

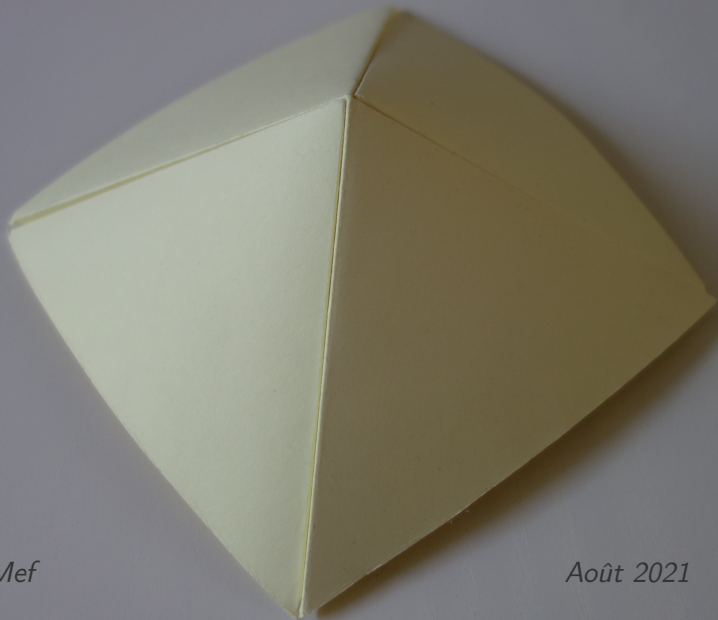
Pliages, A4 et géométrie

Laure Ninove

GEM
Cripedis
UCLouvain
Haute École Vinci

46^e congrès de la SBPMef

Août 2021



Au menu

Rectangle A4 et mathématiques du quotidien

Construction d'un rectangle

Autour du cube

Autour de l'octogone régulier

Un origami traditionnel

Rectangle A4 et mathématiques du quotidien

Les formats de papier A : une grande famille

- ▶ On part du A0, de dimensions $84,1\text{ cm} \times 118,9\text{ cm}$,
- ▶ puis on obtient deux A1 en coupant la feuille en deux,
- ▶ puis des A2 en coupant encore en deux, et ainsi de suite.
- ▶ Le format A4 est aujourd'hui omniprésent : blocs de feuilles, revues, brochures, etc.

A0

A0

A0

A1

A1

A0

A2

A2

A2

A2

A0

A3

A3

A3

A3

A3

A3

A3

A3

A0

A4

A4

A4

A4

A4

A4

A4

A4

A4

A4

A4

A4

A4

A4

A4

A4

A0

A5

A5

A5

A5

A5

A5

A5

A5

A5

A5

A5

A5

A5

A5

A5

A5

A5

A5

A5

A5

A5

A5

A5

A5

A5

A5

A5

A5

A5

A5

A5

A5

A0

A2

A4

A5

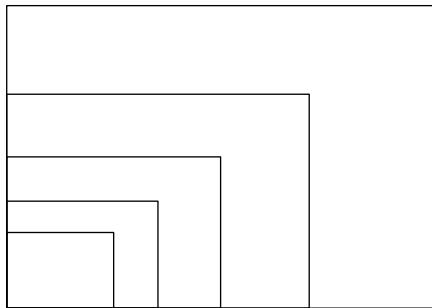
A3

A0

A1

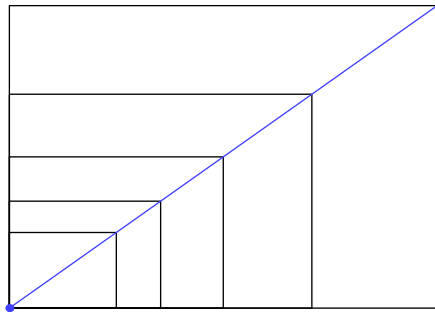
Une propriété géométrique

- Prenons des rectangles A4, A5, ..., A8 et disposons-les comme ceci :



Une propriété géométrique

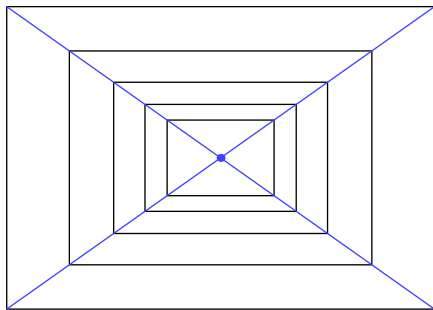
- Prenons des rectangles A4, A5, ..., A8 et disposons-les comme ceci :



- Les sommets sont alignés !
- Les rectangles A4, A5, etc. sont tous **semblables**.

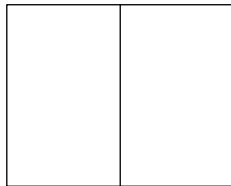
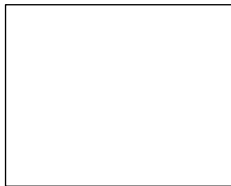
Une propriété géométrique

- On aurait aussi pu les disposer comme ceci :

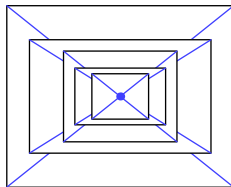
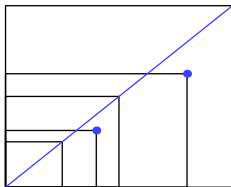


Une propriété qui n'est pas partagée par d'autres formats de rectangles

- Prenons un rectangle d'un autre format.
- Construisons des rectangles par découpages en deux successifs.



- Les différents rectangles obtenus ne sont pas semblables.



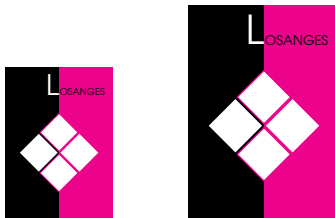
Une propriété bien utile au quotidien

Les rectangles de la famille de formats A ont donc la propriété suivante :

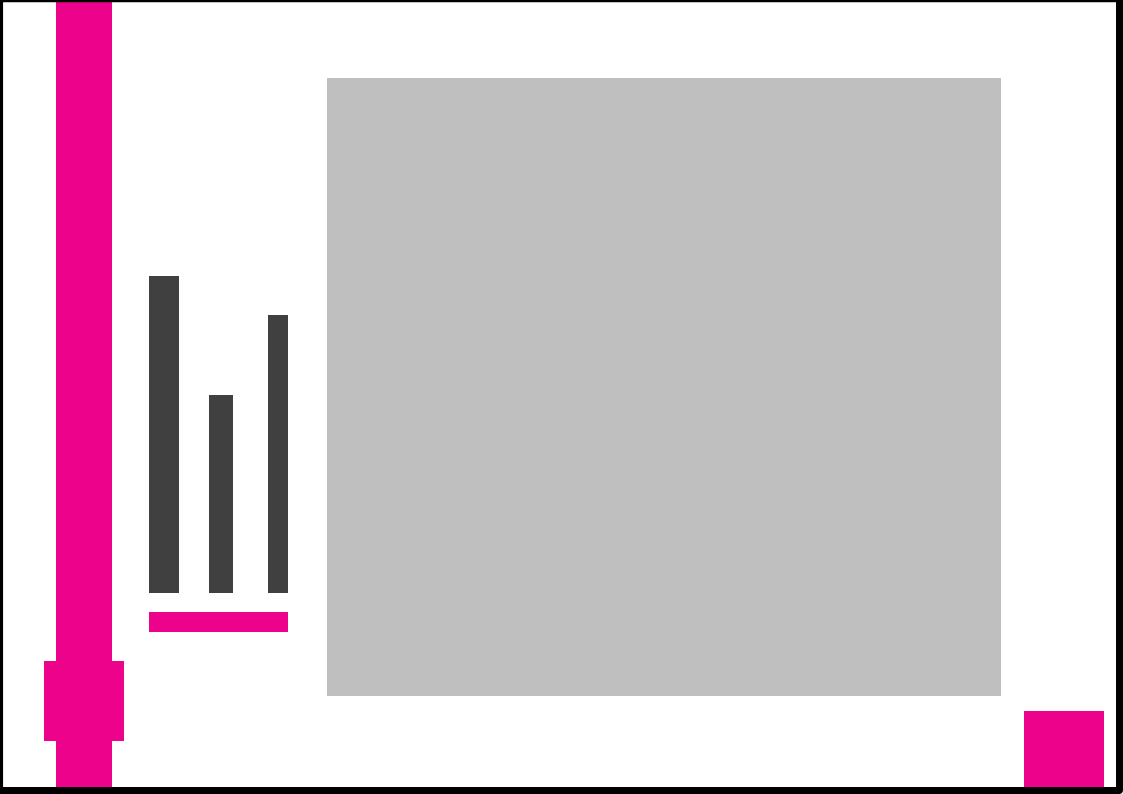
Quand on coupe un rectangle de la famille selon sa courte médiane, on obtient un rectangle appartenant également à la famille et qui est semblable au premier.

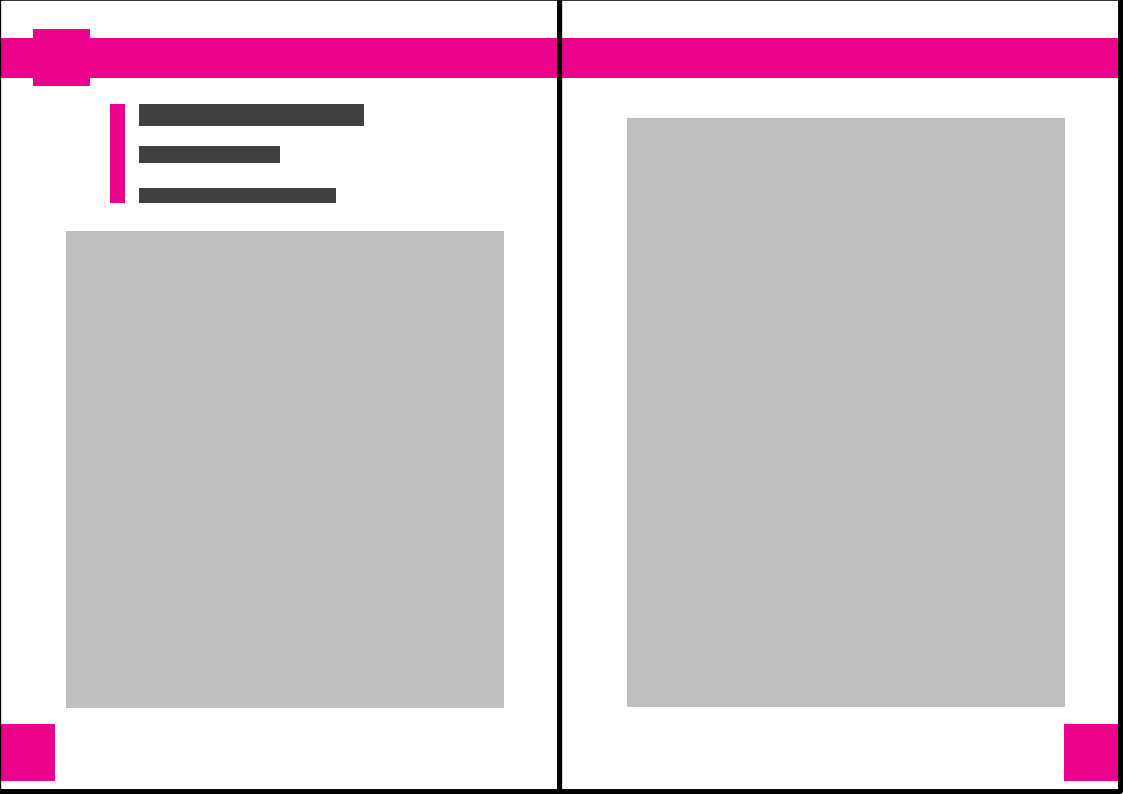
Nous utilisons cette propriété au quotidien, quand nous sommes amenés à faire des agrandissements et réductions à la photocopieuse.

- Agrandissement d'un A4 vers un A3, sans marges ni rognage.

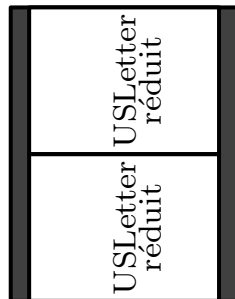
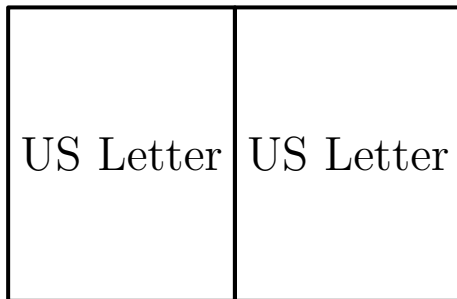


- Réduction « deux pages en une », sans marges ni rognage.



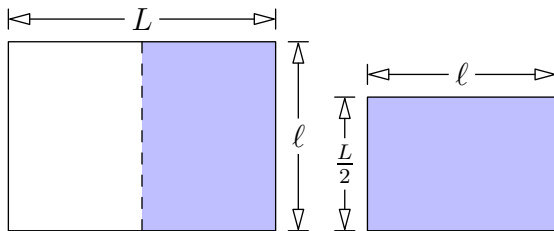


Une propriété dont certains ne profitent pas



Un peu de géométrie

Quel peut être le rapport des côtés $\ell : L$ d'un tel rectangle, semblable à son « rectangle moitié » ?



On a $\frac{L}{\ell} = \frac{\ell}{L/2}$, c'est-à-dire $L^2 = 2\ell^2$, ou encore $L = \sqrt{2}\ell$.

Les côtés ℓ et L du rectangle sont donc dans un rapport $1 : \sqrt{2}$, appelé par certains « rapport d'argent », par d'autres « rapport diagonal ».

Les taux d'agrandissement et de réduction entre A4 et A3 à la photocopieuse sont donc de 141% et 71%.

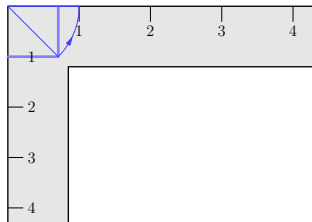
Quelques mentions de papiers de format 1 : $\sqrt{2}$ dans l'histoire

- ▶ Allemagne 1786, Georg Christoph Lichtenberg :

Une feuille de papier qui serait un rectangle semblable aux rectangles obtenus en le coupant en deux.

- ▶ Japon $\sim$ 1800, Ota Nampo :

Des rectangles de bel aspect si construits à l'aide d'une équerre « sashigane » 1 : $\sqrt{2}$.



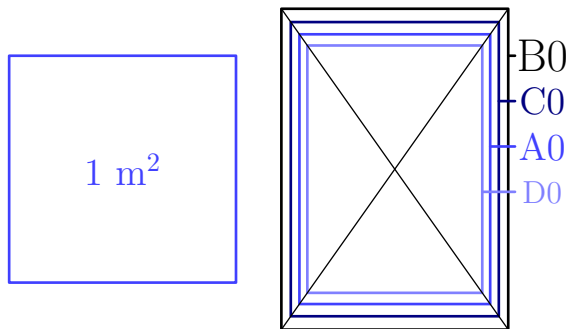
- ▶ France 1798, Révolution française :

Des formats « Grand registre » (A2) et « Moyen papier » (A3).

L'instauration d'un standard par l'institut de normalisation allemand

En 1922, l'institut de normalisation allemand instaure le format DIN 476 :

- ▶ Format A0 de proportions $1 : \sqrt{2}$ et mesurant 1 m^2 .
- ▶ Formats A1, A2, etc. obtenus par découpages en deux successifs.
- ▶ Formats « cousins » B, C et D, pour des enveloppes notamment.

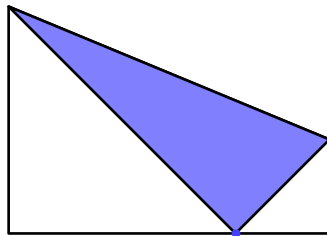
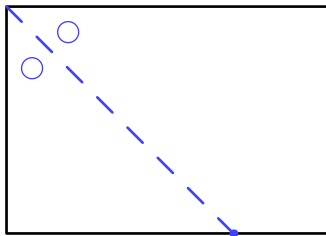
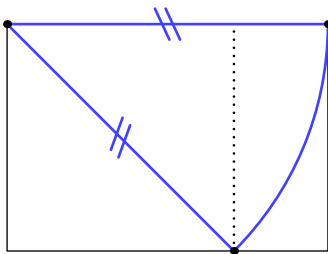


Dès 1924, la Belgique adopte le standard DIN 476.

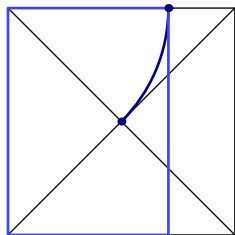
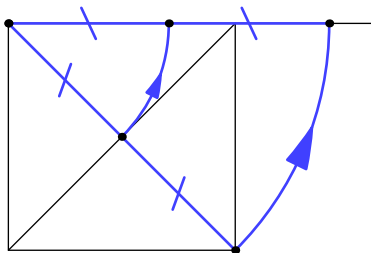
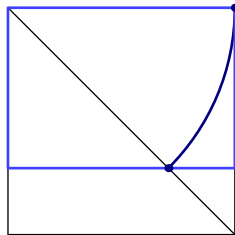
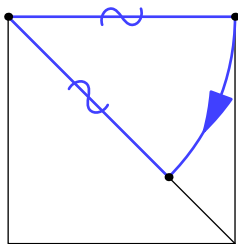
En 1975, le DIN 476 devient le standard international ISO 216.

Construction d'un rectangle d'argent

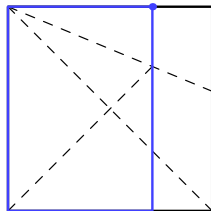
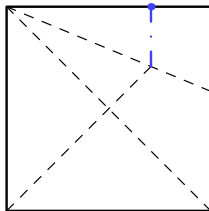
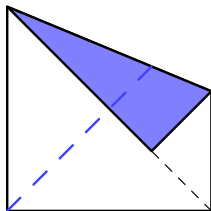
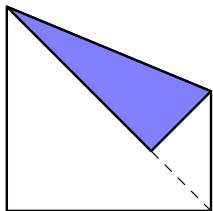
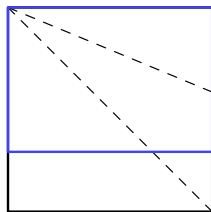
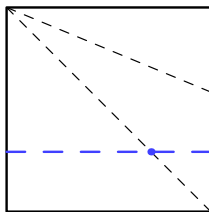
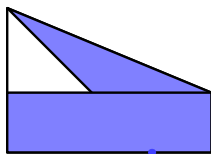
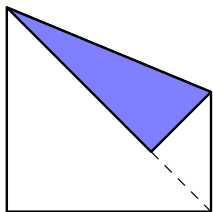
Figures-clés à la règle et au compas et en pliage



Constructions règle et compas d'un rectangle d'argent dans un carré

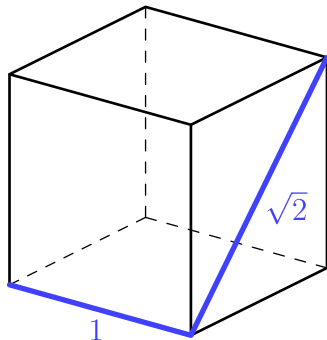
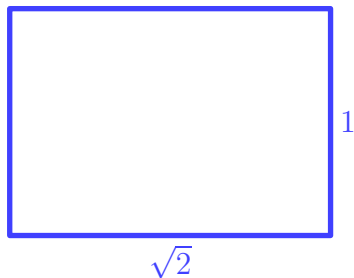


Constructions en pliage d'un rectangle d'argent dans un carré

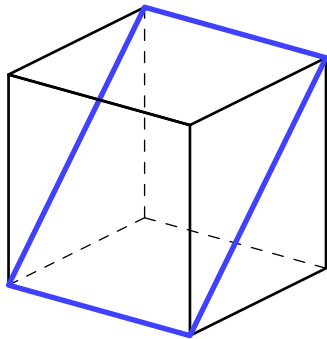


Autour du cube

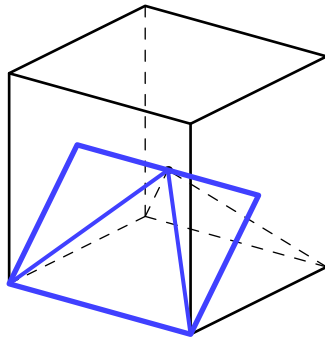
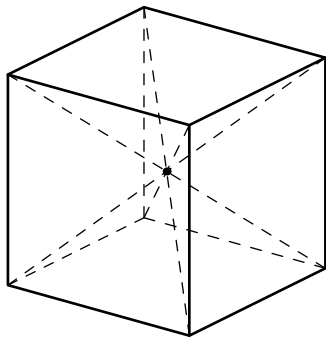
Rapport 1 : $\sqrt{2}$ dans le rectangle d'argent et dans le cube



Rectangle d'argent et section du cube

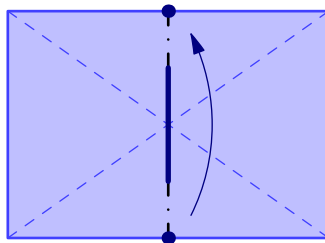
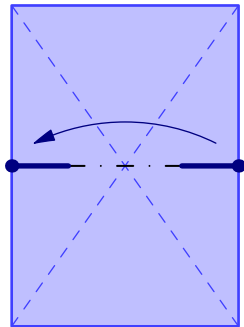


Rectangle d'argent et pyramide sixième de cube



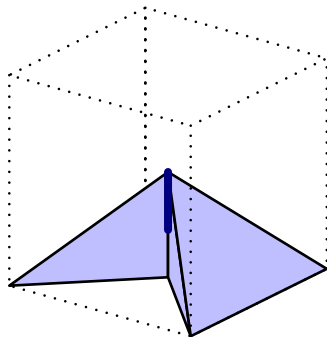
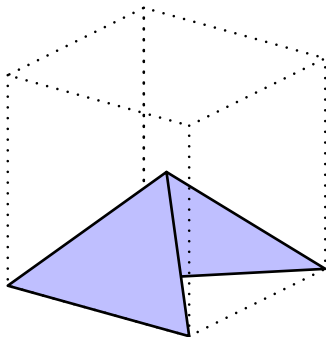
Rectangle d'argent et pyramide sixième de cube

À vos papiers !

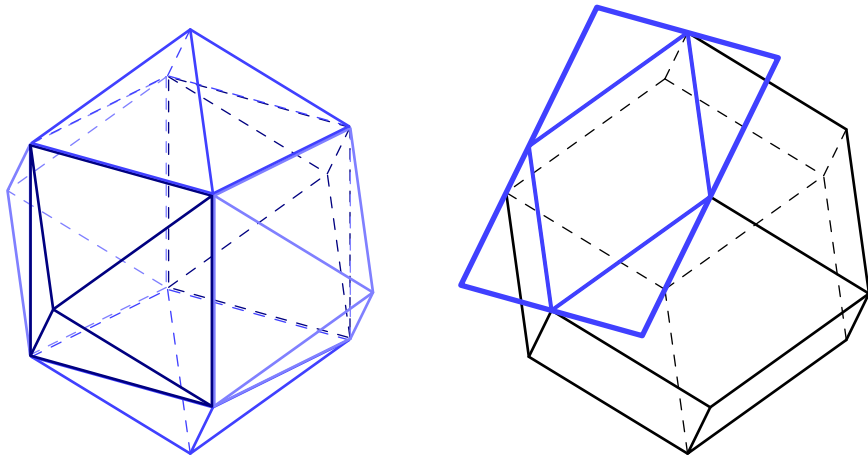


Rectangle d'argent et pyramide sixième de cube

À vos papiers !

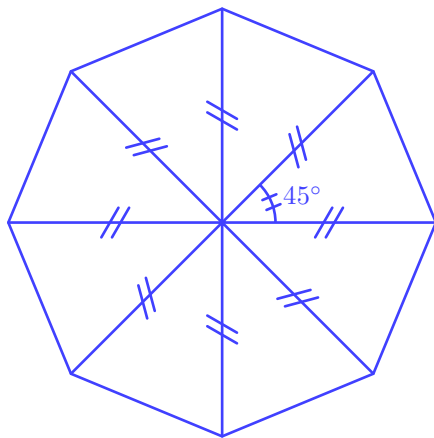
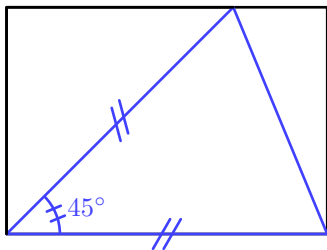


Rectangle d'argent et dodécaèdre rhombique



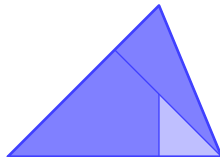
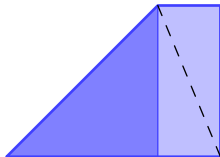
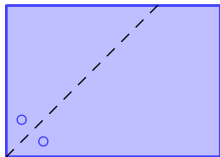
Autour de l'octogone régulier

Angle de 45° dans le rectangle d'argent et dans l'octogone régulier



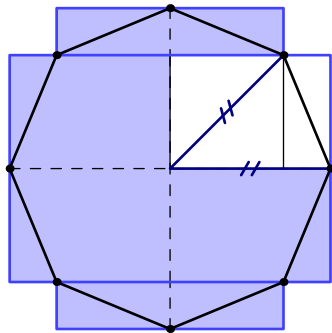
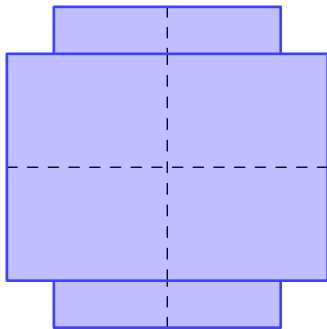
Un triangle isocèle

À vos papiers !



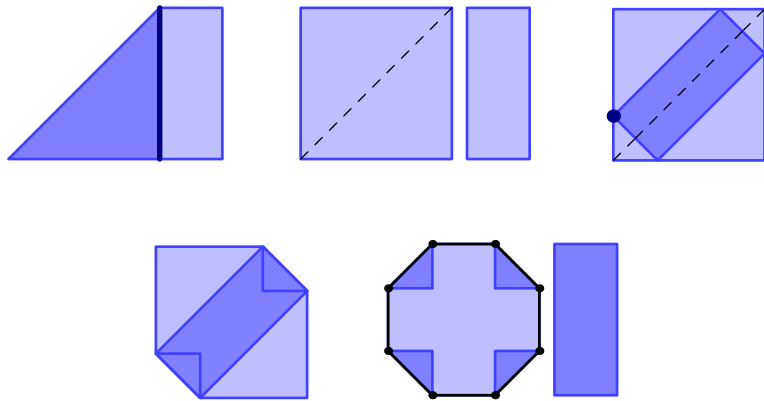
Un octogone obtenu en superposant deux rectangles d'argent

À vos papiers !



Un octogone obtenu en découpant un rectangle d'argent

À vos papiers !



Darche et Pitou 1985, Boursin et Larose 2000

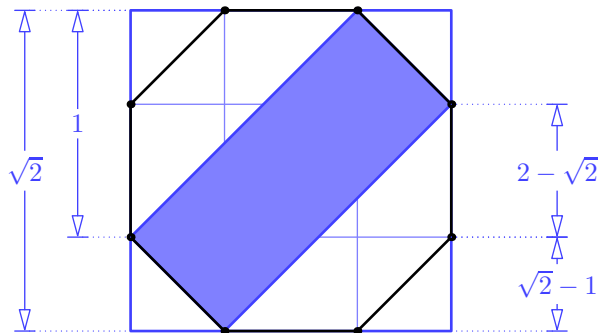
Un octogone obtenu en découpant un rectangle d'argent

Un peu de géométrie

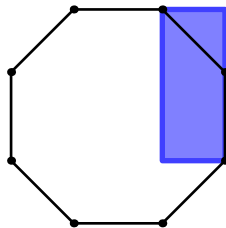
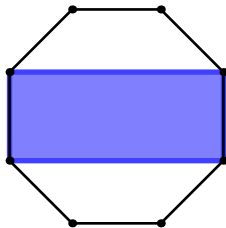
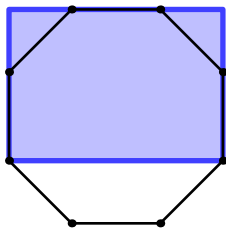
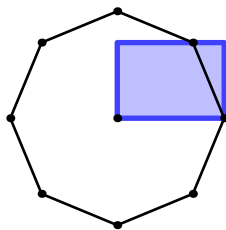
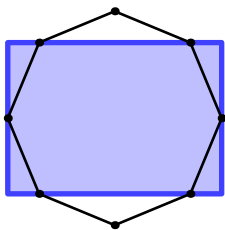
Supposons que le rectangle d'argent d'origine soit de dimensions $\sqrt{2} \times 2$.

Alors le carré mesure $\sqrt{2} \times \sqrt{2}$ et le rectangle résiduel $\sqrt{2} \times (2 - \sqrt{2})$.

Le rectangle résiduel « rentre » donc parfaitement dans le carré et les côtés de l'octogone ont même longueur.



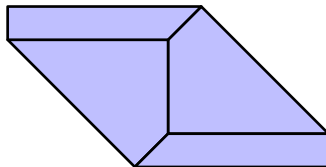
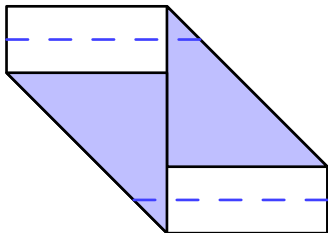
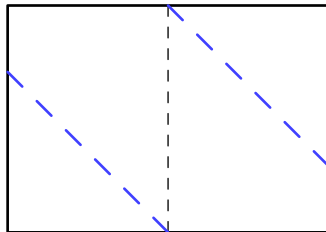
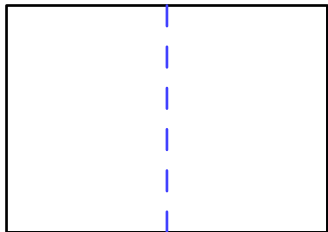
Le rectangle d'argent et le rectangle résiduel partout...



Un origami traditionnel

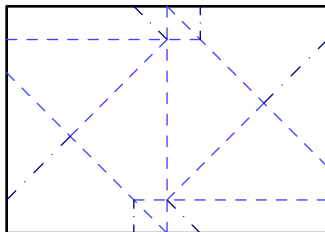
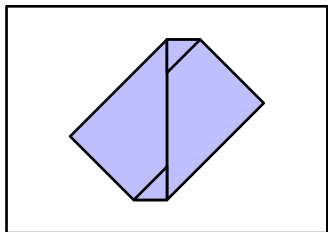
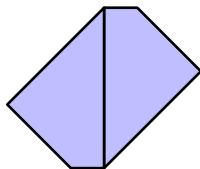
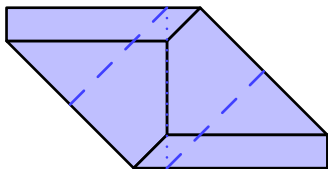
L'enveloppe

À vos papiers !



L'enveloppe

À vos papiers !

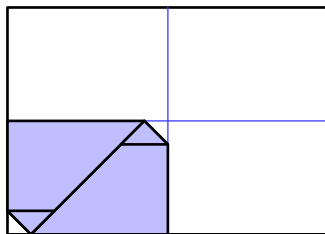
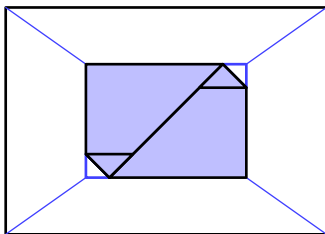


L'enveloppe

Proportions et dimensions du « rectangle enveloppe »

L'enveloppe, qu'on imaginera rectangulaire, semble être avoir les mêmes proportions que le rectangle d'argent d'origine.

Elle semble même correspondre au quart de la feuille d'origine.

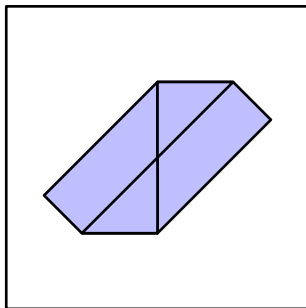


L'enveloppe

À partir d'une feuille carrée

Est-ce toujours le cas ?

Essayons avec une feuille carrée. . .



L'enveloppe obtenue est nettement plus allongée !

L'enveloppe

Propriétés particulières au rectangle d'argent

On peut montrer que

- ▶ le « rectangle enveloppe » est semblable au rectangle d'origine si et seulement si celui-ci est un rectangle d'argent,
- ▶ dans le cas du rectangle d'argent, le rapport de similitude entre le « rectangle enveloppe » et le rectangle d'origine est de $1/2$.

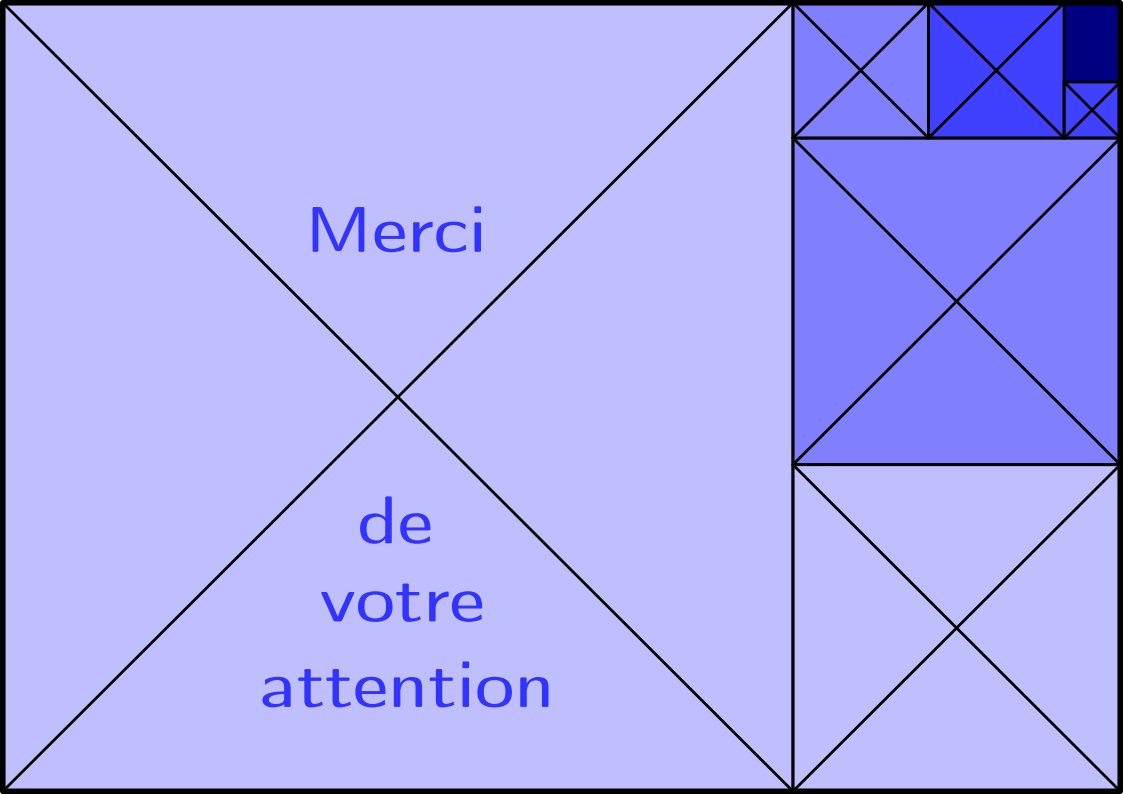
On peut aussi montrer que, dans le cas d'une feuille carrée, le « rectangle enveloppe » est de proportion 1 : 2.

Pour aller plus loin

Pour aller plus loin

- ▶ *Un rectangle nommé d'argent*, Losanges 52 et suivants, 2021.
- ▶ D. Boursin et V. Larose, *Pliages et mathématiques*, ACL – Les éditions du Kangourou, 2000.
- ▶ J. Cunliffe, *The Silver Rectangle*, BOS Booklet 21, British Origami Society, 1983, édition révisée de 2015.
- ▶ M. Darche et F. Pitou, *Pliages et mathématiques*, Dossiers du PLOT, 1985, rééd. 2018, <https://fr.calameo.com/read/004815617fea38677cafd>.
- ▶ M. Khun, *International standard paper sizes*, <https://www.cl.cam.ac.uk/~mgk25/iso-paper.html>.
- ▶ J. Maekawa, *Genuine Japanese Origami, Book 1, 33 Mathematical Models based on $\sqrt{2}$* , Dover Publications, 2012.
- ▶ J. Maekawa, *Genuine Japanese Origami, Book 2, 34 Mathematical Models based on $\sqrt{2}$* , Dover Publications, 2012.
- ▶ B. Rittaud, *Le fabuleux destin de $\sqrt{2}$* , Le Pommier, 2006.
- ▶ *OrigamiMaths*, <http://origamimaths.blogspot.com/>.
- ▶ *Origamaths*, <https://www.youtube.com/c/Origamaths>.

...et toutes les références indiquées dans les articles Losanges.



Merci
de
votre
attention