Quelques belles courbes paramétrées

Une courbe paramétrée plane est plus qu'une figure dans le plan : elle contient, en plus, des informations sur le point de départ, la façon dont la courbe est parcourue, la vitesse, le point d'arrivée... En parlant comme cela, nous interprétons le paramètre comme étant le temps. Une même courbe « dessinée » peut être paramétrée de différentes manières. Dans cet atelier, vous examinerez le lancer oblique, les figures de Lissajous et les courbe en forme d'œufs, ainsi que certaines courbes historiques comme la cissoïde de Dioclès et la cycloïde.

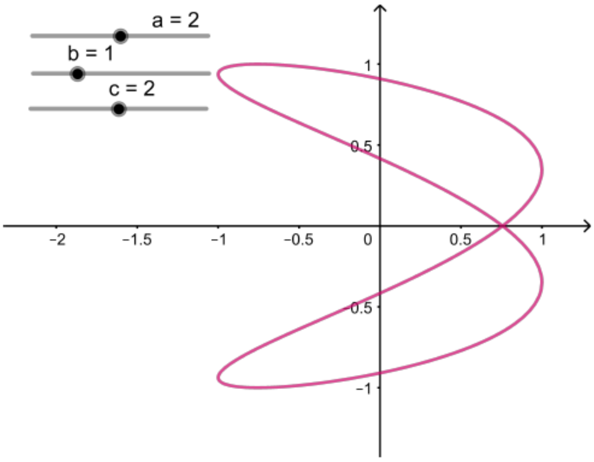
*	= S
**	= M
***	= L

Activité 1 Quelques courbes de Lissajous

$$\begin{cases} x = \sin at \\ y = \sin(bt + c) \end{cases}$$

Première courbe **

$$\begin{cases} x = \sin 2t \\ y = \sin(t + 2) \end{cases}$$



1. Commençons par $t = 0$. Suivre la courbe du doigt lorsque t augmente. Pour quelle valeur de t la courbe entière est parcourue ?

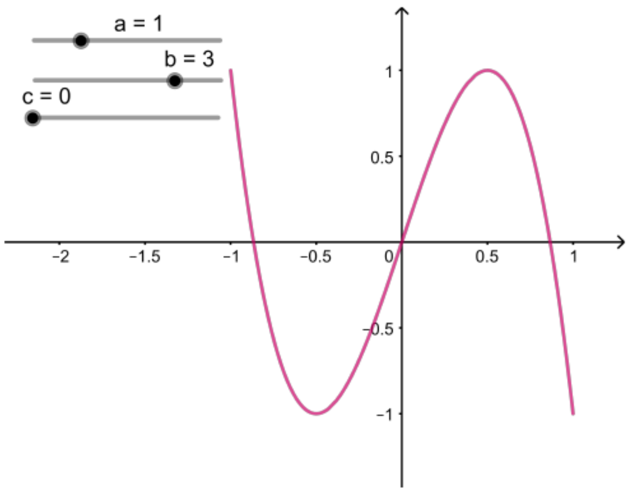
2. Indiquer sur la figure les points de valeurs paramétriques $t = k\frac{\pi}{4}$ pour $k = 0, 1, 2, \ldots$

3. Pour quelles valeurs de t on se trouve au point où la courbe s'intersecte elle-même ?

4. Pour quelles valeurs de t la tangente est-elle verticale ?

Deuxième courbe **

$$\begin{cases} x = \sin t \\ y = \sin 3t \end{cases}$$

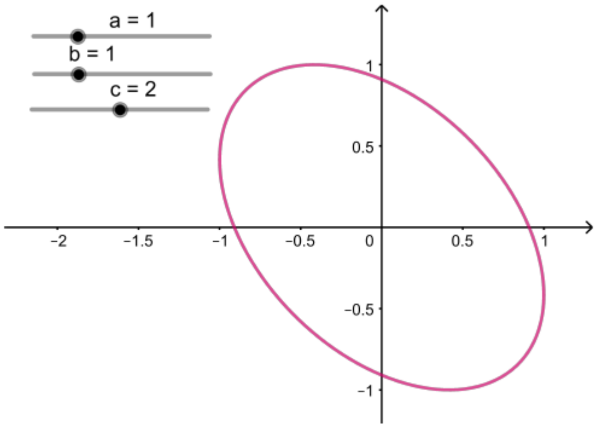


1. Commençons par $t = 0$. Suivre la courbe du doigt lorsque t augmente. Pour quelle valeur de t la courbe entière est parcourue ?

2. La courbe ressemble à un morceau de graphe d'une fonction du troisième degré. Est-ce le cas ?

Troisième courbe***

$$\begin{cases} x = \sin t \\ y = \sin(t+2) \end{cases}$$



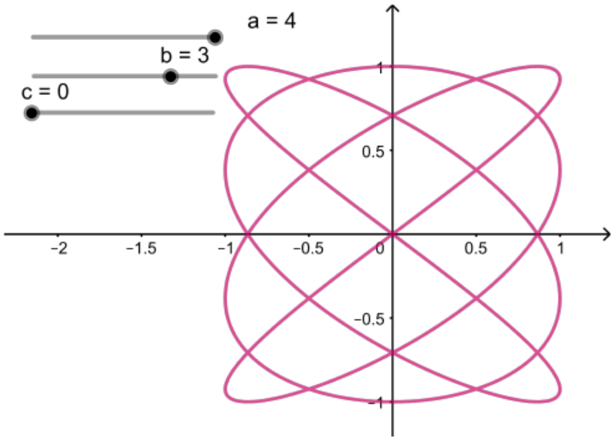
1. On dirait bien une ellipse. Est-ce le cas ?

   Besoin d'aide ?

   - *Non : ne pas regarder ci-dessous.*
   - *Oui :*
     Si on tourne les axes des x et des y de $45°$ dans le sens des aiguilles d'une montre, on a des nouvelles coordonnées
     $(X, Y) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}(x-y), \frac{\sqrt{2}}{2}(x+y)\right).$

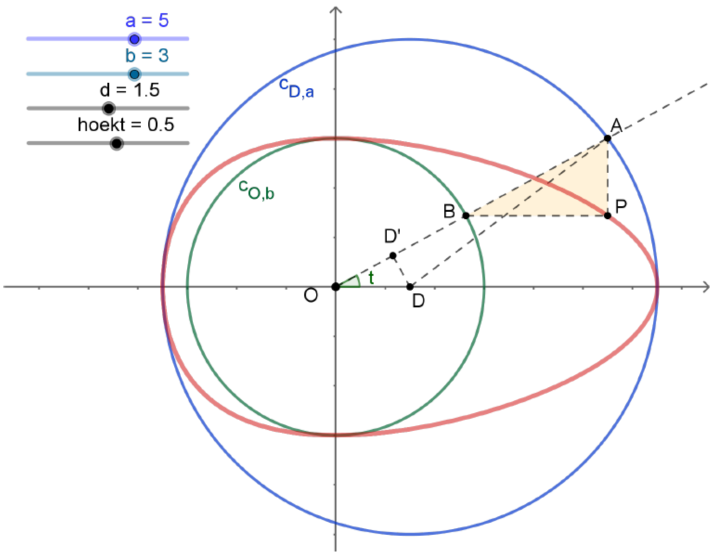
Quatrième courbe*

$$\begin{cases} x = \sin 4t \\ y = \sin 3t \end{cases}$$



1. Commençons par $t = 0$. Suivre la courbe du doigt lorsque t augmente. Pour quelle valeur de t la courbe entière est parcourue ?
2. S'exercer pour dessiner cette courbe d'un seul coup. Venir le montrer au tableau.

Activité 2 C'est bientôt Pâques**

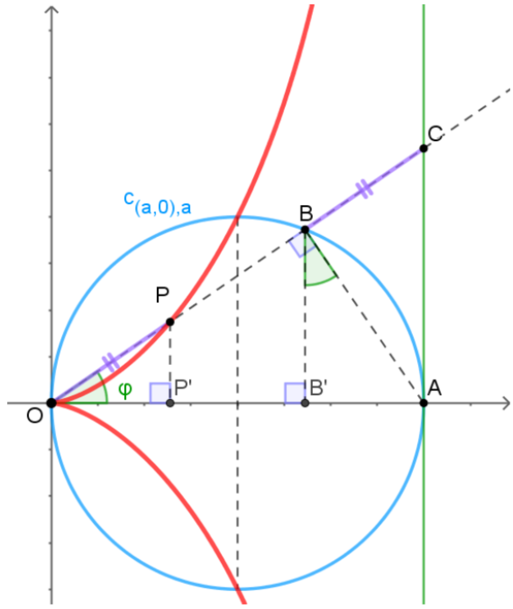


1. Écrire les équations paramétriques de l'œuf de Hügelschäffer.

   Besoin d'aide?
   Pour x, c'est $|OA|\cos t$ comme pour l'ellipse, mais maintenant il faut tenir compte du fait que $|OA|$ varie en fonction de t. Diviser $|OA|$ en $|OD'| + |D'A|$.

Activité 3 La cissoïde de Dioclès

Équations paramétriques de la cissoïde**



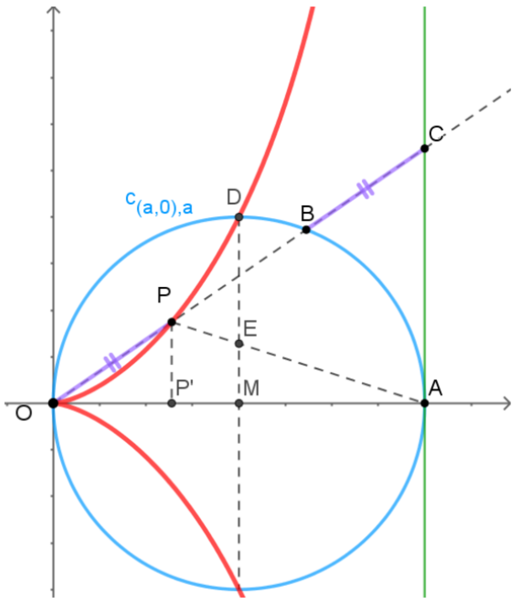
1. Écrire des équations paramétriques pour la cissoïde, en fonction de l'angle φ. Utiliser des triangles rectangles.

2. Quand on cherche la cissoïde sur internet, on trouve les équations paramétriques rationnelles suivantes. Expliquer.

$$\begin{cases} x = \dfrac{2at^2}{1+t^2} \\ y = \dfrac{2at^3}{1+t^2} \end{cases}$$

3. Éliminer le paramètre t pour écrire une équation cartésienne de la cissoïde.

Duplication du cube***



4. Si la longueur de l'arête du cube donné est r, quelle doit être la longueur de l'arête du cube 'double' ?

5. Démontrer que

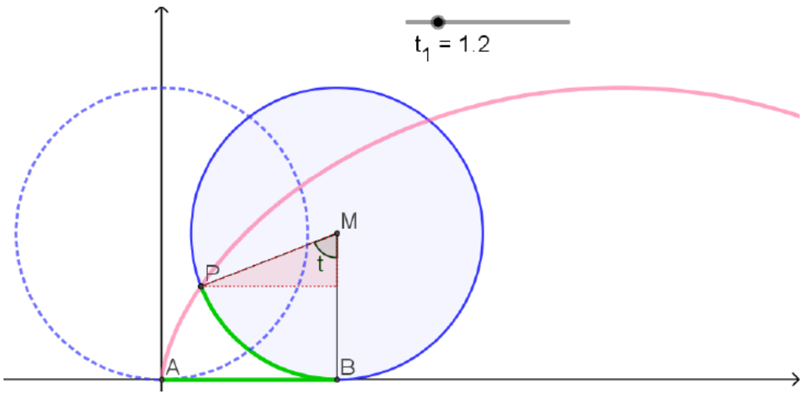
$$\left(\frac{|OP'|}{|PP'|}\right)^3 = \frac{a}{|EM|}.$$

6. Comment peut-on, avec cela, résoudre le problème de la duplication du cube avec règle, compas et cissoïde ?

Activité 4 La cycloïde

Équations paramétriques de la cycloïde*

Un cercle de rayon r roule sans déraper sur l'axe des x. La cycloïde est la trajectoire du point P, sur le cercle. Au départ le cercle touche l'axe des x en $A(0,0)$. Sur la figure, le cercle a déjà roulé jusqu'à ce qu'il touche l'axe des x en B.



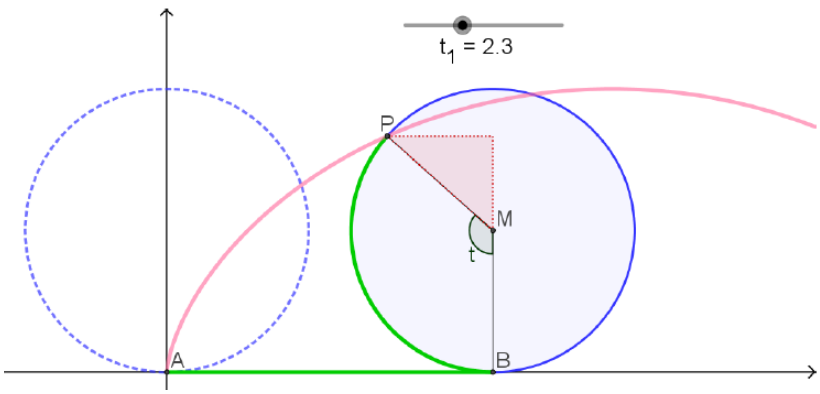
1. Comment exprimer mathématiquement que le cercle ne dérape pas ?

2. Exprimer la longueur de l'arc PB en fonction de l'angle t (en radians).

3. Exprimer les coordonnées de M en fonction de t.

4. Exprimer les coordonnées de P en fonction de t. Ceci procure des équations paramétriques de la cycloïde (pour $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$).

5. Contrôler ces équations paramétriques pour le cas $t \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ (figure ci-dessous).



La pente de la tangente à la cycloïde*

6. Exprimer la pente de la tangente en fonction de t, à l'aide de dérivées.