# QUELQUES BELLES COURBES PARAMÉTRÉES

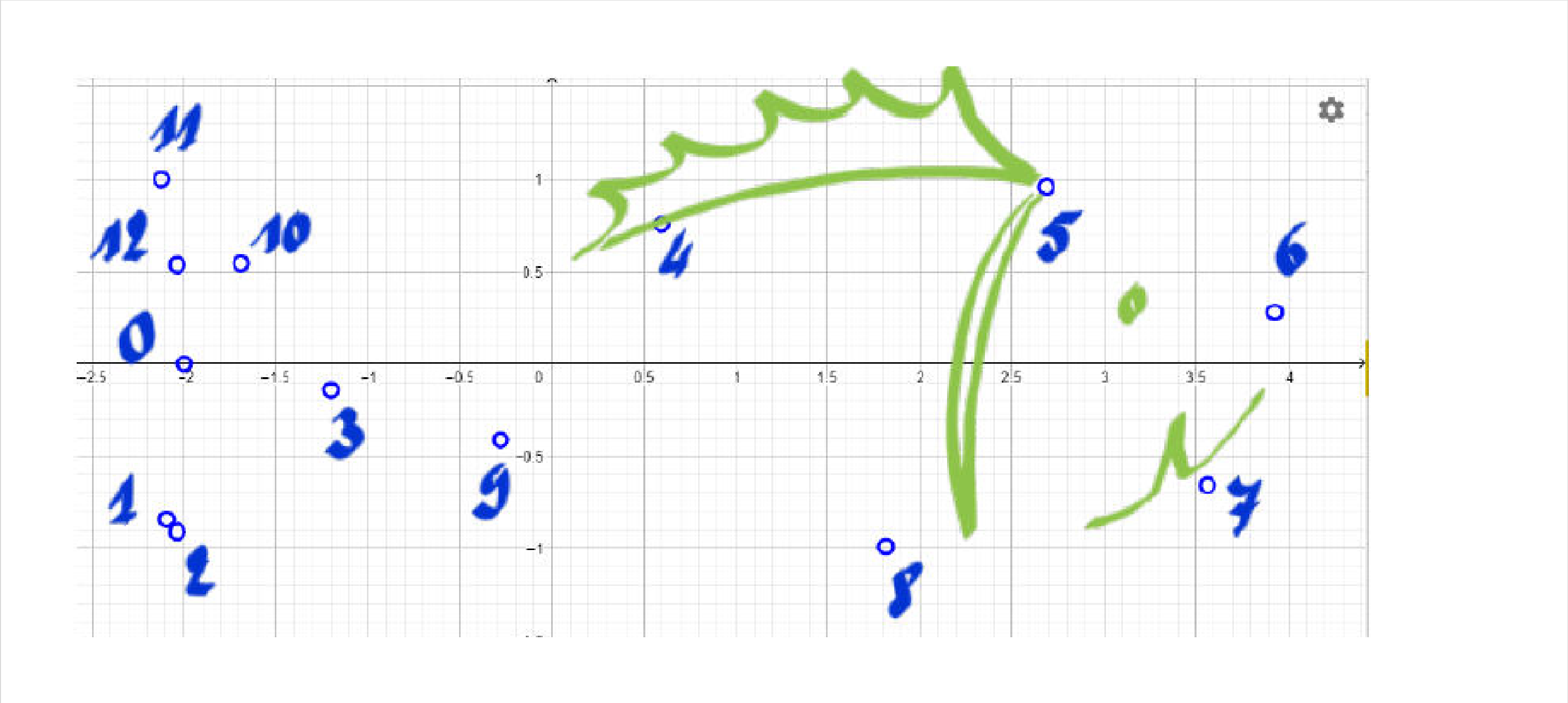
**Michel Roelens**

**Uitwiskeling** : abonnez-vous !

# RELIER DES POINTS

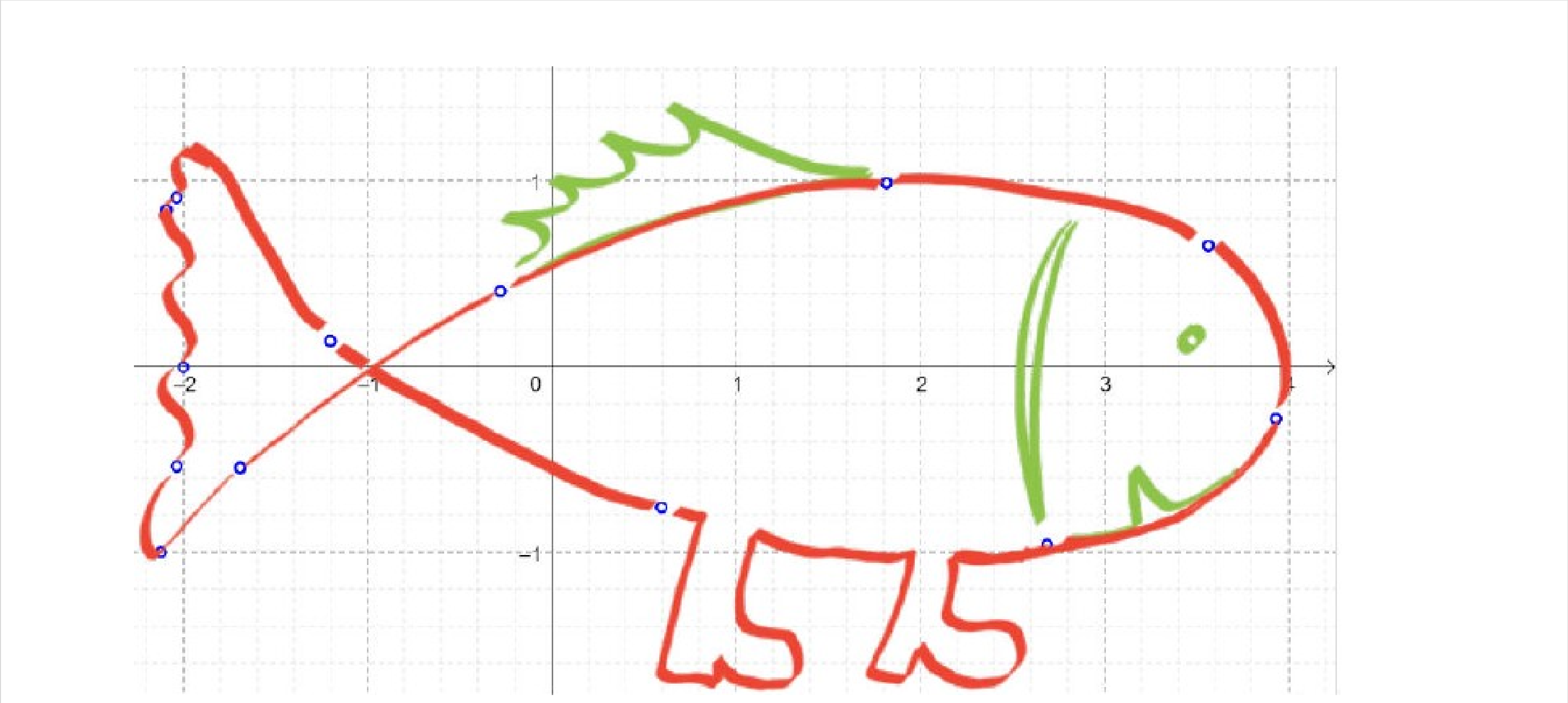
# Relier des points

$$f: \{0, 1, 2, \dots, 13\} \to \mathbb{R}^2; t \mapsto \left(\cos t - 3\cos\frac{t}{2}, -\sin t\right)$$



# Relier des points

$$f\colon\{0,1,2,\ldots,13\}\to\mathbb{R}^2;\,t\mapsto\left(\cos t-3\cos\frac{t}{2},-\sin t\right)$$

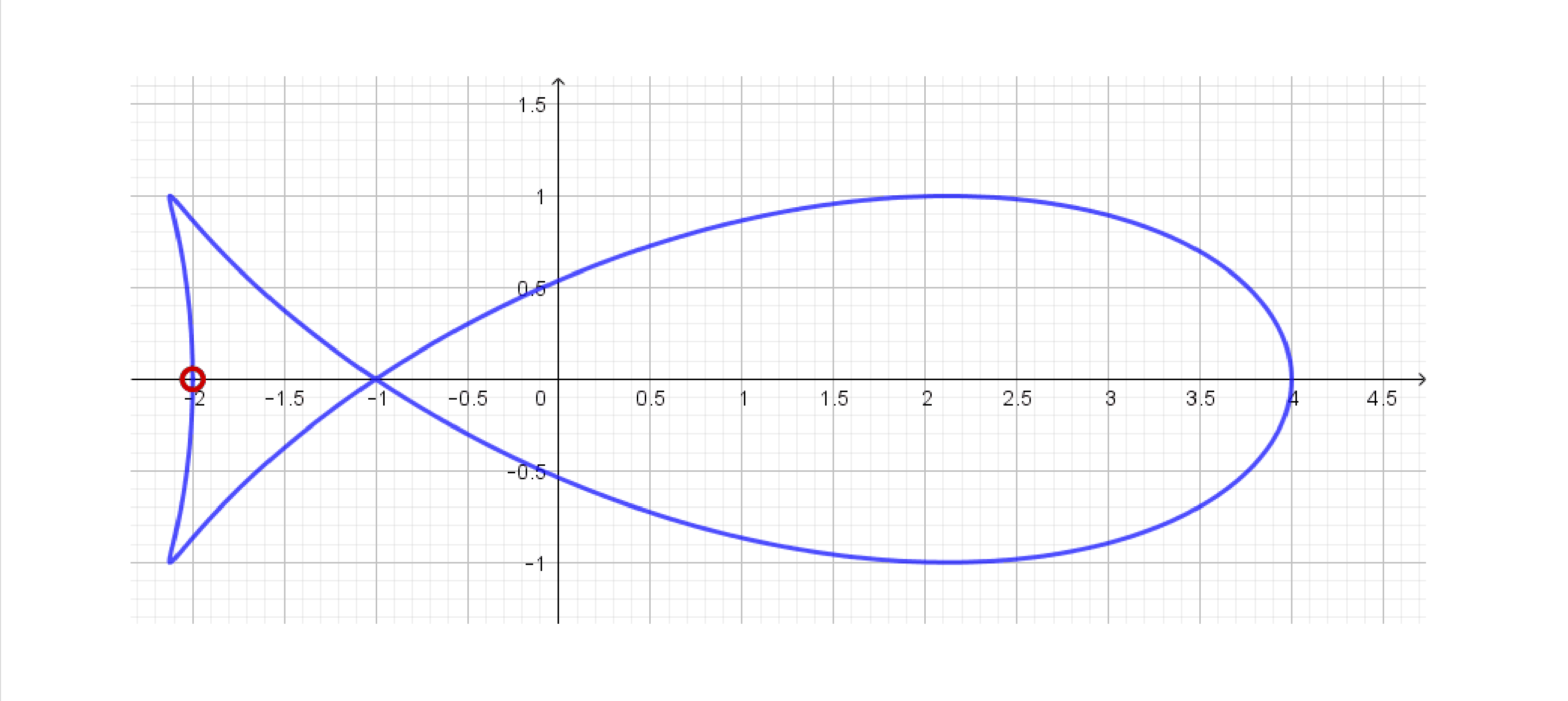


# Relier des points

$$f\colon [0,4\pi] \to \mathbb{R}^2; t \mapsto \left(\cos t - 3\cos\frac{t}{2}, -\sin t\right)$$

# Relier des points

$$f : [0, 4\pi] \to \mathbb{R}^2 ; t \mapsto \left(\cos t - 3\cos\frac{t}{2}, -\sin t\right)$$

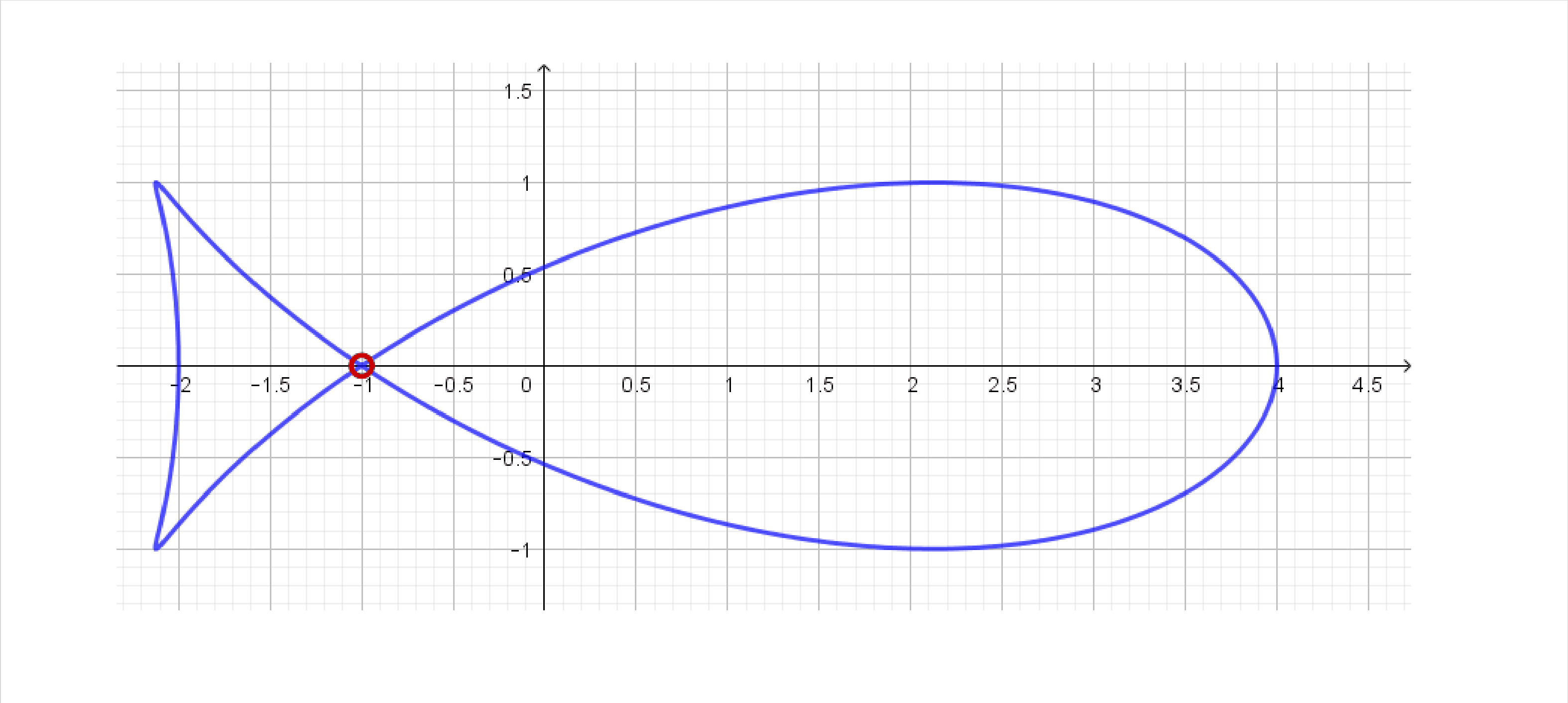


# Relier des points

$$g\colon [0,4\pi] \to \mathbb{R}^2; \quad t \mapsto \left(\cos(t+\pi) - 3\cos\frac{t+\pi}{2}, -\sin(t+\pi)\right)$$

# Relier des points

$$g : [0, 4\pi] \to \mathbb{R}^2; \quad t \mapsto \left(\cos(t+\pi) - 3\cos\frac{t+\pi}{2}, -\sin(t+\pi)\right)$$

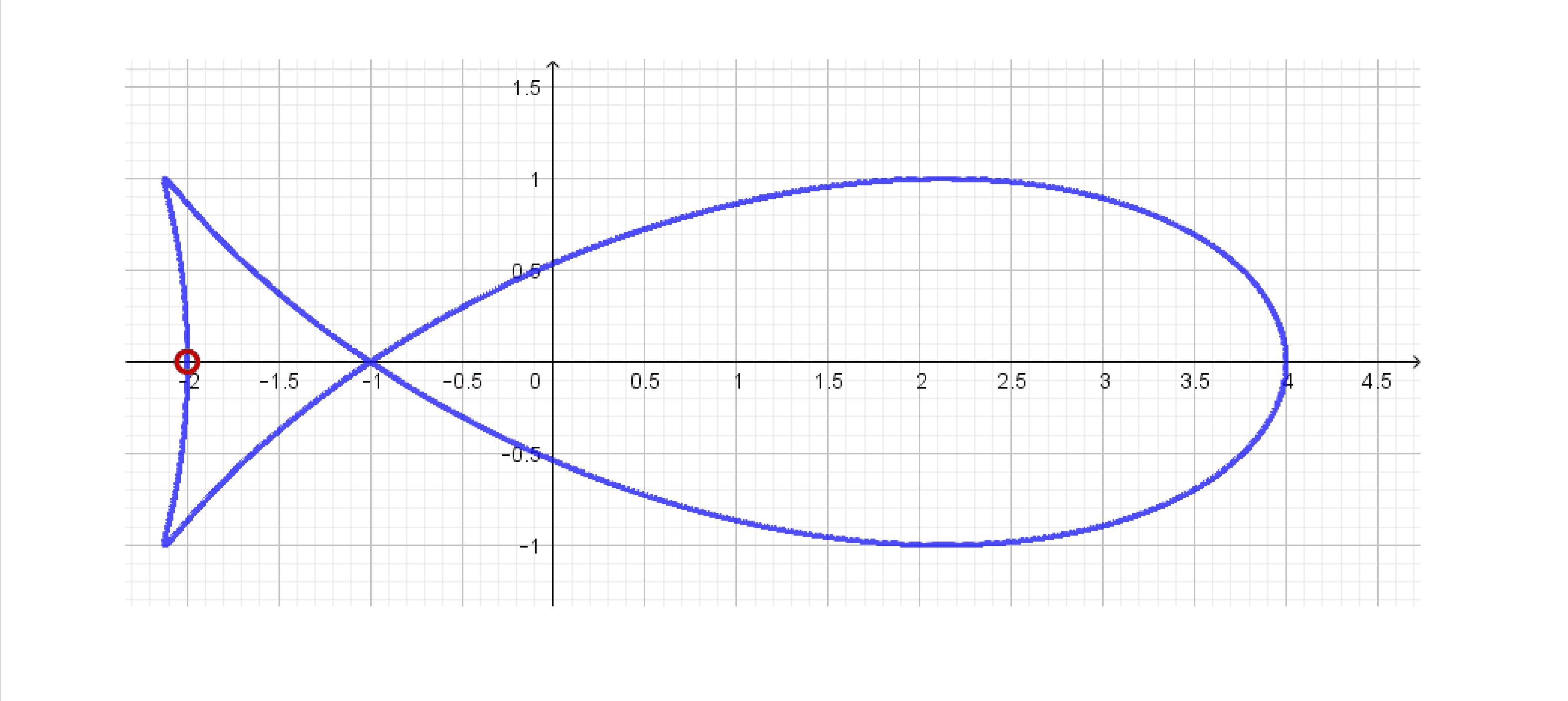


# Relier des points

$$h\colon [0,4\pi] \to \mathbb{R}^2; t \mapsto (\cos 10t - 3\cos 5t, -\sin 10t)$$

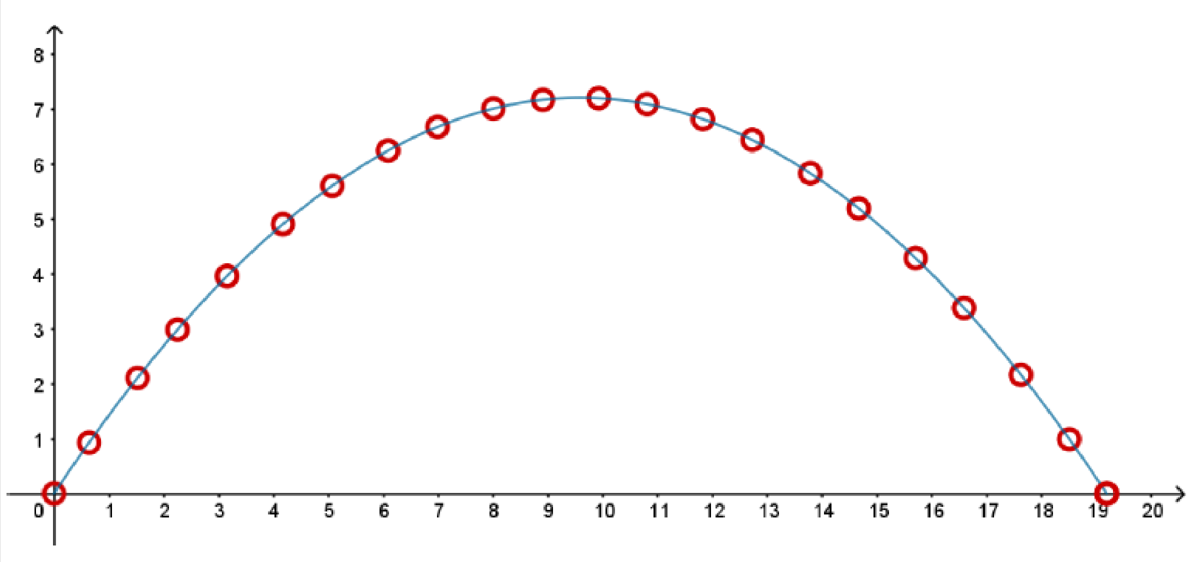
# Relier des points

$h\colon [0,4\pi] \to \mathbb{R}^2; t \mapsto (\cos 10t - 3\cos 5t, -\sin 10t)$



# LE VECTEUR VITESSE

# Le vecteur vitesse



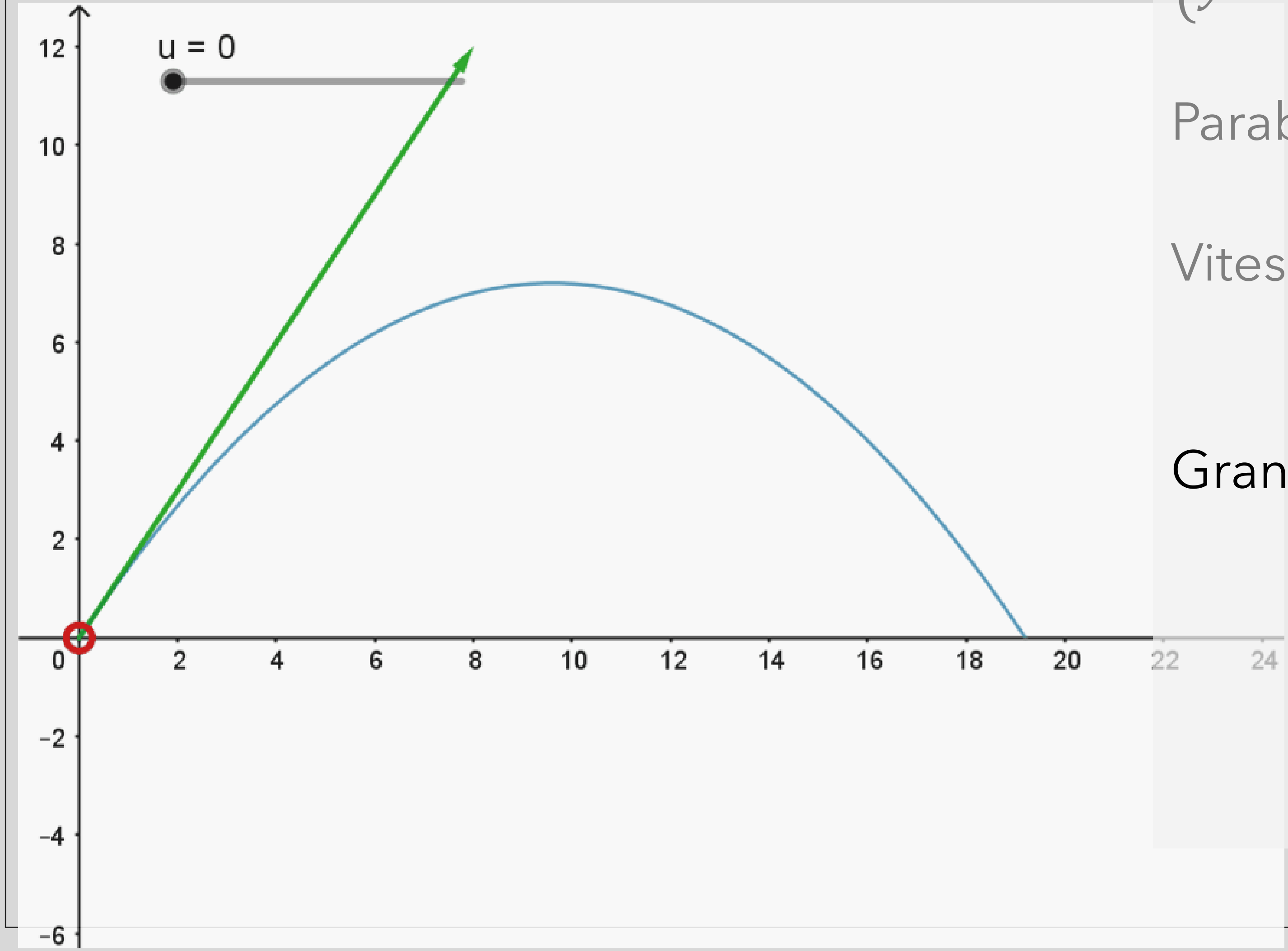

$$\begin{cases} x = 8t \\ y = 12t - 5t^2 \end{cases}$$ ($t$ en s; $x, y$ en m)

Parabole $y = \frac{3}{2}x - \frac{5}{64}x^2$

Vitesse $\vec{v}(t) = \left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}, \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)$

$= (8, 12 - 10t)$

# Le vecteur vitesse




$$\begin{cases} x = 8t \\ y = 12t - 5t^2 \end{cases} \qquad (t \text{ en s.}; x, y \text{ en m})$$

Parabole $y = \frac{3}{2}x - \frac{5}{8}x^2$

Vitesse $\vec{v}(t) = \left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}, \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)$

$$= (8, 12 - 10t)$$

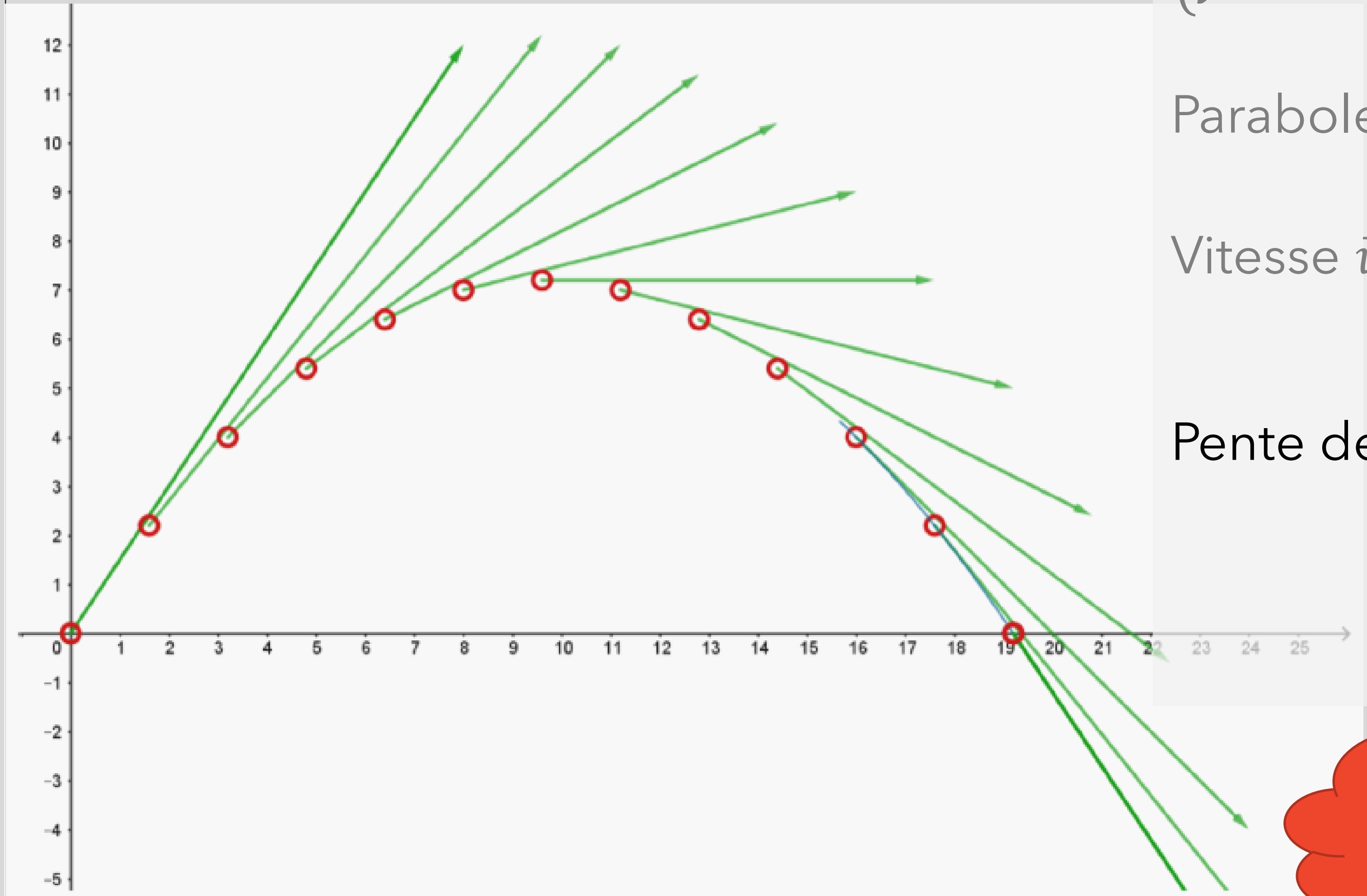
Grandeur de la vitesse

$$v(t) = \sqrt{8^2 + (12 - 10t)^2}$$

$$= 2\sqrt{52 - 60t + 25t^2}$$

# Le vecteur vitesse

$$\begin{cases} x = 8t \\ y = 12t - 5t^2 \end{cases} \qquad (t \text{ en s.}; \ x, y \text{ en m})$$




Parabole $y = \frac{3}{2}x - \frac{5}{8}x^2$

Vitesse $\vec{v}(t) = \left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}, \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)$

$$= (8, 12 - 10t)$$

Pente de la tangente:

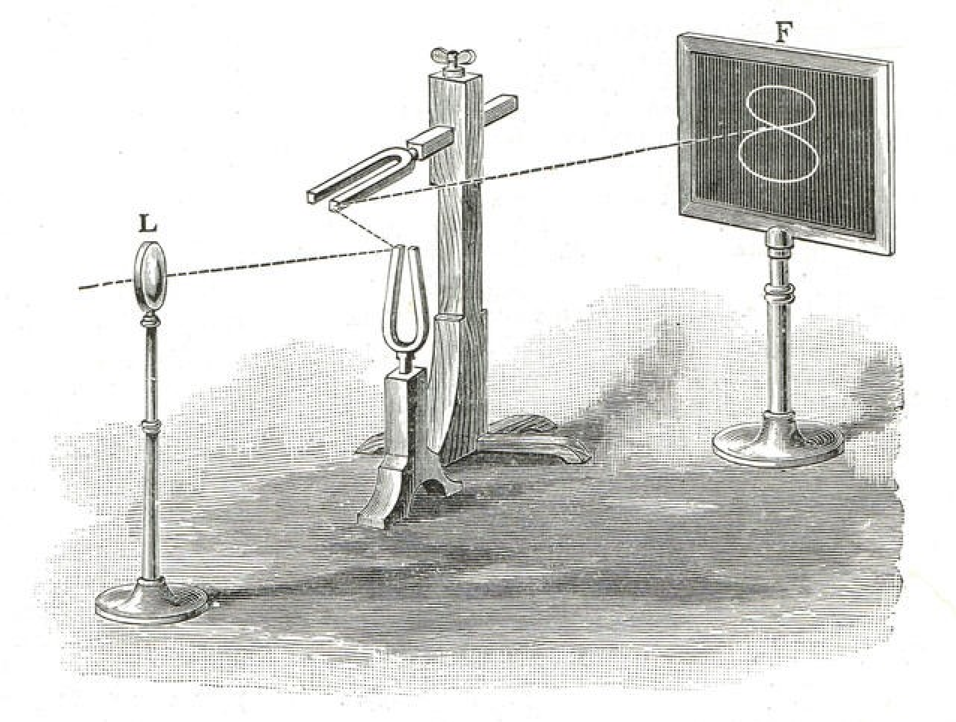
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}} = \frac{6 - 5t}{4}$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}$$

# QUELQUES FIGURES DE LISSAJOUS

# Quelques figures de Lissajous

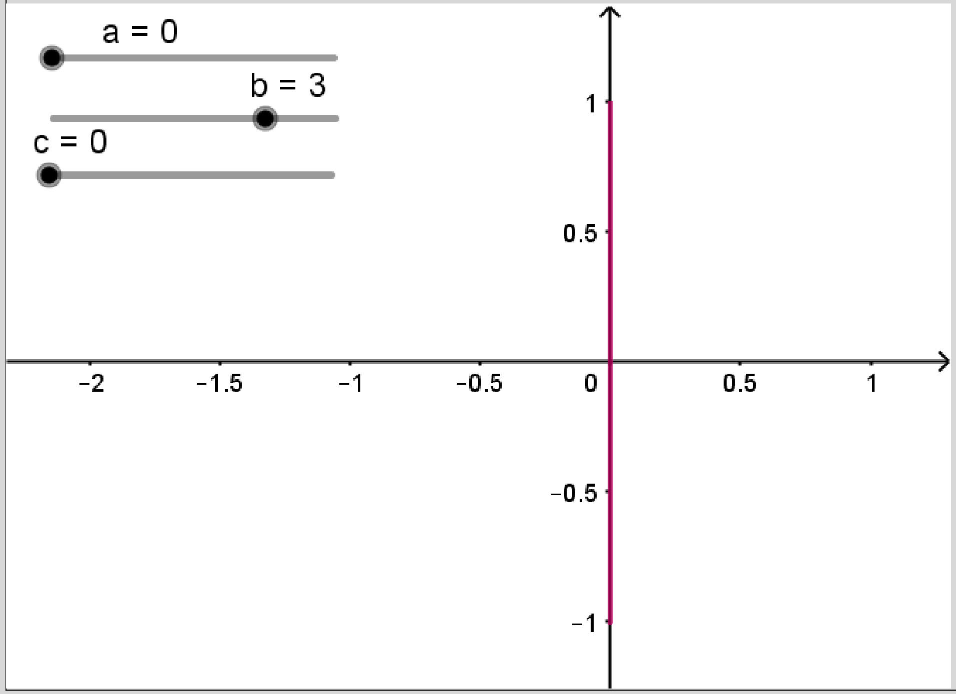
JULES ANTOINE LISSAJOUS, physicien 19e siècle: combinaison de deux vibrations harmoniques.

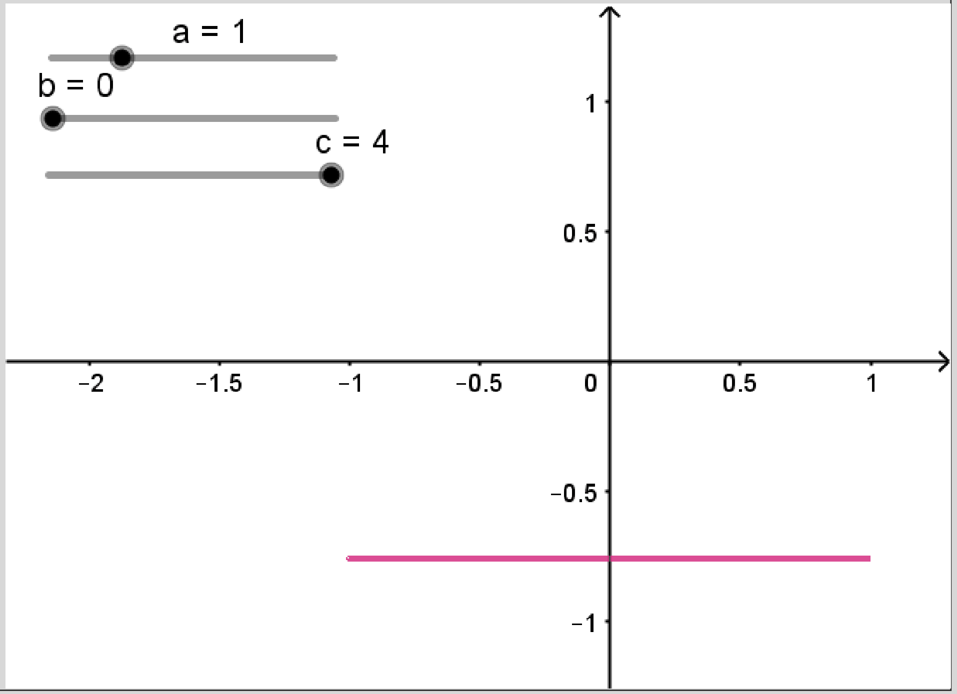



# Quelques figures de Lissajous

Une figure GeoGebra, plusieurs figures de Lissajous.

$$\begin{cases} x = \sin at \\ y = \sin(bt + c) \end{cases}$$



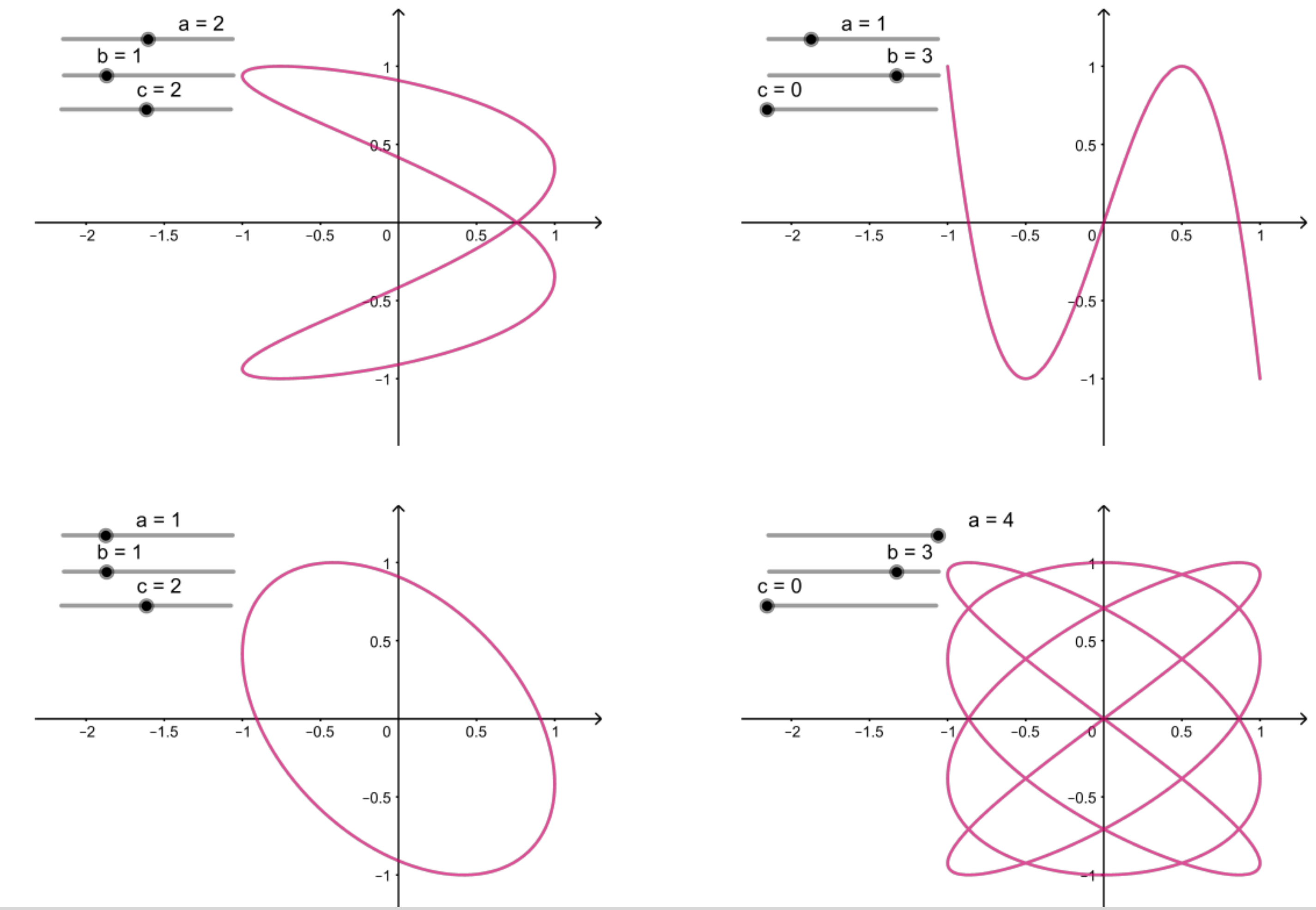
# Quelques figures de Lissajous

**Au travail !**

(Activité 1)

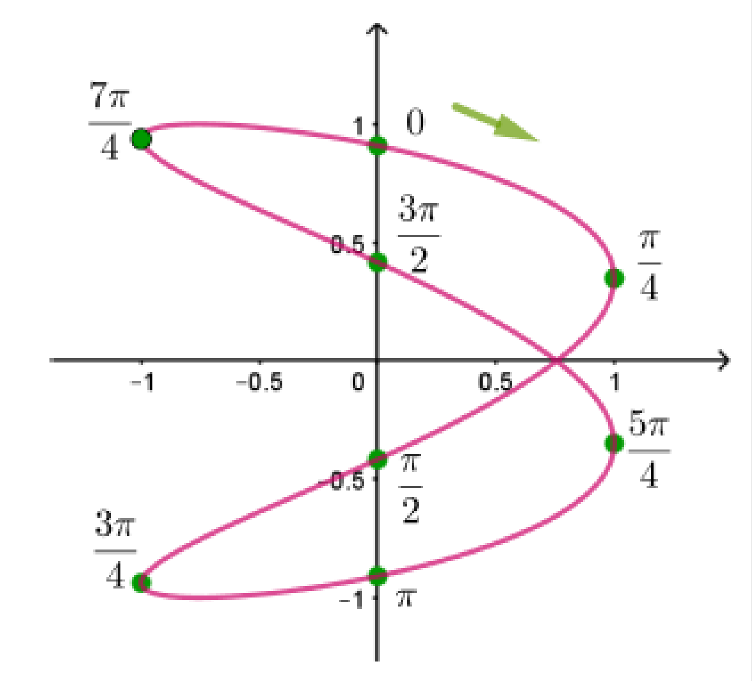
$$\begin{cases} x = \sin at \\ y = \sin(bt + c) \end{cases}$$

Choisir une des quatre figures de Lissajous et répondre aux questions.



# Quelques figures de Lissajous

**Corrigeons !**




$$\begin{cases} x = \sin 2t \\ y = \sin(t+2) \end{cases}$$

Le point d'auto-intersection : sur l'axe des $x$, donc

$$\sin(t+2) = 0 \Leftrightarrow t = k\pi - 2 \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Dans $[0, 2\pi]$: $t = \pi - 2; t = 2\pi - 2.$

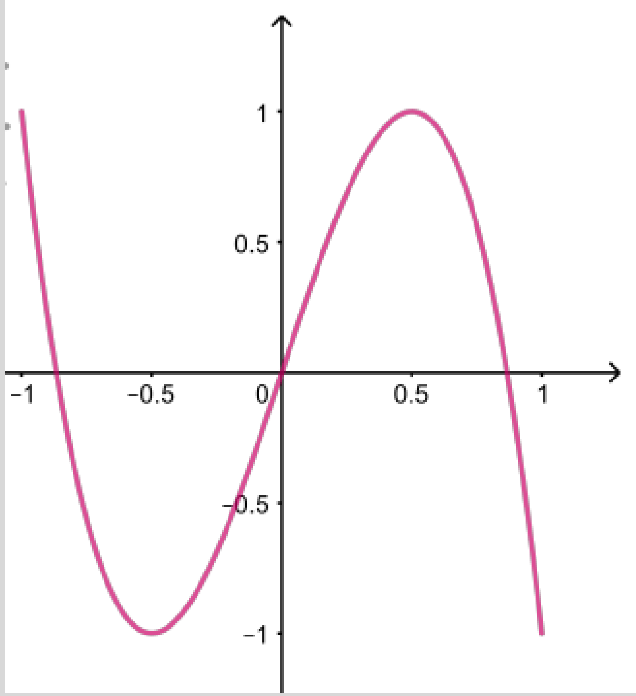
Tangente verticale :

$$\frac{dx}{dt} = 0 \Leftrightarrow 2\cos 2t = 0$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

# Quelques figures de Lissajous

**Corrigeons !**




$$\begin{cases} x = \sin t \\ y = \sin 3t \end{cases}$$

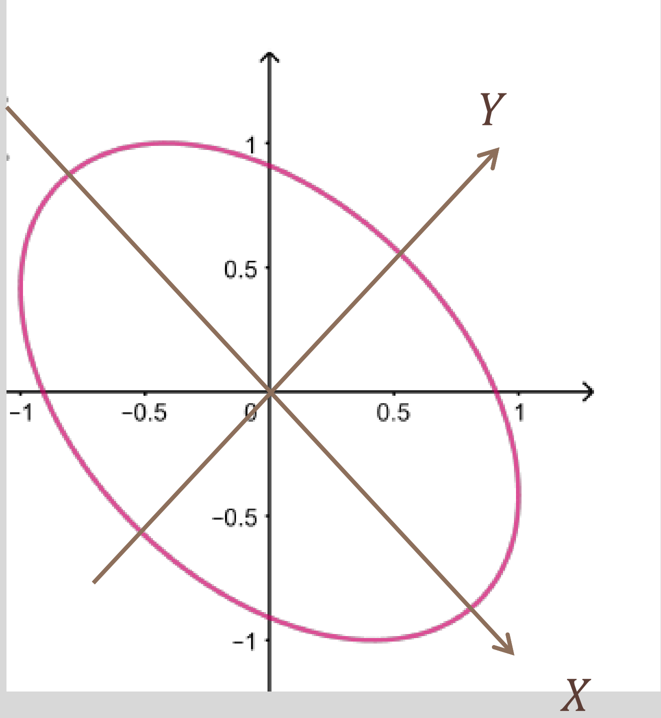
Fonction du 3e degré?

$$\begin{aligned} y &= \sin 3t \\ &= \sin(t + 2t) \\ &= \sin t \cos 2t + \cos t \sin 2t \\ &= \sin t\,(\cos^2 t - \sin^2 t) \\ &\qquad + \cos t \cdot 2 \sin t\ \cos t \\ &= 3 \sin t \cos^2 t - \sin^3 t \\ &= -4 \sin^3 t + 3 \sin t \\ &= -4x^3 + 3x \end{aligned}$$

# Quelques figures de Lissajous

$$\begin{cases} x = \sin t \\ y = \sin(t+2) \end{cases}$$

**Corrigeons !**




Ellipse ?

$$\begin{aligned} X &= \frac{\sqrt{2}}{2}(x-y) \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}(\sin t - \sin(t+2)) \\ &= \sqrt{2}\cos(t+1)\sin(-1) \\ Y &= \cdots \\ &= \sqrt{2}\sin(t+1)\cos 1 \end{aligned}$$

Éliminons $t$ :

$$\cos^2(t+1) + \sin^2(t+1) = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{X^2}{2\sin^2 1} + \frac{Y^2}{2\cos^2 1} = 1$$

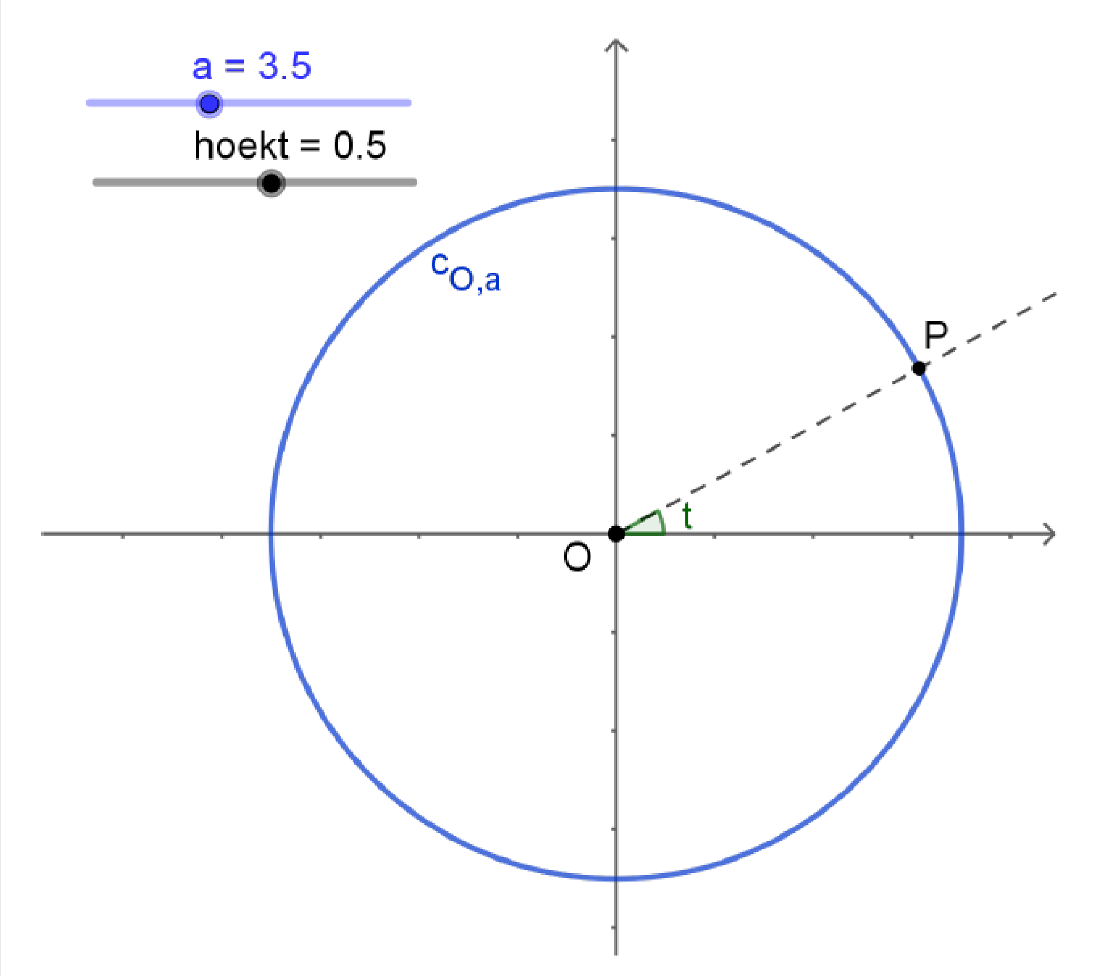
# C'EST BIENTÔT PAQUES

# C'est bientôt Paques

Commençons par un cercle de centre $O(0,0)$ et de rayon $a$.

Prenons comme paramètre l'angle au centre $t$.

$$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = a\sin t \end{cases}$$

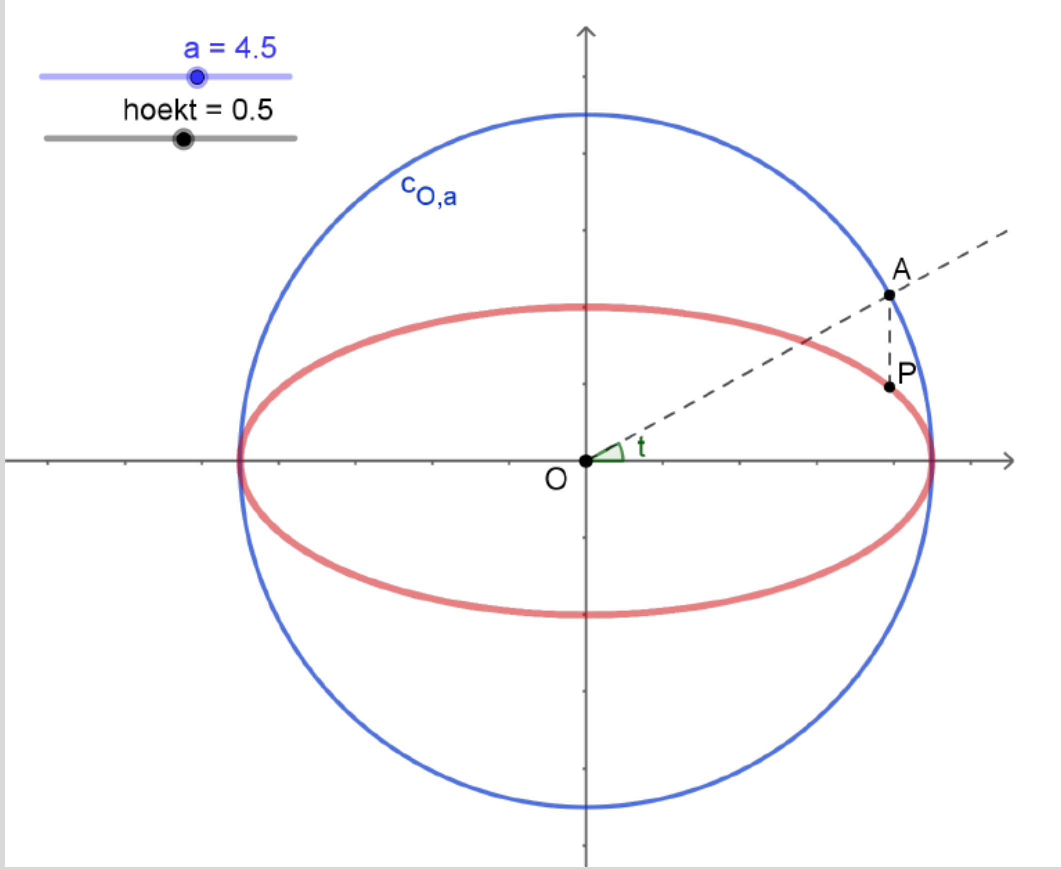


# C'est bientôt Paques

Comprimons les ordonnées $y$ d'un facteur $\frac{b}{a}$. Nous obtenons une ellipse.

$$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases}$$

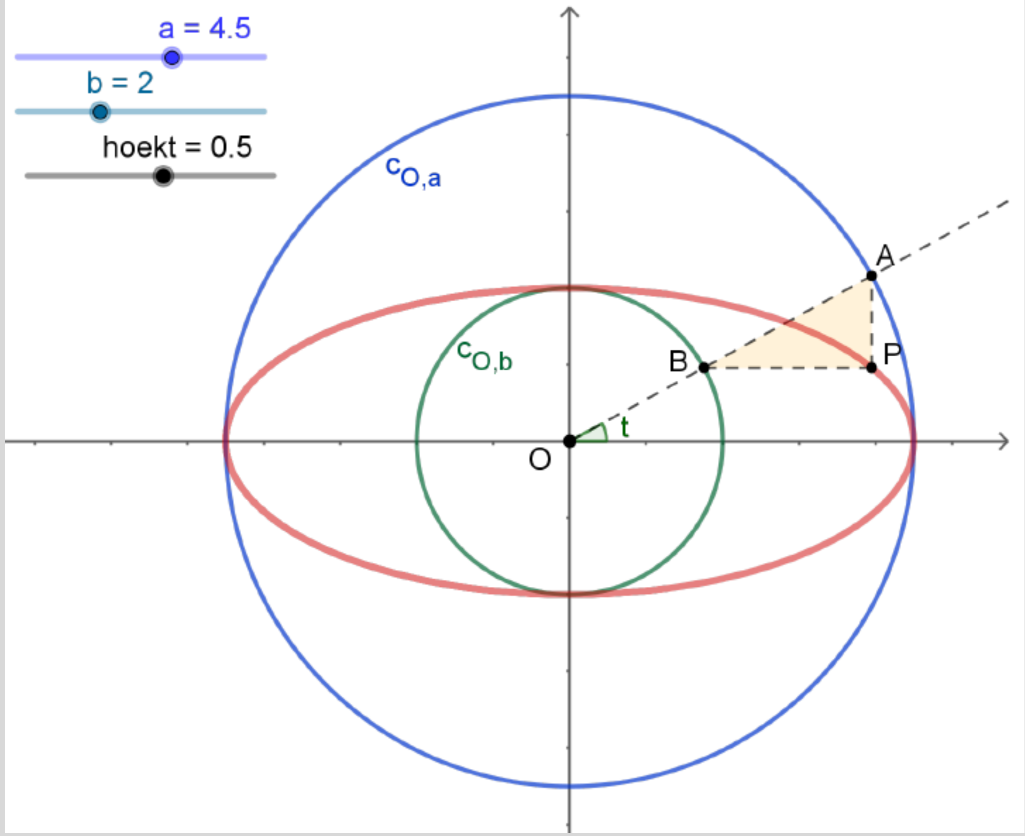
Le paramètre $t$ n'est plus l'angle entre l'axe des $x$ et $OP$.



# C'est bientôt Paques

$$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases}$$

Autre façon d'obtenir la même ellipse: cercles concentriques de rayons $a$ et $b$, puis le triangle rectangle orange.



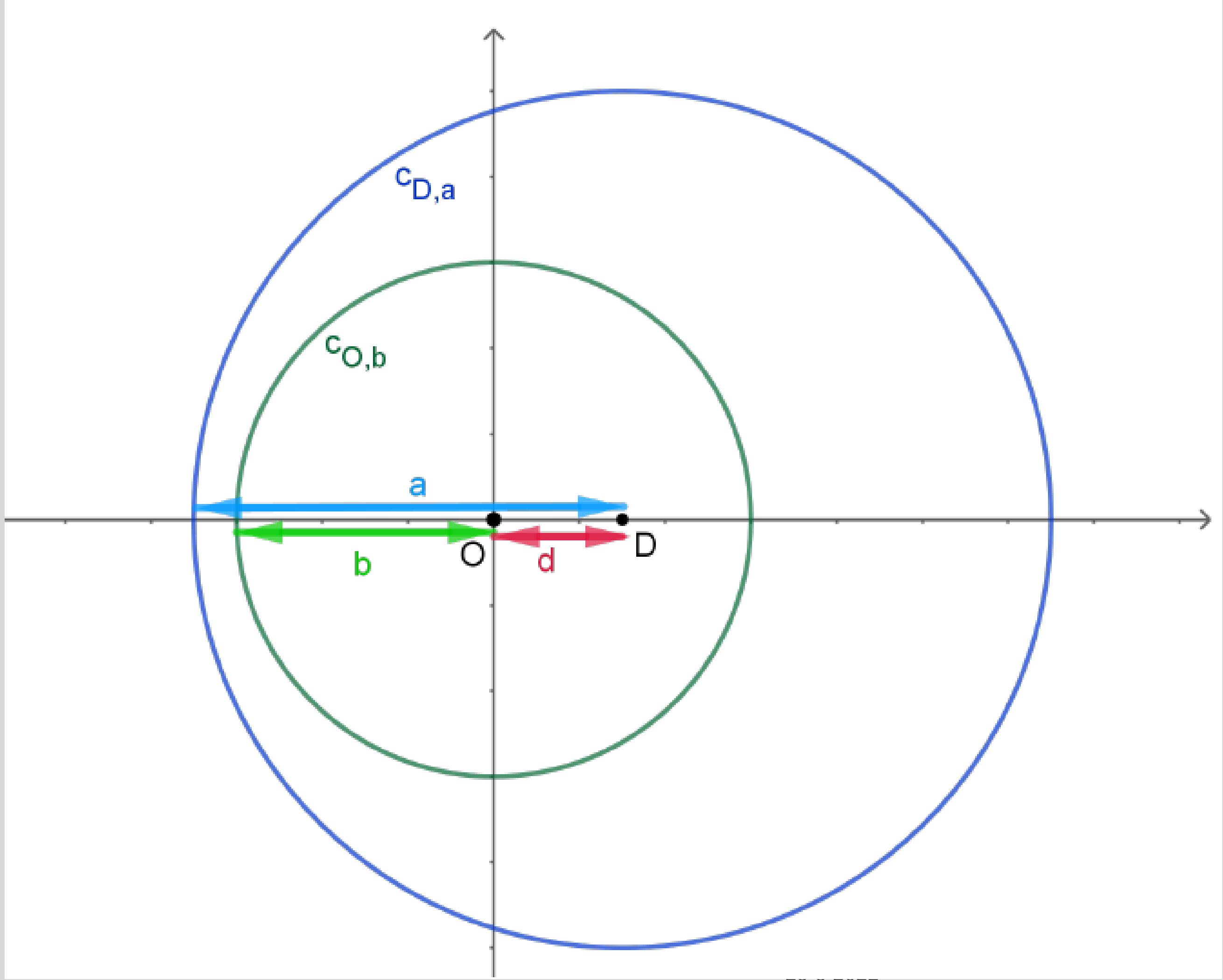
# C'est bientôt Paques

Pour faire un œuf: excentrons le cercle de rayon $a$: nouveau centre $D(d,\ 0)$.

(FRITZ HÜGELSCHÄFFER, 1948)

Valeur maximale de $d$ pour que le petit cercle reste intérieur au grand?

$$d < a - b$$

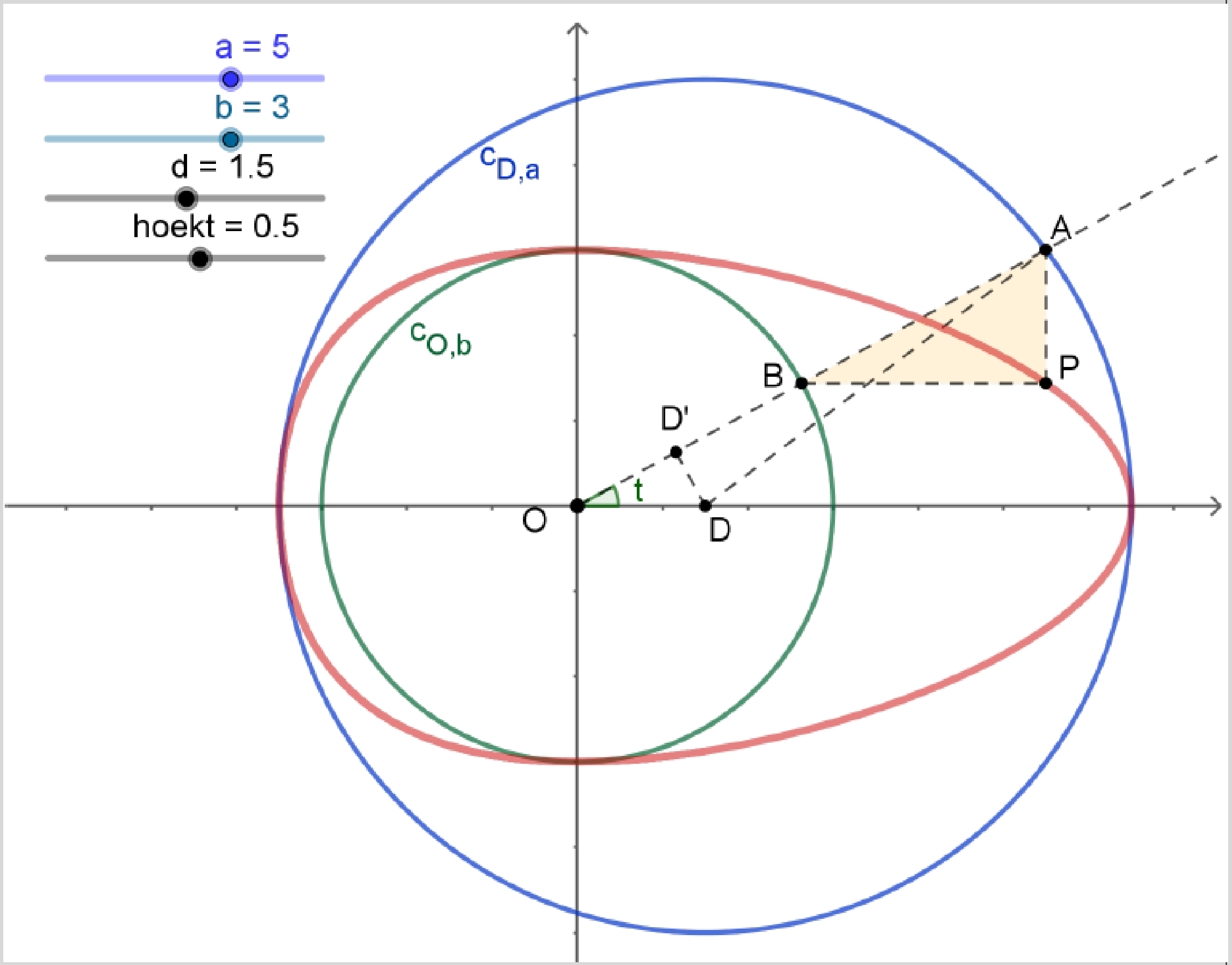


# C'est bientôt Paques

**Au travail !**

(Activité 2)

Écrire des équations paramétriques pour l'œuf.



# C'est bientôt Paques

**Corrigeons !**

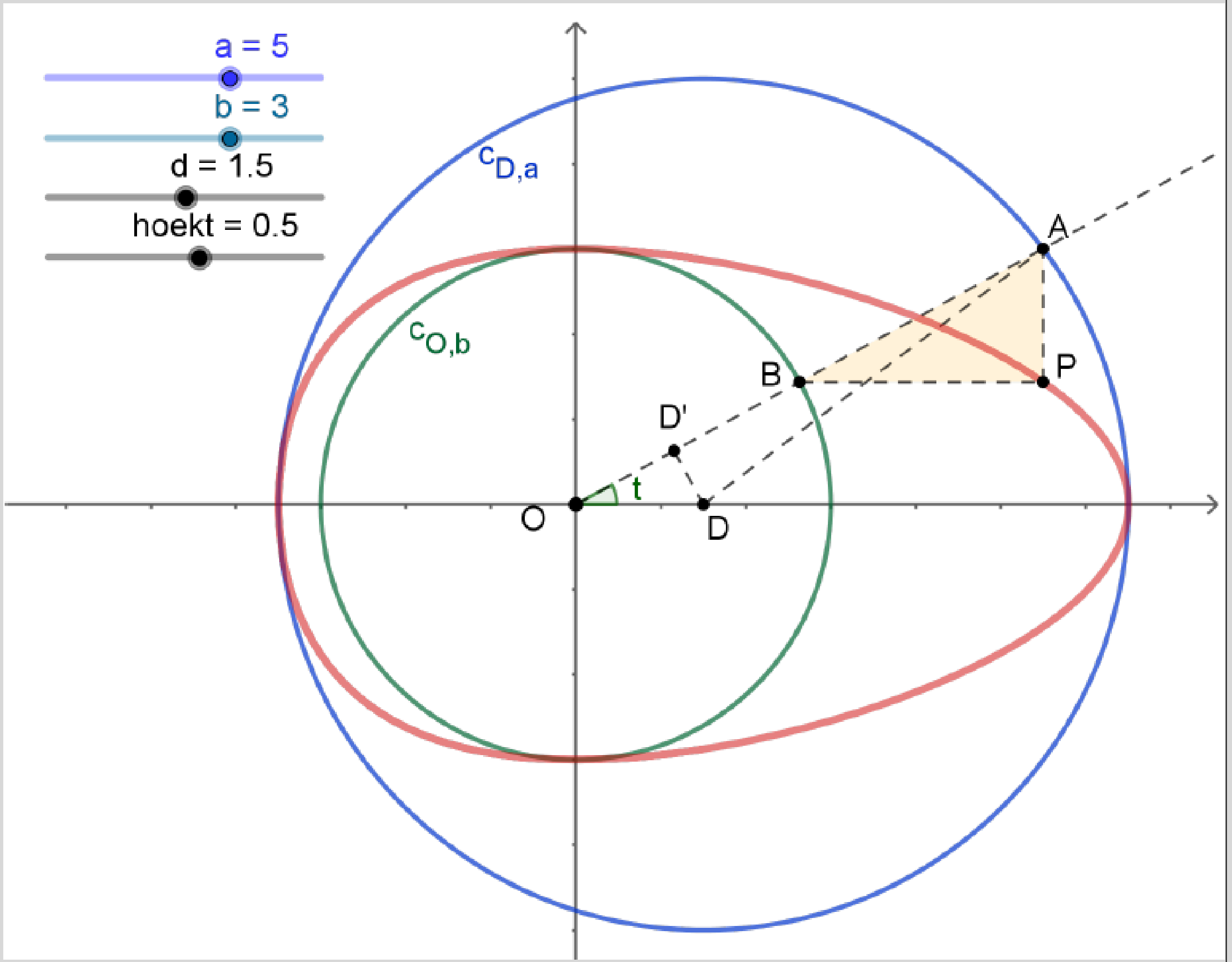
$$\begin{cases} x = |OA| \cos t \\ y = b \sin t \end{cases}$$

$$|OA| = |OD'| + |D'A|$$

$$= d \cos t + \sqrt{a^2 - d^2 \sin^2 t}$$

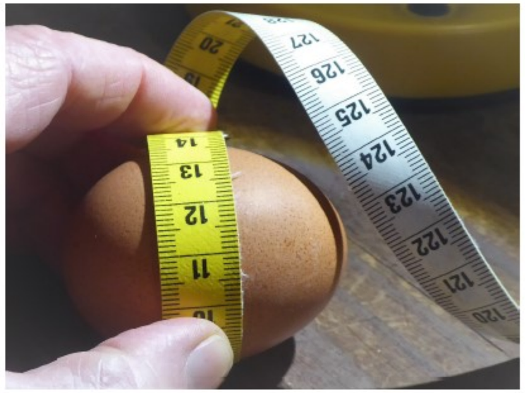
Donc :

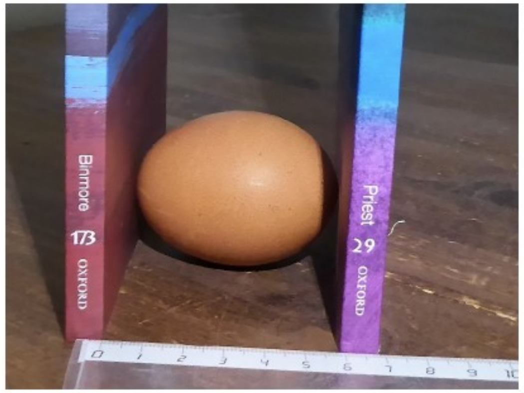
$$\begin{cases} x = \left(d \cos t + \sqrt{a^2 - d^2 \sin^2 t}\right) \cos t \\ y = b \sin t \end{cases}$$

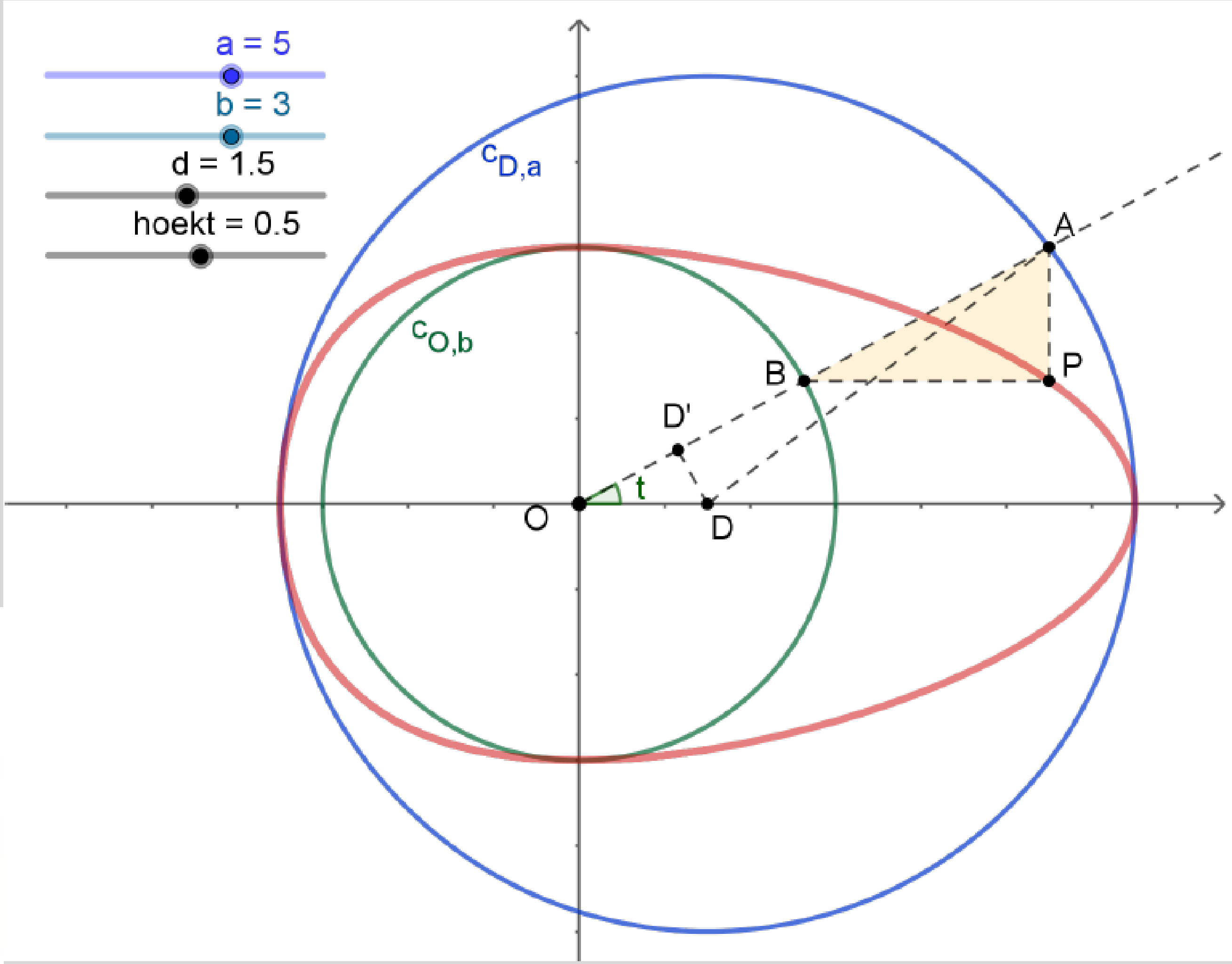


# C'est bientôt Paques

$$\begin{cases} x = \left(d\cos t + \sqrt{a^2 - d^2\sin^2 t}\right)\cos t \\ y = b\sin t \end{cases}$$





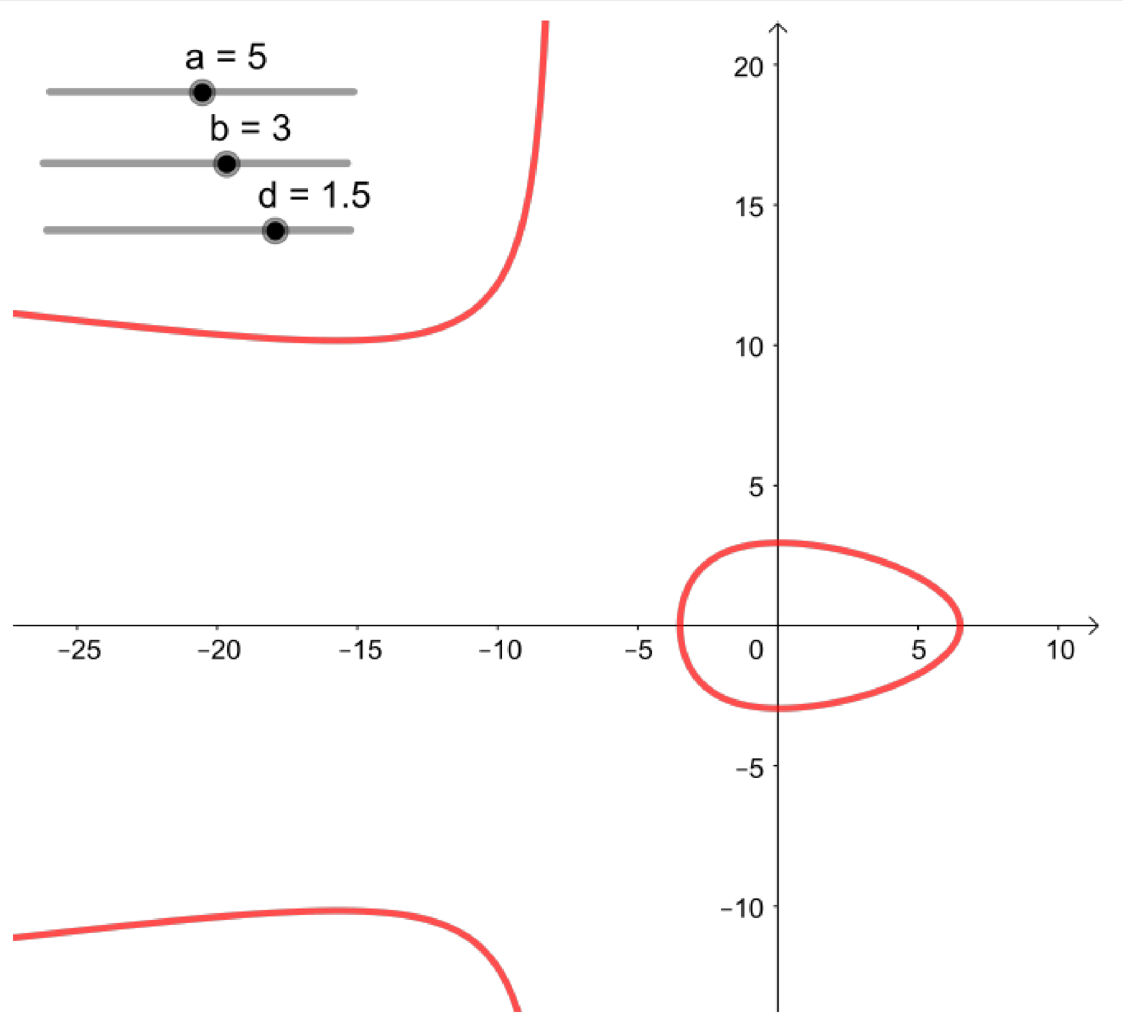



# C'est bientôt Paques

$$\begin{cases} x = \left(d\cos t + \sqrt{a^2 - d^2\sin^2 t}\right)\cos t \\ y = b\sin t \end{cases}$$

Si on élimine le paramètre $t$ :

$$y^2(a^2 - d^2 + 2dx) = b^2(a^2 - (x-d)^2)$$



# C’est bientôt Paques

L’œuf de Hügelschäffer est la ***transformée de*** ***Newton*** des deux cercles.

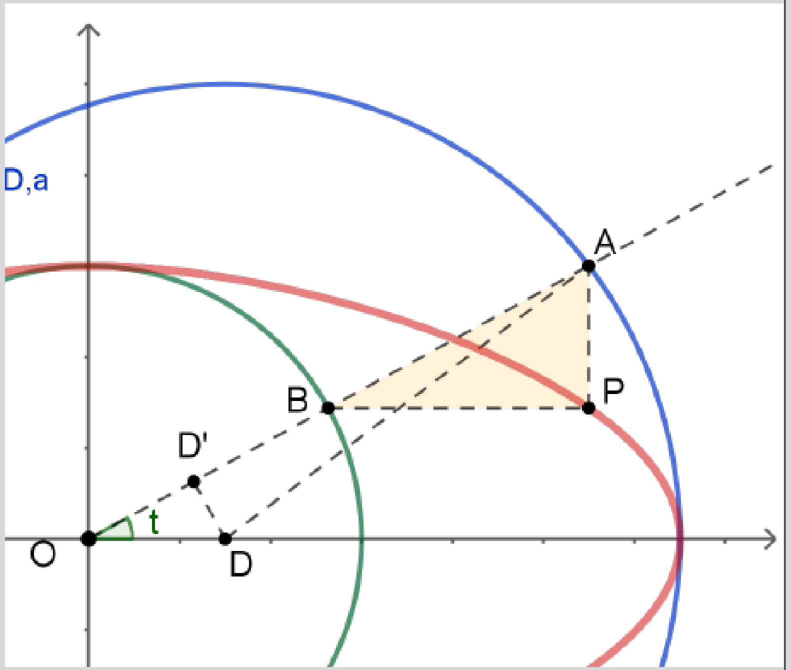
*En général*

Soient données deux courbes $c$ et $d$ ainsi qu’un système de coordonnées $(O, x, y)$.

Une demi-droite variable d’origine $O$ coupe $c$ en $A$ et $d$ en $B$.

On considère le triangle rectangle $ABP$ avec $AP$ parallèle à l’axe des $x$ et $BP$ parallèle à l’axe des $y$.

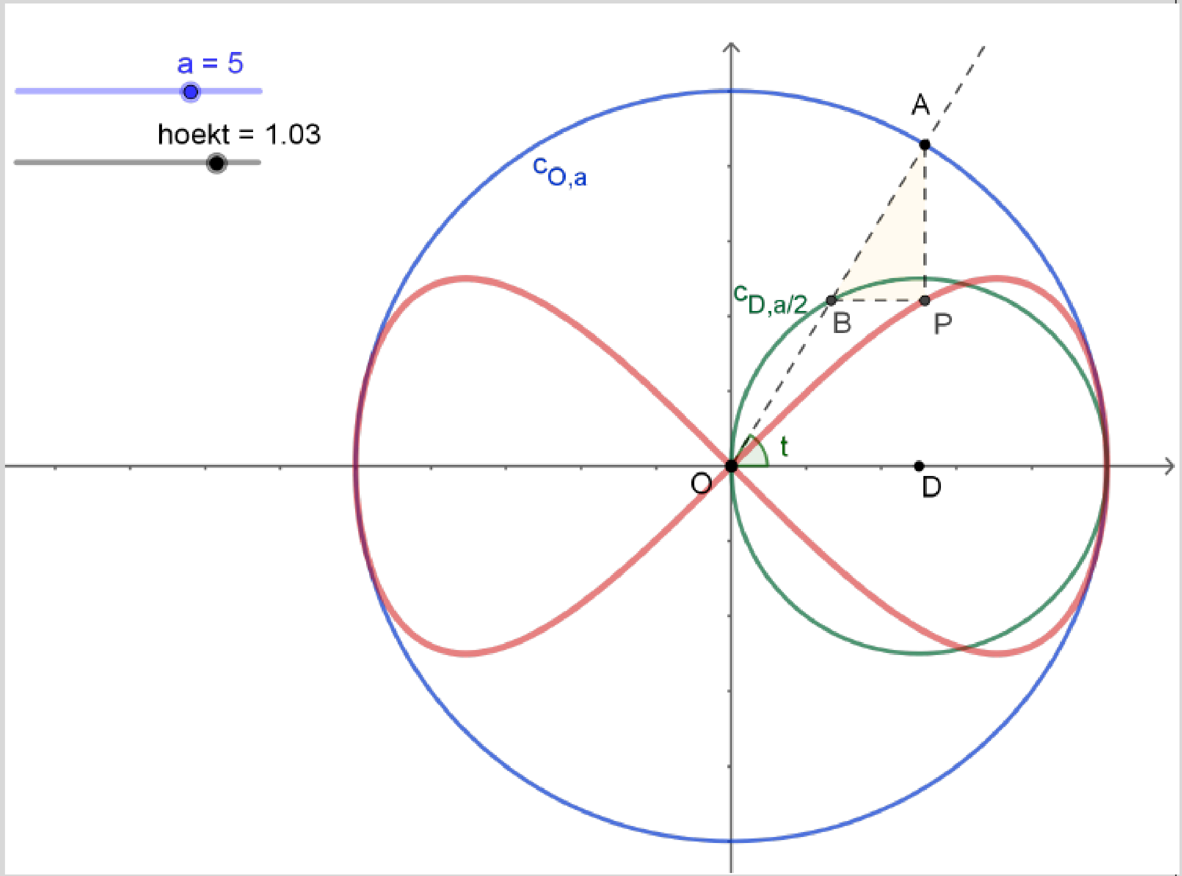
La *transformée de Newton* de $c$ et $d$ par rapport à $(O, x, y)$ est le lieu de $P$.



# C'est bientôt Paques

*Autres exemples de transformées de Newton*

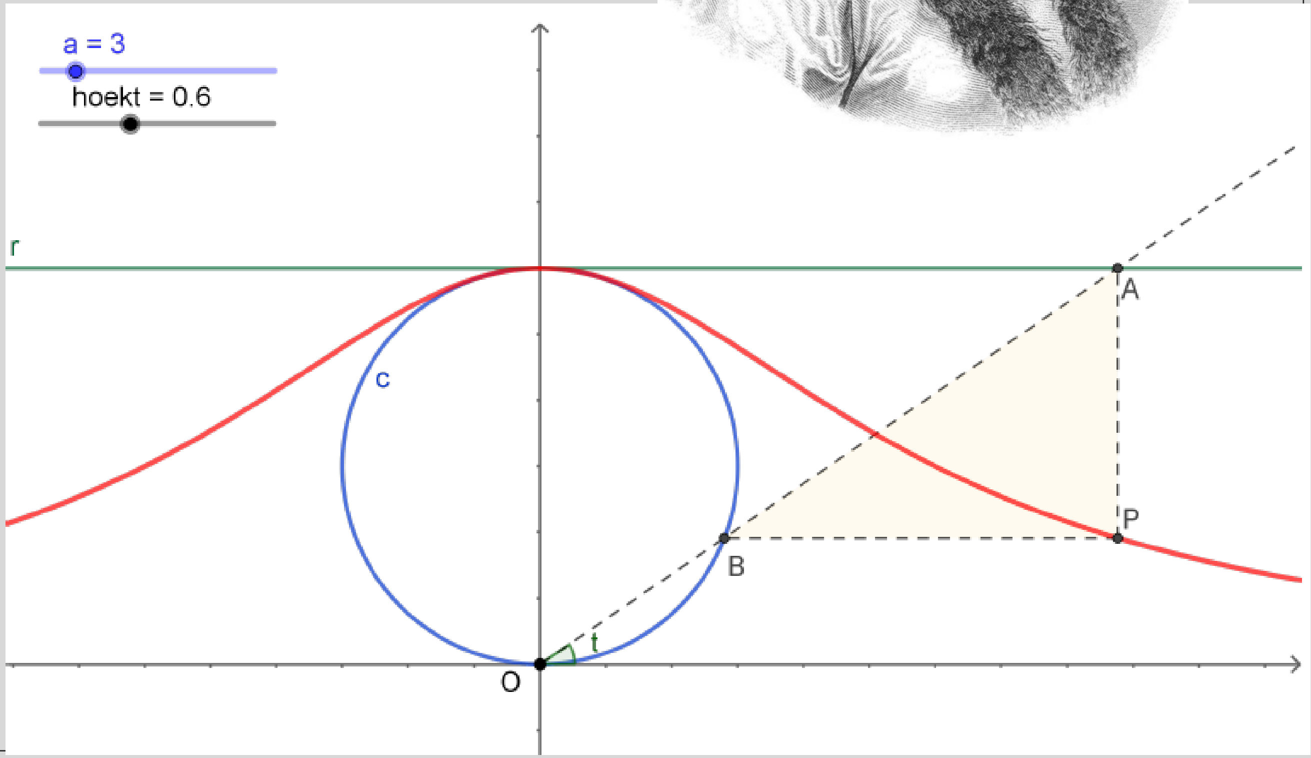
La lemniscate de CAMILLE-CHRISTOPHE GERONO (19e siècle)



# C'est bientôt Paques

*Autres exemples de transformées de Newton*

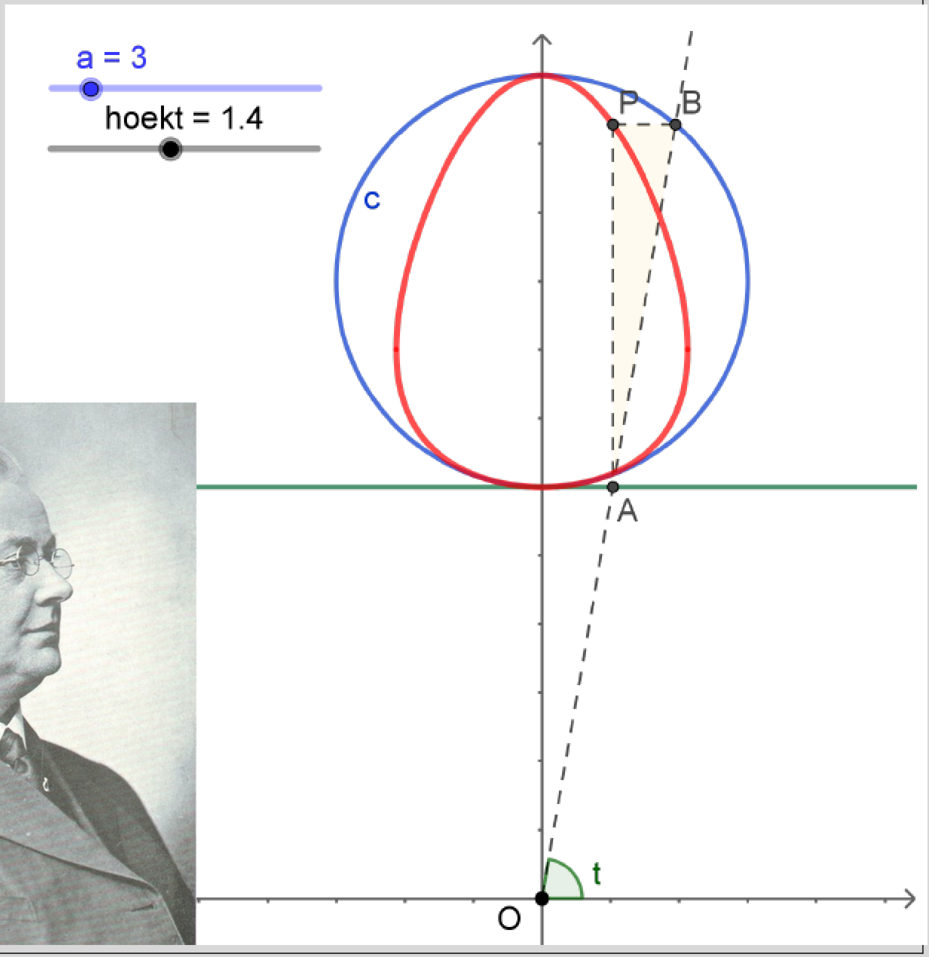
La versiera de MARIA GAETANA AGNESI (18e siècle)



# C'est bientôt Paques

*Autres exemples de transformées de Newton*

L'œuf de WILLIAM ANTHONY GRANVILLE (20e siècle)




# LA CISSOÏDE DE DIOCLÈS

# La cissoïde de Dioclès

Système de coordonnées $(O, x, y)$.

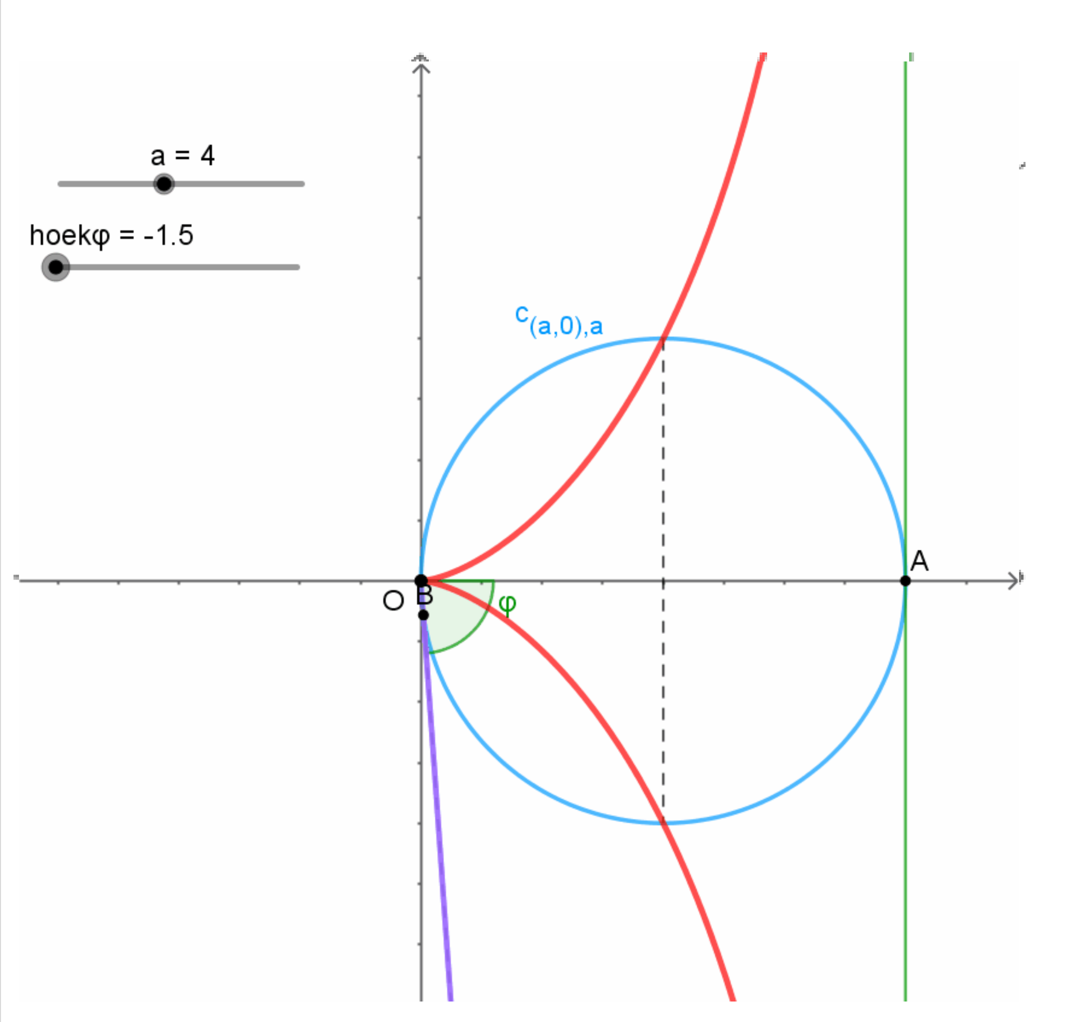
Cercle de centre $(a, 0)$ et rayon $a$.

Droite $x = 2a$.

Une demi-droite variable d'origine $O$ coupe le cercle en $B$ et la droite en $C$.

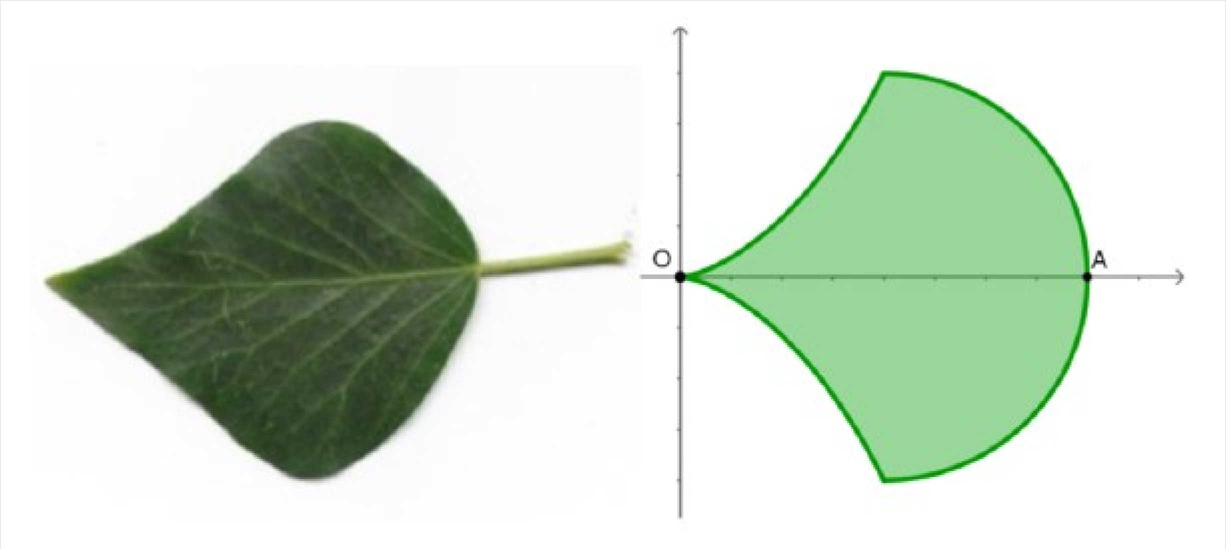
Sur la demi-droite on prend le point $P$ à distance $|BC|$ de $O$.

La *cissoïde* est le lieu du point $P$.



# La cissoïde de Dioclès

$\kappa\acute{\iota}\sigma\sigma o\varsigma$ = lierre



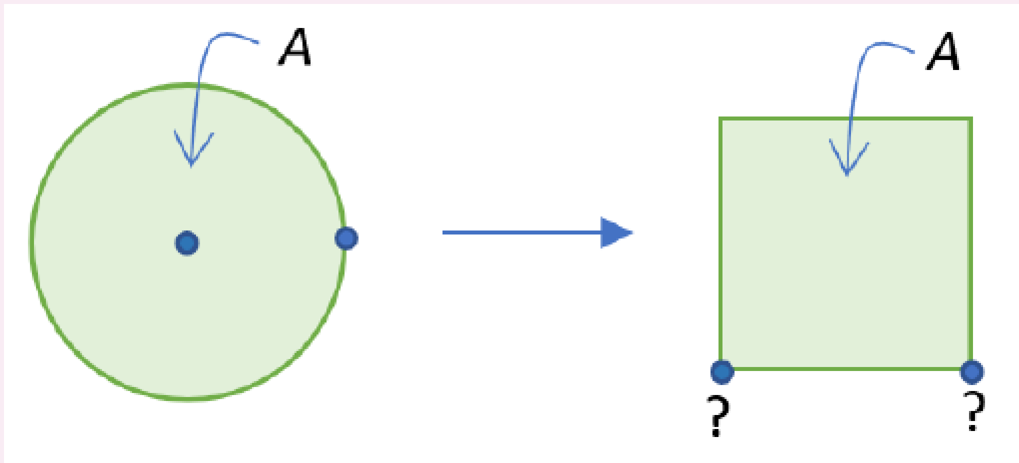
# La cissoïde de Dioclès

DIOCLÈS (3e et 2e siècles av. J.-C.)

L'importance de cette courbe : la résolution avec règle, compas et cissoïde, du problème de la duplication du cube

Les trois problèmes classiques

- **La quadrature du cercle**
- La trisection d'un angle
- La duplication du cube



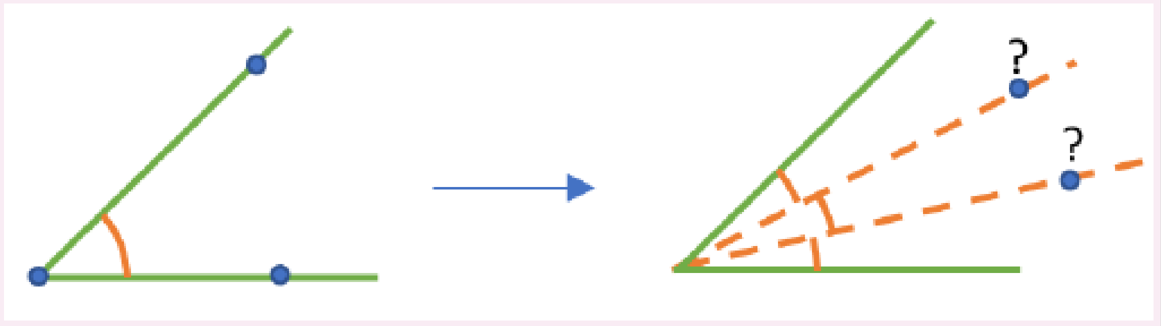
# La cissoïde de Dioclès

DIOCLÈS ($3^{e}$ et $2^{e}$ siècles av. J.-C.)

L'importance de cette courbe : la résolution avec règle, compas et cissoïde, du problème de la duplication du cube

Les trois problèmes classiques

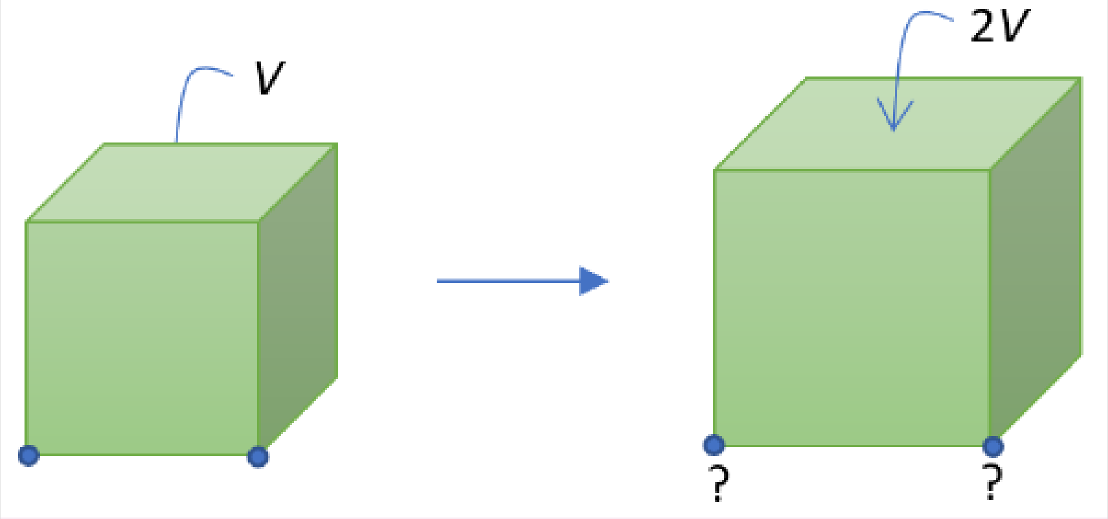
- La quadrature du cercle
- **La trisection d'un angle**
- La duplication du cube



# La cissoïde de Dioclès

DIOCLÈS (3e et 2e siècles av. J.-C.)

L'importance de cette courbe : la résolution avec règle, compas et cissoïde, du problème de **la duplication du cube**




Les trois problèmes classiques

- La quadrature du cercle
- La trisection d'un angle
- **La duplication du cube**

(impossible avec règle et compas (PIERRE LAURENT WANTZEL, 19e siècle)

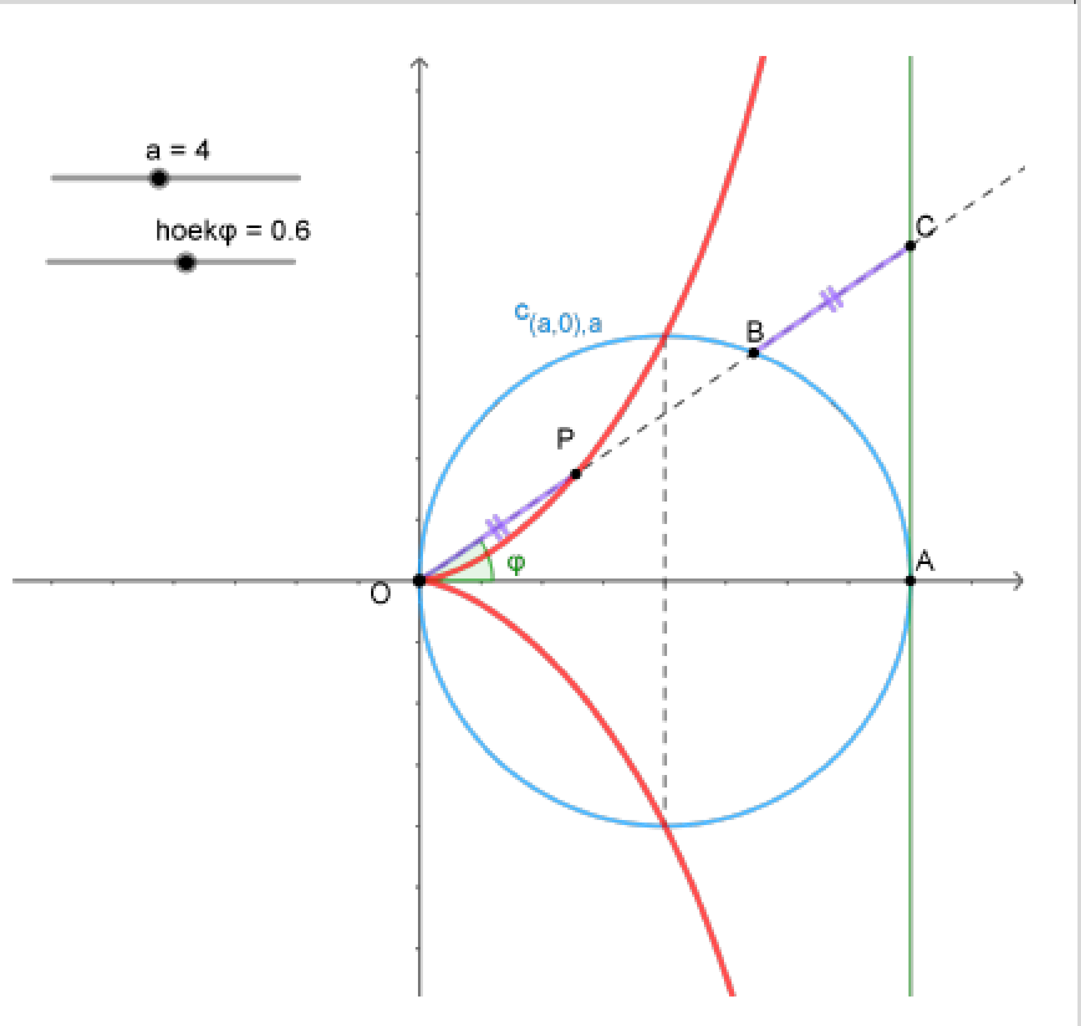
# La cissoïde de Dioclès

**Au travail !**

(Activité 3)

Choisir entre

- Équations paramétriques de la cissoïde
- Duplication du cube



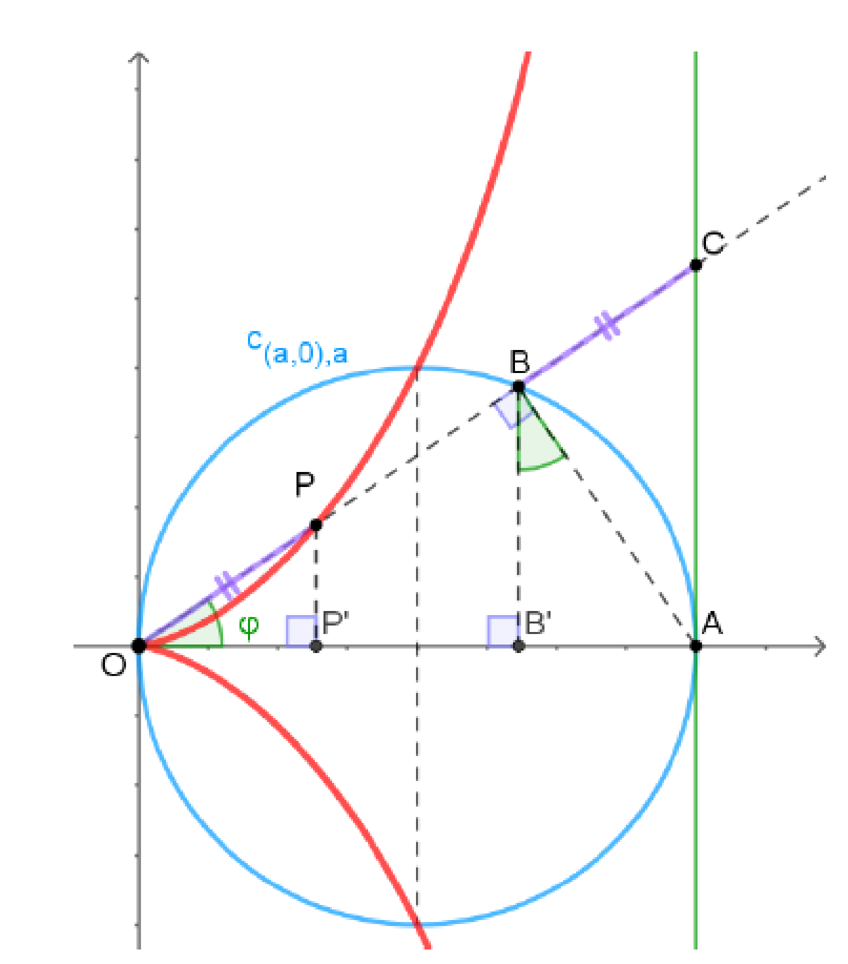
# La cissoïde de Dioclès

**Corrigeons !**

$$
\begin{aligned}
|OP'| &= |B'A| && \text{(Thalès)}\\
&= |AB|\sin\varphi && (\Delta ABB')\\
&= 2a\sin^2\varphi && (\Delta ABO)\\
|PP'| &= |OP'|\tan\varphi && (\Delta OPP')\\
&= 2a\sin^2\varphi\tan\varphi
\end{aligned}
$$

Donc

$$
\begin{cases}
x = 2a\sin^2\varphi\\
y = 2a\sin^2\varphi\tan\varphi
\end{cases}
$$



# La cissoïde de Dioclès

**Corrigeons !**

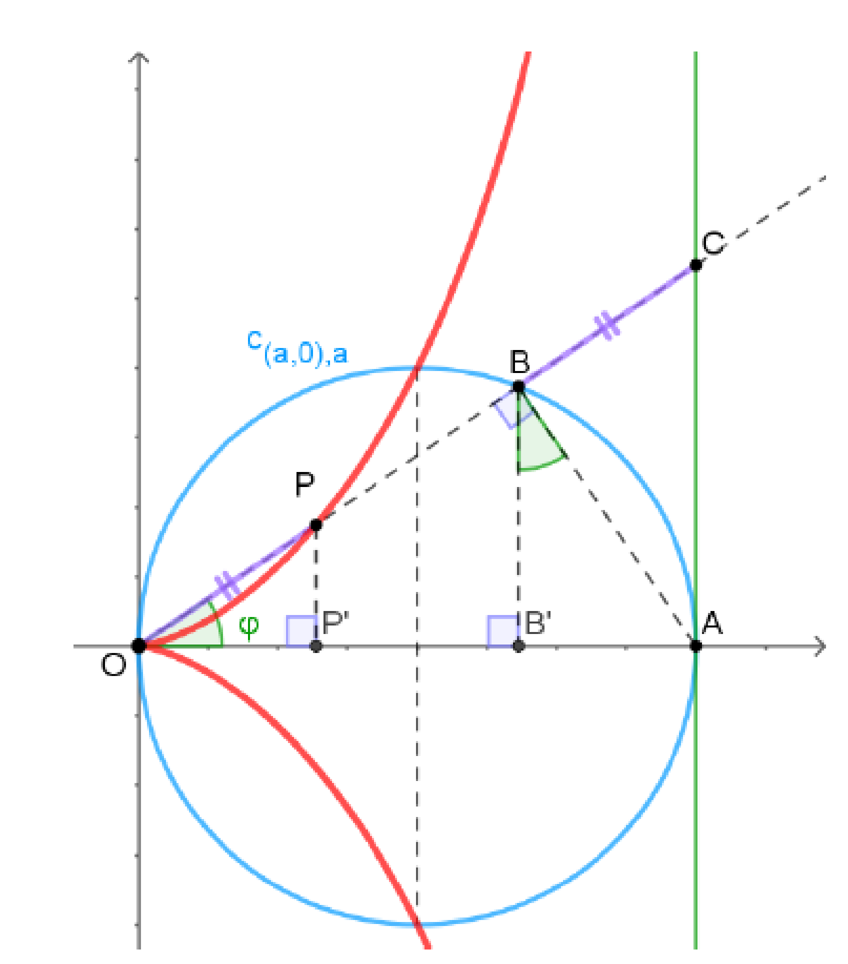
$$\begin{cases} x = 2a\sin^2\varphi \\ y = 2a\sin^2\varphi\tan\varphi \end{cases}$$

Posons $t = \tan\varphi$

$$\begin{cases} x = \frac{2at^2}{1+t^2} \\ y = \frac{2at^3}{1+t^2} \end{cases}$$

$\frac{y}{x} = t$. Substituons ça dans $x = \cdots$.

$$x(x^2+y^2) = 2ay^2$$

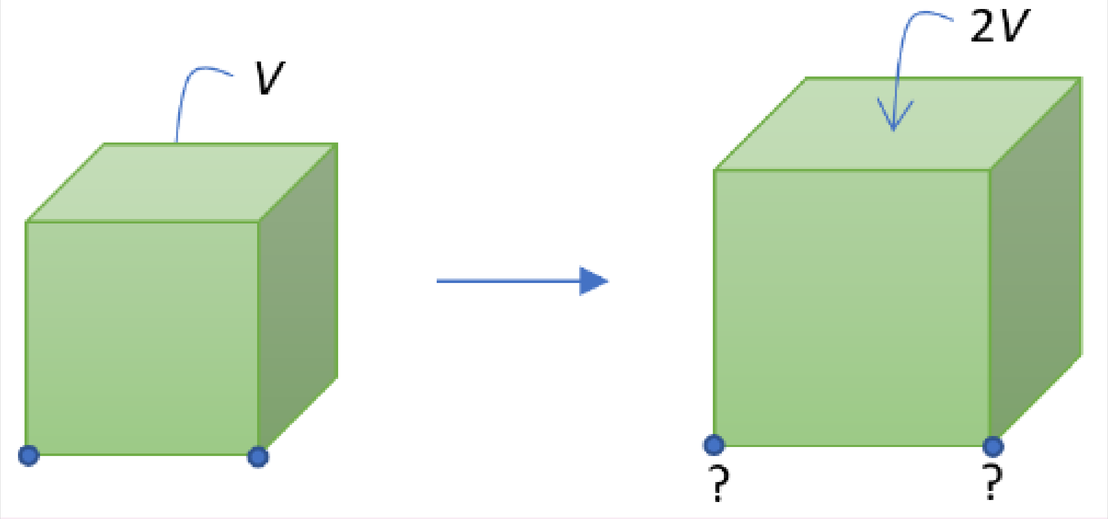


# La cissoïde de Dioclès

**Corrigeons !**

Duplication du cube

Arête $r$ → arête $r\sqrt[3]{2}$



# La cissoïde de Dioclès

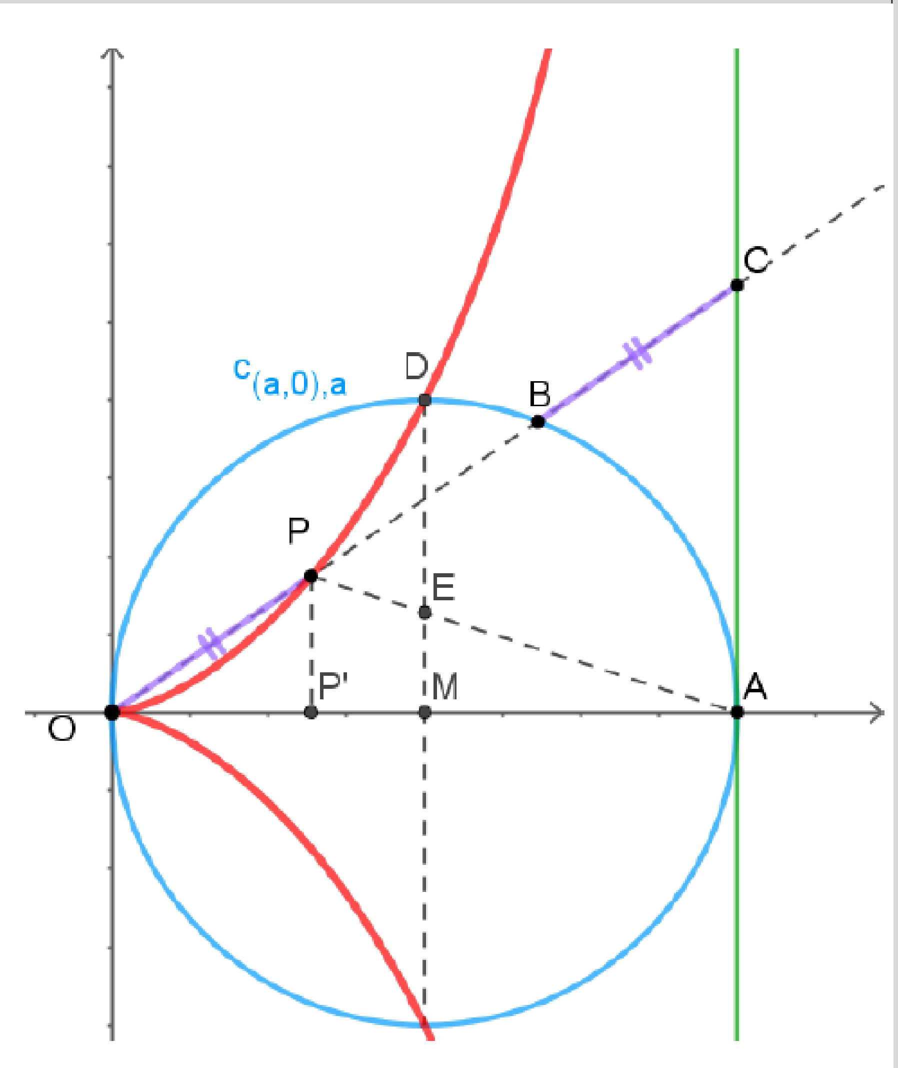
**Corrigeons !**

$$\left(\frac{|OP'|}{|PP''|}\right)^3 = \left(\frac{x}{y}\right)^3 = \left(\frac{1}{t}\right)^3$$

$$\Delta APP' \sim \Delta AEM \Rightarrow \frac{a}{|EM|} = \frac{|MA|}{|EM|} = \frac{|P'A|}{|PP'|}$$

$$= \frac{2a - x}{y}$$

$$= \frac{2a - \dfrac{2at^2}{1+t^2}}{\dfrac{2at^3}{1+t^2}} = \frac{1}{t^3}$$



# La cissoïde de Dioclès

**Corrigeons !**

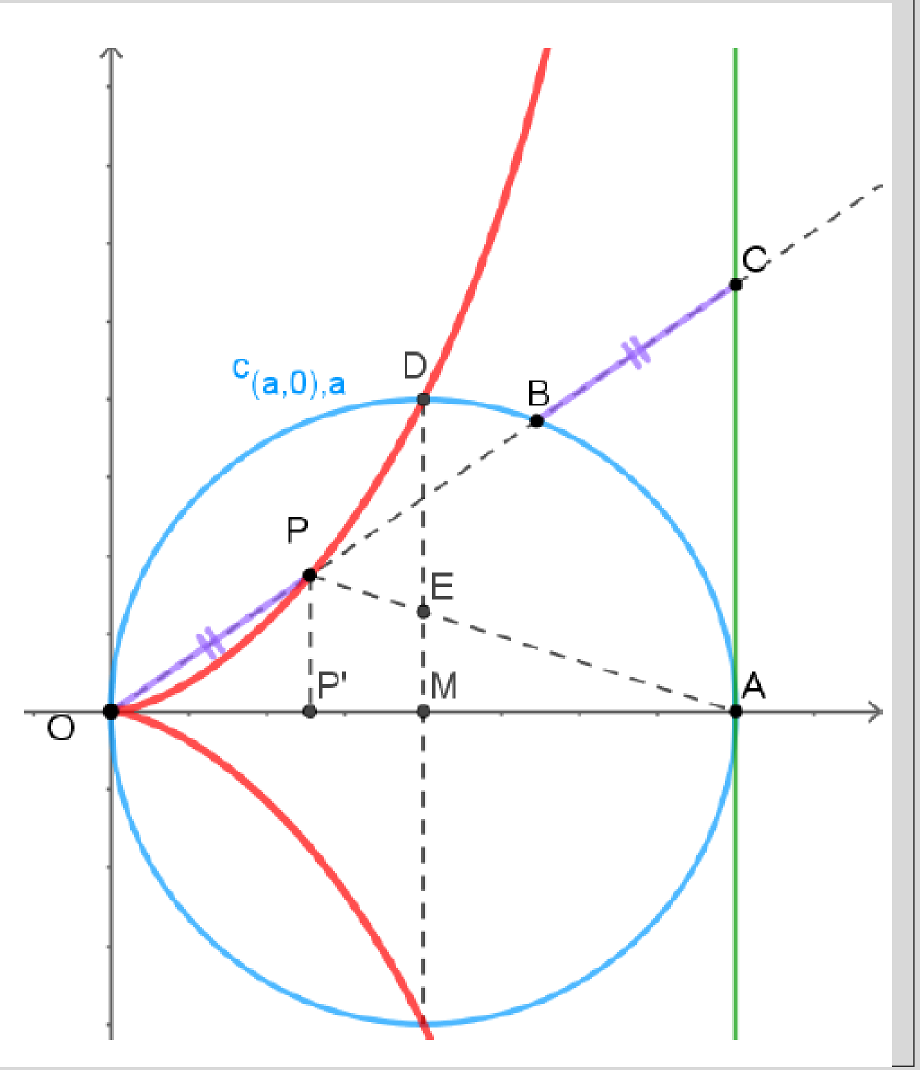
Nous avons démontré que

$$\left(\frac{|OP'|}{|PP'|}\right)^3 = \frac{a}{|EM|}.$$

Faisons en sorte que cela soit 2.

Prenons $P$ tel que $E$ soit le milieu de $[DM]$.

(Construire le milieu $E$ de $[DM]$, couper $AE$ et la cissoïde.)



# La cissoïde de Dioclès

**Corrigeons !**

Nous avons démontré que

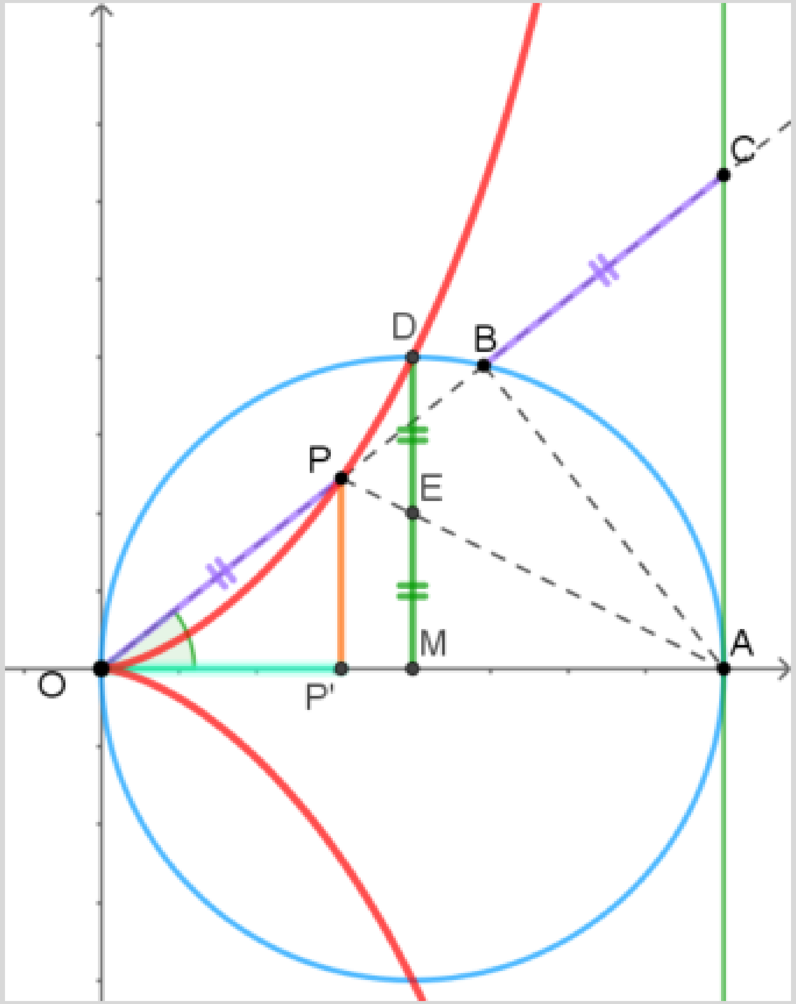
$$\left(\frac{|OP'|}{|PP'|}\right)^3 = \frac{a}{|EM|}.$$

Faisons en sorte que cela soit 2.

Prenons $P$ tel que $E$ soit le milieu de $[DM]$.

Alors $\frac{|OP'|}{|PP\prime|} = \sqrt[3]{2}$

Construire un triangle semblable à $\Delta OPP'$ tel que l'arête $r$ corresponde à $|PP'|$. Alors $|OP'|$ correspond à $r\sqrt[3]{2}$.

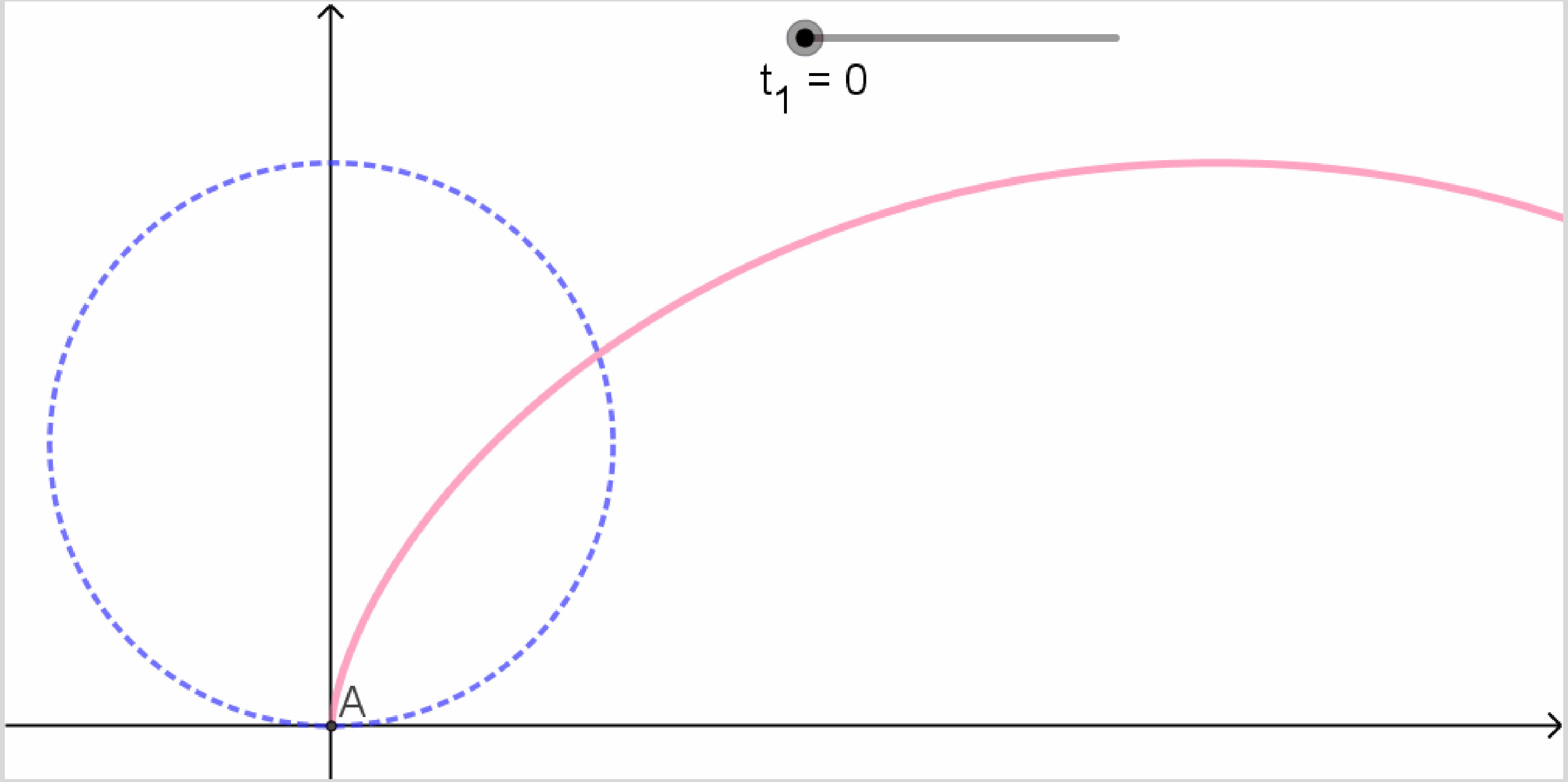


# LA CYCLOÏDE

# La cycloïde

La vache qui rit qui roule

# La cycloïde



# La cycloïde

**Au travail !**

(Activité 4)

- Équations paramétriques de la cycloïde
- La pente de la tangente

# La cycloïde

**Corrigeons !**

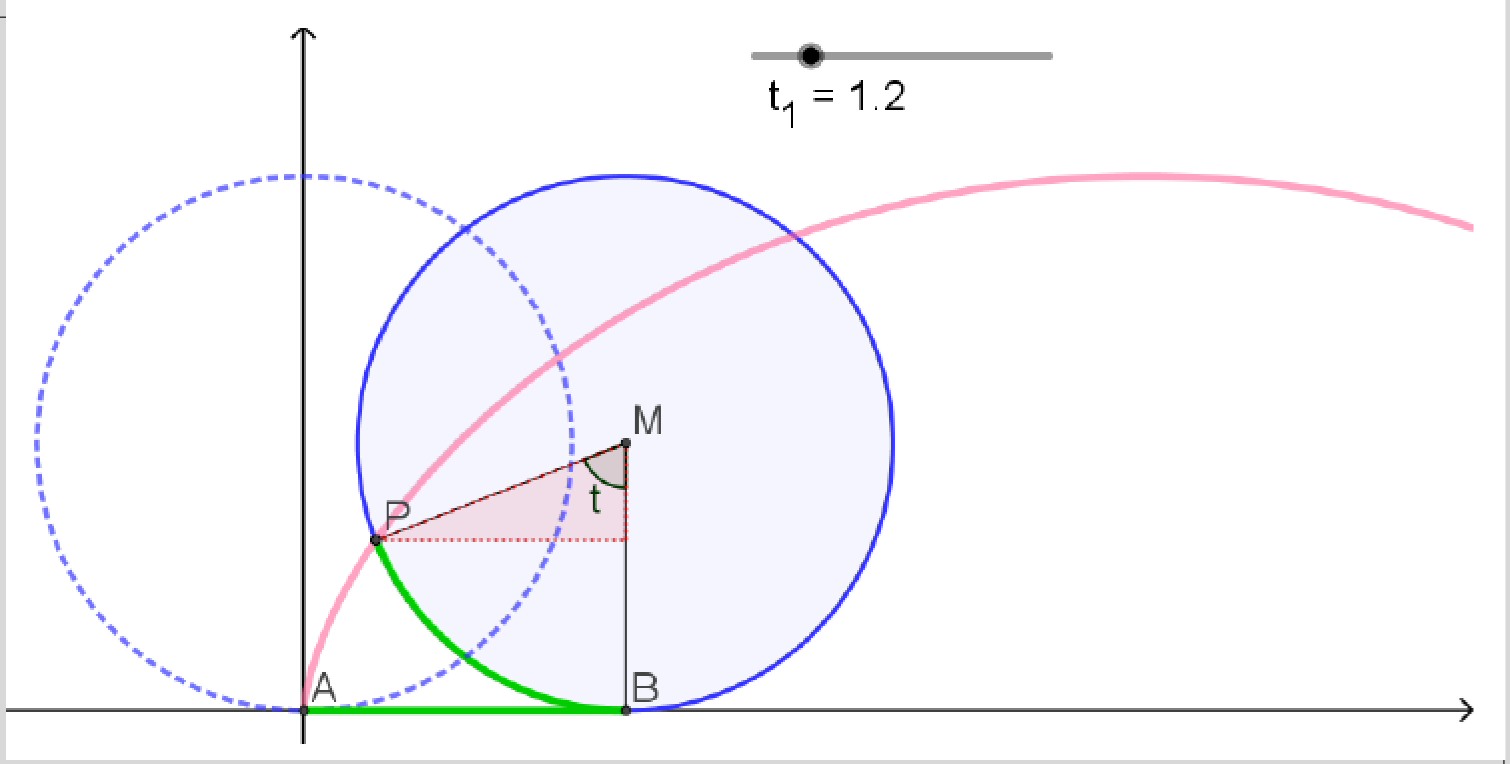
Sans déraper :

Arc $PB = |AB|$

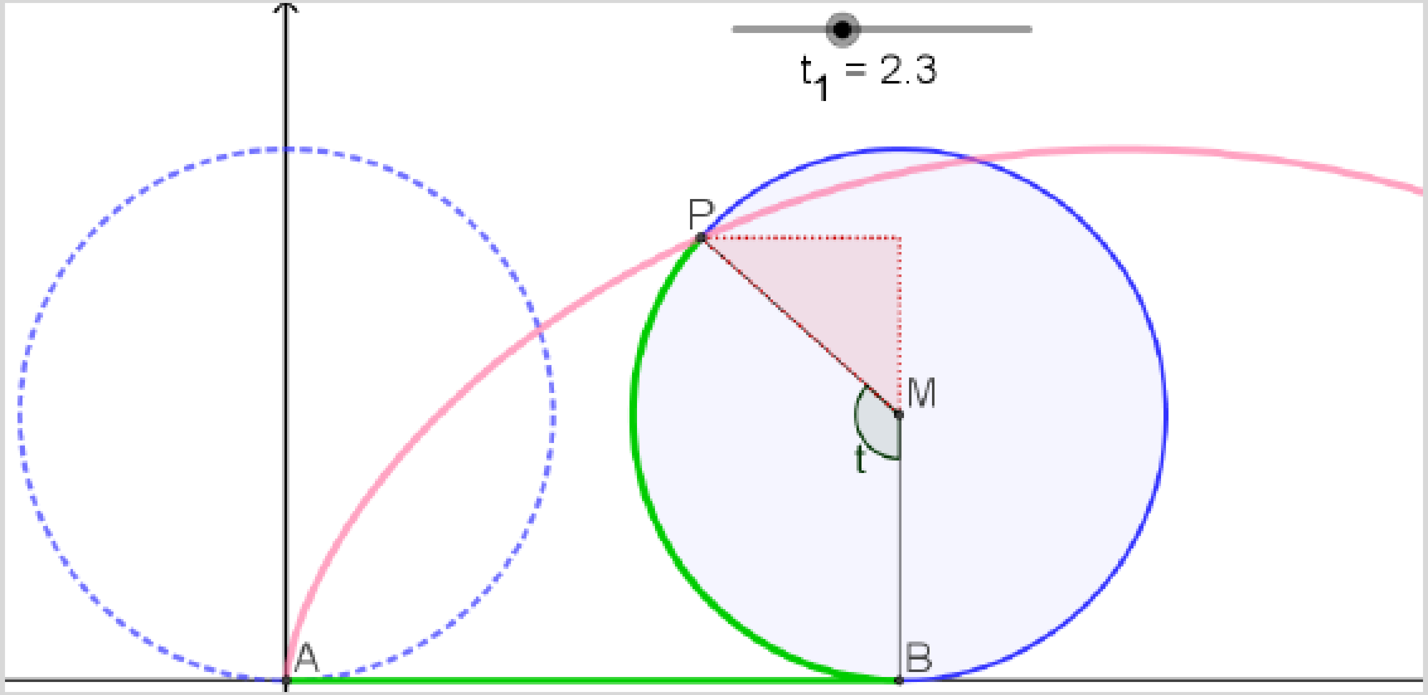
$M(rt, r)$

$P(rt - r\sin t\,, r - r\cos t)$

$$\begin{cases} x = rt - r\sin t \\ y = r - r\cos t \end{cases}$$



# La cycloïde




**Corrigeons !**

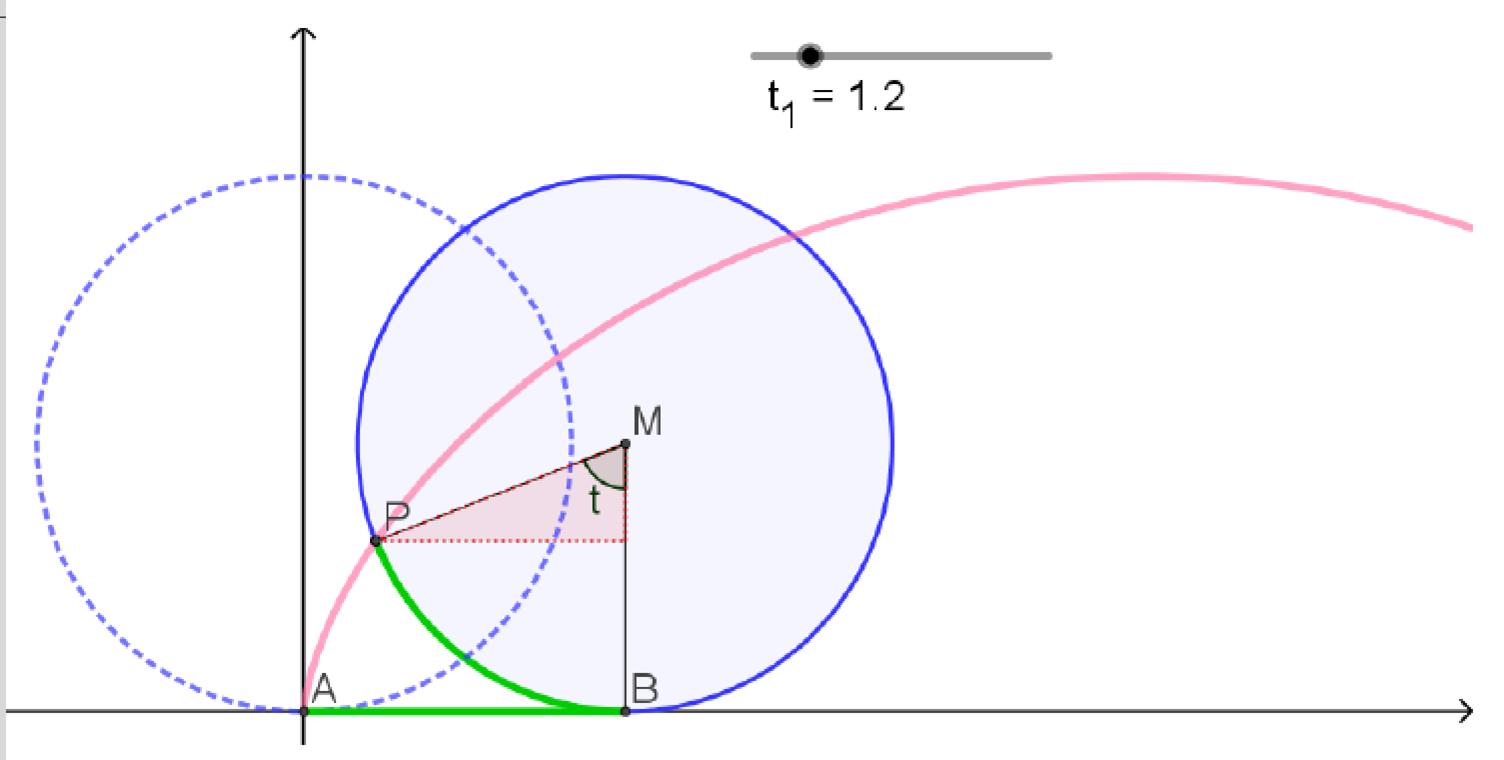
$$\begin{cases} x = rt - r\sin t \\ y = r - r\cos t \end{cases}$$

Ça marche pour les autres quadrants

$M(rt, r)$

$$P\begin{cases} x = rt - r\sin(\pi - t) \\ y = r + r\cos(\pi - t) \end{cases}$$

# La cycloïde




**Corrigeons !**

$$\begin{cases} x = rt - r\sin t \\ y = r - r\cos t \end{cases}$$

Pente de la tangente :

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}} = \frac{r\sin t}{r - r\cos t} = \frac{\sin t}{1 - \cos t}$$

# La cycloïde

GILLES PERSONNE DE ROBERVAL (17e siècle)

Considère que le cercle effectue en même temps deux mouvements

- Mouvement circulaire autour de son centre
- Mouvement linéaire horizontal

# La cycloïde

GILLES PERSONNE DE ROBERVAL (17e siècle)

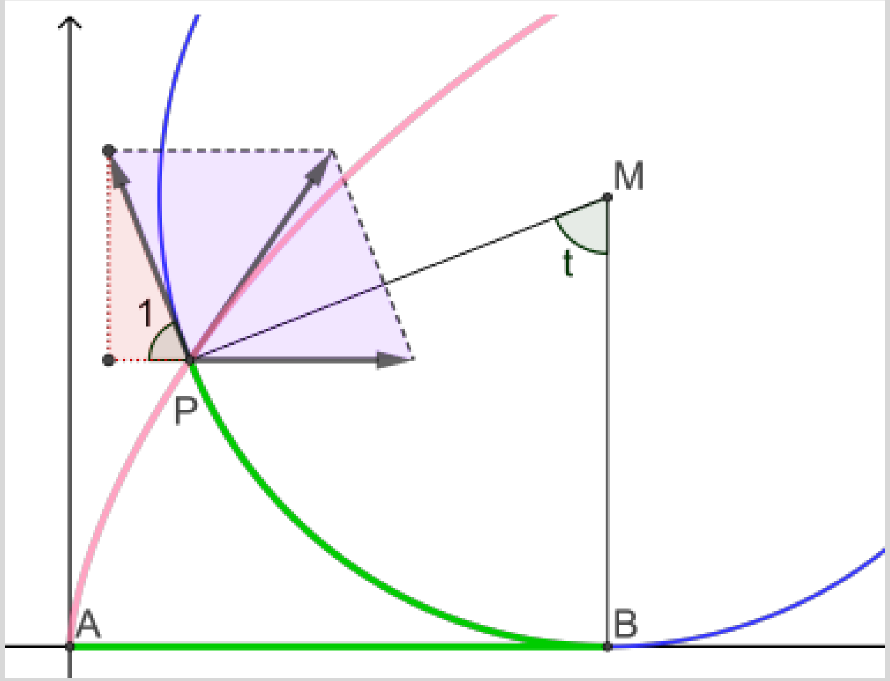
Considère que le cercle effectue en même temps deux mouvements

- Mouvement circulaire autour de son centre
- Mouvement linéaire horizontal

Ne pas déraper → vitesses au sol sont égales

Donc: vitesses ont même grandeur (disons 1)

Diagonale d'un losange




$\hat{P}_1 = t$

Vecteur tangent au cercle : $(-\cos t\,, \sin t)$

Vecteur horizontal : $(1, 0)$

Somme : $(1 - \cos t\,, \sin t)$

Pente : $\frac{\sin t}{1-\cos t}$, la même !

# MERCI !