Comment (ne pas) se tirer une balle dans le pied avec une calculatrice

Jean VAN SCHAFTINGEN

Faculté des Sciences — École de Mathématique

UCLouvain

Congrès de la SBPMef
Tihange, 23–25 aout 2022

Se tirer une balle dans le pied

Programmation de la balle dans le pied

ATTENTION : Cette page n'est destinée qu'aux professionnels de l'informatique. Elle est incompréhensible par les autres

1. **C:**
   Vous vous tirez dans le pied.

---

2. **C++:**
   Vous créez accidentellement une douzaine d'instances de vous-même et leur tirez tous dans le pied. Apporter une aide médicale est impossible car vous ne pouvez pas affirmer quelles sont les copies, chacune se montrant du doigt et disant "c'est moi, là-bas."

---

3. **FORTRAN:**
   Vous vous tirez dans chaque doigt de pied, itérativement, jusqu'à ce que vous n'ayez plus de doigts de pied, puis vous changez de pied et recommencez l'opération. Si vous n'avez plus de balles, vous continuez quand même, car vous n'avez pas pensé à installer un gestionnaire d'exceptions.

---

4. **Modula-2:**
   Après avoir réalisé que vous ne pouviez rien faire en ce langage, vous vous tirez une balle dans la tête.

---

5. **COBOL:**
   AVEC un REVOLVER COLT45 VISER PISTOLER à JAMBE.PIED, ALORS appuyer BRAS.MAIN.DOIGT sur REVOLVER.GACHETTE. ALORS retourner REVOLVER à HOLSTER. VERIFIER si CHAUSSURE.LACET doit être refait.

---

6. **BASIC:**
   Tirez dans votre pied avec un pistolet à eau. Sur gros système, continuez tant que tout le corps n'est pas trempé.

http://www.info-3000.com/RIGOLECITY/infoballepied.htm

Mes côtés lumineux et obscur

A surprising formula for Sobolev norms

Haïm Brezis[a,b,c,d,1,2], Jean Van Schaftingen[e,1], and Po-Lam Yung[f,g,1]

[a]Department of Mathematics, Rutgers University, Piscataway, NJ 08854; [b]Department of Mathematics, Technion, Israel Institute of Technology, 32000 Haifa, Israel; [c]Department of Computer Science, Technion, Israel Institute of Technology, 32000 Haifa, Israel; [d]Laboratoire Jacques-Louis Lions, Sorbonne Université, 75005 Paris, France; [e]Institut de Recherche en Mathématique et Physique, Université Catholique de Louvain, 1348 Louvain-la-Neuve, Belgium; [f]Mathematical Sciences Institute, Australian National University, Canberra ACT 2601, Australia; and [g]Department of Mathematics, The Chinese University of Hong Kong, Ma Liu Shui, Hong Kong

Contributed by Haïm Brezis, December 31, 2020 (sent for review December 8, 2020; reviewed by Lawrence C. Evans, Alessio Figalli, and Fang-Hua Lin)

We establish the equivalence between the Sobolev seminorm $\|\nabla u\|_{L^p}$ and a quantity obtained when replacing strong L^p by weak L^p in the Gagliardo seminorm $|u|_{W^{s,p}}$ computed at $s = 1$. As corollaries we derive alternative estimates in some exceptional cases (involving $W^{1,1}$) where the "anticipated" fractional Sobolev and Gagliardo–Nirenberg inequalities fail.

fractional Sobolev space | Marcinkiewicz space | fractional Gagliardo–Nirenberg interpolation inequalities

Fractional Sobolev spaces $W^{s,p}$ (also called Slobodeskii spaces) play a major role in many questions involving partial differential equations. On $\mathbb{R}^N$, $N \geq 1$, they are associated with the Gagliardo seminorm

$$|u|^p_{W^{s,p}} := \iint_{\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N} \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x-y|^{N+sp}} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \qquad [1.1]$$

where $0 < s < 1$ and $1 \leq p < \infty$. A well-known "drawback" of the Gagliardo seminorm is that one does not recover the Sobolev seminorm $\|\nabla u\|^p_{L^p}$ if one takes $s = 1$ in [**1.1**]. In fact, for every $1 \leq p < \infty$ and every measurable function u,

$$\left\| \frac{u(x) - u(y)}{|x-y|^{\frac{N}{p}+1}} \right\|^p_{L^p(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N)} = \iint_{\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N} \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x-y|^{N+p}} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \qquad [1.2]$$

Theorem 1.1. *For every $N \geq 1$, there exist constants $c = c(N) > 0$ and $C = C(N)$ such that*

$$c^p \|\nabla u\|^p_{L^p(\mathbb{R}^N)} \leq \left[\frac{u(x) - u(y)}{|x-y|^{\frac{N}{p}+1}} \right]^p_{M^p(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N)} \leq C \|\nabla u\|^p_{L^p(\mathbb{R}^N)} \qquad [1.3]$$

for all $u \in C^\infty_c(\mathbb{R}^N)$ and all $1 \leq p < \infty$.

Here $M^p = L^p_w = L^{p,\infty}$, $1 \leq p < \infty$, is the Marcinkiewicz (= weak L^p) space modeled on L^p, and

$$[f]^p_{M^p(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N)} := \sup_{\lambda > 0} \lambda^p \mathcal{L}^{2N} \left(\{ x \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N : |f(x)| \geq \lambda \} \right)$$

where $\mathcal{L}^{2N}$ is the Lebesgue measure on $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$.

In fact, one can sharpen substantially the lower bound in [**1.3**].

Theorem 1.2. *Let $N \geq 1$, $1 \leq p < \infty$, and $u \in C^\infty_c(\mathbb{R}^N)$. For $\lambda > 0$, let*

$$E_\lambda := \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N : x \neq y, \ \frac{|u(x) - u(y)|}{|x-y|^{\frac{N}{p}+1}} \geq \lambda \right\}. \qquad [1.4]$$

Then

$$\lim_{\lambda \to \infty} \lambda^p \mathcal{L}^{2N}(E_\lambda) = \frac{k(p, N)}{N} \|\nabla u\|^p_{L^p(\mathbb{R}^N)}. \qquad [1.5]$$

Here

UCLouvain

> LES ÉTUDES > LA RECHERCHE > L'UNIVERSITÉ

My UCL FR Rechercher

Descriptif de cours - *LMAT1151*

Catalogue des formations

Cette fiche en PDF

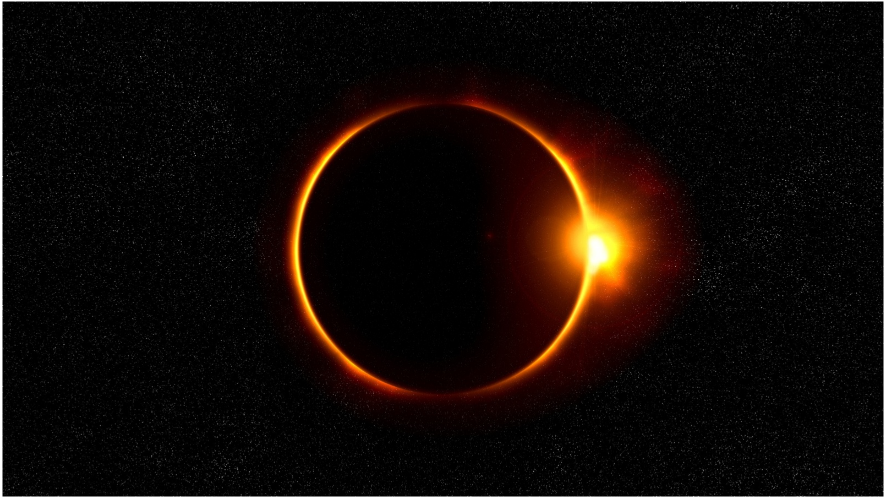
Calcul numérique : méthodes et outils logiciels

LMAT1151 2021-2022 *Louvain-la-Neuve*

5.00 crédits	**30.0 h + 45.0 h**	**Q1**

Enseignants Van Schaftingen Jean;

Les petites erreurs s’accumulent…



Un petit problème

La longueur de la diagonale d'un carreau carré de côté de longueur 60 cm est :

1. 90 cm
2. 85 cm
3. 84,9 cm
4. 84,852 813 742 385 7 cm
5. 84,852 813 742 385 702 928 101 323 452 581 884 714 180 312 522 616 cm
6. $60\sqrt{2}$ cm

Excès de naïveté ou de prudence

Le calcul numérique est-il ?

Inexact
«Ce n’est pas la *bonne valeur*.»

Précis
«Il répond à mon besoin.»

Exact
«La bonne réponse est donnée par la calculatrice.»

Peut-on se fier au calcul numérique ?

Apollo 10

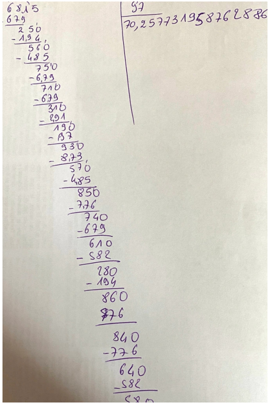
Ariane 5, Vol 501

Calculer numériquement en 2022

- Calcul humain (mental ou écrit)
- Calculatrice électronique
- Ordinateur

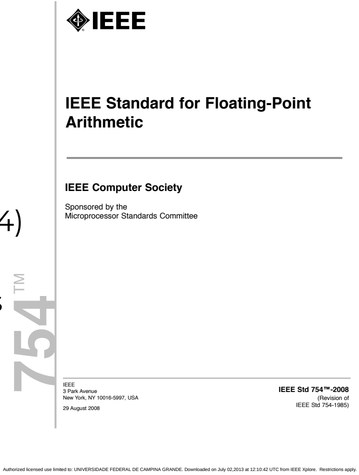
Calcul humain

- Technique enseignable
- Erreur très visible
- Long et couteux
- Historiquement important



Calcul sur ordinateur

- Grands nombres de calculs
- Grandes quantités de données
- Représentation et calculs standardisés (IEEE754) dans les processeurs
- Implémentation variable dans les compilateurs
- Syntaxe parfois variable (3ˆ3ˆ3)


IEEE

IEEE Standard for Floating-Point Arithmetic

IEEE Computer Society

Sponsored by the
Microprocessor Standards Committee

754™

IEEE
3 Park Avenue
New York, NY 10016-5997, USA

29 August 2008

IEEE Std 754™-2008
(Revision of
IEEE Std 754-1985)

Calculatrice

- Interface essentiellement avec l'humain
- Variété des représentation et calculs
- Puissance de calcul limitée
- Outil didactique

Message du jour

Utiliser la calculatrice en classe permet de se sensibiliser aux possibilités et aux limites du calcul numérique.

Le calcul numérique

Le calcul numérique utilise un nombre fini d'opérations sur des représentations finies de nombres pour donner des réponses précises.

Numerical analysis is the study of algorithms for the problems of continuous mathematics. (Trefethen, 1992)

Calculer symboliquement ?

$$\int_1^2 \frac{1}{(1+x^4)^4} = -\frac{77\sqrt{2}\pi}{1024} - \frac{77\sqrt{2}\log\left(\sqrt{2}+2\right)}{1024} - \frac{433559}{3773184} - \frac{77\sqrt{2}\log\left(5-2\sqrt{2}\right)}{1024} + \frac{77\sqrt{2}\log\left(2-\sqrt{2}\right)}{1024} + \frac{77\sqrt{2}\log\left(2\sqrt{2}+5\right)}{1024} - \frac{77\sqrt{2}\operatorname{atan}\left(1-2\sqrt{2}\right)}{512} + \frac{77\sqrt{2}\operatorname{atan}\left(1+2\sqrt{2}\right)}{512}$$

Calculer exactement sur des fractions ?

$$\sum_{n=1}^{10} \frac{1}{n^2} = \frac{1968329}{1270080}$$

$$\sum_{n=1}^{20} \frac{1}{n^2} = \frac{17299975731542641}{10838475198270720}$$

$$\sum_{n=1}^{100} \frac{1}{n^2} = \frac{1589508694133037873112297928517553859702383498543709859889432834803818131090369901}{972186144434381030589657976672623144161975583995746241782720354705517986165248000}$$

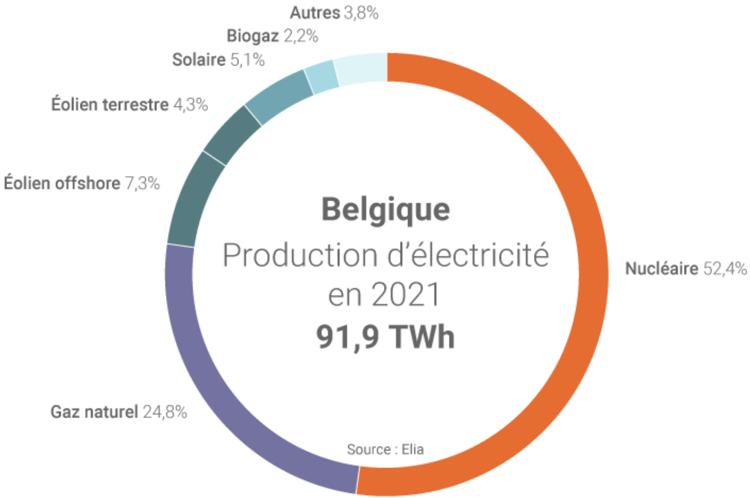
1re tâche

Effectuer un calcul inexact sur votre calculatrice

Représentation en virgule flottante

$$\pm \square , \square \square \cdots \square \square \cdot 10^{\pm \square \square \cdots \square \square}$$

L’arrondi en traitement de données



2^e tâche

Déterminer le plus grand nombre représentable sur votre calculatrice

3^e tâche

Déterminer le plus petit nombre strictement positif représentable sur votre calculatrice

4e tâche

Déterminer le nombre de décimales que votre calculatrice utilise.

ε–machine

$\varepsilon_{\mathrm{machine}}$ est le plus petit nombre strictement positif tel que $1 + \varepsilon_{\mathrm{machine}}$ ne s'arrondit pas à 1 sur la machine.

$0{,}1 + 0{,}2 \neq 0{,}3$

Si je calcule avec Python sur mon ordinateur, il me dit que $0{,}1 + 0{,}2 \neq 0{,}3$.
0,1, 0,2 et 0,3 sont des nombres binaires illimités périodiques :

$$0{,}1_{10} = 0{,}00011001100110\ldots_2$$
$$0{,}2_{10} = 0{,}00110011001100\ldots_2$$
$$0{,}3_{10} = 0{,}01001100110011\ldots_2$$

Au lieu de vérifier $0{,}1 + 0{,}2 = 0{,}3$ l'ordinateur vérifie que

$$\begin{aligned}&0{,}100\,000\,000\,000\,000\,005\,551\,115\,123\,125\,782\,702\,118\,158\,340\,454\,101\,562\,5\\+&0{,}200\,000\,000\,000\,000\,011\,102\,230\,246\,251\,565\,404\,236\,316\,680\,908\,203\,125\\\neq\ &0{,}299\,999\,999\,999\,999\,988\,897\,769\,753\,748\,434\,595\,763\,683\,319\,091\,796\,875.\end{aligned}$$

5^{e} tâche

Déterminer si votre calculatrice calcule en base 2 ou en base 10.

Conversion décimal/binaire

Un problème difficile

- Décimal codé binaire (BCD)
- Bases en mathématiques modernes
- Recherche active d'algorithmes

La Libre

Journal · Nos podcasts · Radio

Libre ECO · International · Planète · Culture · Sports · Lifestyle · Débats · Régions

International › Amérique

Le mémoire de cet étudiant de master tape dans l'oeil de Microsoft

La célèbre multinationale informatique a intégré les conclusions du mémoire de l'étudiant dans ses fonctionnalités.

J.F.

Publié le 10-03-2022 à 09h58 - Mis à jour le 10-03-2022 à 22h17

RESEARCH ARTICLE

Number Parsing at a Gigabyte per Second

Daniel Lemire[1]*

[1]DOT-Lab Research Center, Université du Québec (TELUQ), Montreal, Quebec, H2S 3L5, Canada

Correspondence
Daniel Lemire, DOT-Lab Research Center, Université du Québec (TELUQ), Montreal, Quebec, H2S 3L5, Canada
Email: lemire@gmail.com

Funding information
Natural Sciences and Engineering Research Council of Canada, Grant Number: RGPIN-2017-03910

With disks and networks providing gigabytes per second, parsing decimal numbers from strings becomes a bottleneck. We consider the problem of parsing decimal numbers to the nearest binary floating-point value. The general problem requires variable-precision arithmetic. However, we need at most 17 digits to represent 64-bit standard floating-point numbers (IEEE 754). Thus we can represent the decimal significand with a single 64-bit word. By combining the significand and precomputed tables, we can compute the nearest floating-point number using as few as

Triangle du calcul numérique

À méthode de calcul donnée, on doit choisir

Coût

Précision

Rapidité

1^{er} problème

De quelle distance s'éloigne-t-on d'un cercle de rayon 1 en parcourant une distance de 10^{-7} le long de la tangente.

À l'échelle de la terre, cela revient à se déplacer d'environ 6,5m perpendiculaire à la verticale à partir d'un point.

Plusieurs manières de calculer

Binôme conjugué

$$1 - \sqrt{1 - 10^{-14}} \simeq 4{,}996\,003\,610\,813\,204\,4 \times 10^{-15}$$

$$1 - \sqrt{1 - 10^{-14}} = \frac{10^{-14}}{1 + \sqrt{1 - 10^{-14}}} \simeq 5{,}000\,000\,000\,000\,012 \times 10^{-15}$$

$$1 - \sqrt{1 - 10^{-14}} \simeq \frac{10^{-14}}{2} \simeq 5 \times 10^{-15}$$

À l’échelle de la terre, cela nous fait environ 30 nm.

2e calcul

Calculer $1 - \cos(10^{-8})$.

Plusieurs manières de calculer

Identités trigonométriques

$$1 - \cos(10^{-8}) \simeq 0{,}0$$

$$\begin{aligned} 1 - \cos(10^{-8}) &= \cos 0 - \cos(10^{-8}) \\ &= 2 \sin \frac{0 + 10^{-8}}{2} \sin \frac{10^{-8} - 0}{2} \simeq 5{,}000\,000\,000\,000\,000\,5 \times 10^{-17} \end{aligned}$$

$$1 - \cos(10^{-8}) \simeq 2 \cdot (10^{-8}/2)^2 = 5 \times 10^{-17}$$

3^e calcul

Calculer $e^{-10^{-14}} - 1$.

Plusieurs manières de calculer

$$\exp(10^{-14}) - 1 \simeq 0{,}0$$

$$\exp(10^{-14}) - 1 = \mathrm{expm1}(10^{-14}) \simeq 1{,}000\,000\,000\,000\,005 \times 10^{-14}$$

$$\exp(10^{-14}) - 1 \simeq 10^{-14}$$

Quelques pistes en classe

- Valoriser l’obtention de valeur numérique
- Évaluer le besoin de précision
- Mobiliser les techniques algébriques et analytiques (binôme conjugué) en calcul numérique
- Effectuer des calculs dans différents contextes : modélisation, comptabilité, mathématiques.
- Rencontrer une diversité des systèmes de calcul numérique