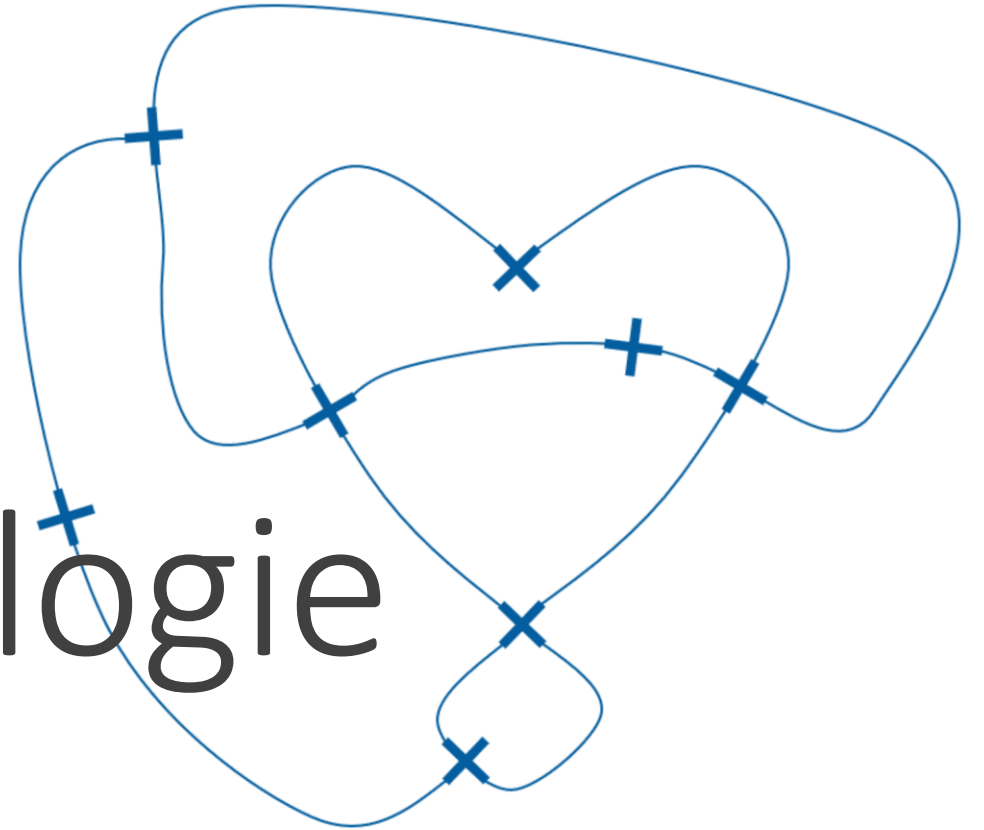

Jouons la topologie



MICHEL ROELENS

MARIA-BOODSCHAPLYCEUM BRUSSEL

EDUCATIEVE BACHELOR SECUNDAIR ONDERWIJS DIEPENBEEK

REDACTIE UITWISKELING

Le jeu « divide et impera »

Figure de départ

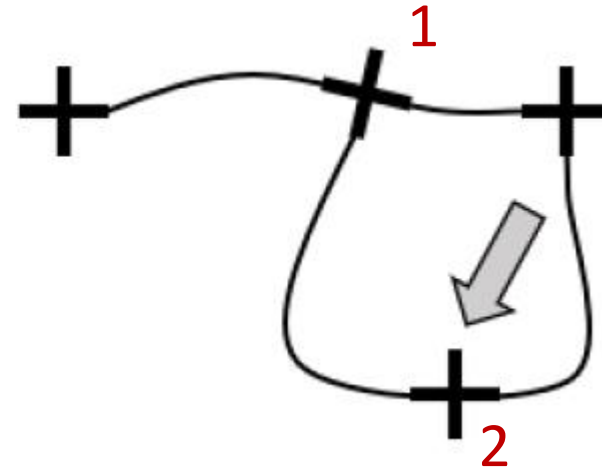
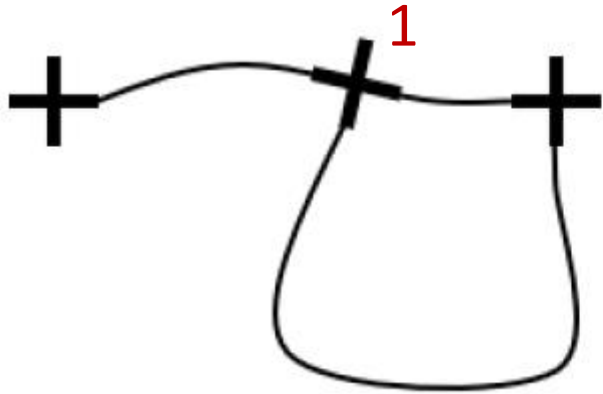


Deux joueurs

Chacun son tour: relier deux épines (d'une même croix ou de deux croix différentes), sans couper les lignes déjà dessinées, et ajouter une croix.



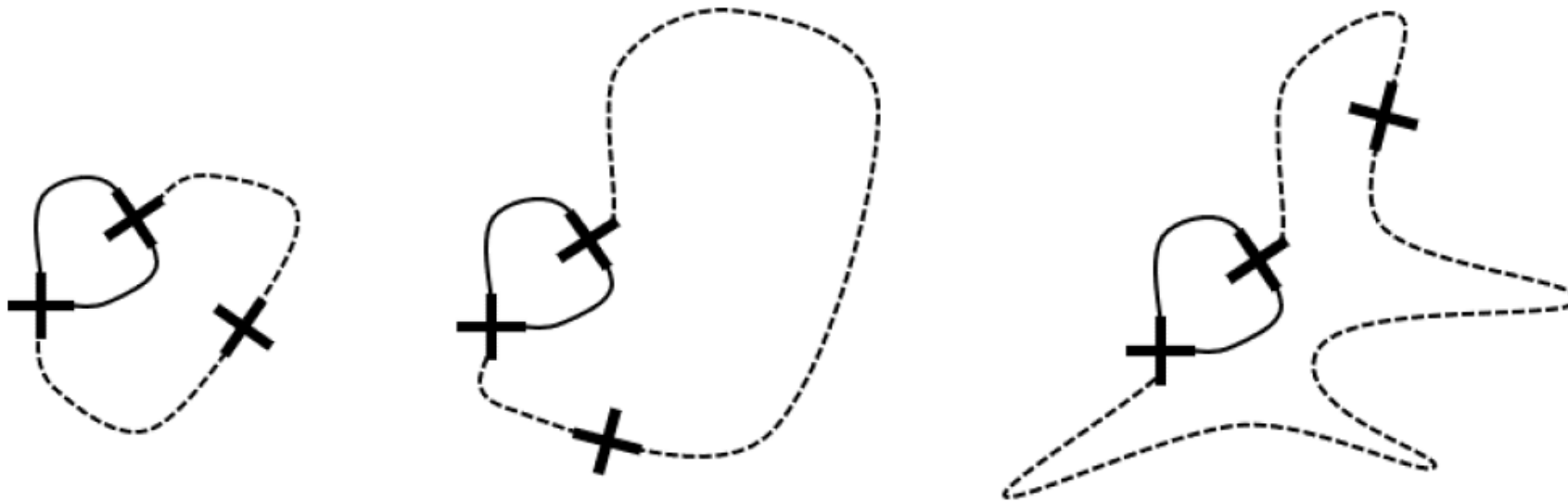
Le jeu « divide et impera »



L'épine fléchée n'est pas utilisable...

Le jeu « divide et impera »

La ligne en pointillés est « la même ».



Ce n'est pas de la géométrie...

Essayons...

+

+

Qui gagne ?

Michel ?

Toujours ?

Pourquoi ?

Qui gagne ?

Pour y voir plus clair : inventaire

- nombre de tours t
- nombre d'épines non-utilisées e
- nombre de composantes connexes c
- nombre de régions r

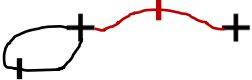
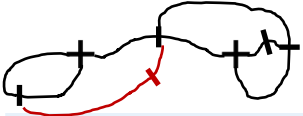
Distinguons :

- tours qui divisent une région (D)
- tours qui rassemblent deux composantes (R).

t	D ou R	e	c	r
0		8	2	1

Au travail !
Nombre
de tours ?

Qui gagne ?

	# tours <i>t</i>	<i>D</i> ou <i>R</i>	# épines <i>e</i>	# composantes <i>c</i>	# régions <i>r</i>
+ +	0		8	2	1
 + +	1	<i>D</i>	8	2	2
 + +	2	<i>R</i>	8	1	2
 + +	3	<i>D</i>	8	1	3
 + +	4	<i>D</i>	8	1	4
 + +	5	<i>D</i>	8	1	5

Qui gagne ? Pourquoi ?

Qui gagne ? Le deuxième joueur.

Toujours ? Oui, si on commence par deux croix.

Pourquoi ?

Chaque région contient au moins une épine non-utilisée.

À chaque moment: le nombre d'épines non-reliées: $e = 8$.

Il y a 1 tour R (assemblant); les autres sont D (ivisants).

Dès que le nombre de régions r atteint e ($= 8$), ça ne va plus.

Il faut 7 tours D pour créer 8 régions.

Le dernier tour est donc le 8^{ième}.

Partons de 3 croix

+

+

+

Même type de tableau. Si possible: généraliser pour n croix.

# tours <i>t</i>	<i>D</i> ou <i>R</i>	# épines <i>e</i>	# composantes <i>c</i>	# régions <i>r</i>
0		12	3	1

Au travail !
Nombre
de tours ?

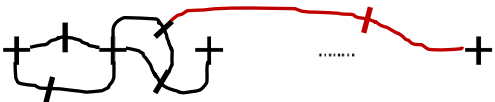
Partons de n croix

$+$ $+$ $+$ $+$

Nombre de tours en fonction de n ?

# tours t	D ou R	# épines e	# composantes c	# régions r
0		$4n$	n	1

Partons de n croix

	# tours t	D ou R	# épines e	# composantes c	# régions r
	0		$4n$	n	1
	1	R	$4n$	$n - 1$	1
	2	R	$4n$	$n - 2$	1
	3	D	$4n$	$n - 2$	2
	4	D	$4n$	$n - 2$	3
	5	R	$4n$	$n - 3$	3

Partons de n croix

Qui gagne ?

Le deuxième joueur si n est pair. Le premier si n est impair.

Pourquoi ?

Le nombre e d'épines non-reliées reste $4n$.

Le jeu s'arrête lorsqu'il y a $4n$ régions.

$n - 1$ tours rassemblants (R) pour relier les composantes.

$4n - 1$ tours qui divisent (D) les régions.

Total : $5n - 2$ tours.

Partons de n croix

Invariant ?

Partons de n croix

Invariant ?

	# tours t	D ou R	# épines e	# composantes c	# régions r
	0		$4n - 1$	n	1
+1	1	R	$4n - 1$	$n - 1$	1
+1	2	R	$4n$	$n - 2$	1
+1	3	D	$4n$	$n - 2$	2
+1	4	D	$4n - 1$	$n - 2$	3
+1	5	R	$4n$	$n - 3$	3

Partons de n croix

Invariant ?

$$t + c - r$$

Qui gagne ?

Le deuxième joueur si n est pair. Le premier si n est impair.

Pourquoi ?

Au départ: $t + c - r = 0 + n - 1 = n - 1$.

Le jeu s'arrête quand $c = 1$ et $r = e = 4n$

$$t + c - r = n - 1 \Rightarrow t_{\text{dernier}} + 1 - 4n = n - 1 \Rightarrow t_{\text{dernier}} = 5n - 2$$

Autres croix

Croix avec $e_1, e_2, \dots, e_n$ épines

Essayons.



Au fond, rien ne change ...

$\sum_{k=1}^n e_k$ prend la place de $4n$.

Nombre de tours rassemblants : $n - 1$

Nombre de tours séparants : $\sum_{k=1}^n e_k - 1$

Total $n + \sum_{k=1}^n e_k - 2$

Donc: si $n + \sum_{k=1}^n e_k$ est pair, le deuxième joueur gagne; si impair, c'est le premier.

Autres croix

Croix avec $e_1, e_2, \dots, e_n$ épines



Au fond, rien ne change ...

$\sum_{k=1}^n e_k$ prend la place de $4n$

Ou avec l'invariant:

$t + c - r$ est invariant. Au début: $0 + n - 1$. À la fin: $t_{\text{dernier}} + 1 - \sum_{k=1}^n e_k$.

L'égalité donne $t_{\text{dernier}} = n + \sum_{k=1}^n e_k - 2$.

Sur un cylindre

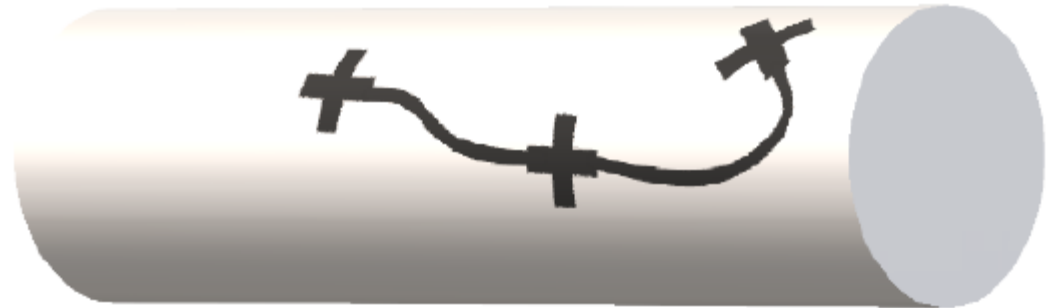
Cylindre.

On n'utilise que l'extérieur.

Ou encore: transparent (dessiner sur l'extérieur ou sur l'intérieur, c'est la même chose).

Qu'est-ce que ça change au jeu?

Rien.

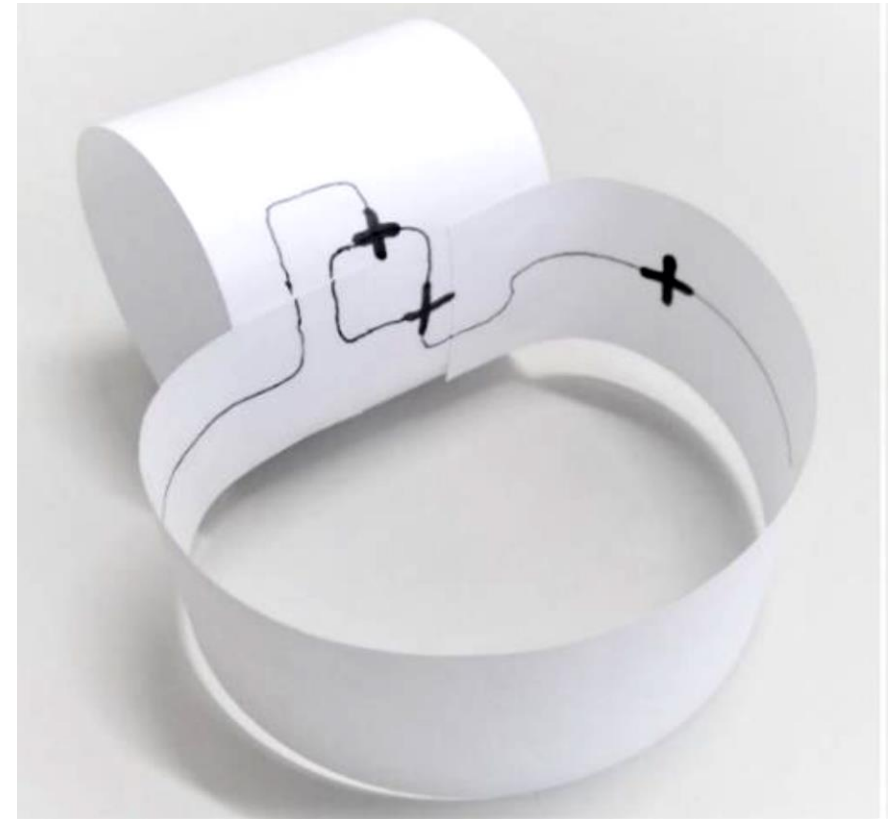


Double cylindre

On ne passe pas par le bord. Transparent.

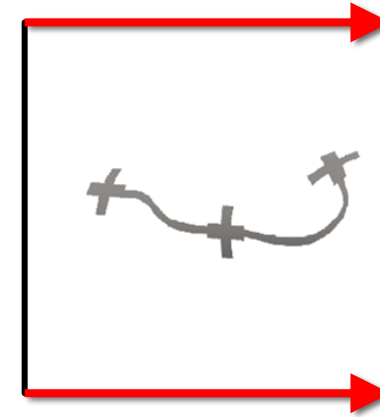
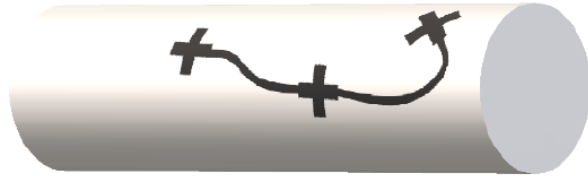
Maintenant, il y a une troisième sorte de tour, « **tour topologique** » ($\mathcal{T}$), qui ne sépare pas et ne rassemble pas.

Deux tours topologiques...

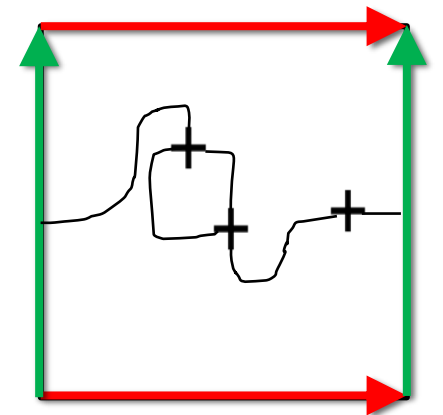
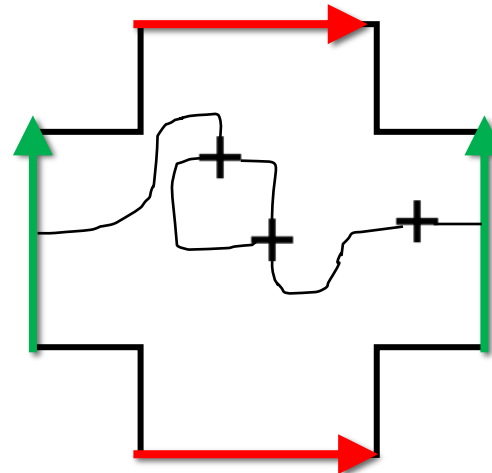


Représentation plane

Cylindre

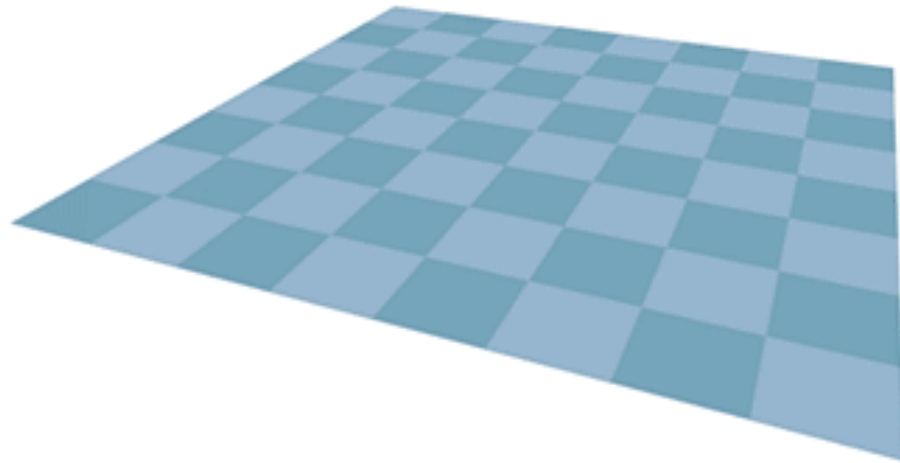
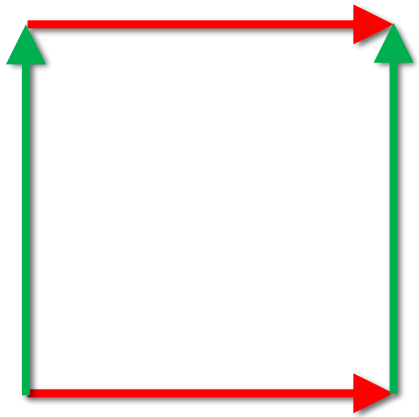


Double cylindre



Représentation plane

Si tu dis « le double cylindre, c'est un **tore** », tu n'as pas tort.



Double cylindre

On ne passe pas par le bord. Transparent.

Maintenant, il y a une troisième sorte de tour, « **tour topologique** » (T), qui ne sépare pas et ne rassemble pas.

Deux tours topologiques...

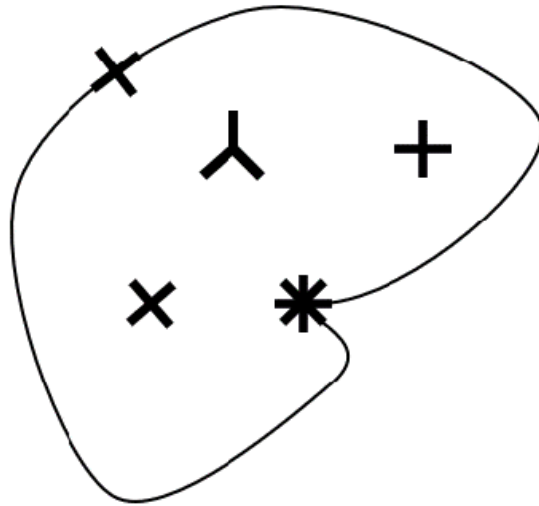


Au travail !
Nombre
de tours ?

Double cylindre : qui gagne ?

Si joueur 1 gagne dans le plan, il peut aussi gagner sur le tore.

Pourquoi?



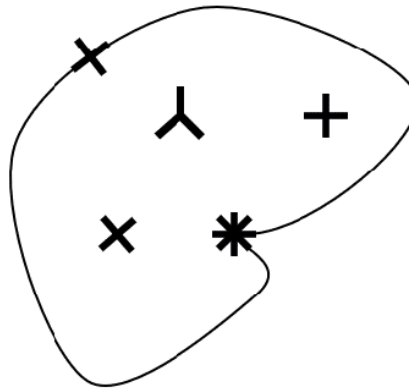
Double cylindre : qui gagne ?

Si joueur 2 gagne dans le plan, il peut aussi gagner sur le tore.

Pourquoi ?

- Si joueur 1 commence par un tour « normal » (R ou D), joueur 2 peut bloquer les tours topologiques.
- Si joueur 1 commence par un tour topologique, joueur 2 joue le deuxième tour topologique.

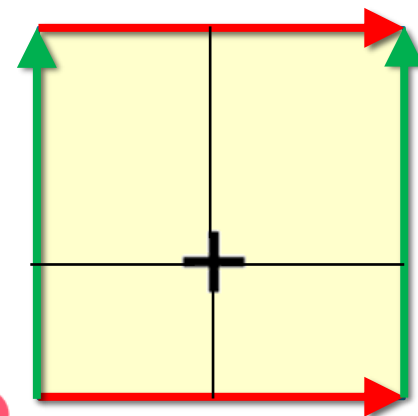
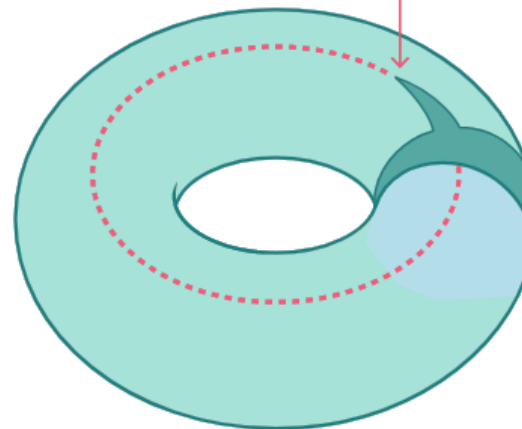
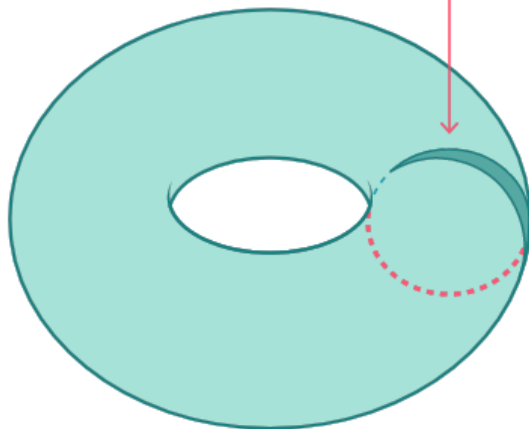
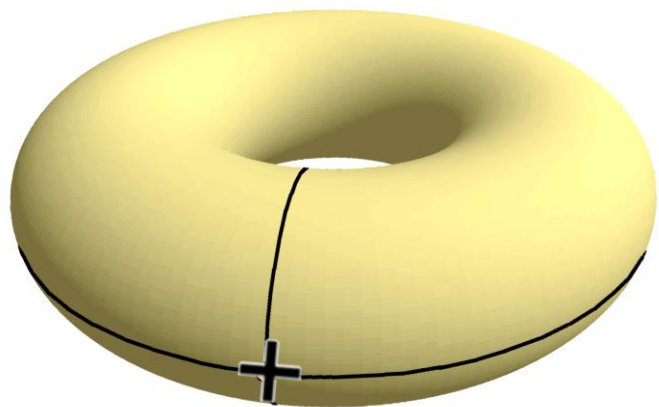
Deux tours en plus, cela ne change pas.



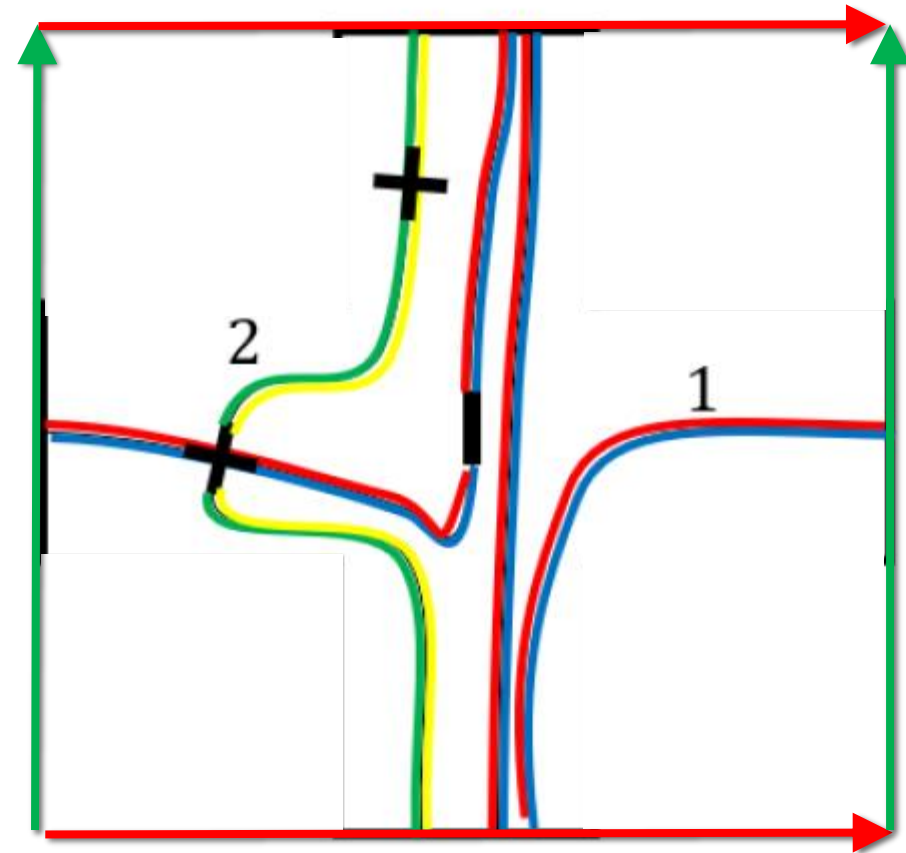
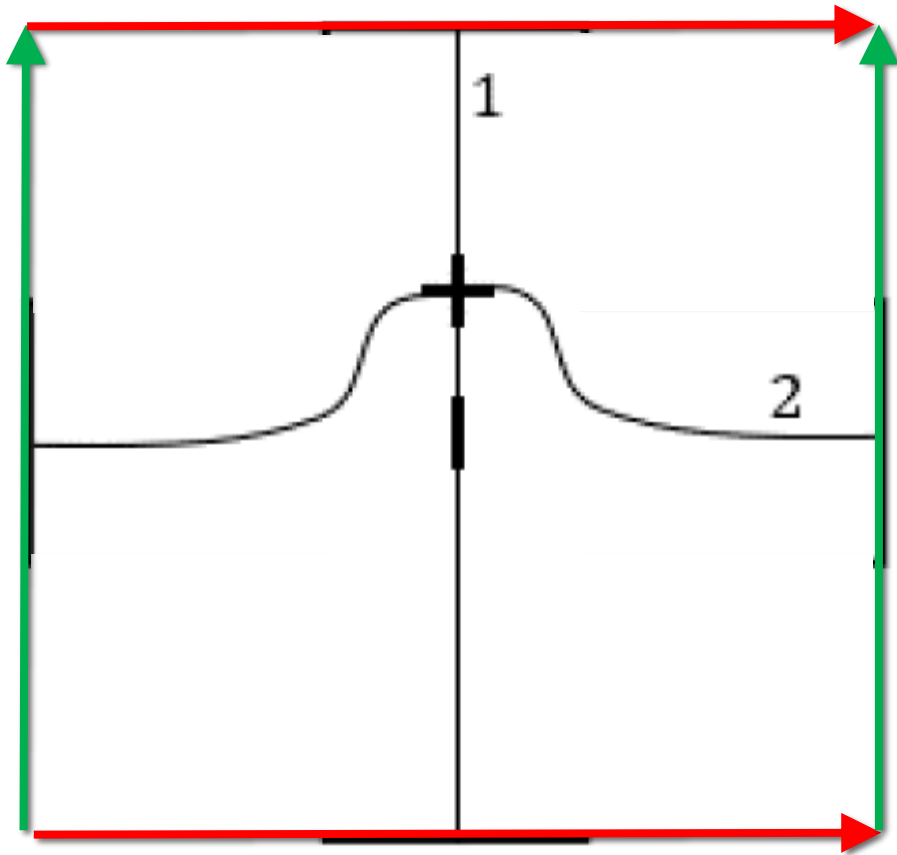
joueur 2 joue le deuxième

Reste à démontrer que ceci est possible.

Double cylindre : qui gagne ?



Double cylindre : qui gagne ?



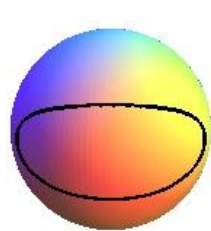
Double cylindre : qui gagne ?

Les deux tours topologiques ne « divisent » pas une région.

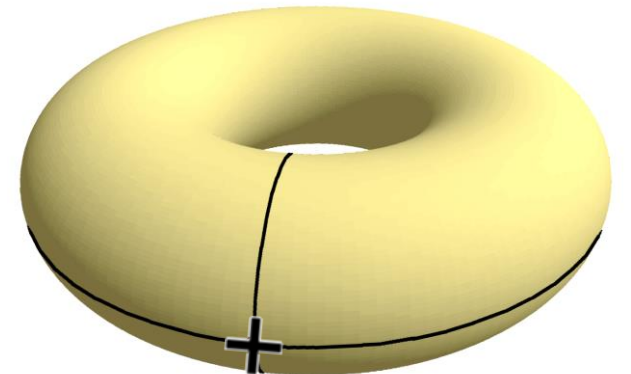
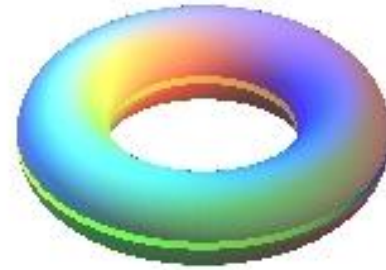
Ils ne « déconnectent » pas le tore.

Le **genre** d'une surface connexe est le nombre maximal de courbes fermées simples **sans points communs** que l'on peut tracer sans déconnecter la surface.

La sphère: genre 0.



Le tore: genre 1.

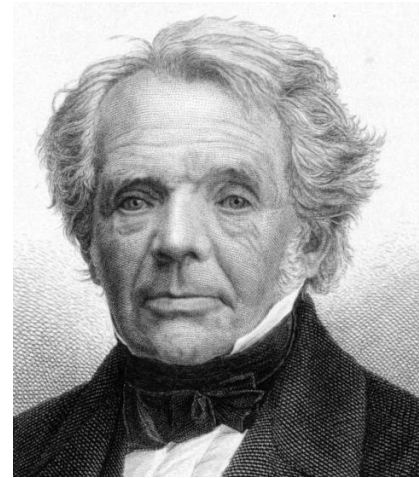
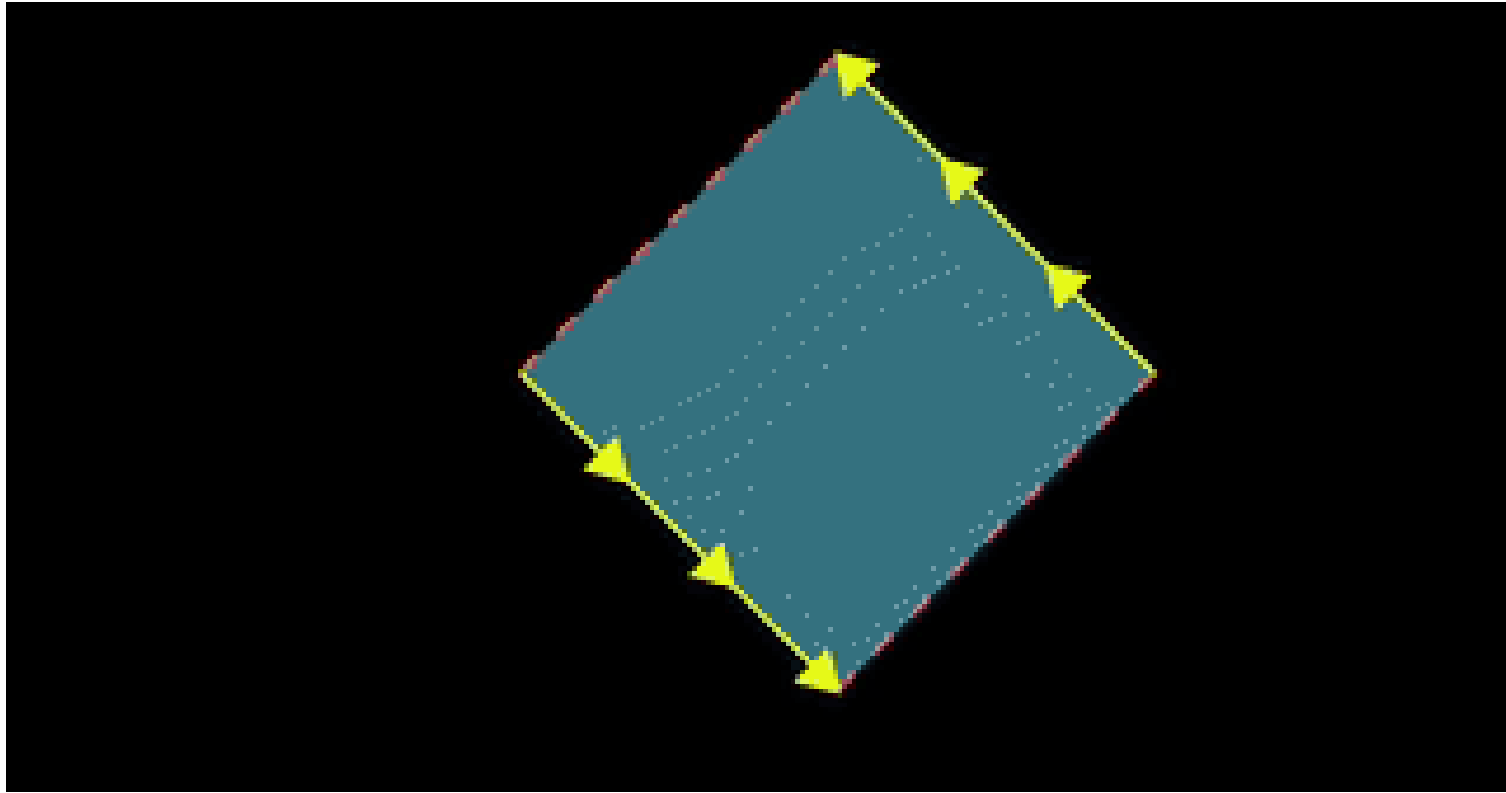
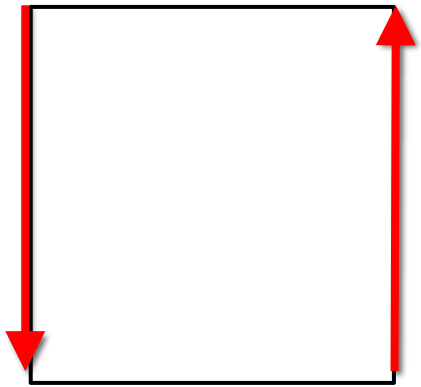


Quittons le jeu

Autres possibilités de surfaces,

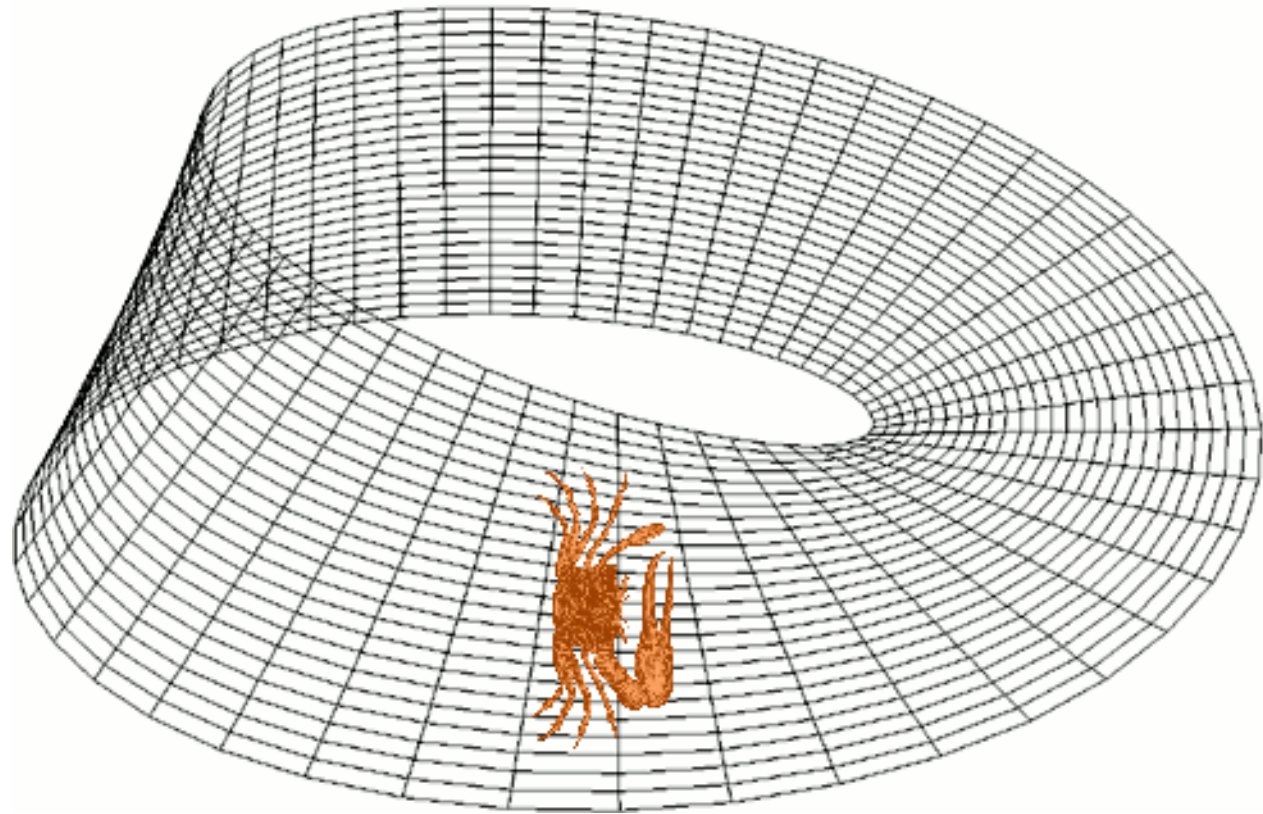
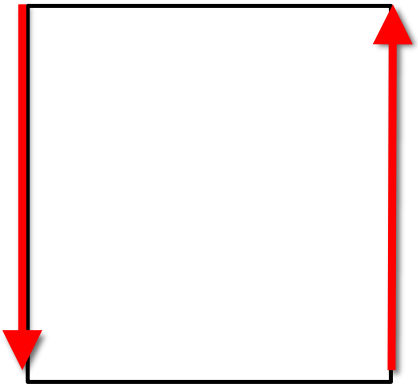
en partant d'un carré dans la représentation plane?

Ruban d'August Ferdinand Möbius (1858)

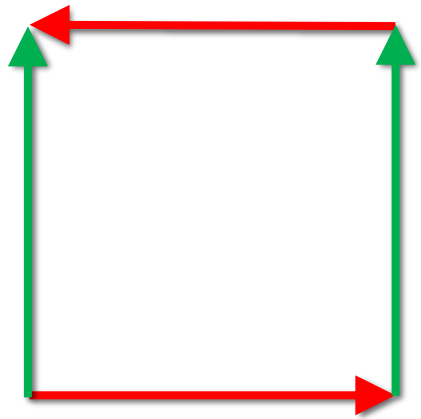


Ruban de Möbius

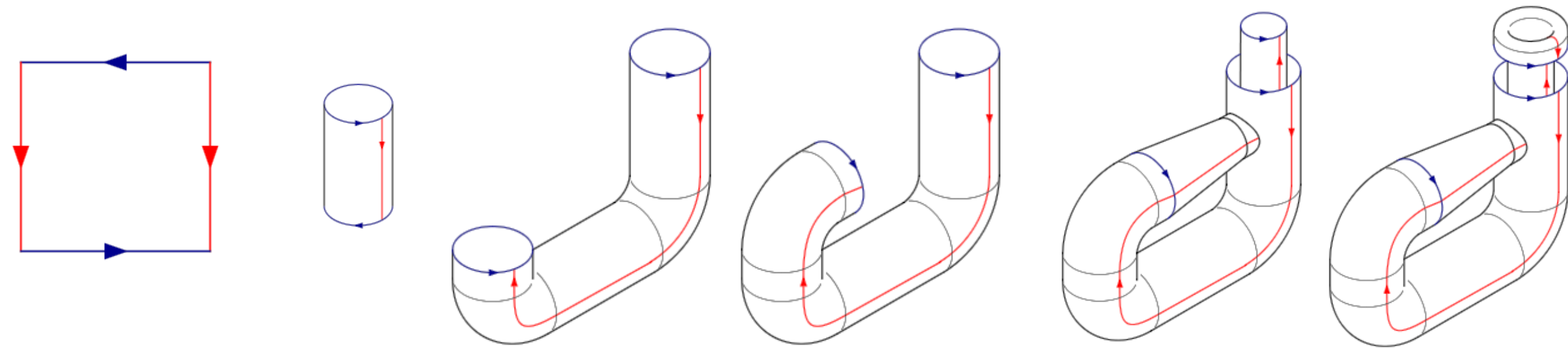
Il n'est pas orientable.



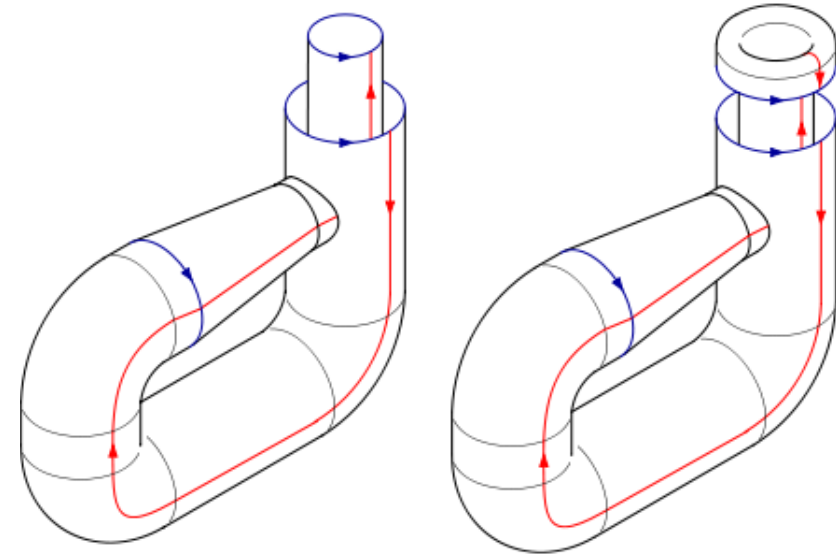
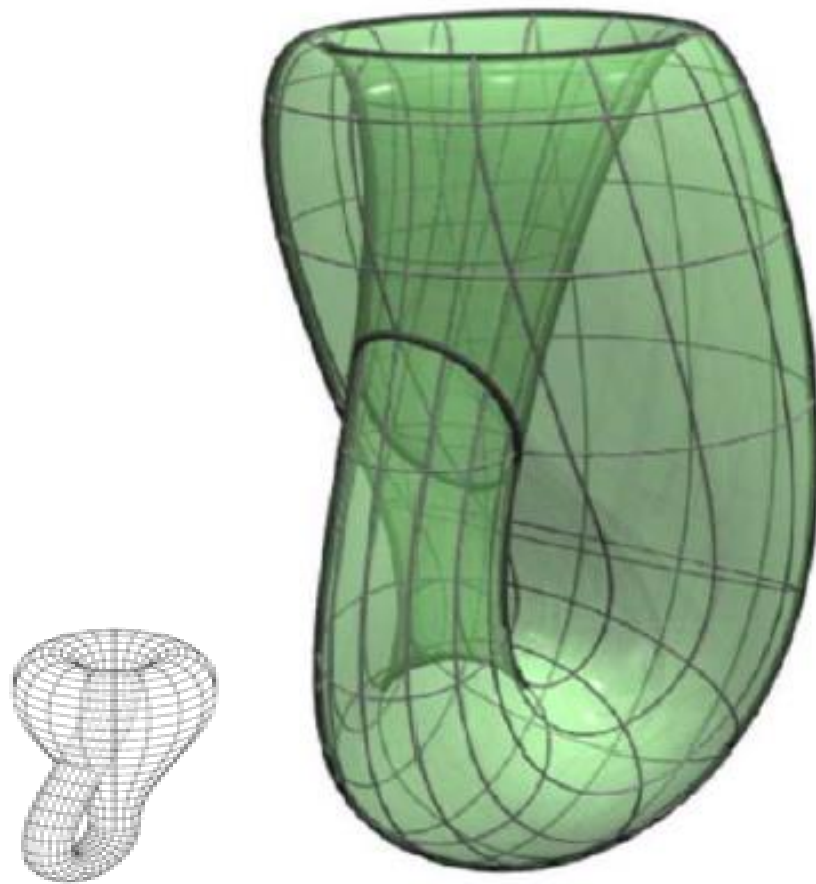
Bouteille de Felix Klein (1882)



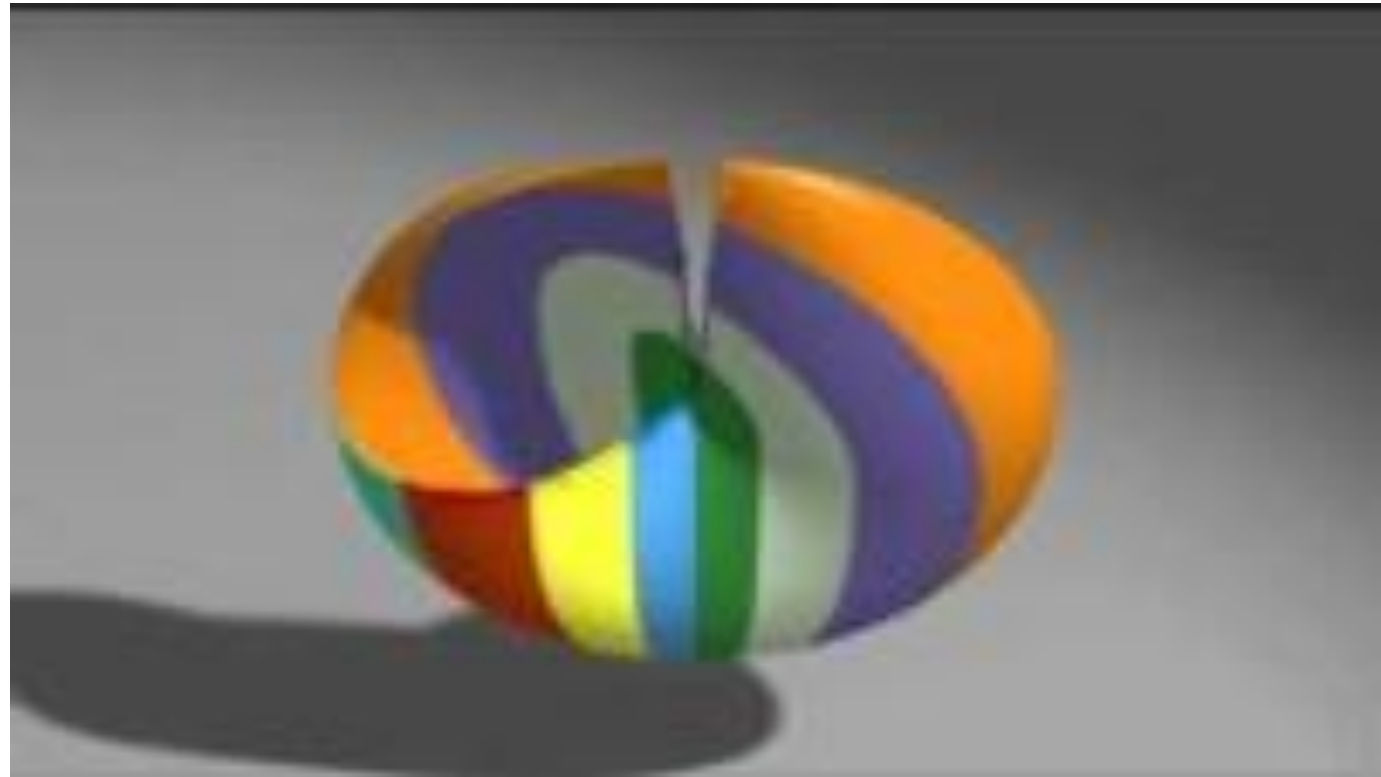
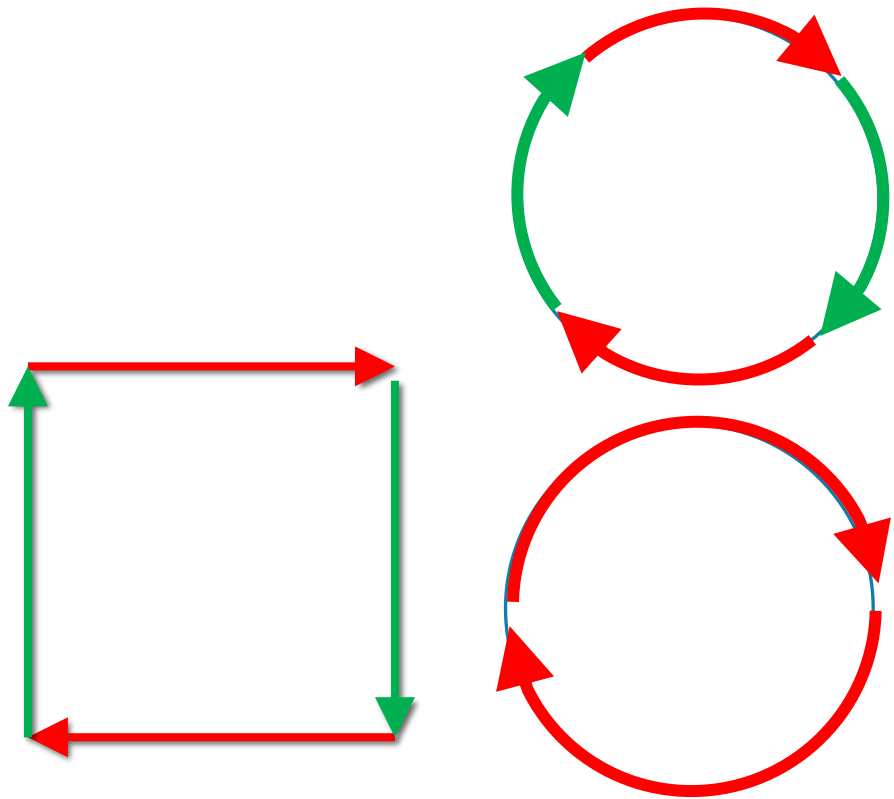
Bouteille de Klein



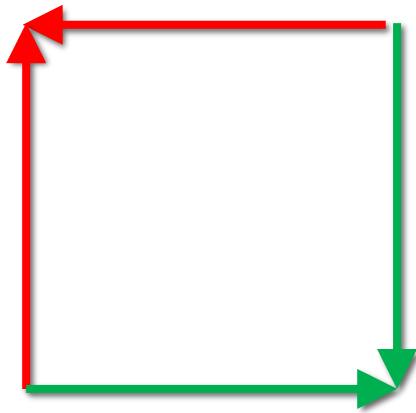
Bouteille de Klein



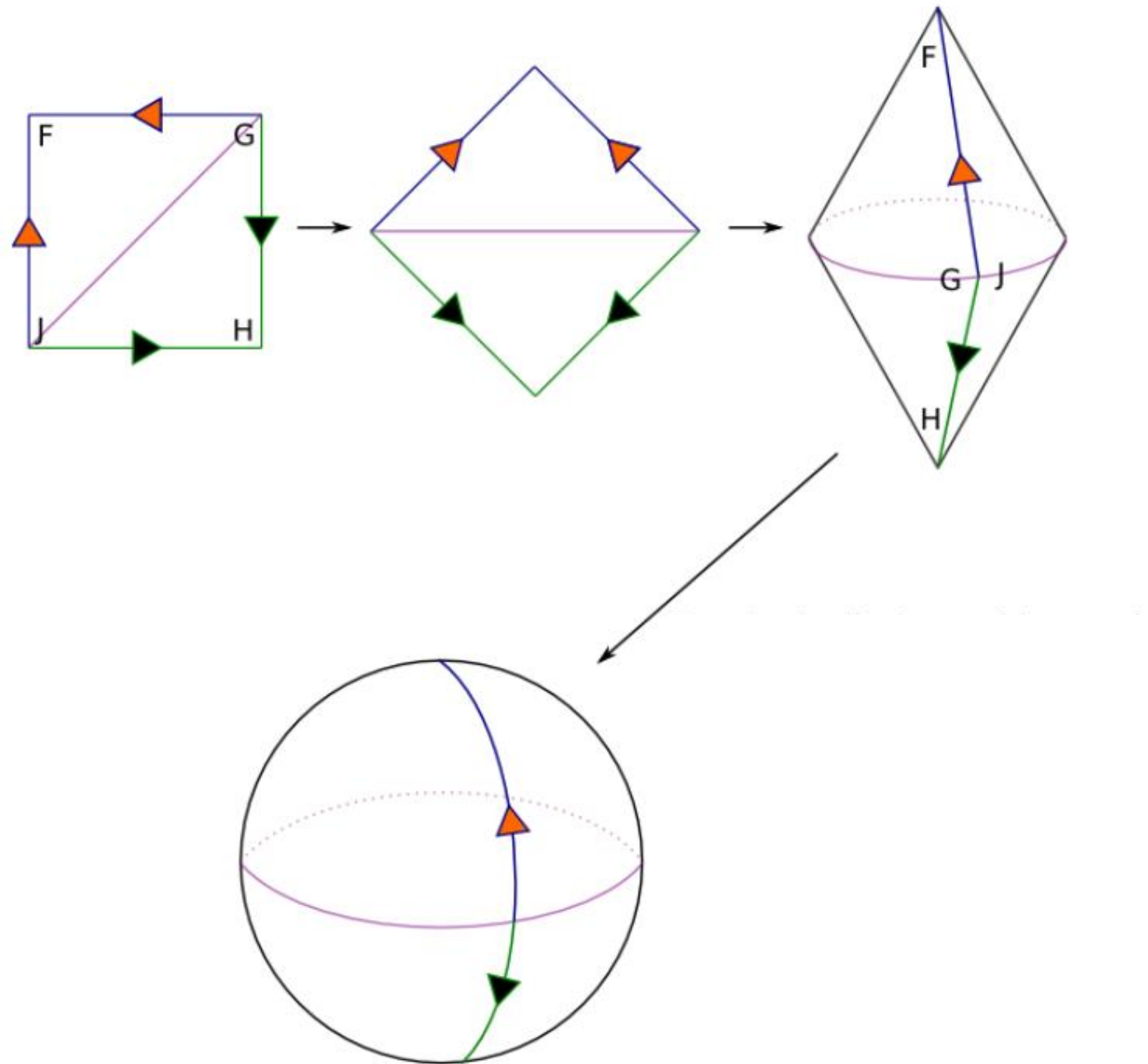
Plan projectif



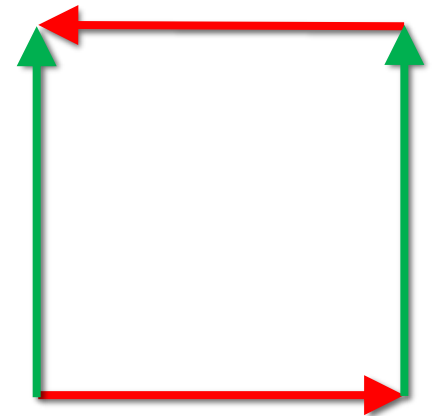
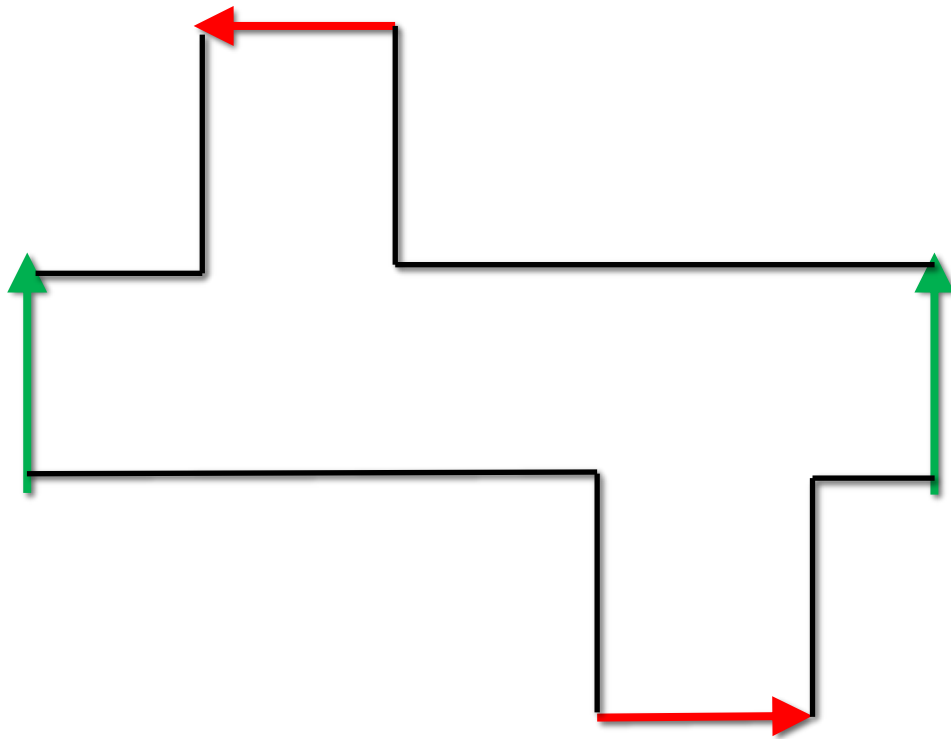
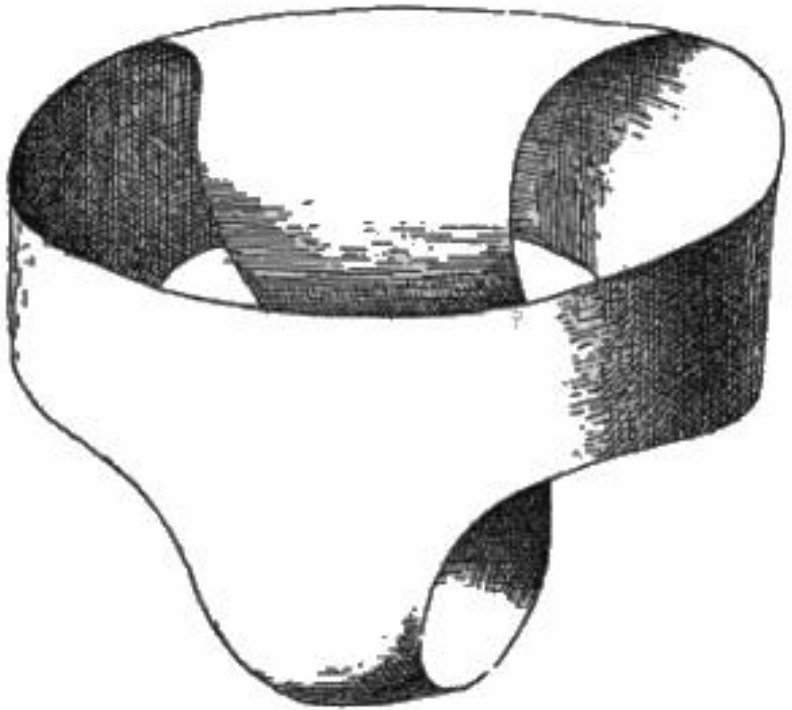
Et ça, c'est quoi



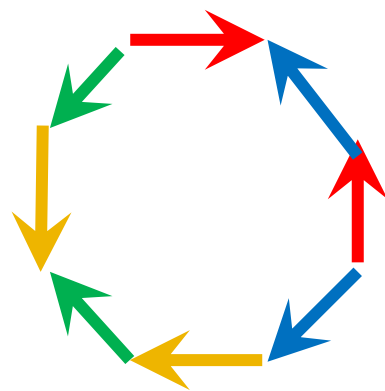
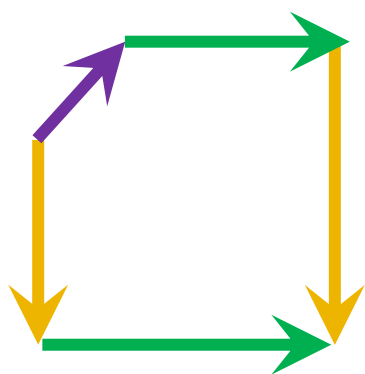
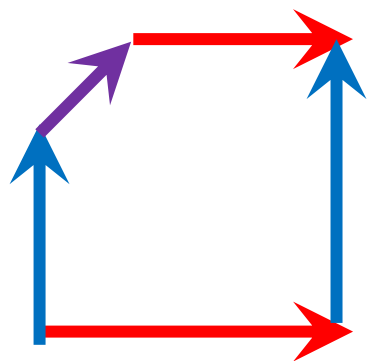
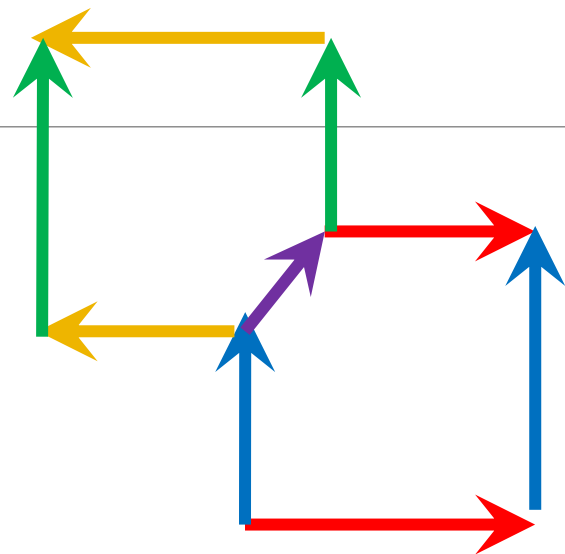
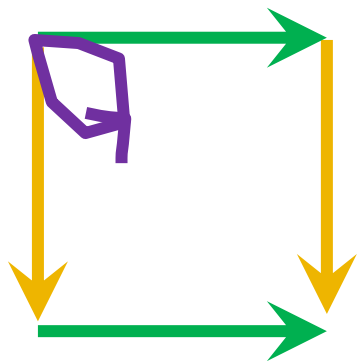
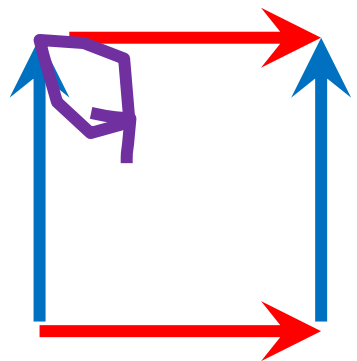
La sphère.



Le slip de Möbius

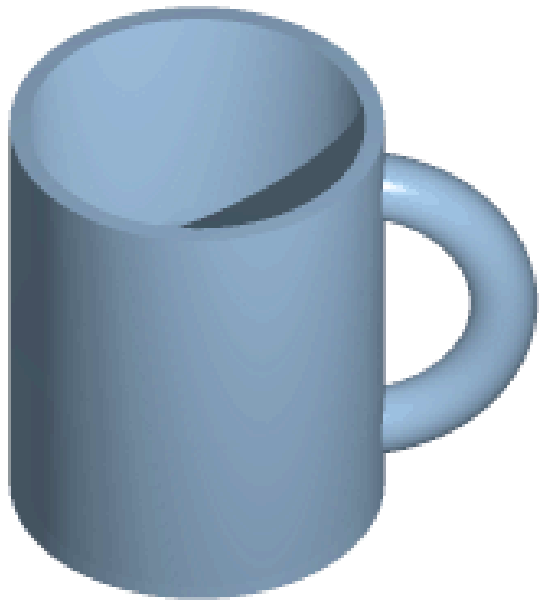


Le bitore



Classification des surfaces sans bord

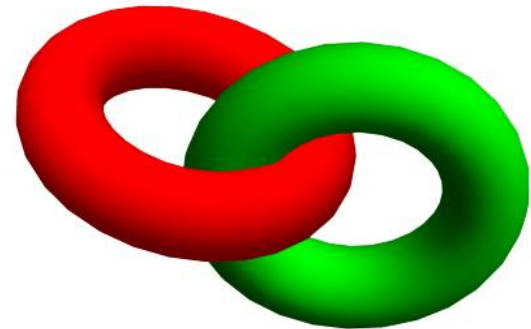
Classification à homéomorphisme près (bijection continue dont l'inverse est également continue).



Classification des surfaces sans bord

Surface topologique:

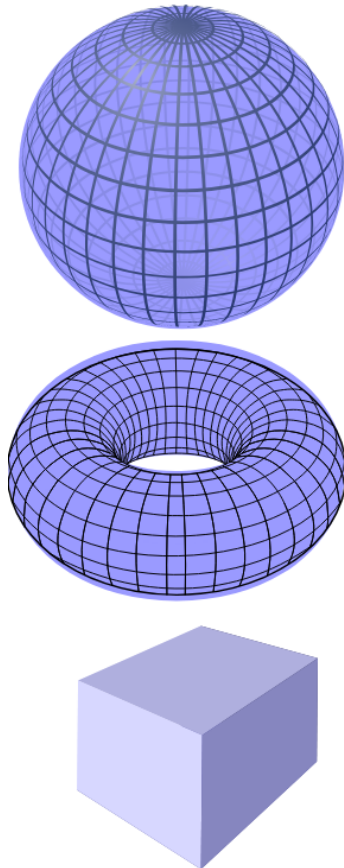
- Chaque point a un voisinage homéomorphe à un disque.
- Connexe
- Compacte et sans bord (fermée)



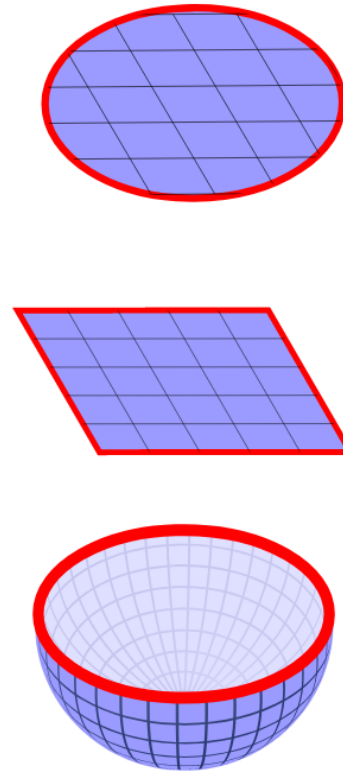
Pas connexe !

Classification des surfaces sans bord

sans bord



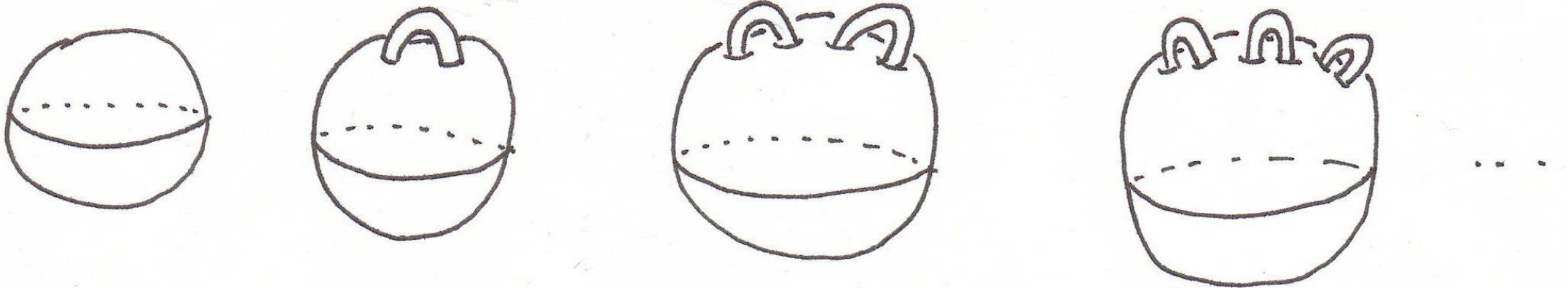
avec bord



homéomorphe

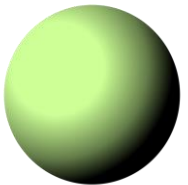
Classification des surfaces sans bord

Chaque surface (...) orientable $\sim$ une sphère ou une sphère avec anses



Genre:

0



1



2



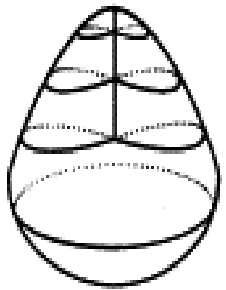
3



Classification des surfaces sans bord

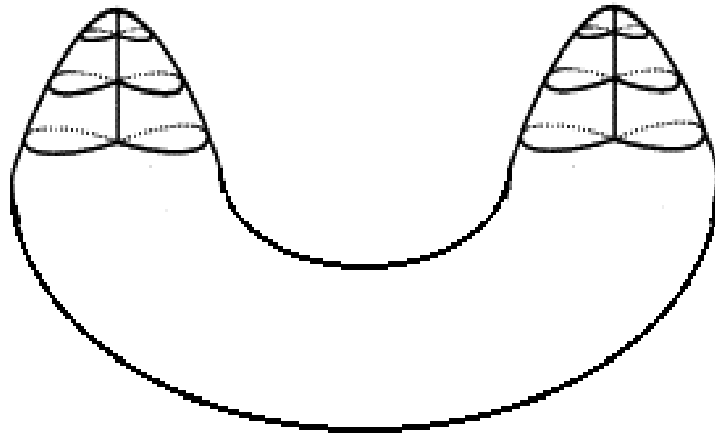
Chaque surface (...) non-orientable

~ une sphère avec « bonnet croisé »

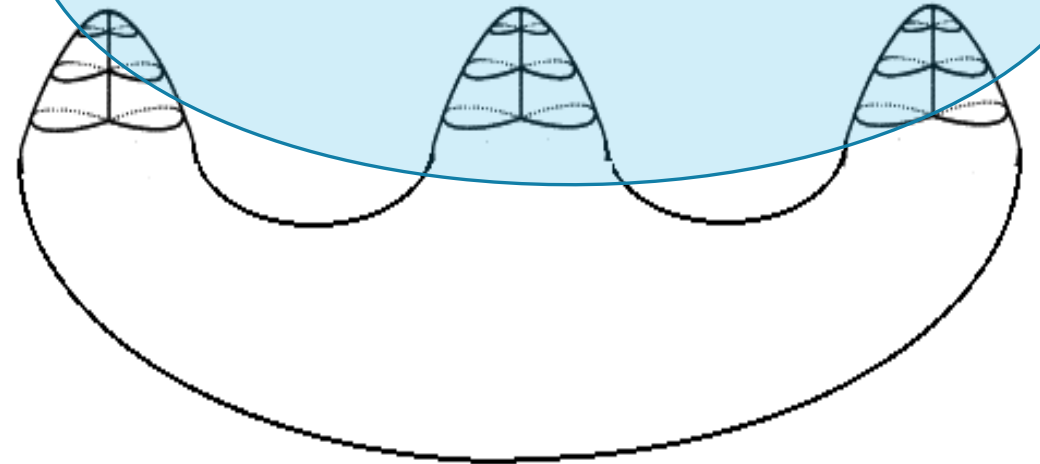


Genre

1



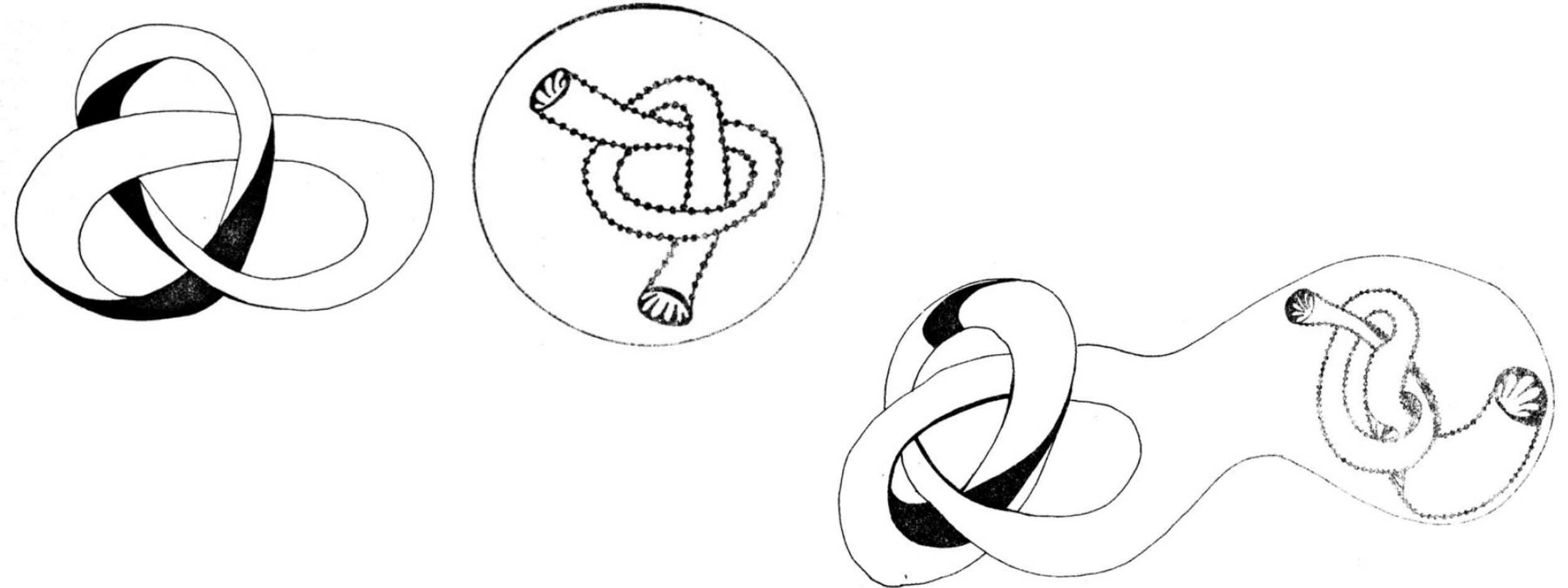
2



3



Quelques exemples

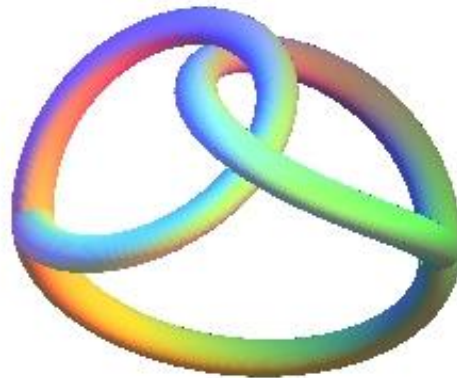


Combien d'anses ?

Bretzel, pâtisserie alsacienne.

Trois anses ?

Non deux !



Caractéristique de Leonhard Euler (18^e s.)

Les surfaces (...) sont triangulables.

$$\chi = v - e + f \quad (= \# \text{sommets} - \# \text{arêtes} + \# \text{faces})$$

Vaut pour les triangles, mais aussi pour polygones.

Rapport avec le genre

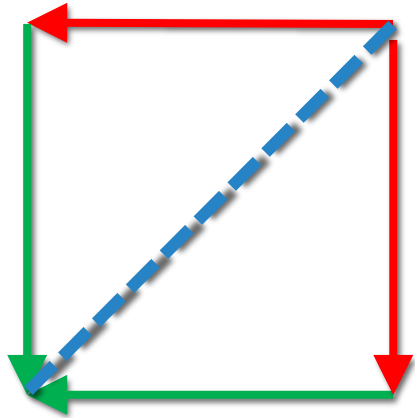
- Orientable: $\chi = 2 - 2g$
- Non-orientable: $\chi = 2 - g$



Contrôlons cela

$$\chi = v - e + f$$

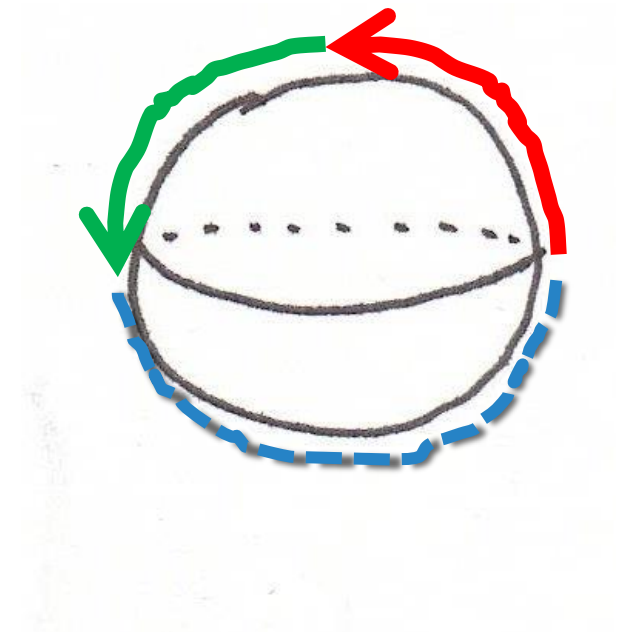
- Orientable: $\chi = 2 - 2g$
- Non-orientable: $\chi = 2 - g$



Sphère

$$\chi = 3 - 3 + 2 = 2$$

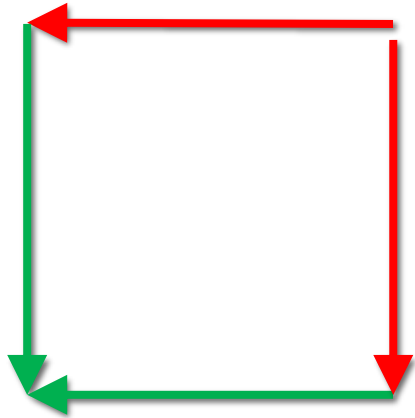
$$2 = 2 - 2g \Rightarrow g = 0$$



Contrôlons cela

$$\chi = v - e + f$$

- Orientable: $\chi = 2 - 2g$
- Non-orientable: $\chi = 2 - g$



Sphère

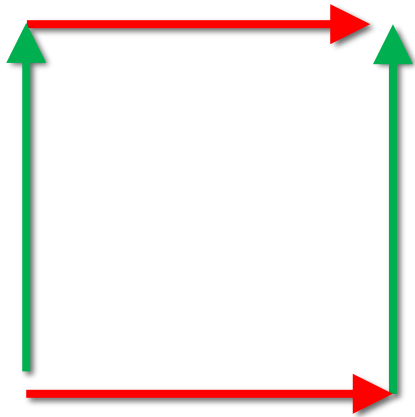
$$\chi = 1 - 2 + 3 = 2$$

$$2 = 2 - 2g \Rightarrow g = 0$$

Contrôlons cela

$$\chi = v - e + f$$

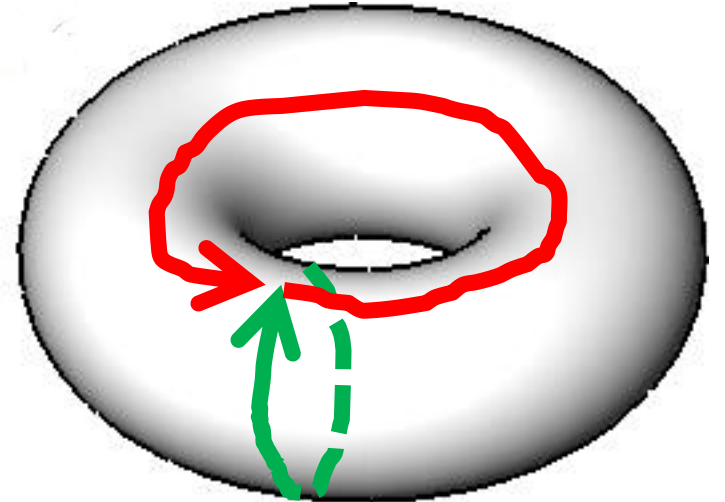
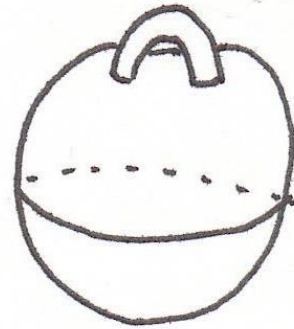
- Orientable: $\chi = 2 - 2g$
- Non-orientable: $\chi = 2 - g$



Tore

$$\chi = 1 - 2 + 1 = 0$$

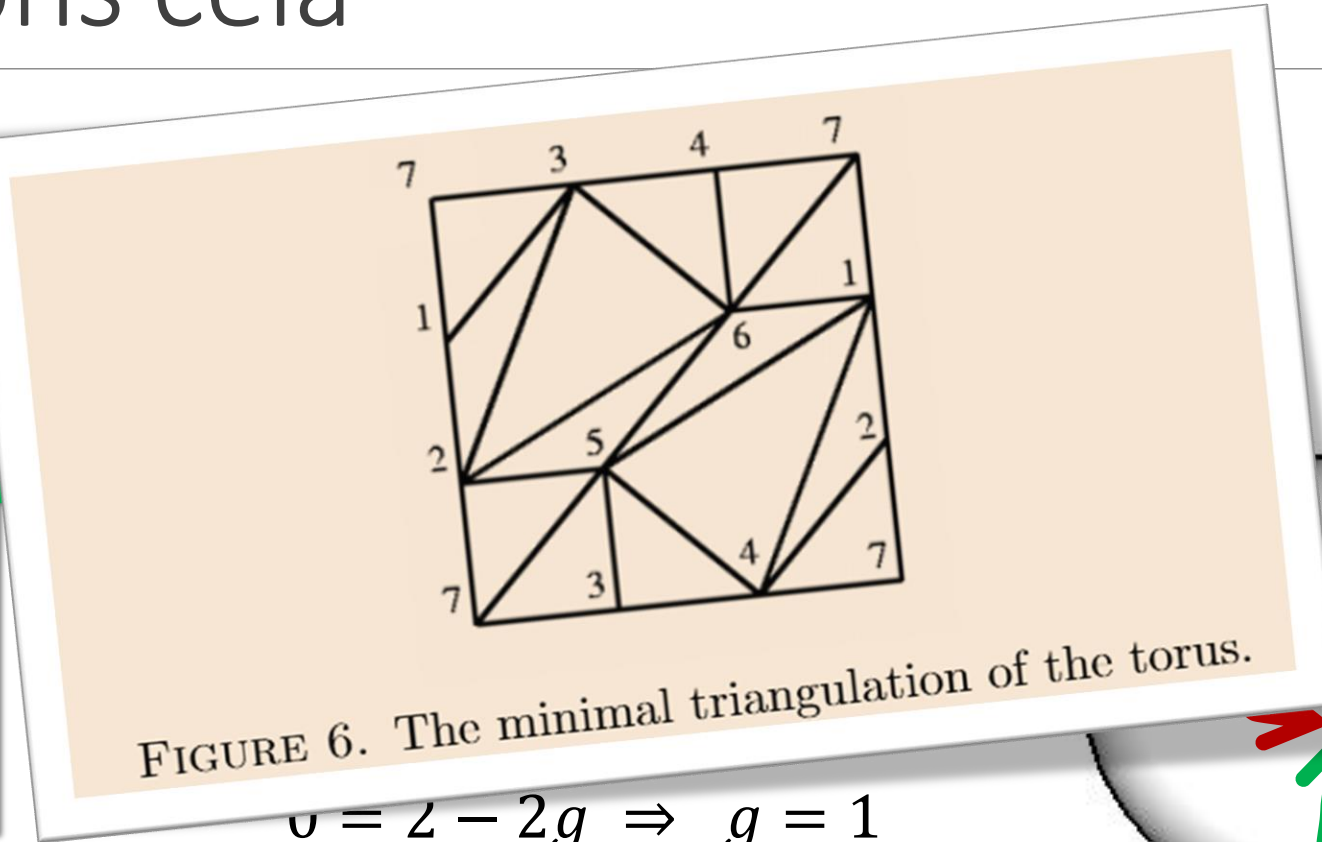
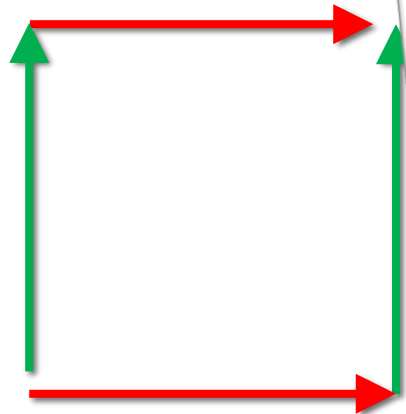
$$0 = 2 - 2g \Rightarrow g = 1$$



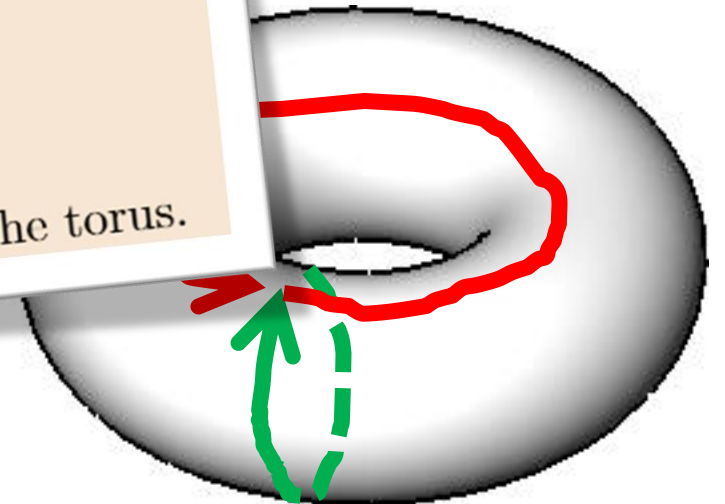
Contrôlons cela

$$\chi = v - e + f$$

- Orientable: χ
- Non-orientable



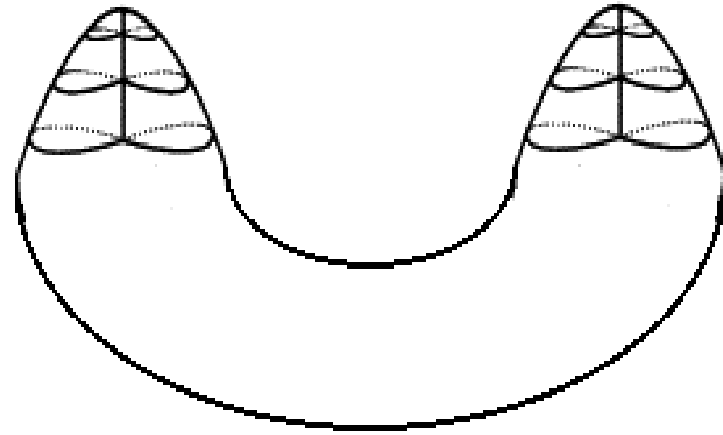
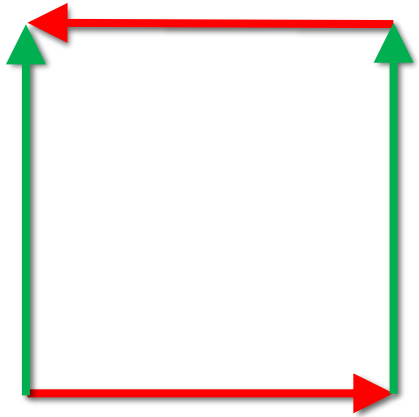
$$v = 2 - 2g \Rightarrow g = 1$$



Contrôlons cela

$$\chi = v - e + f$$

- Orientable: $\chi = 2 - 2g$
- Non-orientable: $\chi = 2 - g$



Bouteille de Klein

$$\chi = 1 - 2 + 1 = 0$$

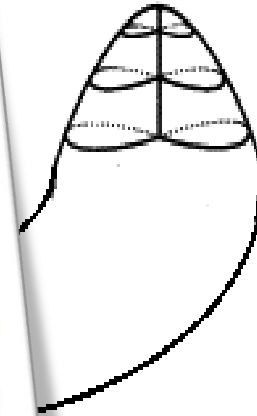
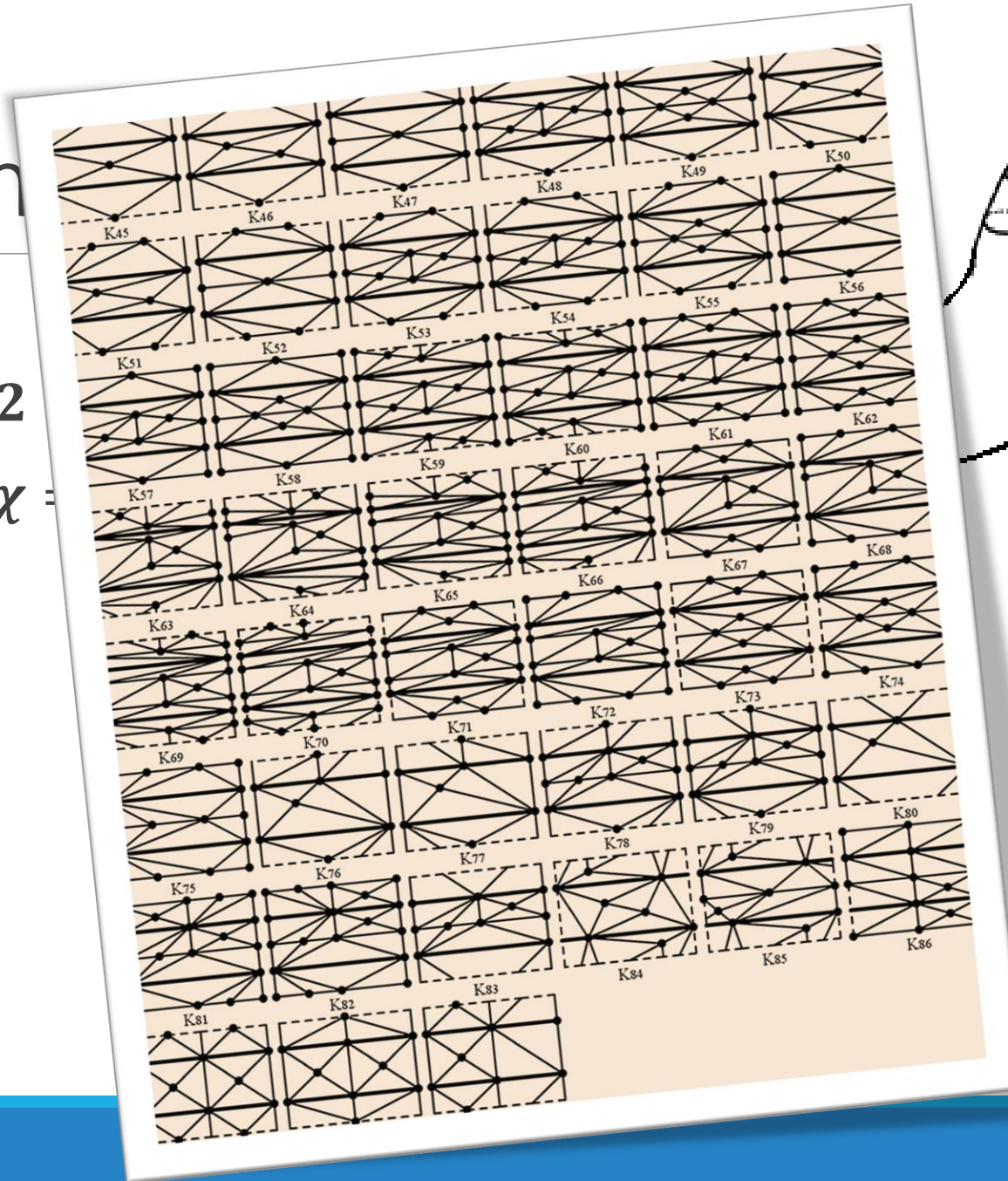
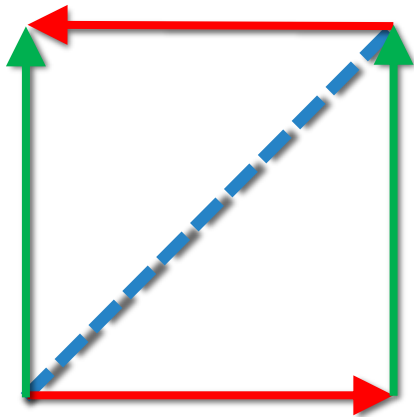
$$0 = 2 - g \Rightarrow g = 2$$



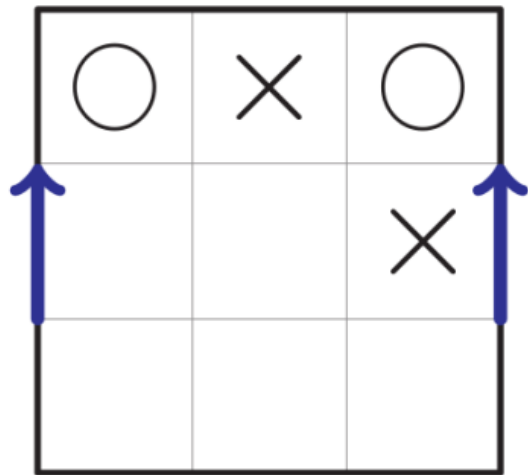
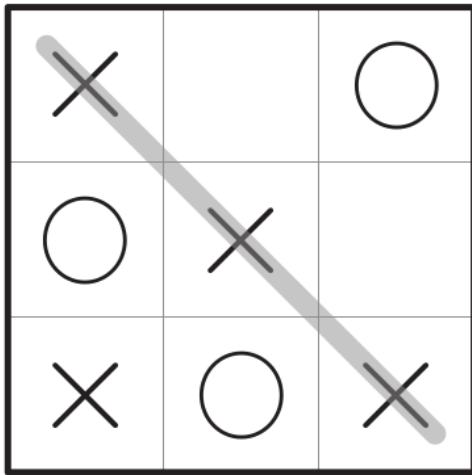
Contrôlon

$$\chi = v - e + f$$

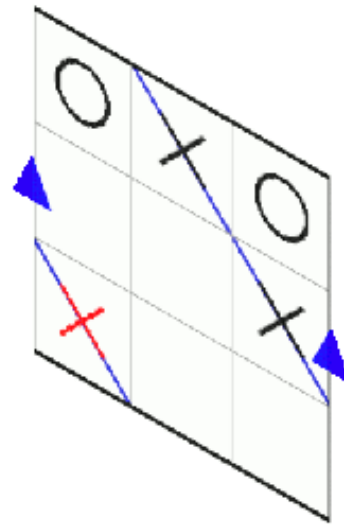
- Orientable: $\chi = 2$
- Non-orientable: $\chi =$



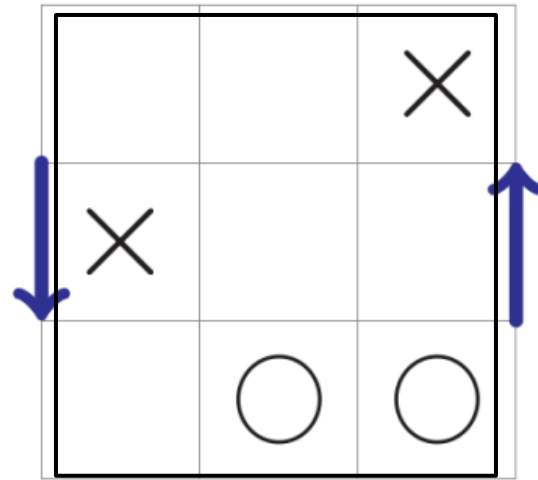
Le jeu OXO sur différentes surfaces



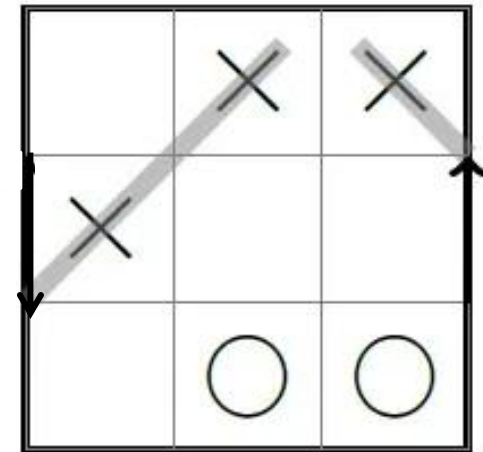
cylindre



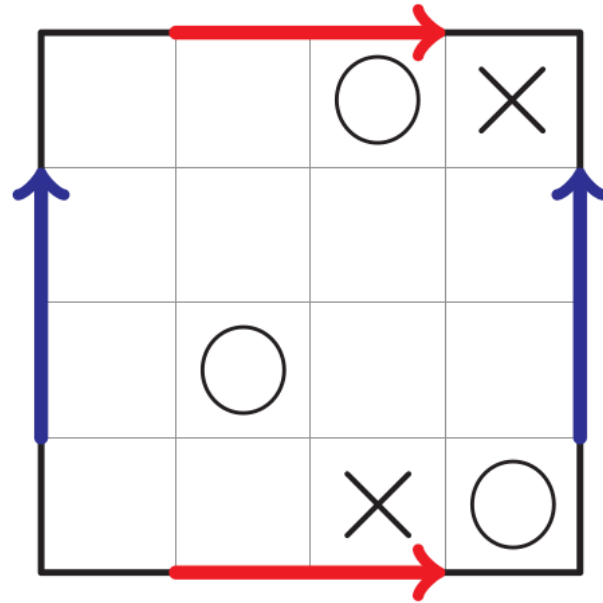
Le jeu OXO sur différentes surfaces



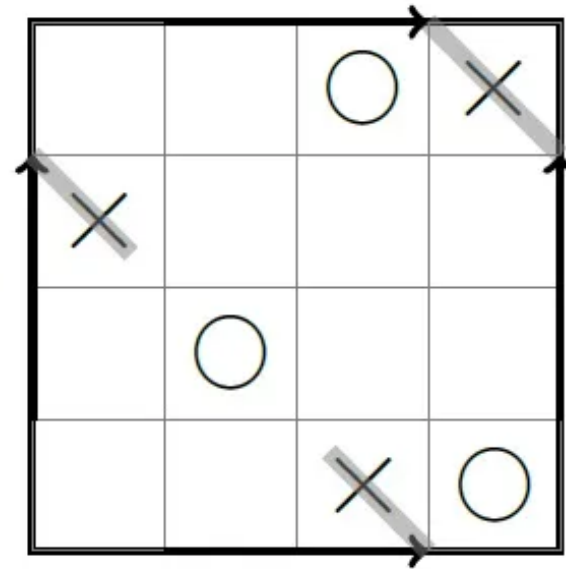
ruban de Möbius



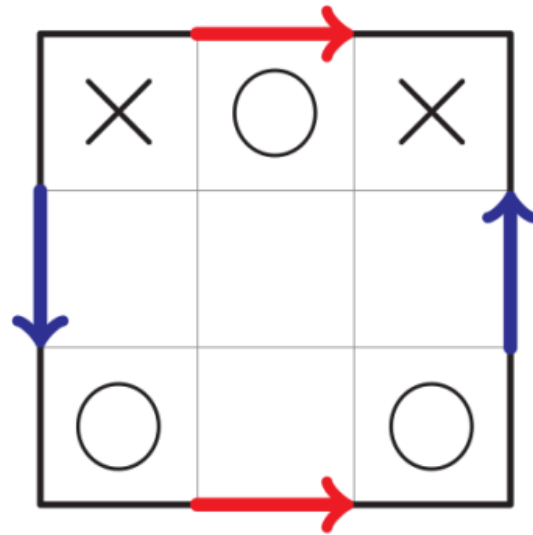
Le jeu OXO sur différentes surfaces



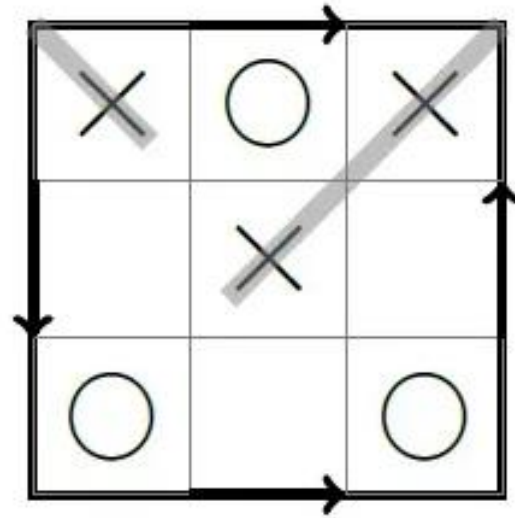
tore



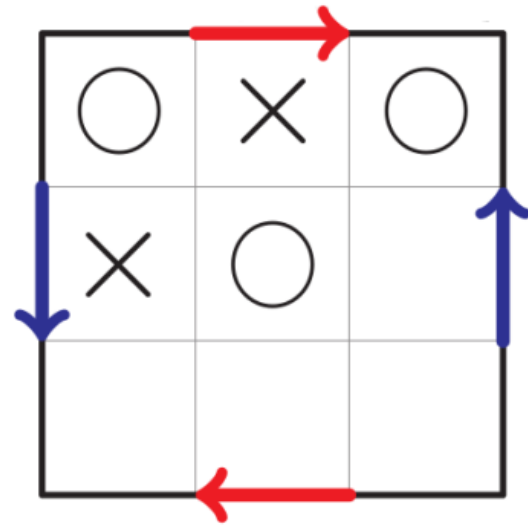
Le jeu OXO sur différentes surfaces



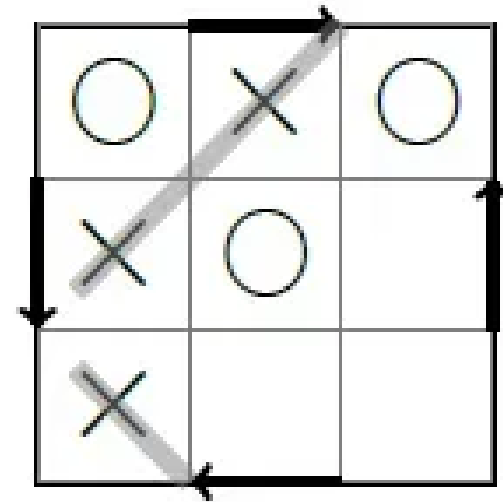
bouteille de Klein



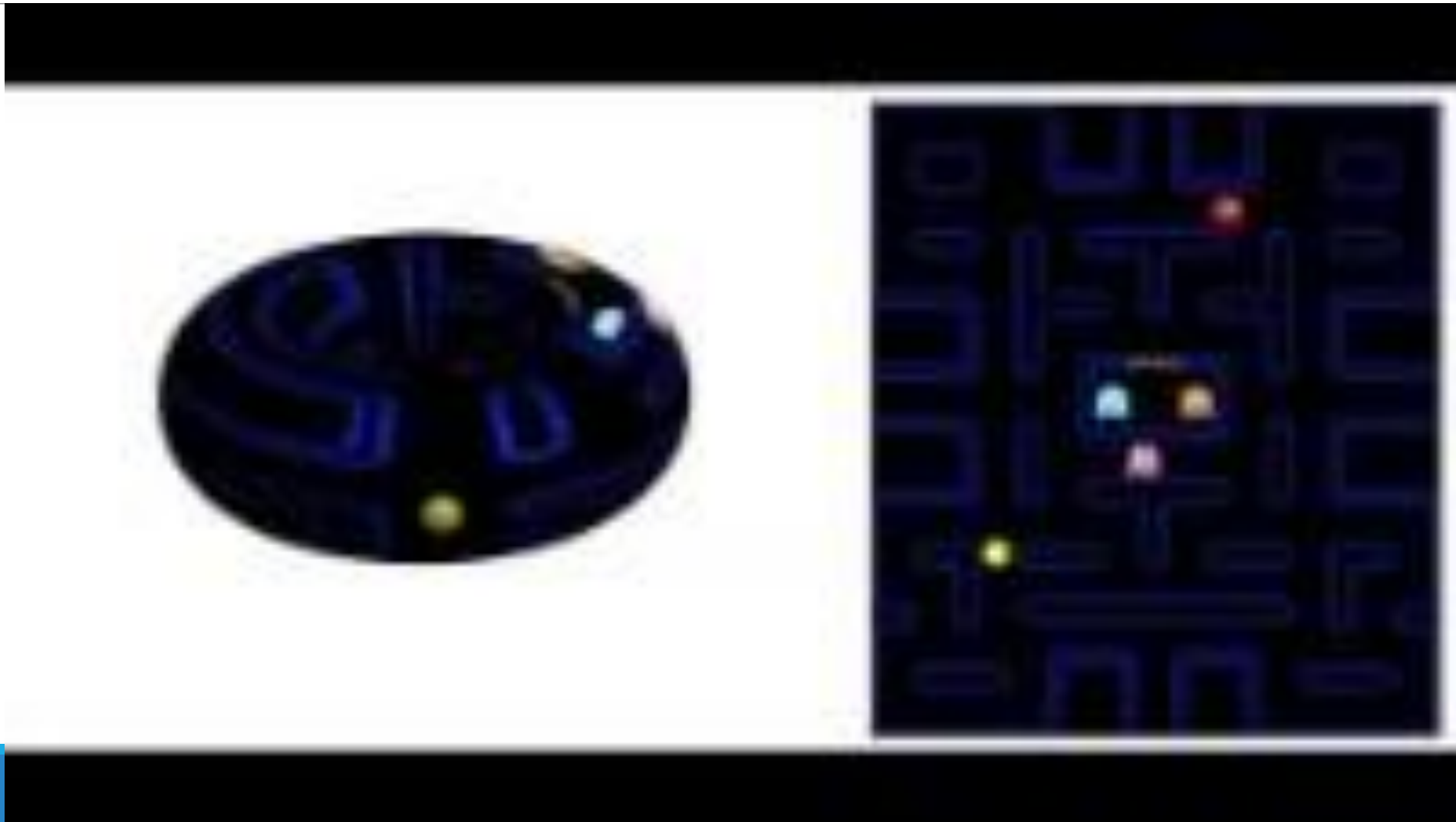
Le jeu OXO sur différentes surfaces



plan projectif



Pacman sur un tore



Définition 1.1. (Topologie, ouvert). Une topologie sur un ensemble E est une partie $\mathcal{T}$ de $\mathcal{P}(E)$ qui vérifie les propriétés suivantes :

1. $\emptyset \in \mathcal{T}, E \in \mathcal{T}$.
2. L'intersection de deux éléments de $\mathcal{T}$ est un élément de $\mathcal{T}$.
3. La réunion (finie ou infinie) d'une famille d'éléments de $\mathcal{T}$ est un élément de $\mathcal{T}$.

Un espace topologique est un couple $(E, \mathcal{T})$ où E est un ensemble et $\mathcal{T}$ une topologie sur E . Les éléments de $\mathcal{T}$ sont appelés les ouverts, ou les parties ouvertes, de E .

EXEMPLE 1.2.

1. Sur un ensemble E , il existe toujours deux topologies « extrêmes » : la topologie discrète $\mathcal{T}_d = \mathcal{P}(E)$ et la topologie grossière $\mathcal{T}_g = \{\emptyset, E\}$. Un espace muni de la topologie discrète (respectivement grossière) est dit discret (respectivement grossier).
2. Un ensemble à deux éléments $E = \{a, b\}$ peut être muni de quatre topologies différentes :

$$\mathcal{T}_g = \{\emptyset, E\}, \quad \mathcal{T}_1 = \{\emptyset, \{a\}, E\}, \quad \mathcal{T}_2 = \{\emptyset, \{b\}, E\}, \quad \mathcal{T}_d = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, E\}.$$

Du concret à l'abstrait

Introductions concrètes aux sujets abstraits.

Symétrie $\rightarrow$ groupes

Tangente, aire $\rightarrow$ dérivée, intégrale $\rightarrow$ limite

Géométrie, jeu $\rightarrow$ topologie

Ce que nous avons fait

- Jeu « divide et impera » dans le plan
- Jeu sur le double cylindre
- Représentations plane de surfaces
- Classification de surfaces
- Autre jeu: OXO

Bibliographie



Aarts, J.M. (2005). Eenzijdige oppervlakken. *Pythagoras* 44/4, 6-11.

Aarts, J.M. (2010). *Topologie door zien*. Utrecht: Epsilon Uitgaven.

Bolton, A. (2018). Topological tic-tac-toe.

<https://chalkdustmagazine.com/features/topological-tic-tac-toe/>

De Praktijk (s.d.). *Topwis Poincaré*.

<https://www.nemosciencemuseum.nl/nl/onderwijs/voortgezet-onderwijs/lesmateriaal/lesmateriaal/wiskunde-voor-vo/>

Flegg, H.G. (1974). *From Geometry tot Topology*. New York: Crane, Russak & co.

Wiskunde b-dag (2019). *Verbind en heers*. <https://wiskundeinteamssites.uu.nl/>

Zeeman, E.C. (1966). *An Introduction to Topology. The Classification*

Theorem for Surfaces. <https://www.maths.ed.ac.uk/~v1ranick/surgery/zeeman.pdf>

Publicité

Abonnez-vous.
C'est (presque)
gratuit.



HOME



REDACTIONEEL



SPINNENWEB



ONDER DE LOEP



BIBWIJZER



ACTUALITEIT

Archief doorzoeken



Een blokje kaas verdelen

 Hilde Eggermont  8 mei 2021  0  0



ONDER DE LOEP

Lessen uit afstandsonderwijs



SPINNENWEB

Instant insanity



ONDER DE LOEP

Redeneren en puzzelen met grafen