

Les dérivées au service de la gestion du risque de taux d'intérêt

Donatien Hainaut¹

¹UCLouvain, LSBA

Congrès SBPM, 28/8/19

Introduction



- ▶ Les mathématiques apportent à la finance et à l'actuariat les outils permettant d'appréhender les risques.

- ▶ A l'UCLouvain, le master en actuariat forme des spécialistes de la gestion quantitative des risques:

<https://uclouvain.be/fr/facultes/sc/lbsa/master-en-sciences-actuarielles.html>

- ▶ Notre master est classé 1er mondial par Eduniversal et 3 ième mondial en recherche par l'UNL.
- ▶ Parmi les disciplines enseignées aux étudiants, il y a la gestion du risque de taux.

Introduction

- ▶ Les états se financent en émettant de la dette obligataire (obligations linéaire d'état, OLO).
- ▶ Ces obligations sont achetées par:
 - ▶ des assureurs,
 - ▶ fonds de placement et de pension,
 - ▶ banques, banques centrales,
 - ▶ particuliers,
- ▶ et constituent pour la majorité des acheteurs un investissement à faible risque.

Introduction

- Pour la Belgique, voir www.debtagency.be :

Maturity Date	Coupon	ISIN Code	Nr	Net available (EUR)**
28/09/2019	3.00	BE0000327362	67*	10,355,500,000.00
28/09/2020	3.75	BE0000318270	58	19,226,000,000.00
28/09/2021	4.25	BE0000321308	61	16,530,000,000.00
28/03/2022	4.00	BE0000308172	48	14,024,000,000.00
28/09/2022	4.25	BE0000325341	65	16,176,000,000.00
⋮				
22/06/2045	3.75	BE0000331406	71	9,737,000,000.00
22/06/2047	1.60	BE0000338476	78	11,064,000,000.00
22/06/2050	1.70	BE0000348574	88	6,069,000,000.00
22/06/2057	2.25	BE0000343526	83	4,878,000,000.00
22/06/2066	2.15	BE0000340498	80	5,313,000,000.00
Tot. :				347,401,131,936.01

Introduction

- ▶ Cette présentation répondra aux questions suivantes:
 - ▶ Qu'est-ce qu'une obligation (OLO)?
 - ▶ Comment calculer le rendement pour un investisseur?
 - ▶ Ou se situe le risque?
 - ▶ Comment gérer le risque?

Obligations

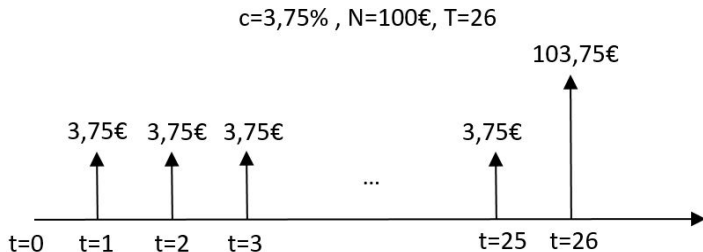
OLO

Une obligation est un titre de créance émis par un État pour financer ses dépenses.

- ▶ L'acquéreur d'une obligation recevra à l'**échéance**, notée T :
 - ▶ un montant à l'échéance, appelé "**principal**", noté N .
 - ▶ un **coupon annuel**, jusqu'à échéance,
 - ▶ Le coupon annuel est un pourcentage, c , du principal.
- ▶ **Exemple:** BE0000331406 (22/6/45) au 22/6/19, $c = 3.75\%$,
 $T = 26$ années, $N = 100\text{€}$

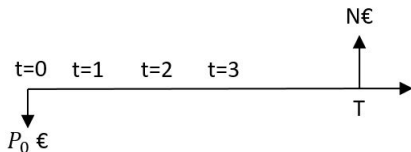
Obligations

- Vu du 22/6/19, Le titre BE0000331406 va dès lors délivrer les cash-flows suivant



Rendement actuariel

- ▶ Quel est le rendement (mesure de profitabilité) de cette obligation? Est-ce égal au coupon de 3.75%?
- ▶ Nous allons voir que le rendement est différent du coupon car il dépend du prix d'achat de ce titre. Mais d'abord, définissons le rendement actuariel, noté y .
- ▶ Afin de définir ce rendement, nous considérons d'abord une obligation **zéro coupon** (ZC). Cette obligation ne verse aucun coupon ($c = 0\%$).



Rendement actuariel

Rendement actuariel ZC

Le rendement actuariel, y , (exprimé en %) d'une obligation zéro coupon ($c = 0\%$), achetée au prix P_0 en $t = 0$ et délivrant N après T années, est le taux tel que

$$N = P_0(1 + y)^T,$$

ou encore

$$y = \left(\frac{N}{P_0} \right)^{\frac{1}{T}} - 1.$$

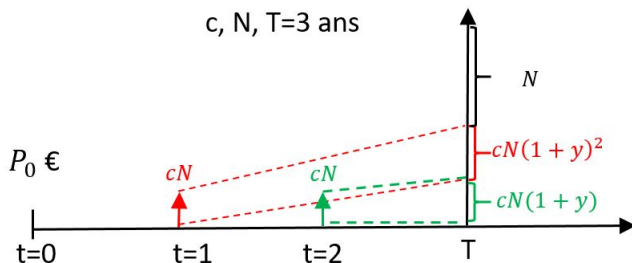
Rendement actuariel

- ▶ Il y a une relation bijective entre le taux actuariel d'une obligation zéro coupon (ZC) et son prix:
 - ▶ Connaissant son prix P_0 , nous déduisons son rendement y ,
 - ▶ et connaissant son rendement y , nous pouvons déduire son prix, P_0 .
- ▶ Le prix P_0 est également appelé “**valeur actualisée**” de N car si on investit P_0 au taux y pendant T années, on obtient $N\text{€}$

$$N = P_0(1+y)^T \quad P_0 = \underbrace{\frac{1}{(1+y)^T}}_{\text{facteur d'actualisation}} N$$

Rendement actuariel

- ▶ La définition du rendement actuariel global d'une obligation couponnée ($c > 0$), dépend du taux auquel les flux intermédiaires seront réinvestis.
- ▶ **Hypothèse** : les coupons sont réinvestis au même taux de rendement que l'obligation.



Rendement actuariel

Rendement actuariel

Le rendement actuariel, y , d'une obligation couponnée ($c > 0\%$, principal N , maturité T), de prix P_0 est tel que

$$P_0(1+y)^T = \underbrace{cN(1+y)^{T-1}}_{(1)} + \underbrace{cN(1+y)^{T-2}}_{(2)} + \dots + \underbrace{c}_{(3)} + \underbrace{N}_{(3)},$$

(1) Coupon versé en $t = 1$ et capitalisé durant $T - 1$ années au taux y

(2) Coupon versé en $t = 2$ et capitalisé durant $T - 2$ années au taux y

(3) Coupon/Principal versé en T

Rendement actuariel

De façon équivalente, le rendement actuariel est le taux d'actualisation tel que le prix P_0 est égal au total des flux actualisés:

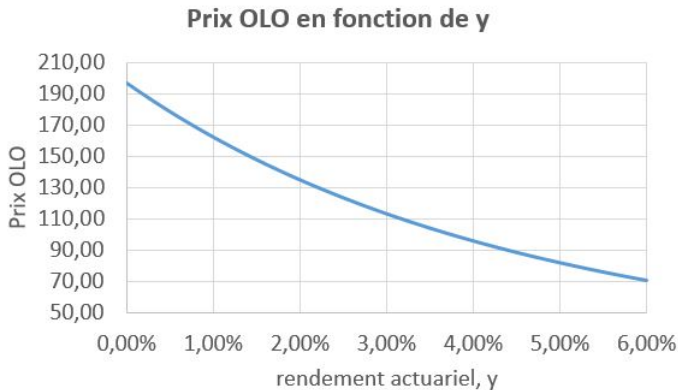
$$P_0 = \underbrace{Nc \sum_{t=1}^T \frac{1}{(1+y)^t} + \frac{N}{(1+y)^T}}_{f(y)}.$$

Le prix est donc une fonction de y . Pour $y > -1$, la valeur de l'OLO est une fonction positive décroissante et convexe de y car:

$$\begin{aligned}\frac{df(y)}{dy} &= -Nc \sum_{t=1}^T \frac{t}{(1+y)^{t+1}} - \frac{NT}{(1+y)^{T+1}} < 0 \\ \frac{d^2f(y)}{dy^2} &= Nc \sum_{t=1}^T \frac{t(t+1)}{(1+y)^{t+2}} + \frac{NT(T+1)}{(1+y)^{T+2}} > 0\end{aligned}$$

Rendement actuariel

Exemple: BE0000331406 (22/6/45), $c = 3.75\%$, $N = 100\text{€}$



Rendement actuariel

- ▶ En pratique, les prix auxquels s'échangent les obligations dans les marchés cotés sont reportés en temps réel sur e.g. Bloomberg, Reuters ou en différé sur e.g. [euronext.com](https://www.euronext.com).
- ▶ **Exemple:** le 20/8/19, le prix P_0 de l'OLO BE0000331406 (22/6/45), $c = 3.75\%$, $T = 26$ années pour un principal de $N = 100\text{€}$ est 166.79€.



- ▶ A partir de ce prix, les investisseurs calculent numériquement le taux de rendement y tel que $P_0 = f(y)$.

Rendement actuariel

- ▶ A partir du prix coté P_0 d'une OLO (c, N, T) , les investisseurs souhaitent calculer le taux y solution de

$$0 = f(y) - P_0$$

- ▶ Si $T \notin \mathbb{N}$, il n'existe pas de solution analytique simple pour y . Dès lors, le rendement est calculé à l'aide de l'algorithme de Newton-Raphson.
- ▶ Celui-ci consiste à remplacer $f(y)$ par un développement de Taylor d'ordre 1 autour de y_0 :

$$0 = f(y_0) + (y - y_0) f'(y_0) + \mathcal{O}(y^2) - P_0$$

- ▶ En première approximation, nous avons:

$$y \approx y_1 = y_0 + \frac{P_0 - f(y_0)}{f'(y_0)}$$

Rendement actuariel

- ▶ En répétant cette opération, nous avons l'algorithme de Newton-Raphson:

Newton-Raphson

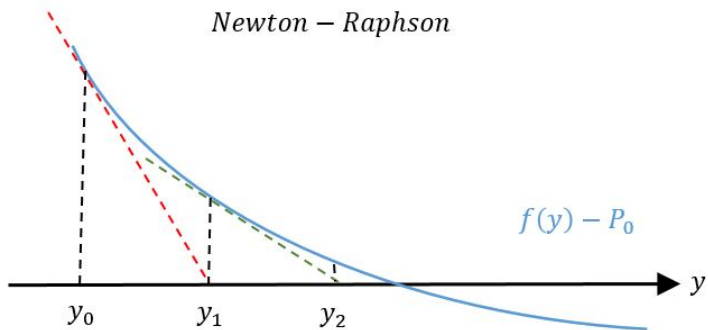
Choisir un $y_0 \in (-1, +\infty)$ et calculer pour $k = 1, 2, \dots$

$$y_k = y_{k-1} + \frac{P_0 - f(y_{k-1})}{f'(y_{k-1})}$$

jusqu'à la précision ϵ souhaitée ($|y_k - y_{k-1}| \leq \epsilon$).

- ▶ La dérivée étant non-nulle, la convergence est au moins quadratique.

Rendement actuariel



Rendement actuariel

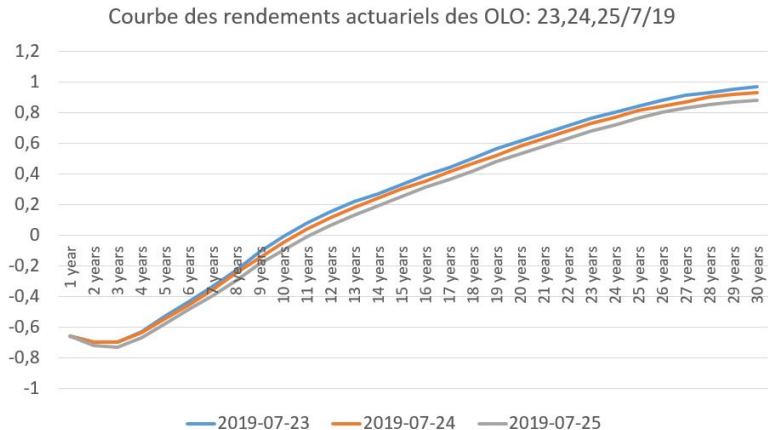
- ▶ **Exemple:** le 20/8/19, le prix P_0 de l'OLO BE0000331406 (22/6/45), $c = 3.75\%$, $T = 26$ années pour un principal de $N = 100\text{€}$ est

$$P_0 = 166.79$$

et après calcul le rendement actuariel est de $y = 0.86\%$, qui est clairement inférieur au coupon.

- ▶ Les banques centrales et les marchés calculent régulièrement la courbe des rendements (y_{1an} , y_{2ans} , ... y_{30ans}) des obligations de maturité 1, 2, 3, ... 30 ans (voir nbb.be). Cette courbe fluctue au cours du temps.

Rendement actuariel



Risque de taux

- ▶ Les investisseurs considèrent souvent les obligations comme des placements sans risque, car les flux (coupons et principal) sont garantis et a priori indépendants des fluctuations des marchés financiers...
- ▶ Cependant, l'investisseur en OLO fait face **au risque de taux**: les taux de rendement fluctuent et en cas de revente de l'OLO avant terme, le prix de vente peut être très désavantageux.
- ▶ Le rendement réalisé à terme est dès lors aléatoire et non sans risque!

Risque de taux

Exemple: Nous achetons une OLO 10 ans, $c = 2\%$, $N = 100$. Si le rendement à 10 ans est $y_{10ans} = 1\%$, le prix est

$$P_0 = 2 \sum_{t=1}^{10} \frac{1}{(1.01)^t} + \frac{100}{(1.01)^{10}} = 109.47$$

Quelques minutes après, nous la revendons. 1) Si le rendement à 10 ans, y_{10ans} , est **monté à 1.5%**, le prix est:

$$P_1 = 2 \sum_{t=1}^{10} \frac{1}{(1.015)^t} + \frac{100}{(1.015)^{10}} = 104.61$$

Le rendement réalisé est dans ce scénario est:

$$\frac{104.61 - 109.47}{109.47} = -4.44\%$$

Risque de taux

Exemple (suite): 2) Si le rendement à 10 ans, y_{10ans} , est tombé à 0.5%, le prix est:

$$P_1 = 2 \sum_{t=1}^{10} \frac{1}{(1.005)^t} + \frac{100}{(1.005)^{10}} = 114.60$$

Le rendement réalisé est dans ce scénario est:

$$\frac{114.60 - 109.47}{109.47} = 4.68\%$$

Cet aléa sur le rendement réalisé est appelé risque de taux.

Duration

En pratique, les gestionnaires de portefeuille évaluent le risque de taux par la sensibilité relative du prix de l'OLO à une variation infinitésimale de son taux actuariel. Nous appelons cette mesure:

Duration modifiée

Opposé de la dérivée première du prix par rapport au rendement actuariel, rapportée au prix $P_0 = f(y)$:

$$D^{mod} := -\frac{\frac{df(y)}{dy}}{P_0} = \frac{\sum_{t=1}^T \frac{cNt}{(1+y)^{t+1}} + \frac{NT}{(1+y)^{T+1}}}{\sum_{t=1}^T \frac{cN}{(1+y)^t} + \frac{N}{(1+y)^T}}.$$

Duration

Si les taux de rendement actuariel evolue de y à l'instant 0 vers $y + dy$ en $t = dt$, le prix passe de

$$P_0 = f(y) \rightarrow P_{dt} = f(y + dy).$$

Le prix P_{dt} peut rapidement être approché par un développement

$$\begin{aligned} P_{dt} &= f(y) + f'(y)dy + \mathcal{O}(dy^2) \\ &\approx P_0 - P_0 D^{mod} dy \end{aligned}$$

Et la variation relative est de valeur consecutive à la hausse des taux est

$$\frac{P_{dt} - P_0}{P_0} = -D^{mod} dy$$

Si une OLO a une duration de 7.51, une hausse des taux de 1% va entraîner une perte de valeur proche de 7.51%!

Duration

Exemple (suite): OLO 10 ans, $c = 2\%$, $N = 100$. Si le rendement à 10 ans est $y_{10ans} = 1\%$, le prix est $P_0 = 109.47$ et la duration modifiée

$$D^{mod} = \frac{1}{109.47} \left(2 \sum_{t=1}^{10} \frac{t}{(1.01)^{t+1}} + \frac{10 \cdot 100}{(1.01)^{11}} \right) = 9.12$$

Scénario 1) A l'aide de la duration mod., une hausse des taux de 0.5% entraîne une perte d'environ: $9.12 \times 0.5\% = 4.56\%$ (perte réelle 4.44%)

Scénario 2) A l'aide de la duration mod., une baisse des taux de 0.5% entraîne un gain d'environ: $9.30 \times 0.5\% = 4.56\%$ (gain réel 4.68%)

Duration

- ▶ La **duration modifiée** s'interprète facilement comme une durée (d'où son appellation) et est proche de la **duration de Macaulay**, développée par Frederick Robertson Macaulay (1882 – 1970), économiste Canadien.
- ▶ L'objectif de la duration de Macaulay est de quantifier la **durée de vie moyenne** de flux financiers. Pour une OLO, nous avons:

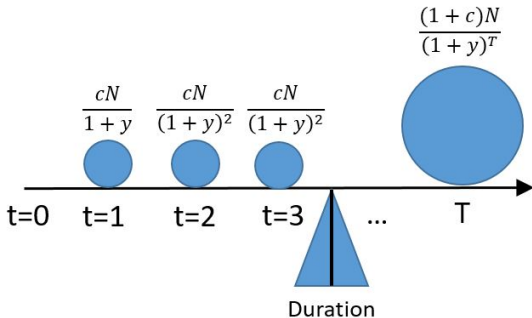
Duration Macaulay

Somme des flux actualisés pondérés par leur maturité, rapportée à la valeur actualisée totale des flux:

$$D^{mac} := \frac{1}{P_0} \left(\sum_{t=1}^T \frac{cN \textcolor{red}{t}}{(1+y)^t} + \frac{N \textcolor{red}{T}}{(1+y)^T} \right).$$

Duration

- La duration Macaulay s'exprime en années et s'interprète comme **le centre de gravité des flux actualisés!**



Duration

Relation D^{mod} et D^{mac}

La duration de Macaulay est fort proche de la duration modifiée en dépit du fait que ces mesures sont différentes:

$$D^{mod} = \frac{1}{1+y} D^{mac}$$

Les taux de rendement interne étant proche de zéro, $D^{mod} \approx D^{mac}$. En pratique, les gestionnaires interprète à la fois D^{mod} comme une durée de vie moyenne du titre et comme sa sensibilité par rapport aux taux.

Duration

- ▶ Soit un portefeuille de n obligations de caractéristiques (c_k, N_k, T_k) pour $k = 1, \dots, n$
- ▶ Duration et prix $k^{\text{ème}}$ obligation: D_k^{mod} et P_k .

Duration portefeuille

Peut être approchée par la somme pondérée des durations individuelles:

$$D_{\text{ptf}}^{\text{mod}} := \frac{\sum_{k=1}^n P_k D_k^{\text{mod}}}{P_0}$$

où $P_0 = \sum_{k=1}^n P_k$ est la valeur du portefeuille.

- ▶ Remarque: une alternative consiste à calculer le rendement actuariel global et calculer la duration du ptf comme s'il s'agissait d'une seul titre.

Convexité

Les gestionnaires de portefeuille calculent également une quantité proportionnelle à la dérivée seconde du prix par rapport au rendement.

Convexité

Dérivée seconde du prix par rapport au rendement actuariel, rapportée au prix $P_0 = f(y)$:

$$C := \frac{\frac{d^2 f(y)}{dy^2}}{P_0} = \frac{\sum_{t=1}^T \frac{cNt(t+1)}{(1+y)^{t+2}} + \frac{NT(T+1)}{(1+y)^{T+2}}}{\sum_{t=1}^T \frac{cN}{(1+y)^t} + \frac{N}{(1+y)^T}}.$$

La convexité peut s'interpréter comme une mesure de dispersion des cash-flows autour de la duration.

Convexité

Si les taux de rendement actuariel évolue de y à l'instant 0 vers $y + dy$ en $t = dt$, le prix passe de

$$P_0 = f(y) \rightarrow P_{dt} = f(y + dy).$$

Le prix P_{dt} peut rapidement être approché par un développement d'ordre 2

$$\begin{aligned} P_{dt} &\approx f(y) + f'(y)dy + \frac{1}{2}f''(y)(dy)^2 \\ &\approx P_0 - P_0 D^{mod} dy + \frac{1}{2}P_0 \textcolor{red}{C} (dy)^2 \end{aligned}$$

Et la variation relative (%) est de valeur consecutive à la hausse des taux est

$$\frac{P_{dt} - P_0}{P_0} = -D^{mod} dy + \frac{1}{2}\textcolor{red}{C} (dy)^2$$

Duration

Exemple (suite): OLO 10 ans, $c = 2\%$, $N = 100$. Rendement à 10 ans est $y_{10ans} = 1\%$, et le prix est $P_0 = 109.47$ et la duration modifiée

$$D^{mod} = 9.12 \quad C = 96.471$$

Analyse de scénarios:

	Gain/perte relatif	Estimation avec	
		Duration	Dur. et Conv.
Hausse $y + 0.5\%$	-4.440%	-4.558%	-4.437%
Baisse $y - 0.5\%$	+4.681%	+4.558%	+4.679%

Convexité

- ▶ Soit un portefeuille de n obligations de caractéristiques (c_k, N_k, T_k) pour $k = 1, \dots, n$
- ▶ Convexité et prix $k^{\text{ème}}$ obligation: C_k et P_k .

Convexité portefeuille

Peut être approchée par la somme pondérée des convexités individuelles:

$$C_{ptf} := \frac{\sum_{k=1}^n P_k C_k}{P_0}$$

où $P_0 = \sum_{k=1}^n P_k$ est la valeur du portefeuille.

- ▶ Remarque: une alternative consiste à calculer le rendement actuariel global et calculer la convexité du ptf comme s'il s'agissait d'une seul titre.

Gestion des risques

- ▶ Que faire si un gestionnaire d'un portefeuille d'obligations ne souhaite pas perdre plus de l % de la valeur du portefeuille P_0 en case de hausse des taux de $+1\%$?
- ▶ Solution; choisir d'obligations de caractéristiques (c_k, N_k, T_k) pour $k = 1, \dots, n$ tel que

$$-D_{ptf}^{mod} (0.01) + \frac{1}{2} C_{ptf} (0.01)^2 \leq l$$

Propriété

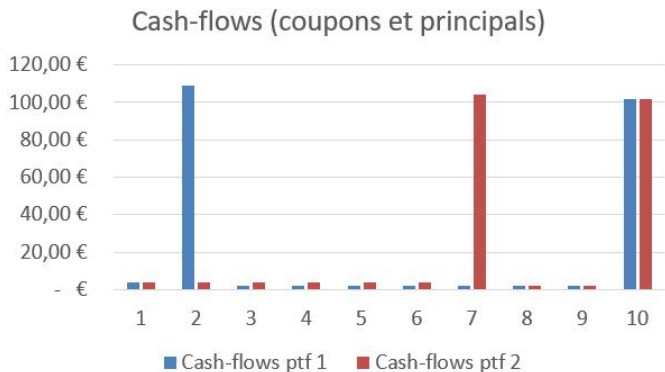
Au plus la convexité d'un portefeuille est élevée, au moins la perte causée par une hausse des taux sera importante!

Gestion des risques

- Exemple: 2 portefeuilles de même valeur,

	N	Maturité	Coupon	Prix
OLO 1	104.67	2	2%	106.73
OLO 2	100.00	10	2%	109.47
Ptf 1				216.20
OLO 1	100.00	7	2%	106.73
OLO 2	100.00	10	2%	109.47
Ptf 1				216.20

Gestion des risques



Gestion des risques

Bien qu'ayant la même valeur, le portefeuille 1 est moins risqué:

	P_0	D^{mod}	C	Perte si $y + 0.5\%$
Ptf 1	216.20	5.58	51.71	-2.73%
Ptf 2	216.20	7.85	73.97	-3.83%

Conclusions

- ▶ Les dérivées sont massivement utilisées en finance pour **mesurer** et **contrôler** l'exposition aux facteurs de risque, ici les taux d'intérêts.
- ▶ Pour de nombreux produits financiers complexes (Options etc,...), il n'y a pas d'alternative à l'utilisation d'un développement de Taylor pour approcher leur valeur après changement des conditions de marché car le recalcul précis consomme trop de ressources informatiques
- ▶ Exemple: en banque, chaque nuit recalcul de la valeur de tous les actifs tradés (e.g. Belfius +/- 40 Milliards) dans e.g. 100 000 scénarios de marché.
- ▶ Les dérivées partielles des prix d'options par rapport aux facteurs de risques sont appelés les grecques (delta, gamma, vega, rho, theta,...)