2\pi = 1$$

$$e^{ix} = e^{ix} e^{2\pi i}$$

$$e^{ix} = e^{i(x+2\pi)}$$

|  $a^i$

$$(e^{ix})^i = (e^{i(x+2\pi)})^i$$

$$e^{-x} = e^{-(x+2\pi)}$$

|  $\cdot e^{x+2\pi}$

$$e^{2\pi} = e^0$$

| bijection

$$2\pi = 0$$

| : 2

$$\pi = 0$$

C'est là qu'est l'os

$$\begin{array}{l} (-5) \neq 5 \\ 25 = 25 \end{array} \quad | \quad a^2$$

Si  $a = b^i$ ,  $b$  peut prendre une infinité de valeurs.

- ▶ Pythagore loufoque et 42
- ▶ Tous les triangles sont équilatéraux
- ▶ Toutes les droites sont parallèles
- ▶ Aucun point n'est intérieur à un cercle
- ▶  $\pi = 0$  par nombres complexes
- ▶  $0 = 1$  par intégrales
- ▶  $2 = 1$  par intégrales
- ▶ Mais ça n'est pas possible

0 = 1 par intégrales

$0 = 1$  par intégrales

$$I = \int \frac{1}{x} dx = \int 1 \cdot \frac{1}{x} dx = x \cdot \frac{1}{x} - \int x \left( \frac{-1}{x^2} \right) dx = 1 + \int \frac{1}{x} dx = 1 + I$$

$$I = 1 + I$$

En soustrayant  $I$ , on a  $0 = 1$ .



## C'est la qu'est l'os

Une primitive est définie à une constante près ; pourquoi pas 1 ?

$$I = \int \frac{1}{x} dx = \int 1 \cdot \frac{1}{x} dx = x \cdot \frac{1}{x} - \int x \left( \frac{-1}{x^2} \right) dx = 1 + \int \frac{1}{x} dx = 1 + I$$

$$\begin{aligned} I &= \int_a^b \frac{1}{x} dx = \int_a^b 1 \cdot \frac{1}{x} dx = \left[ x \cdot \frac{1}{x} \right]_a^b - \int_a^b x \left( \frac{-1}{x^2} \right) dx \\ &= [1]_a^b + \int_a^b \frac{1}{x} dx = 0 + I \end{aligned}$$

- ▶ Pythagore loufoque et 42
- ▶ Tous les triangles sont équilatéraux
- ▶ Toutes les droites sont parallèles
- ▶ Aucun point n'est intérieur à un cercle
- ▶  $\pi = 0$  par nombres complexes
- ▶  $0 = 1$  par intégrales
- ▶  $2 = 1$  par intégrales
- ▶ Mais ça n'est pas possible

2 = 1 par intégrales

## 2 = 1 par intégrales

$$\int_1^2 f(x) dx = \int_0^2 f(x) dx - \int_0^1 f(x) dx$$

Par un changement de variable  $x = 2t$ ,

$$\int_0^2 f(x) dx = 2 \int_0^1 f(2t) dt = 2 \int_0^1 f(2x) dx$$

Supposons que la fonction  $f$  soit telle que  $f(2x) = \frac{1}{2}f(x)$  (\*).

$$\int_1^2 f(x) dx = 2 \int_0^1 \frac{1}{2}f(x) dx - \int_0^1 f(x) dx = 0$$

La fonction inverse satisfait (\*).

$$\int_1^2 \frac{1}{x} dx = 0 \iff \ln 2 = 0$$

L'exponentielle des deux membres livre  $2 = 1$ .

C'est là qu'est l'os

$$\int_0^1 \frac{1}{x} dx$$

n'existe pas.

- ▶ Pythagore loufoque et 42
- ▶ Tous les triangles sont équilatéraux
- ▶ Toutes les droites sont parallèles
- ▶ Aucun point n'est intérieur à un cercle
- ▶  $\pi = 0$  par nombres complexes
- ▶  $0 = 1$  par intégrales
- ▶  $2 = 1$  par intégrales
- ▶ Mais ça n'est pas possible

Mais ça n'est pas possible

Mais ça n'est pas possible

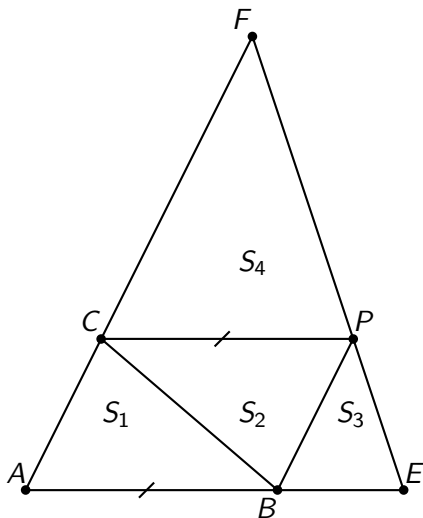
On suppose que par deux points passe une unique droite.

**Théorème (Saccheri-Legendre)**

*La somme des amplitudes des angles d'un triangle n'excède pas  $180^\circ$ .*



Mais ça n'est pas possible



$$|CP| = |AB| \text{ et } |\widehat{ABC}| = |\widehat{BCP}|$$

$ABC$  iso  $BCP$

$$S_1 = S_2 = 180^\circ - d$$

$$S_1 + S_2 + S_3 + S_4 \leq 4 \cdot 180^\circ - 2d$$

en  $B$ ,  $C$  et  $P$  on a  $180^\circ$

$$S \leq 180^\circ - 2d$$

## Mais ça n'est pas possible

Pour résumer, l'existence d'un triangle dont la somme des amplitudes est  $180^\circ - d$  implique celle d'un triangle dont la somme des amplitudes est inférieure à ou égale à  $180^\circ - 2d$ .  
En itérant le processus, on obtient  $180^\circ - 4d$ ,  $180^\circ - 8d$ , ... et au bout d'un moment un nombre négatif. On a notre contradiction.