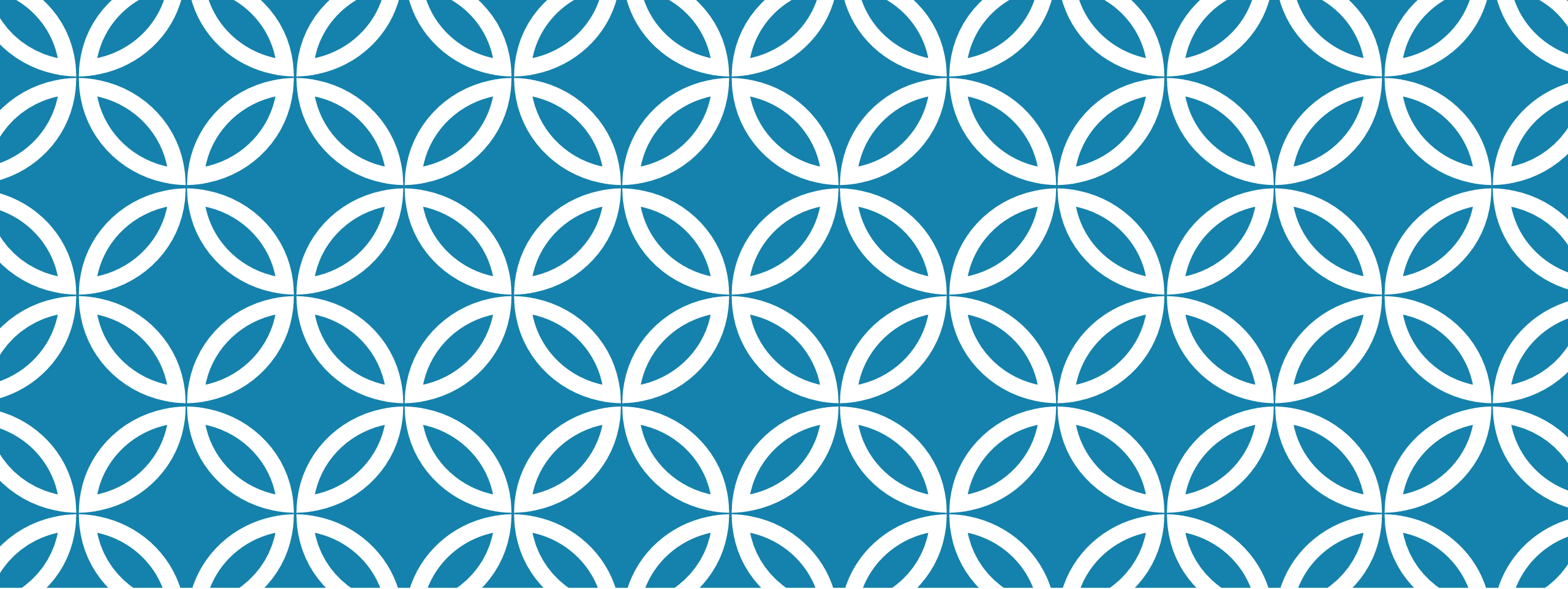
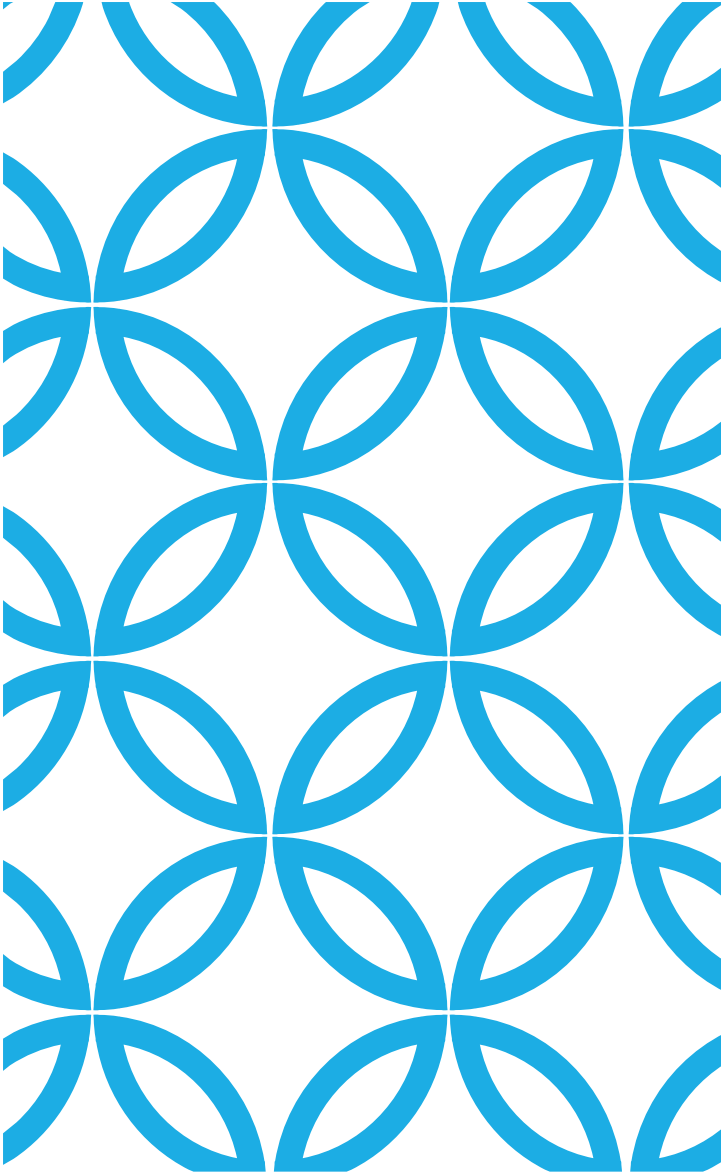




**DES EXPÉRIENCES PHYSIQUES
POUR « MESURER » LE NOMBRE π**
CONGRÈS SBPM, LA LOUVIÈRE, AOÛT 2019

Michel Roelens

UC Leuven Limburg
Maria-Boodschaplyceum
UITWISKELING



MESURER PI AVEC...

Une assiette

Un pendule

Des allumettes

Des boules

UNE ASSIETTE

Mesurons π en roulant
l'assiette.

$$\pi = \frac{\text{périmètre}}{\text{diamètre}} \text{ (définition de } \pi \text{)}$$
$$= \frac{\text{demi périmètre}}{\text{rayon}}$$



UNE ASSIETTE

Jef



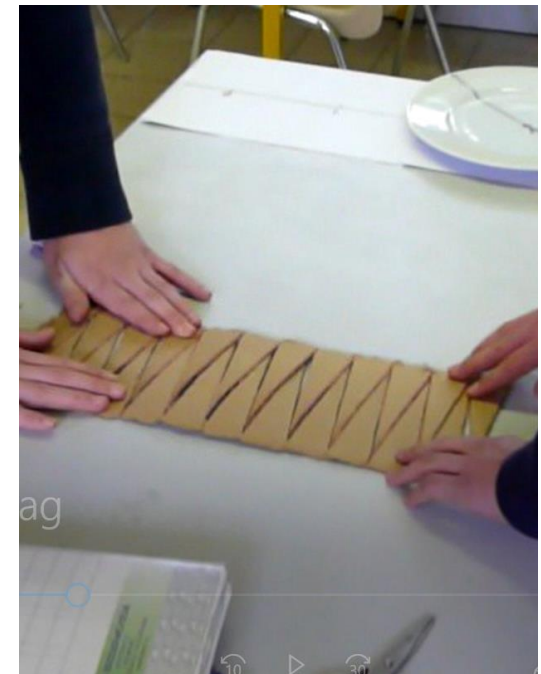
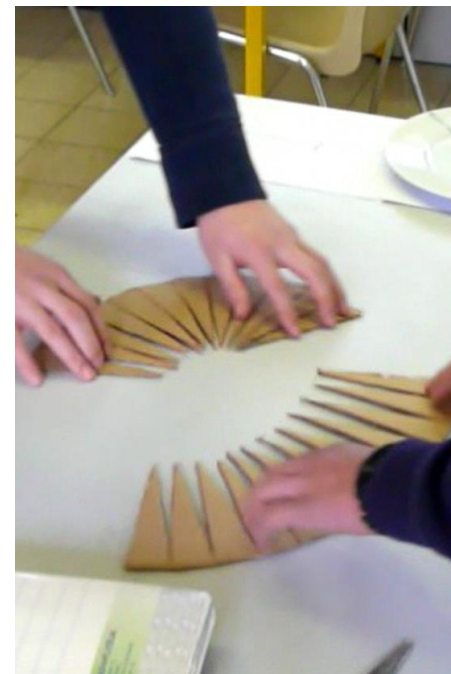
UNE ASSIETTE

Même nombre π pour l'aire !

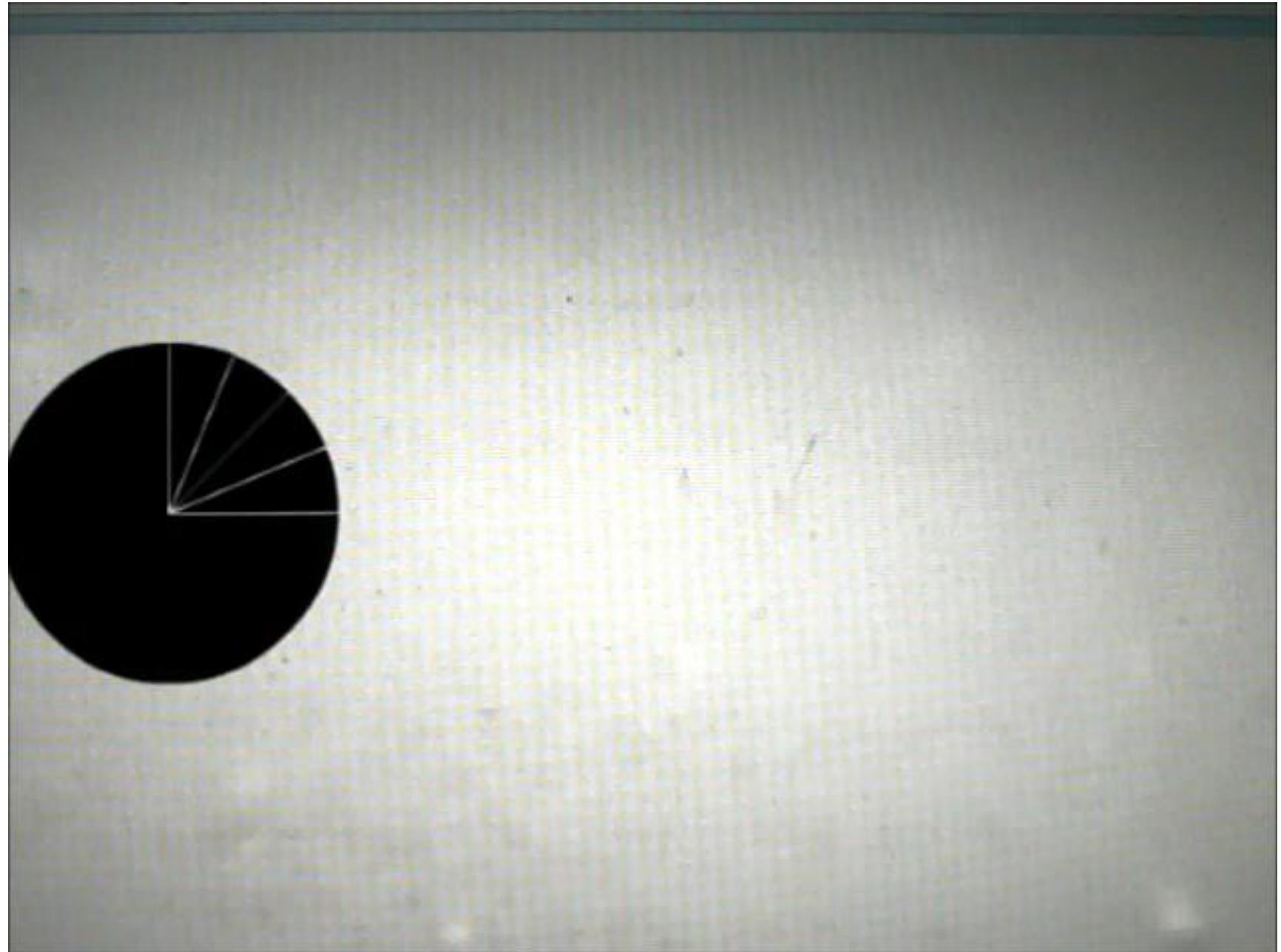
$$\pi = \frac{\text{aire}}{\text{rayon}^2}$$

Démonstration: Archimède avec un triangle. Nous: assiette de papier, ou pizza.

$$\begin{aligned} \text{aire} &= \sum \text{aires des parts} \\ &\approx \sum \text{aires des triangles} \\ &= \text{aire du parallélogramme} \\ &\approx \left(\frac{1}{2} \text{périmètre} \right) \cdot \text{rayon} \\ &= \pi \cdot \text{rayon}^2 \end{aligned}$$



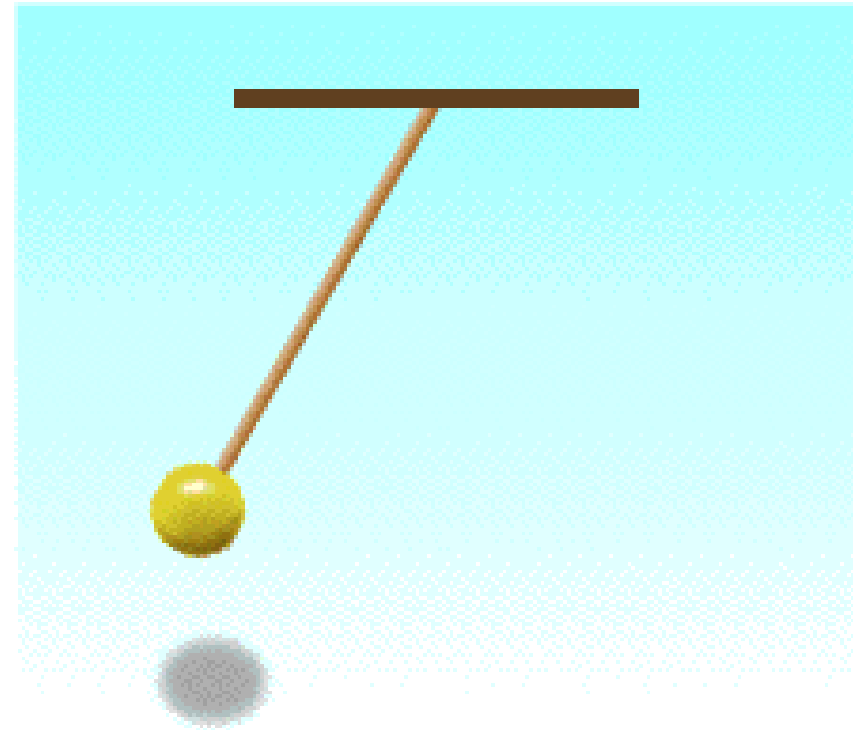
UNE ASSIETTE



UN PENDULE

Mesurons π en chronométrant
la période.

Matt Parker



UN PENDULE

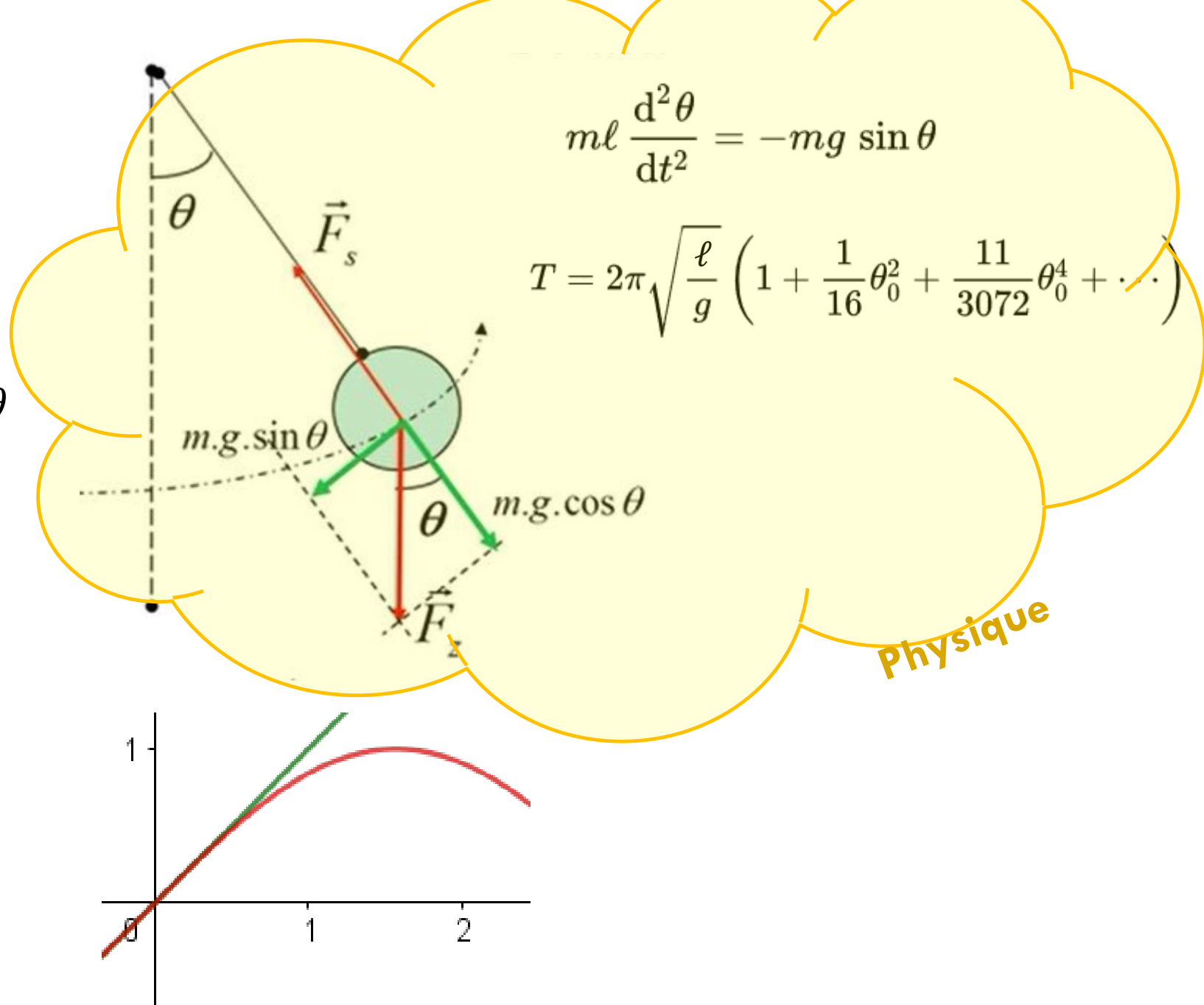
$$T \approx 2\pi \sqrt{\frac{\ell}{g}} \text{ pour } \sin \vartheta \approx \vartheta$$

$$\ell = \frac{g}{4} \Rightarrow T \approx \pi$$

Unités ?

$$\ell = \frac{g}{4} \text{ s}^2 \Rightarrow T \approx \pi \text{ s}$$

$$\ell \approx \frac{9,81}{4} \text{ m} = 2,4525 \text{ m}$$



UN PENDULE

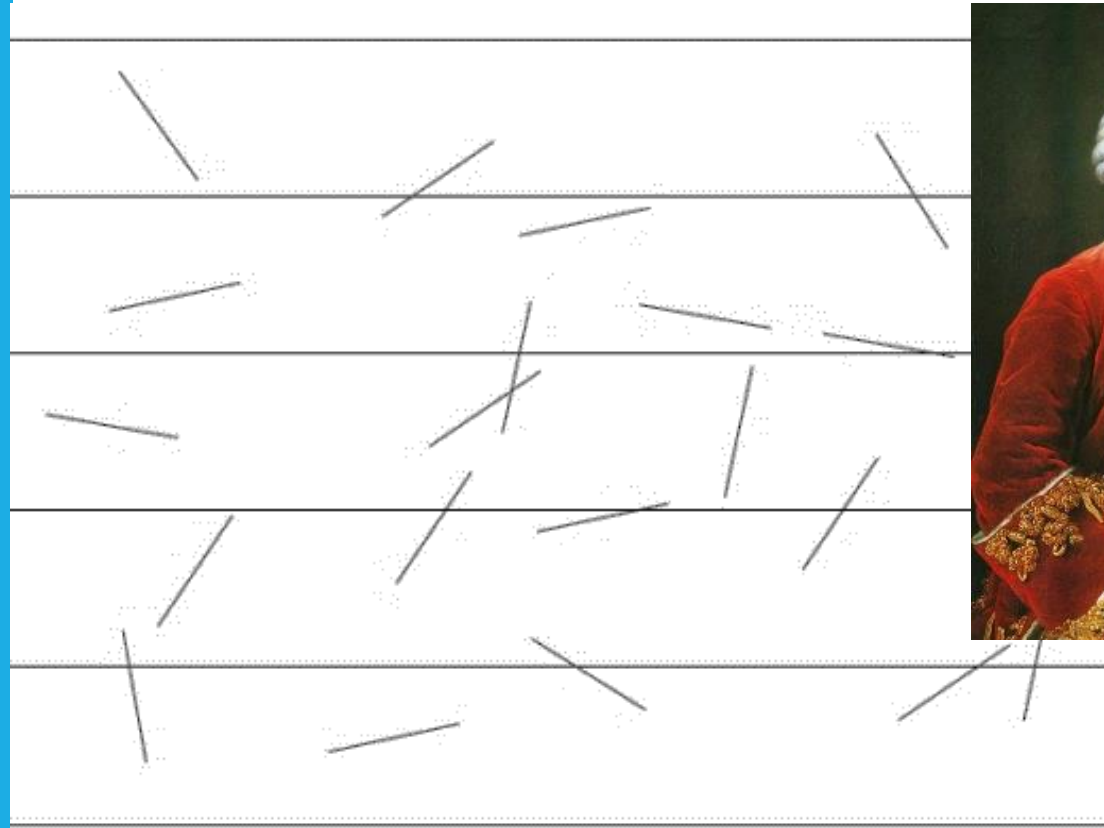
Faisons-le.



DES ALLUMETTES

Mesurer π en comptant des allumettes lancées sur du papier ligné (ou sur un plancher)

Les aiguilles de Georges Louis Leclerc, comte de Buffon (pas « Bouffon »), 1777



$\mathbb{P}(\text{allumette intersecte une ligne})$

$$= \frac{2 \cdot (\text{longueur des allumettes})}{\pi \cdot (\text{distance entre les lignes})} = \frac{2\ell}{\pi d}$$

DES ALLUMETTES

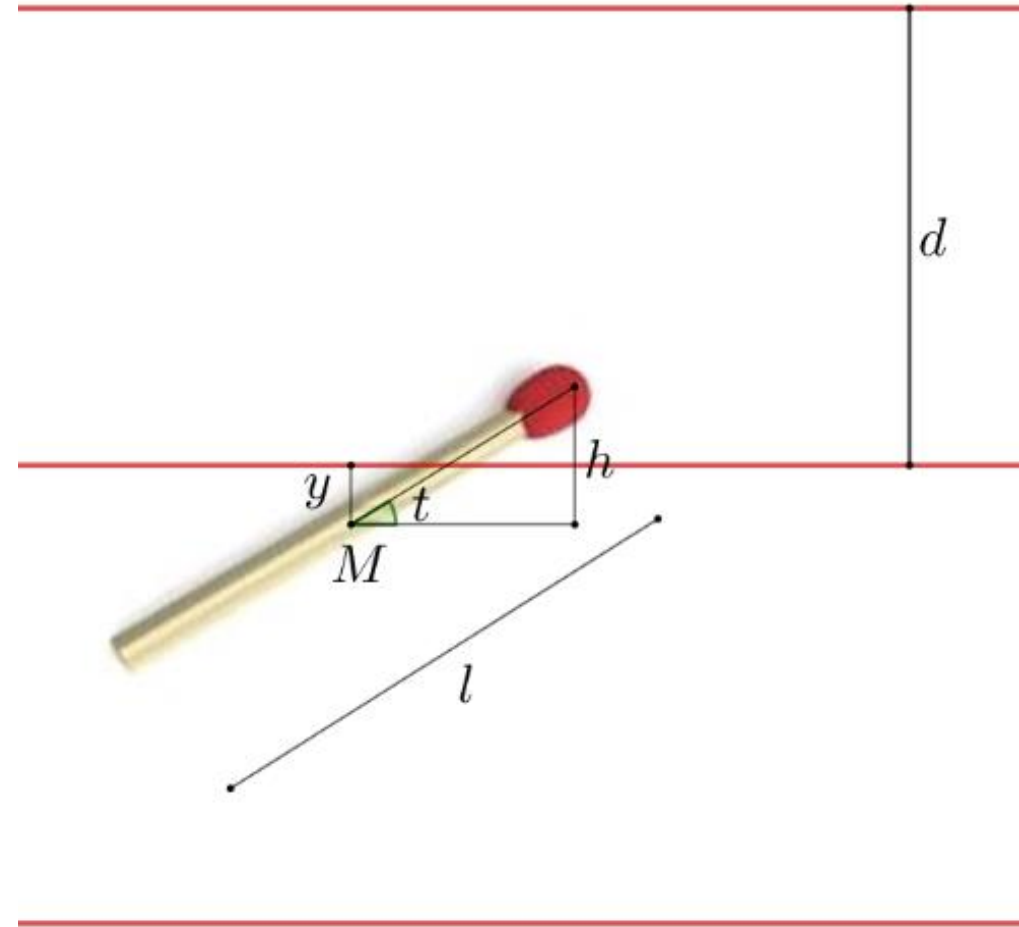
Première démonstration

Supposons $\ell < d$.

Qu'est-ce que lancer de façon aléatoire ?

Tout couple $(t, y) \in [0, \pi] \times \left[0, \frac{d}{2}\right]$ a la même probabilité.

Ou plutôt: la densité de probabilité est uniforme dans le rectangle $[0, \pi] \times \left[0, \frac{d}{2}\right]$.



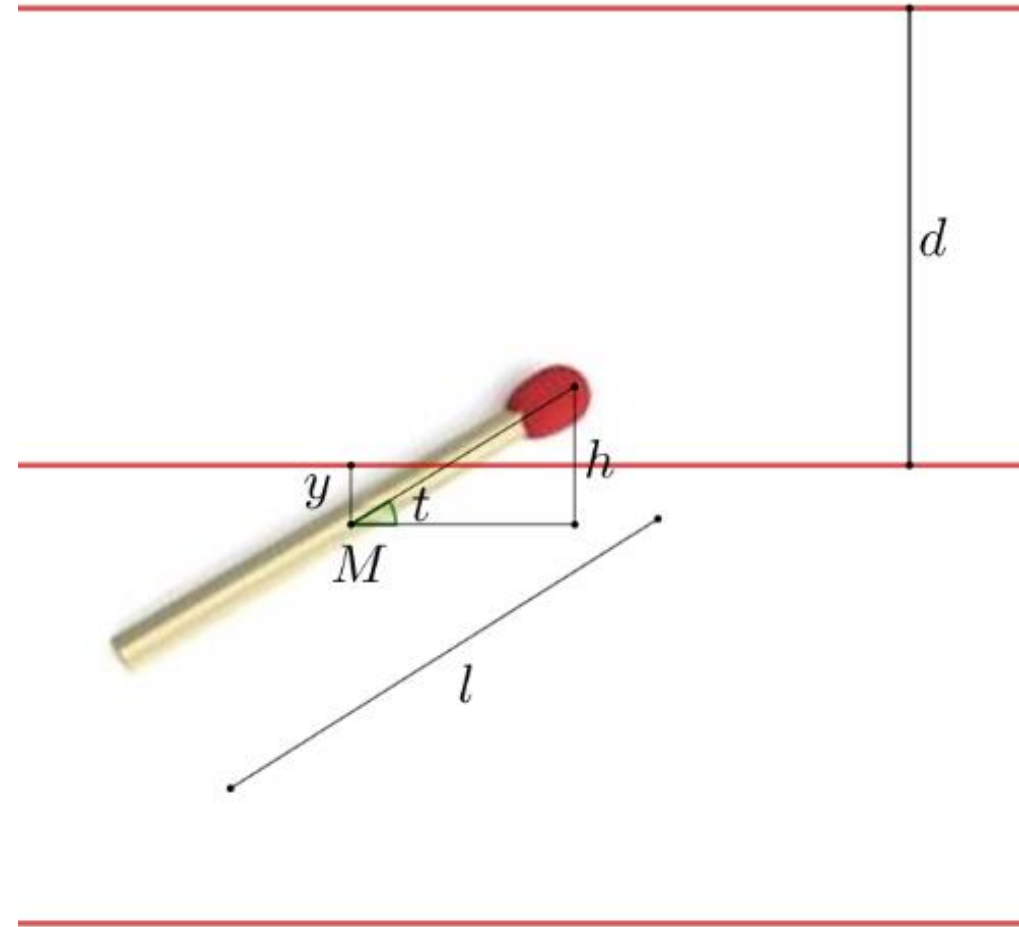
DES ALLUMETTES

Quand est-ce que l'allumette coupe une ligne ?

Quand $y \leq h$.

h en fonction de t ?

$$h = \frac{\ell}{2} \sin t$$

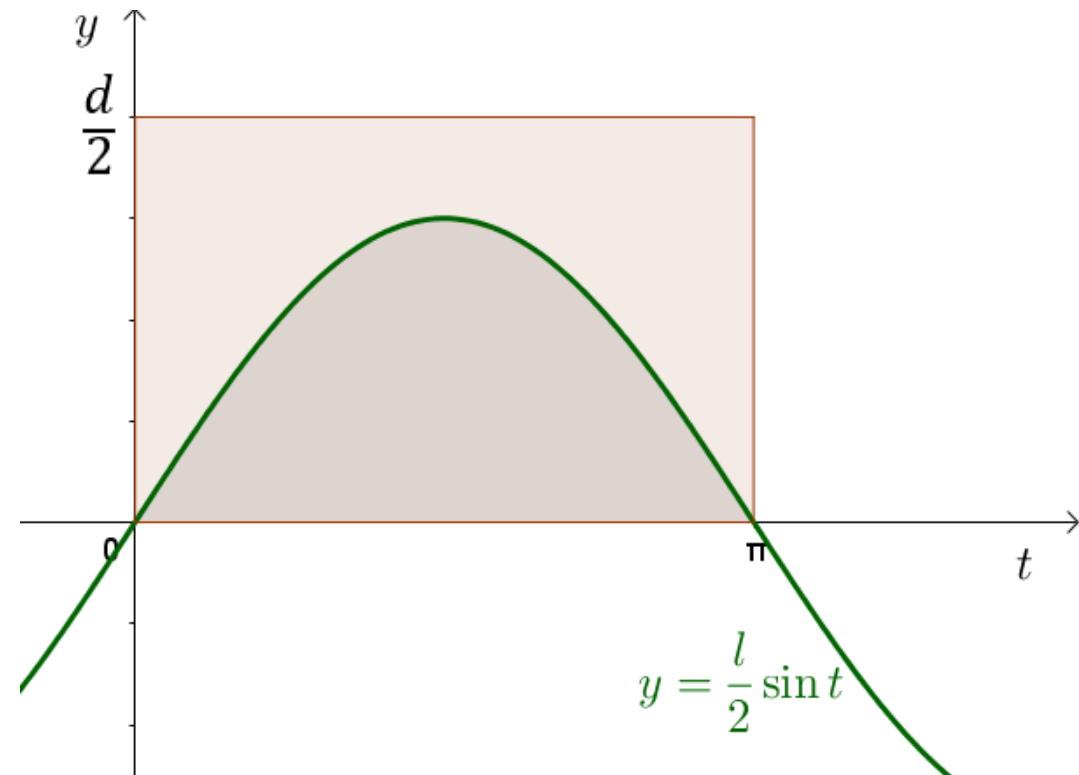


DES ALLUMETTES

On cherche donc la probabilité que $y \leq \frac{\ell}{2} \sin t$

$$\mathbb{P}(\text{allumette coupe une ligne}) = \frac{\int_0^\pi \frac{\ell}{2} \sin t \, dt}{\pi \frac{d}{2}}$$

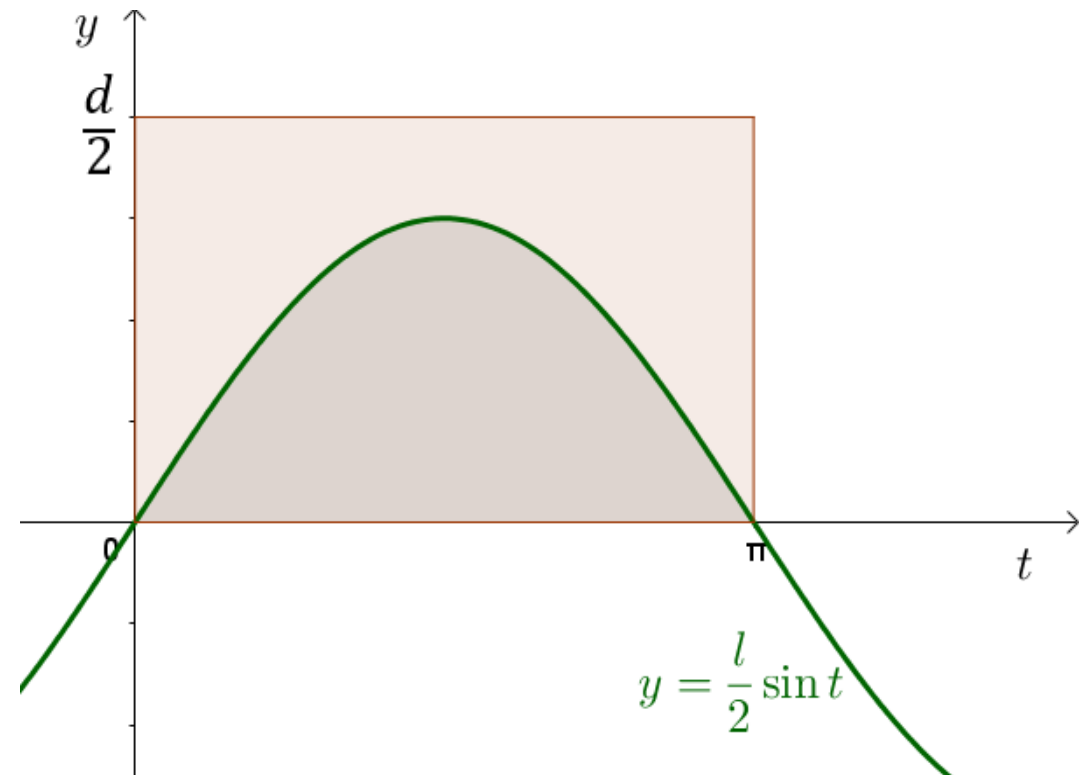
$$\begin{aligned} \int_0^\pi \frac{\ell}{2} \sin t \, dt &= \frac{\ell}{2} [-\cos t]_0^\pi \\ &= \frac{\ell}{2} (-(-1) + 1) \\ &= \ell \end{aligned}$$



DES ALLUMETTES

On cherche donc la probabilité que $y \leq \frac{\ell}{2} \sin t$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\text{allumette coupe une ligne}) &= \frac{\int_0^\pi \frac{\ell}{2} \sin t \, dt}{\pi \frac{d}{2}} \\ &= \frac{\ell}{\pi \cdot \frac{d}{2}} \\ &= \frac{2\ell}{\pi d}\end{aligned}$$



DES ALLUMETTES

$$\mathbb{P}(\text{coupe une droite}) = \frac{2\ell}{\pi d}.$$

Deuxième démonstration

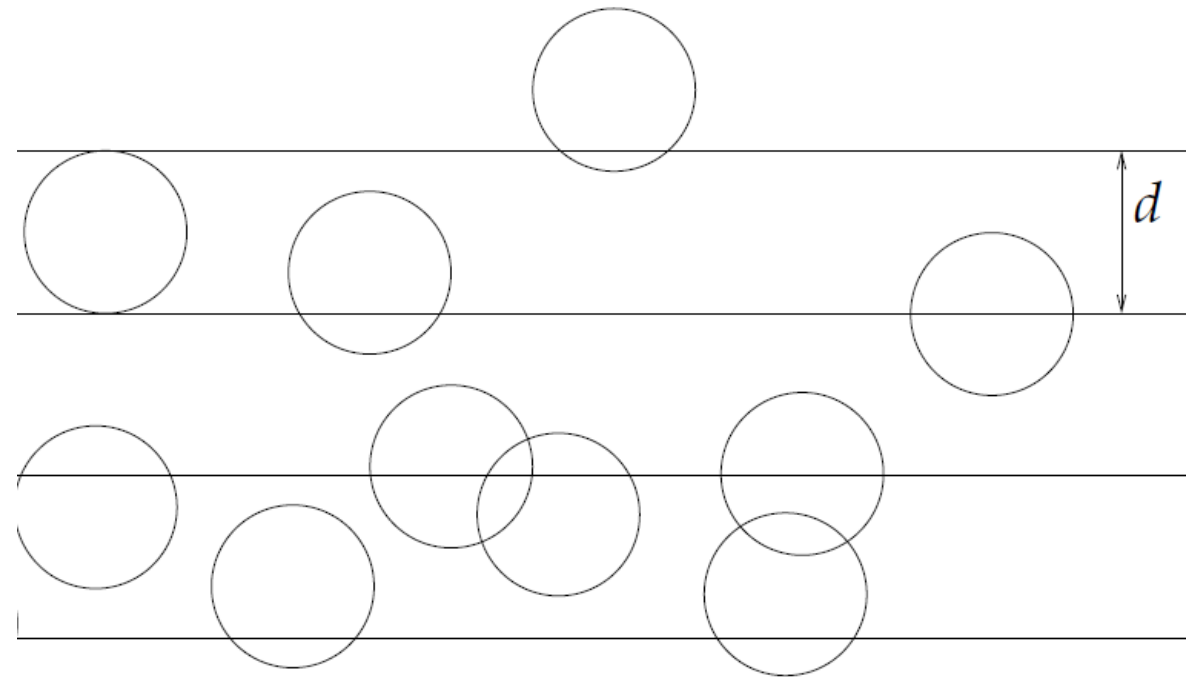
(artin Aigner, Philippe Cara

L'idée

Transformer progressivement l'allumette en une allumette ronde de diamètre d .

Pourquoi ?

Parce qu'alors nous savons qu'elle coupera toujours les lignes en deux points.



Plus tard que 14h15: sautons-la !

DES ALLUMETTES

Allumette longue

$p_1(\ell), p_2(\ell), p_3(\ell) \dots$: probabilités d'avoir 1, 2, 3, ... points d'intersection avec les lignes.

Espérance du nombre de points d'intersection :

$$\mathbb{E}(\ell) = p_1(\ell) + 2p_2(\ell) + 3p_3(\ell) + \dots$$

Il est clair que

$$\ell \leq \ell' \Rightarrow \mathbb{E}(\ell) \leq \mathbb{E}(\ell')$$

DES ALLUMETTES

Allumette polygonale

$$\mathbb{E}(\ell_1 + \ell_2 + \dots) = \mathbb{E}(\ell_1) + \mathbb{E}(\ell_2) + \dots$$

Théorème Pour $x \in \mathbb{R}^+$: $\mathbb{E}(x\ell) = x \cdot \mathbb{E}(\ell)$.

Démonstration

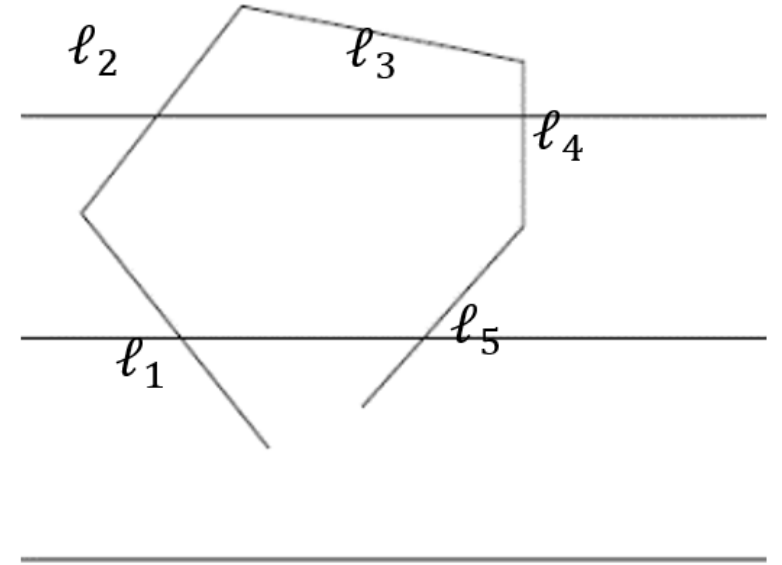
Pour $x = n \in \mathbb{N}$: $\mathbb{E}(n\ell) = \mathbb{E}(\ell + \ell + \dots + \ell) = \mathbb{E}(\ell) + \mathbb{E}(\ell) + \dots + \mathbb{E}(\ell) = n \cdot \mathbb{E}(\ell)$

Pour $x = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}^+$: $n \cdot \mathbb{E}\left(\frac{m}{n}\ell\right) = \mathbb{E}\left(n \cdot \frac{m}{n}\ell\right) = \mathbb{E}(m\ell) = m \cdot \mathbb{E}(\ell)$ donc $\mathbb{E}\left(\frac{m}{n}\ell\right) = \frac{m}{n} \mathbb{E}(\ell)$

Pour $x \in \mathbb{R}^+$: $\forall \varepsilon > 0: \exists \frac{k}{l}, \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}: \underbrace{\frac{k}{l} \leq x \leq \frac{m}{n}}_{\Downarrow} \text{ en } \left| \frac{m}{n} - \frac{k}{l} \right| < \varepsilon \quad (\mathbb{Q} \text{ est dense dans } \mathbb{R})$

$$\frac{k}{l} \mathbb{E}(\ell) = \mathbb{E}\left(\frac{k}{l}\ell\right) \leq \mathbb{E}(x\ell) \leq \mathbb{E}\left(\frac{m}{n}\ell\right) = \frac{m}{n} \mathbb{E}(\ell)$$

Donc: $\mathbb{E}(x\ell) = x \cdot \mathbb{E}(\ell)$



DES ALLUMETTES

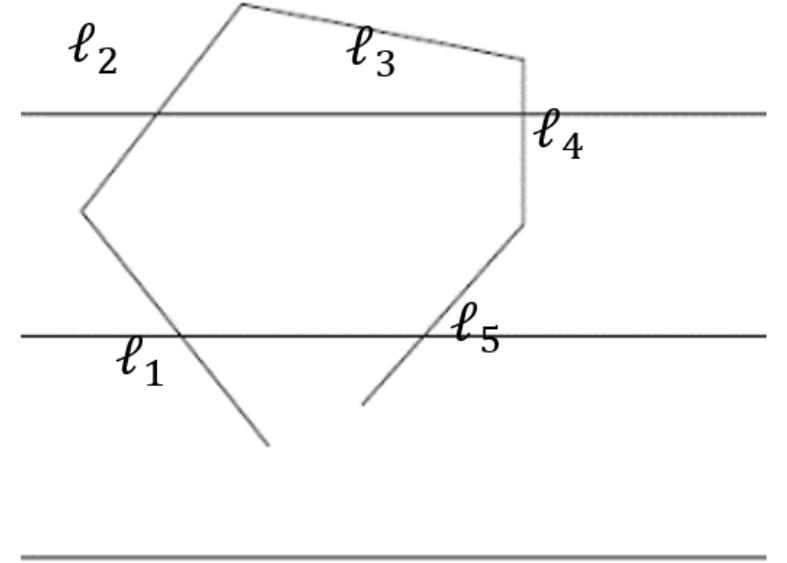
Allumette polygonale

$$\mathbb{E}(\ell_1 + \ell_2 + \dots) = \mathbb{E}(\ell_1) + \mathbb{E}(\ell_2) + \dots$$

Théorème Pour $x \in \mathbb{R}^+$: $\mathbb{E}(x\ell) = x \cdot \mathbb{E}(\ell)$.

Corollaire Pour toute allumette polygonale de longueur ℓ on a: $\mathbb{E}(\ell) = \ell \cdot \mathbb{E}(1)$.

Prenons finalement une allumette circulaire de diamètre d . Nous savons : $\mathbb{E}(c) = 2$.



DES ALLUMETTES

Approximons le cercle par des polygones trop petits et trop grands P_n et P^n .

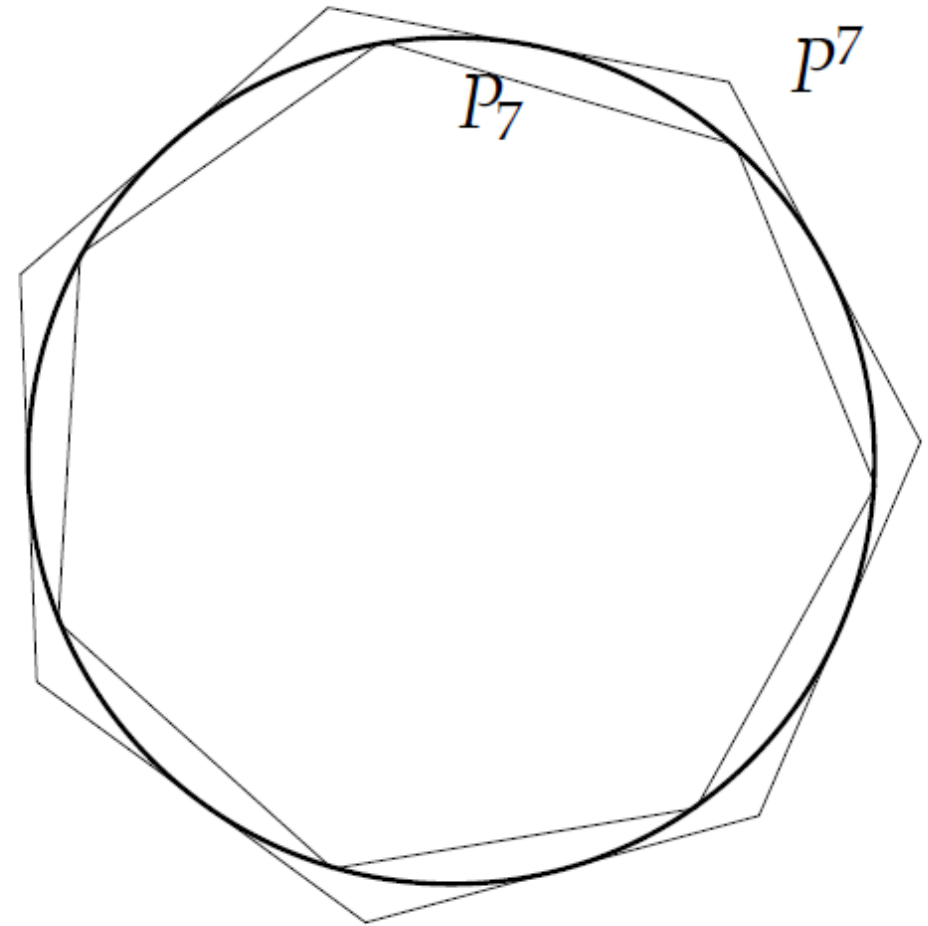
$$\mathbb{E}(P_n) \leq \mathbb{E}(c) \leq \mathbb{E}(P^n)$$

$$P_n \mathbb{E}(1) \leq 2 \leq P^n \mathbb{E}(1)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_n \mathbb{E}(1) \leq 2 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} P^n \mathbb{E}(1)$$

$$d \pi \mathbb{E}(1) \leq 2 \leq d \pi \mathbb{E}(1)$$

$$\mathbb{E}(1) = \frac{2}{d\pi}$$



DES ALLUMETTES

Pour $\ell < d$:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\text{coupe une ligne}) &= \mathbb{E}(\ell) \\ &= \ell \mathbb{E}(1) \\ &= \ell \frac{2}{d\pi} \\ &= \frac{2\ell}{d\pi}\end{aligned}$$

DES ALLUMETTES

$$\mathbb{P}(\text{coupe une droite}) = \frac{2\ell}{\pi d}$$

Prenons

$$d = 2\ell$$

Ainsi :

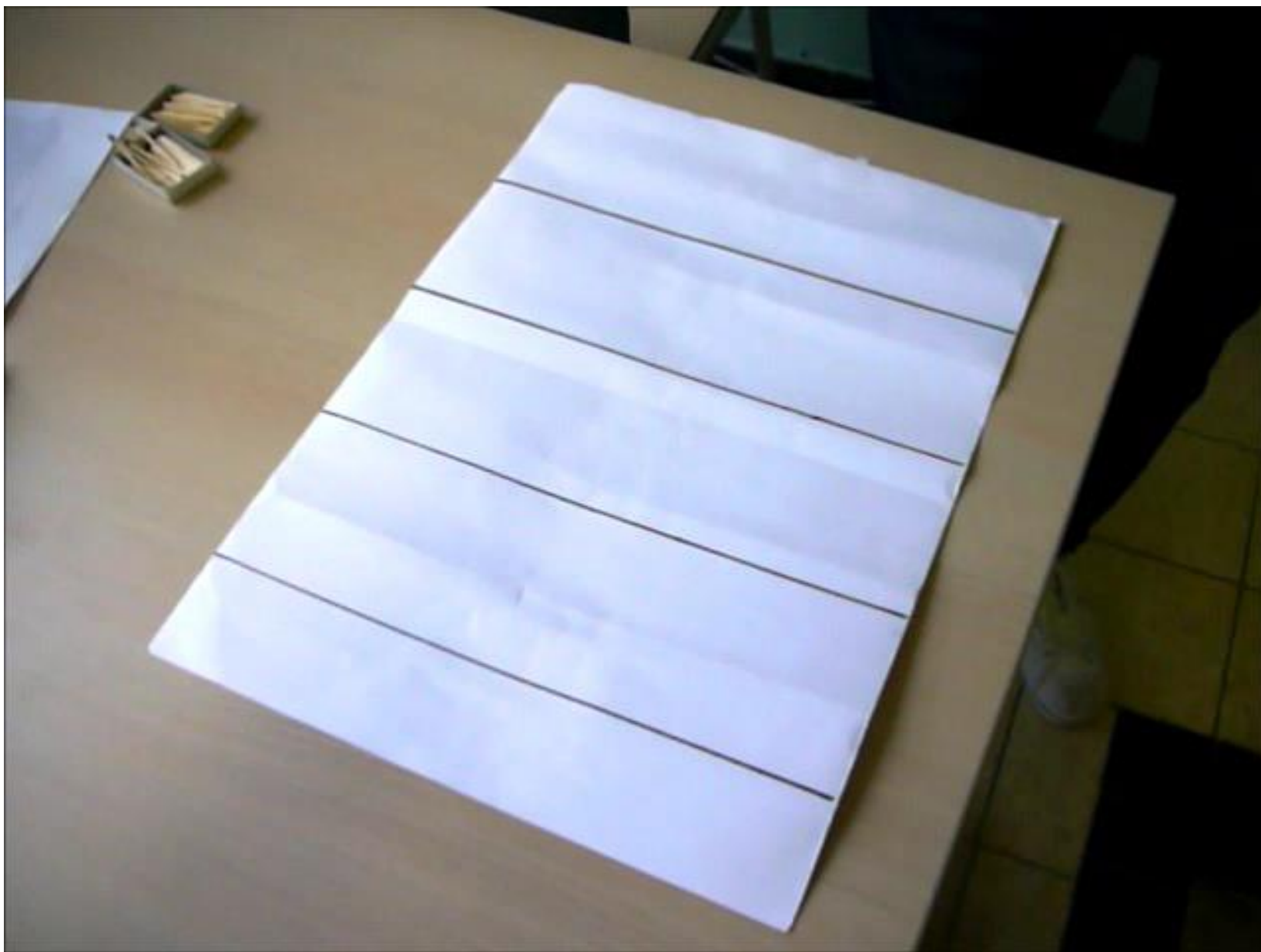
$$\mathbb{P}(\text{allumette intersecte une ligne}) = \frac{1}{\pi}$$

$$\pi \approx \frac{\text{nombre d'allumettes}}{\text{nombre qui intersecte}}$$

DES ALLUMETTES

Faisons-le tous ensemble!

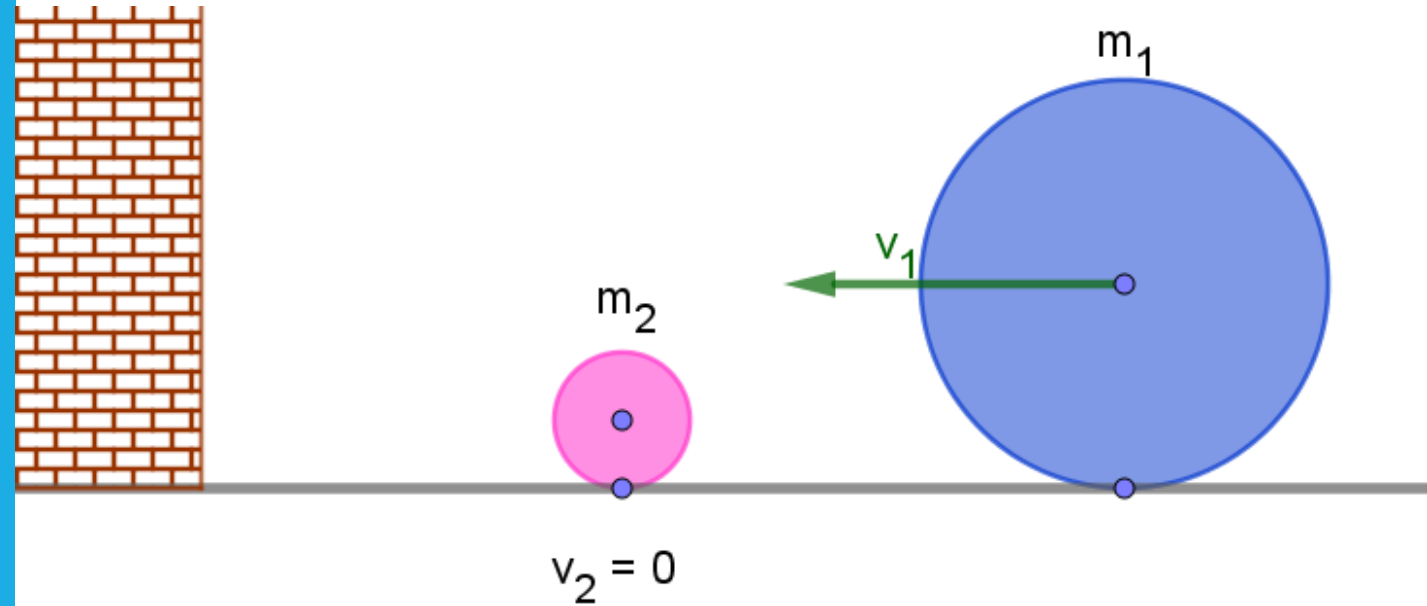




DES BOULES

Mesurer π en comptant le nombre de collisions.

Luc Van den Broeck
3Blue1Brown



La physique nous dit que

- La quantité de mouvement $m_1 v_1 + m_2 v_2$
- et l'énergie cinétique $\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2$

restent constantes.

DES BOULES

Point de coordonnées (v_1, v_2)

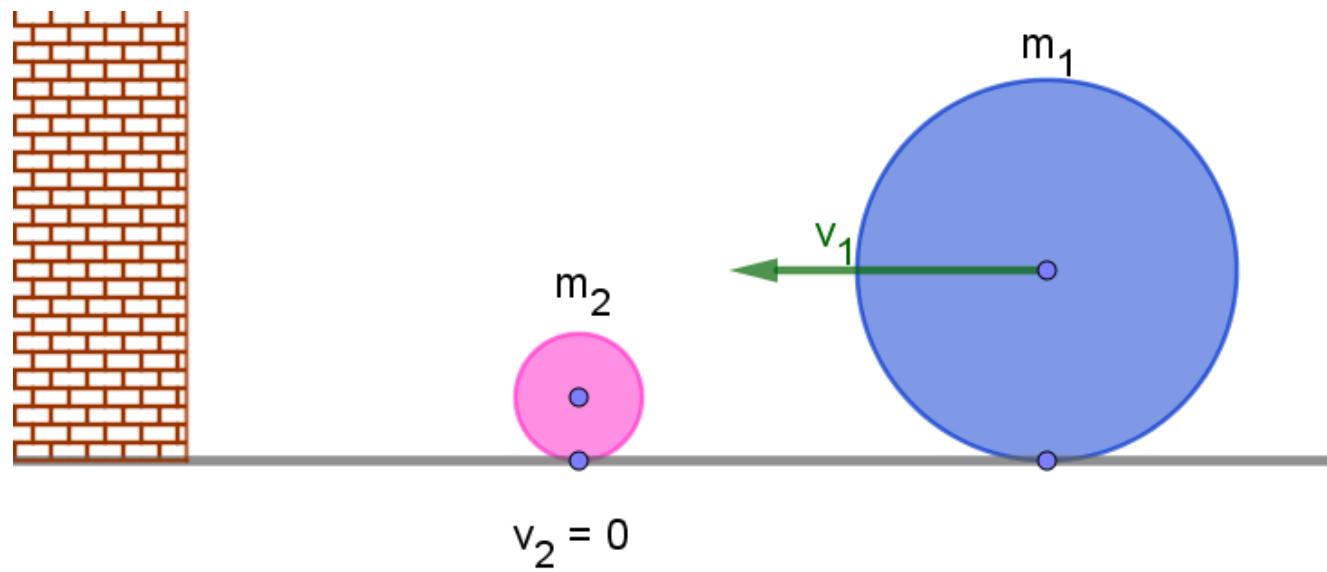
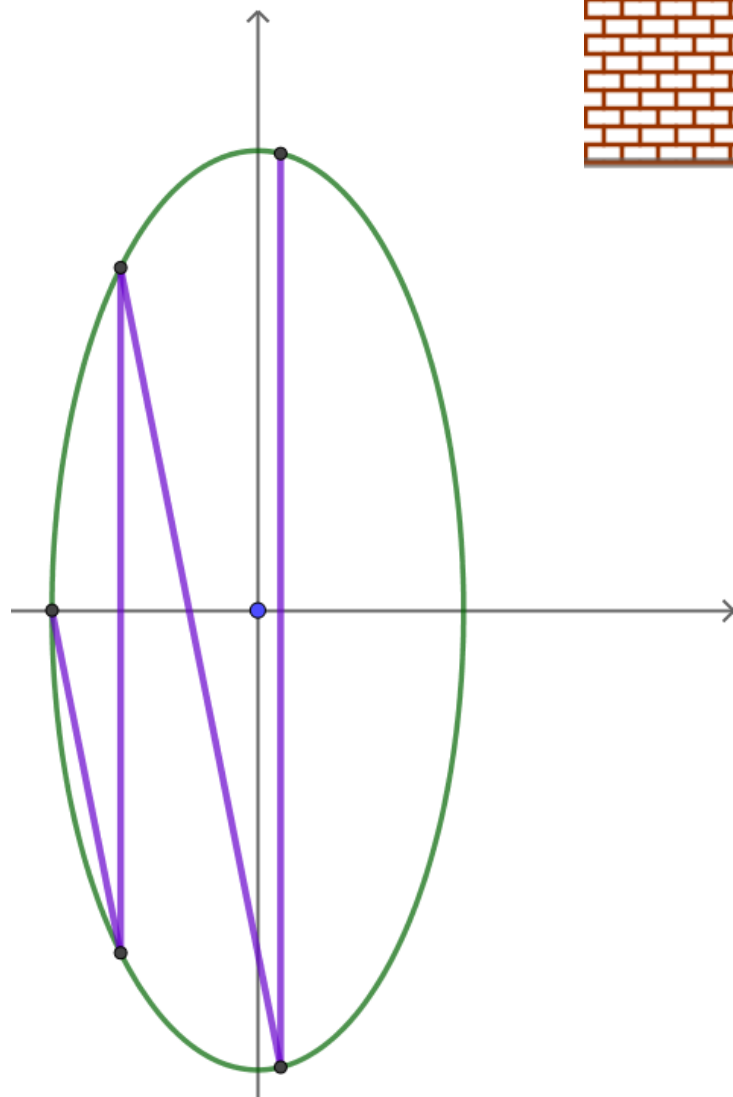
$m_1 v_1 + m_2 v_2$ constante $\Rightarrow$ point sur une droite.

$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2$ constante $\Rightarrow$ point sur une ellipse.

Le rôle du mur : il inverse le sens de v_2 .

L'ellipse reste la même; la droite change lorsqu'une boule cogne le mur. Elle garde sa pente.

DES BOULES



DES BOULES

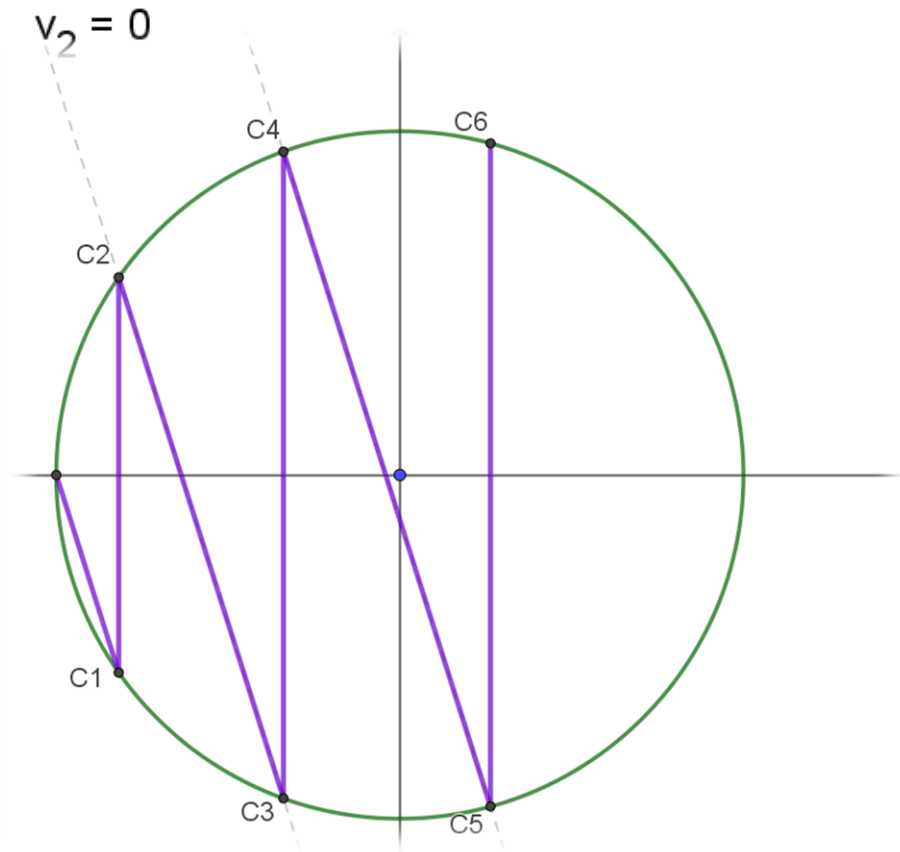
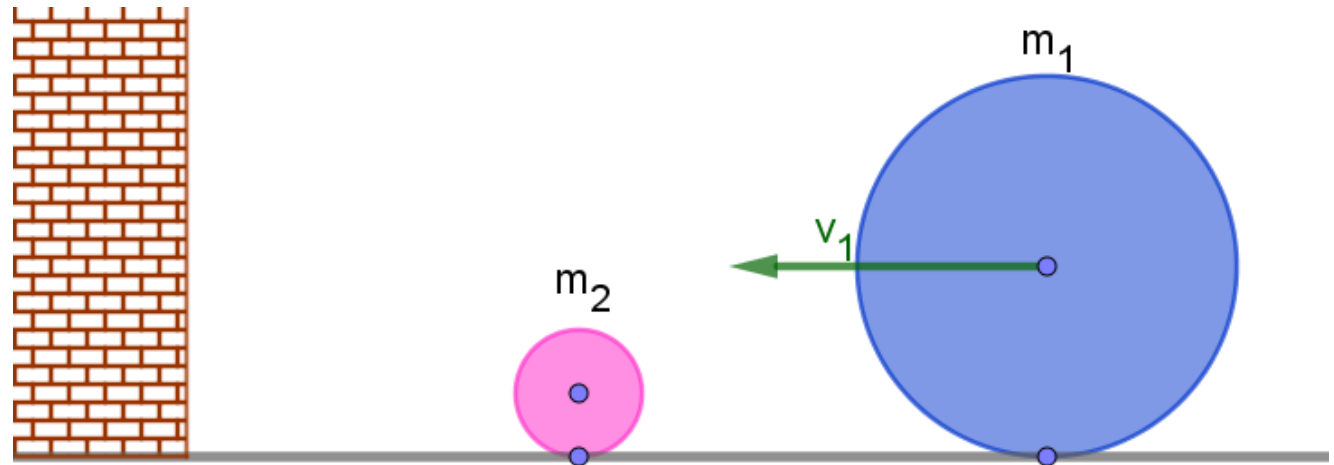
Plus à l'aise avec un cercle...

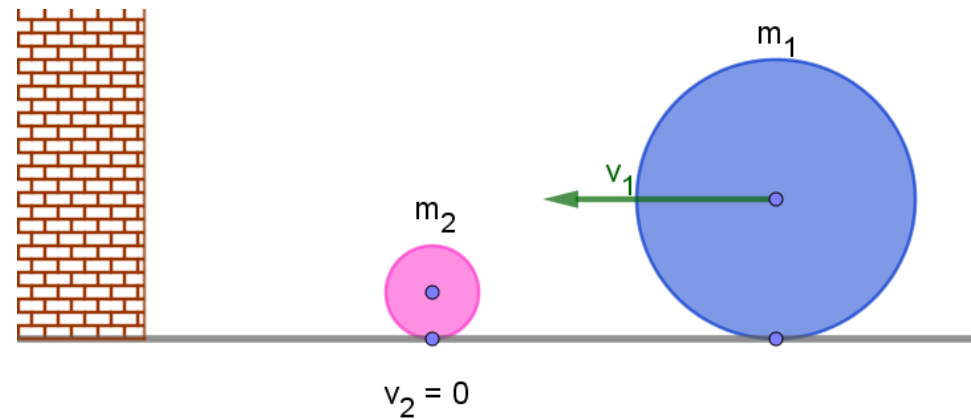
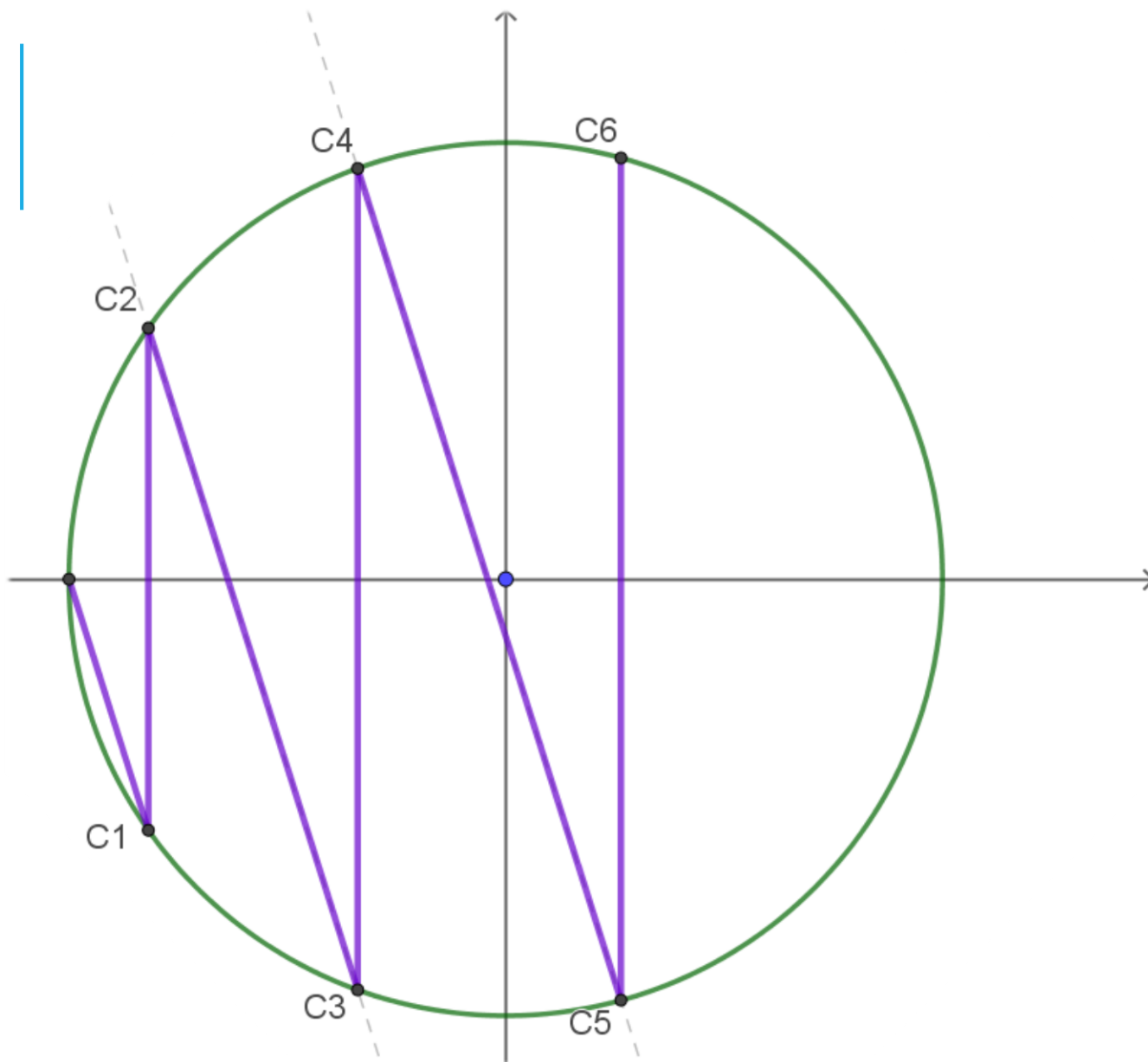
Point de coordonnées $(x, y) = (\sqrt{m_1}v_1, \sqrt{m_2}v_2)$

$$\frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 \text{ constante} \Leftrightarrow \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2 \text{ constante}$$

$$m_1v_1 + m_2v_2 \text{ constante} \Leftrightarrow \sqrt{m_1}x + \sqrt{m_2}y \text{ constante}$$

Droites parallèles de pente $-\sqrt{\frac{m_1}{m_2}}$





DES BOULES

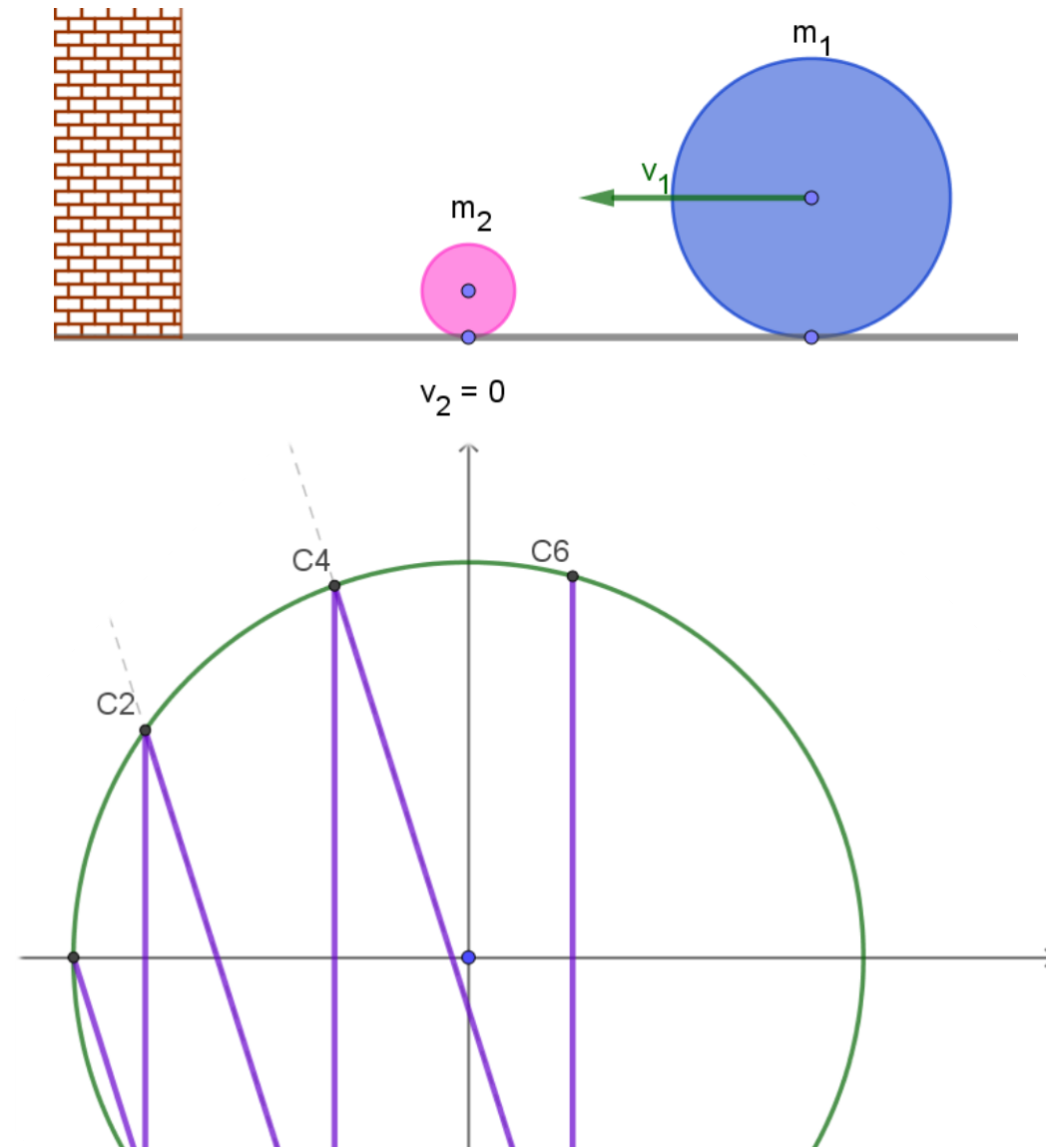
Quand est-ce que ça s'arrête ?

Lorsque la grosse boule s'échappe.

$$v_1 > v_2 > 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{\sqrt{m_1}} > \frac{y}{\sqrt{m_2}} > 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{\frac{m_2}{m_1}} x > y > 0$$



$$\Leftrightarrow (x, y) \text{ en dessous de la droite } y = \sqrt{\frac{m_2}{m_1}} x$$

DES BOULES

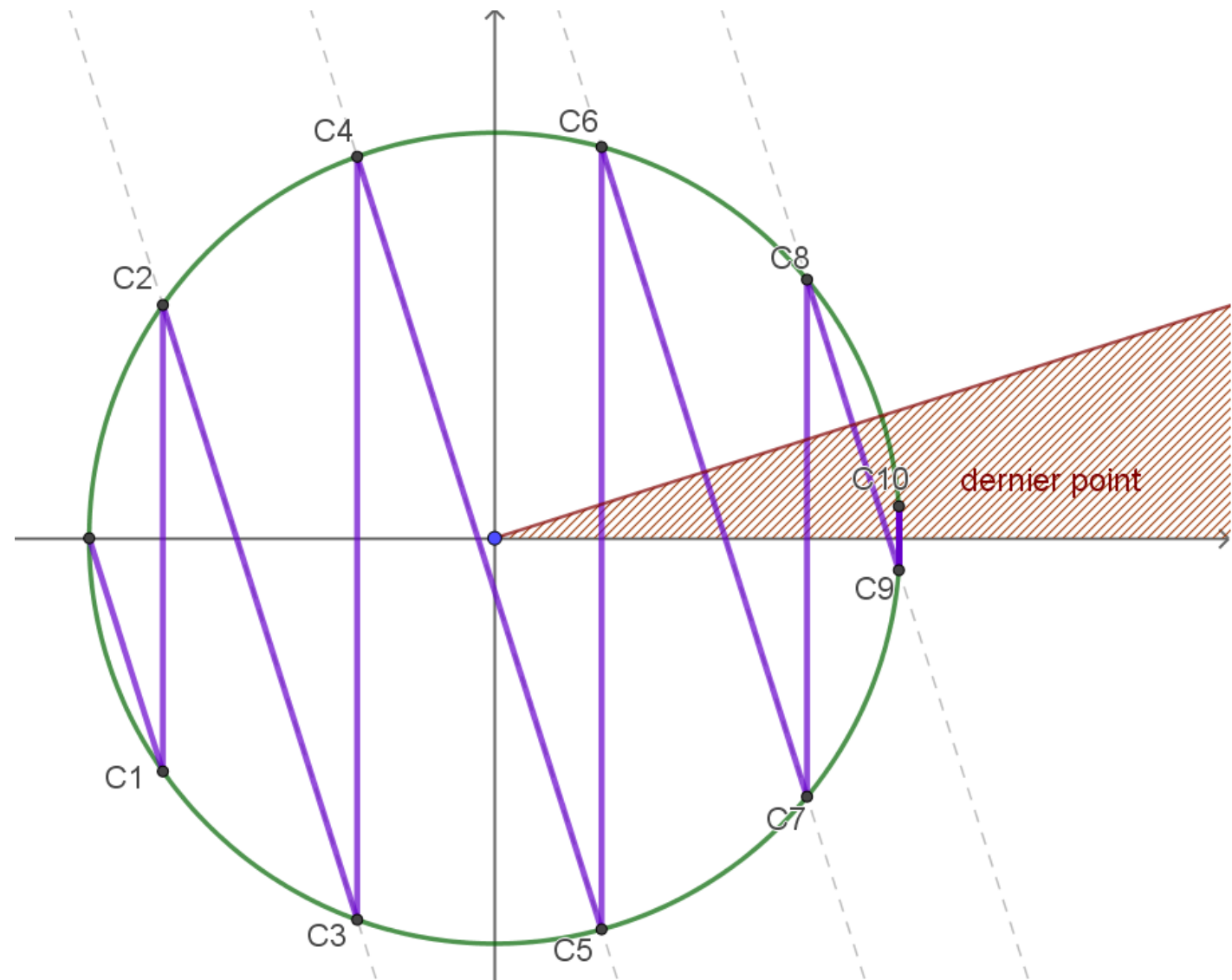
Quand est-ce que ça s'arrête ?

Lorsque la grosse boule s'échappe.

$$v_1 > v_2 > 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{\sqrt{m_1}} > \frac{y}{\sqrt{m_2}} > 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{\frac{m_2}{m_1}} x > y > 0$$



$$\Leftrightarrow (x, y) \text{ en dessous de la droite } y = \sqrt{\frac{m_2}{m_1}} x$$

DES BOULES

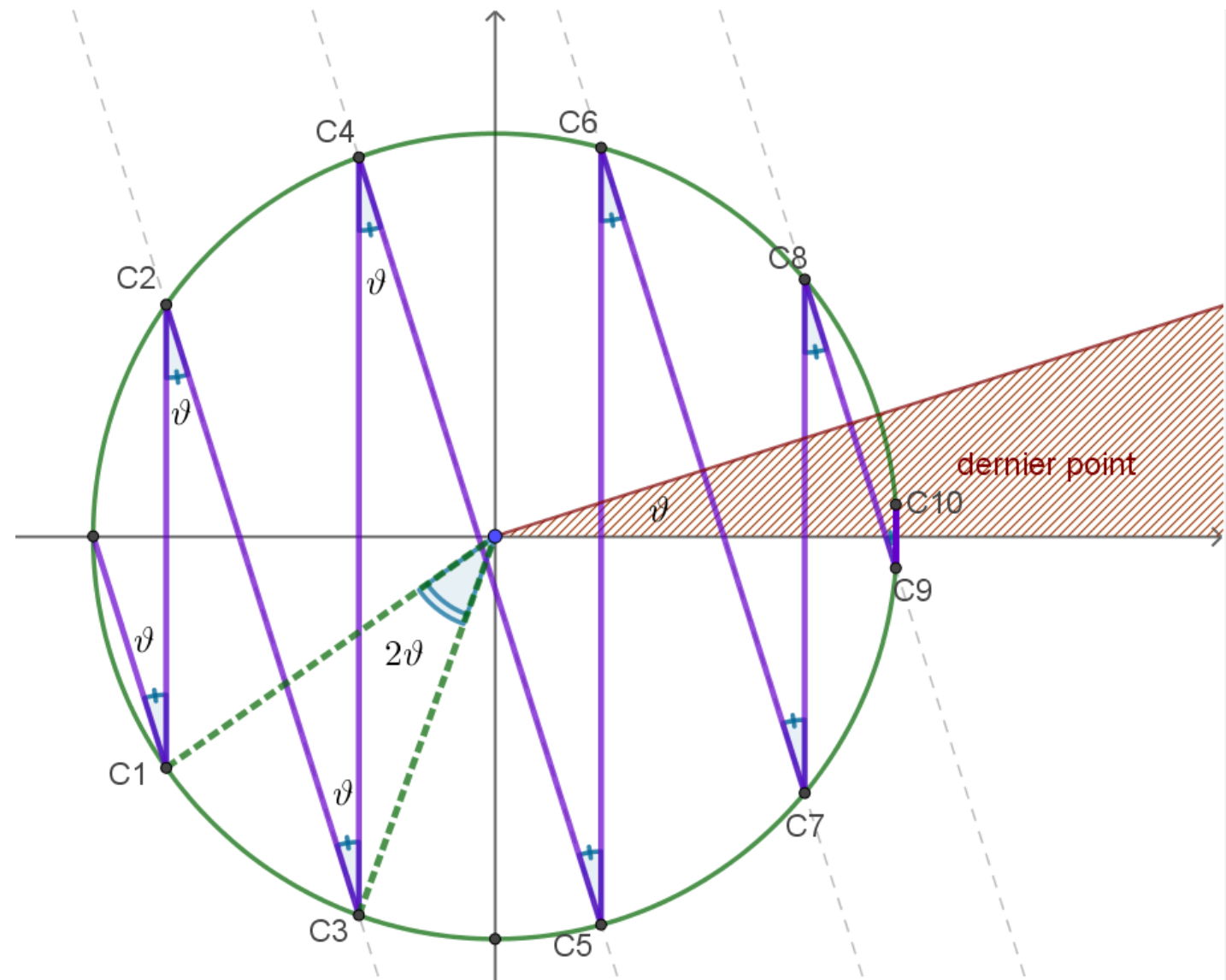
Nombre de collisions

= le nombre de points (sans le point du départ)

= le nombre d'arcs de cercle.

Angles sont égaux.

et valent la moitié des angles au centre.



DES BOULES

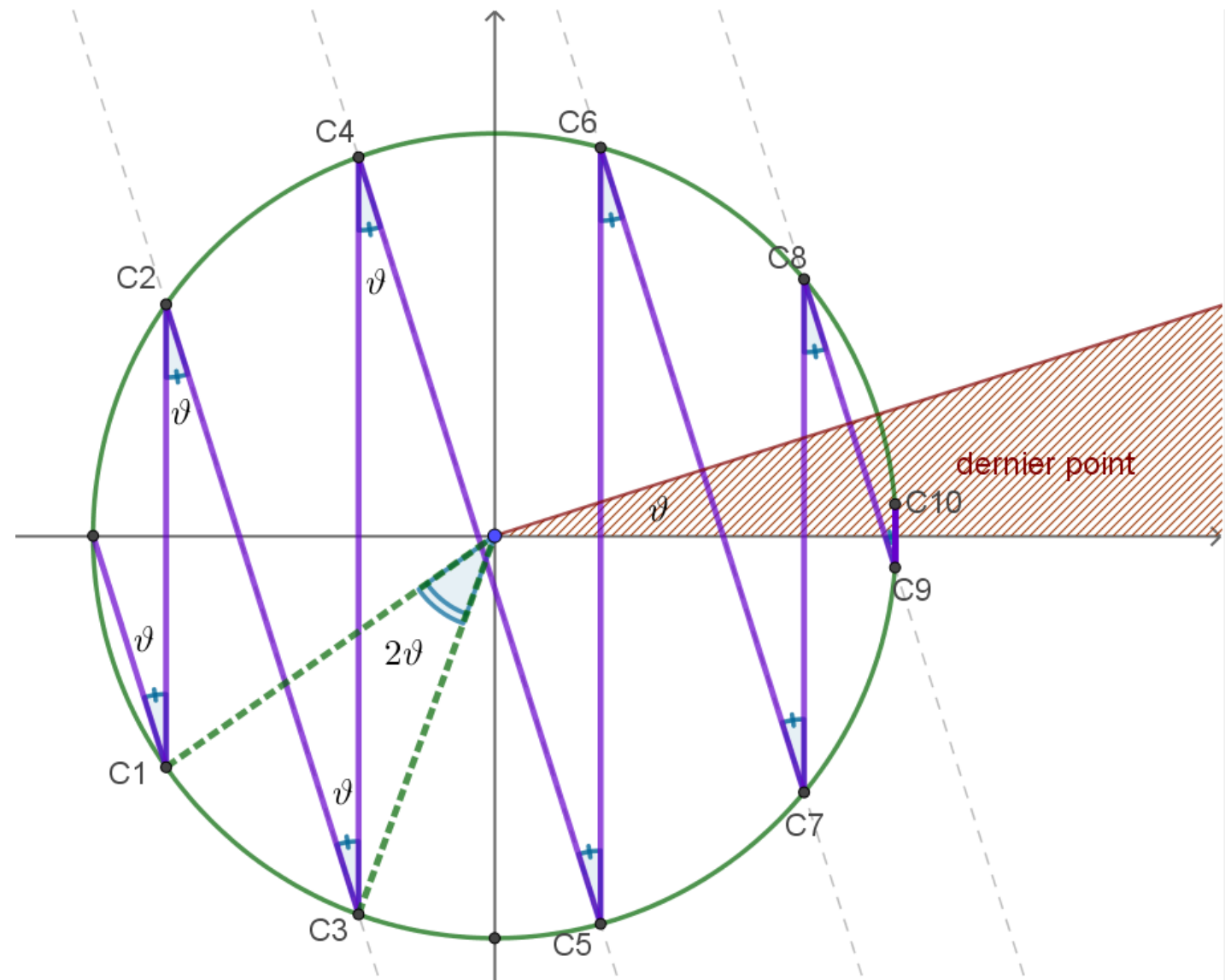
Nombre de collisions

= le nombre de points (sans le point du départ)

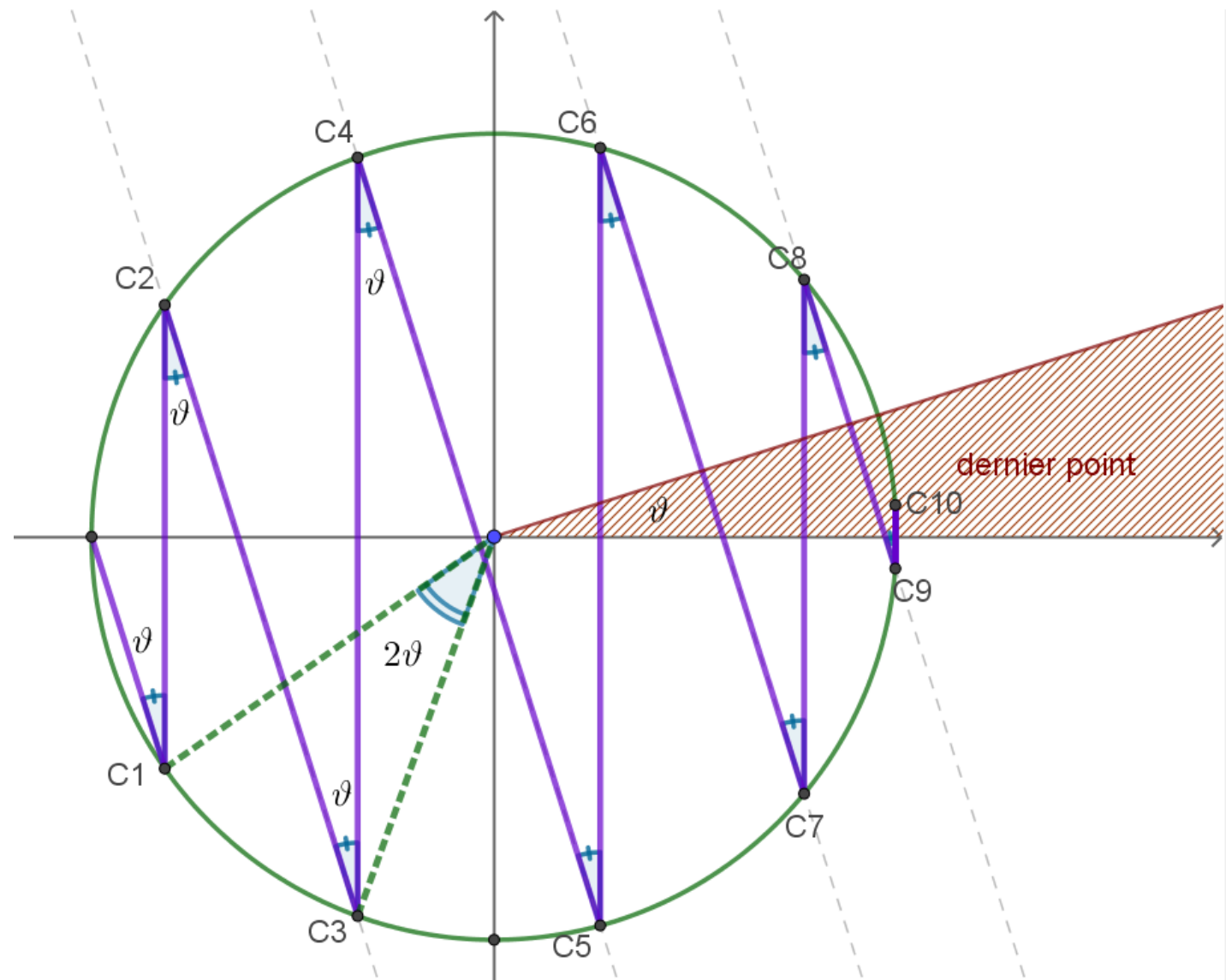
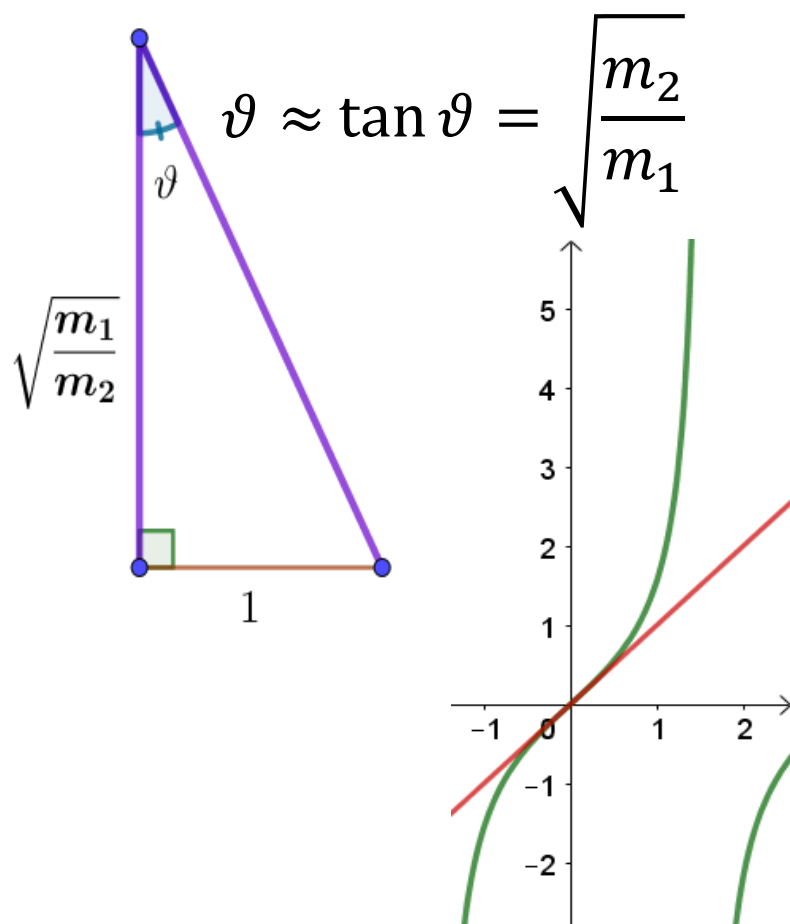
= le nombre d'arcs de cercle.

$$= \left\lfloor \frac{2\pi}{2\vartheta} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{\pi}{\vartheta} \right\rfloor$$

Calculons ϑ en fonction de m_1 et m_2 .



DES BOULES



$$\tan \vartheta = \vartheta + \frac{\vartheta^3}{3} + \frac{2\vartheta^5}{15} + \dots$$

DES BOULES

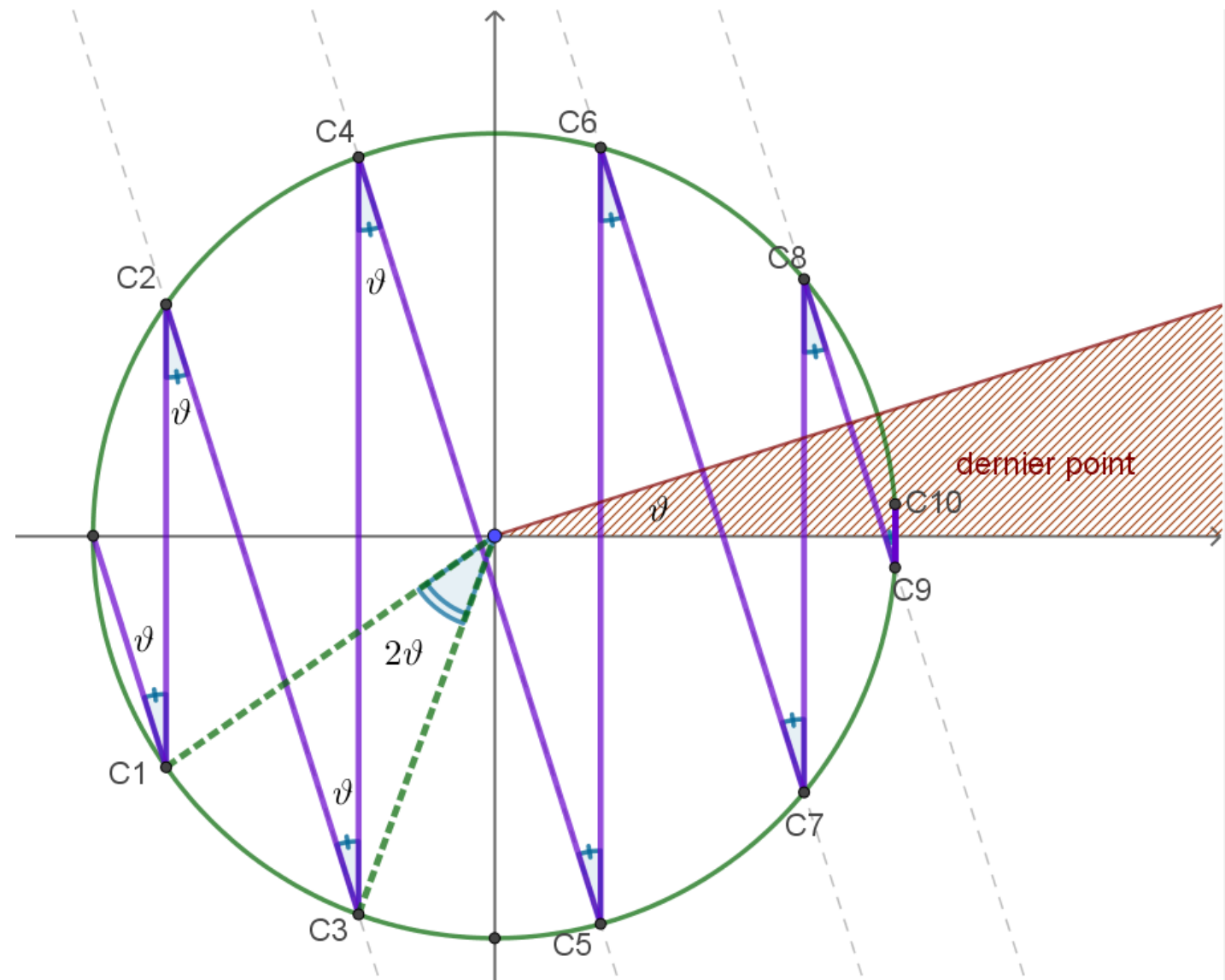
$$\text{Nombre de collisions} = \left\lfloor \frac{\pi}{\vartheta} \right\rfloor$$

$$\approx \frac{\pi}{\tan \vartheta} = \pi \sqrt{\frac{m_1}{m_2}}.$$

Pour compter les décimales de π ,

prenons $\frac{m_1}{m_2} = 100^k$.

Nombre de collisions $\approx \pi \cdot 10^k$.



DES BOULES

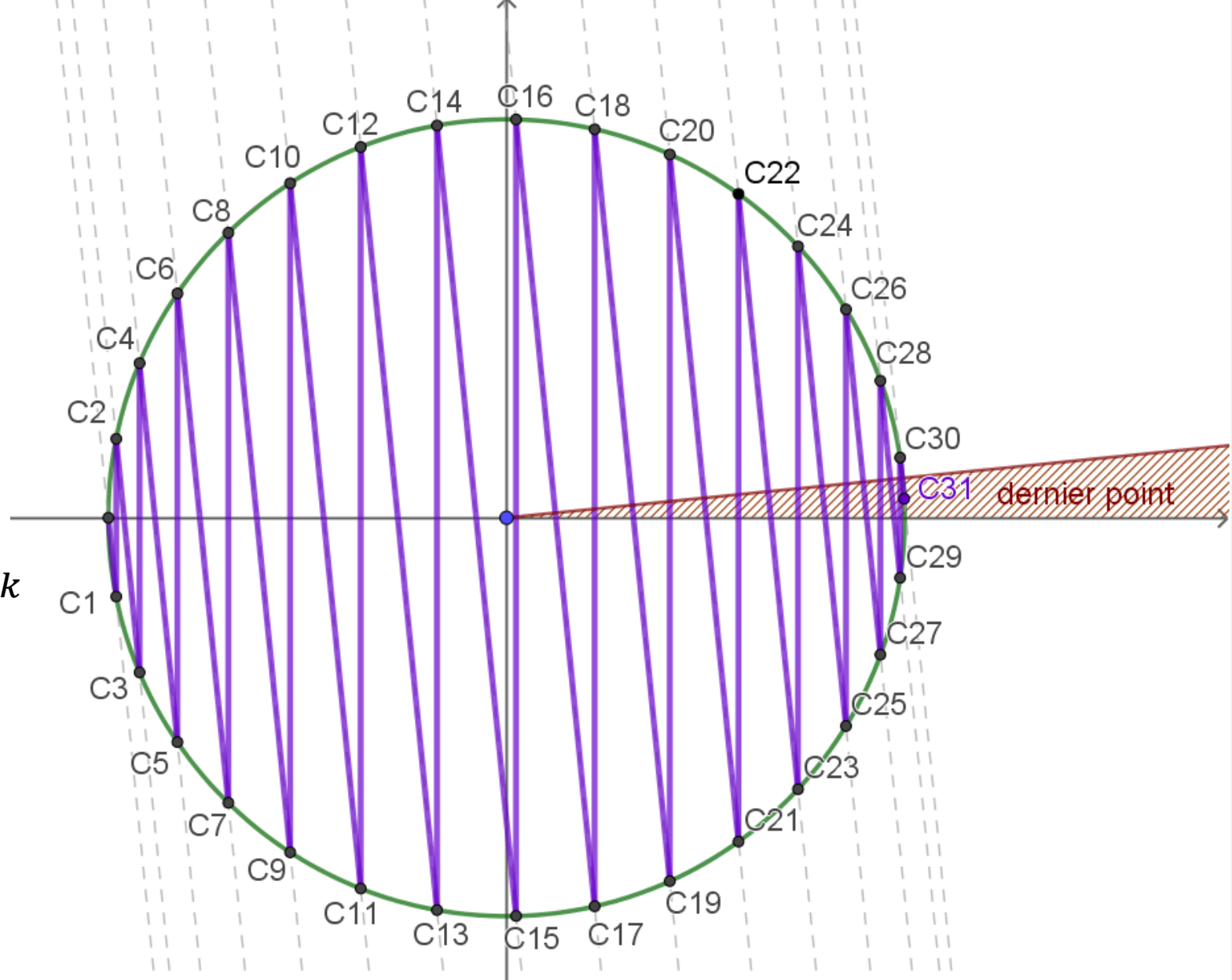
$$\frac{m_1}{m_2} = 100^k \Rightarrow$$

nombre de collisions $\approx \pi \cdot 10^k$

$k = 1$: on trouve 31 collisions,

donc $\pi \approx 3,1$.

Résultat formidable !



PIQUÉ DE...

Matt Parker, *Calculating pi with a pendulum* (film sur [Youtube](#))

Philippe Cara, Michel Roelens, *Installation et posters sur les aiguilles de Buffon*,
Nationale WiskundeDagen 2019

Martin Aigner (1998), *Proofs from the book*

Luc Van den Broeck (2015). Pi and the bouncing balls, *Uitwiskeling 3 1/4*, recension
d'un film sur [Numberphile](#)

Grant Sanderson (2018). *Part 1: The most unexpected answer to a counting puzzle.*
Part 2: So why do colliding blocks compute pi? Films sur [www.3blue1brown.com](#) et
Youtube

MERCI !

ALLONS, ON S'ABONNE ! WWW.UITWISKELING.BE

[HOME](#)[REDACTIONEEL](#)[SPINNENWEB](#)[ONDER DE LOEP](#)[BIBWIJZER](#)[ACTUALITEIT](#)[Archief doorzoeken](#)

Het kunstgalerijprobleem

Antonella Perucca 4 augustus 2019 0 0 0



Redeneren en bewijzen in de eerste graad



Begeleide onderzoeksoopdracht over machten en veeltermen



De (max, +)-algebra, Gerardo Soto y Koelemeijer



Teltechnieken



Het eerste deel is een lessenreeks over telproblemen voor leerlingen van de derde graad in een wiskundeluw richting. Veel aandacht gaat naar het analyseren van telproblemen al-

ABONNEES

Welkom **Michel Roelens**! Je kan je account en je Uitwiskeling-abonnement beheren via je [persoonlijke account-dashboard](#).